Értékünk az ember

Humánerőforrás-fejlesztési Operatív Program

Agárdy Gyula – Lublóy László

MECHANIKA I.

Statika

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
GYŐR

Magyarország célba ér

NEMZETI FEJLESZTÉSI TERV

Készült a HEFOP 3.3.1-P.-2004-09-0102/1.0 pályázat támogatásával.

Szerzők: Agárdy Gyula
egyetemi adjunktus

dr. Lublóy László
főiskolai docens

Lektor: dr. Meskó András
főiskolai adjunktus

A dokumentum használata

Mozgás a dokumentumban

A dokumentumban való mozgáshoz a Windows és az Adobe Reader megszokott elemeit és módszereit használhatjuk.

Minden lap tetején és alján egy navigációs sor található, itt a megfelelő hivatkozásra kattintva ugorhatunk a használati útmutatóra, a tartalomjegyzékre, valamint a tárgymutatóra. A ◀ és a ▶ nyilakkal az előző és a következő oldalra léphetünk át, míg a Vissza mező az utoljára megnézett oldalra visz vissza bennünket.

Pozícionálás a könyvjelzőablak segítségével

A bal oldali könyvjelző ablakban tartalomjegyzékfa található, amelynek bejegyzéseire kattintva az adott fejezet/alfejezet első oldalára jutunk. Az aktuális pozíciónkat a tartalomjegyzékfában kiemelt bejegyzés mutatja.

A tartalomjegyzék használata

Ugrás megadott helyre a tartalomjegyzék segítségével

Kattintsunk a tartalomjegyzék megfelelő pontjára, ezzel az adott fejezet első oldalára jutunk.

Keresés a szövegben

A dokumentumban való kereséshez használjuk megszokott módon a Szerkesztés menü Keresés parancsát. Az Adobe Reader az adott pozíciótól kezdve keres a szövegben.

Tartalomjegyzék

1. Előszó

Tisztelettel és szeretettel köszöntjük az Olvasót, aki egy nagyon szép, nagy hagyományokkal (és nem kevésbé nagy jövővel!) rendelkező szakma művelésére készülve forgatja ezt a kiadványt. Elsősorban is bátorságot és kitartást kívánunk ehhez a nem mindig könnyű, de mindig érdekes stúdiumhoz, amelynek a végén büszkén mondhatja magát **MÉRNÖK**-nek, olyan szakemberek egyikének, akik megépítették a piramisokat és a kínai nagy falat, a római úthálózatot és aquaductusokat, a középkori katedrálisokat és a végvárakat, az EIFFEL tornyot és a Golden Gate hidat, a Szent Bernát alagutat és a GROSSGLOCKNER-Hochalpenstrasse-t, és ezzel megalkották az ember számára az élhető, **épített környezetet**. A MÉRNÖK szó eredeti jelentése épp ezeket az alkotó embereket jelölte, és az új szakterületek művelői (gépészek, villamossággal, agráriummal foglalkozók) mind egy-egy jelzővel igyekeztek megkülönböztetni magukat a klasszikus MÉRNÖK fogalmától. A magyar nyelv a mi szakmánkat valamikor a KULTÚRMÉRNÖK szóval jelölte, és a külföldi gyakorlatban még ma is CIVILENGINEER ill. CIVILINGENIEUR a nevünk. Ma itthon ezt a szakterületet az ÉPÍTŐMÉRNÖK szó fedi le a legjobban.
Így hát, bár szakmánk fejlődési trendje nem olyan látványos, mint a járműiparé, nem olyan gyors, mint az informatikáé, nem olyan nyereséges, mint a bankszektoré, büszkén vállalhatjuk, hogy a mi feladatunk volt és marad az EMBERI KÖRNYEZET kialakítása, beleértve az épületek, építmények megvalósítását, de beleértve a természeti környezet minél tökéletesebb óvását, megőrzését is. Nem kell tehát attól tartanunk, hogy nem marad számunkra feladat az átalakuló világban, az viszont igaz, hogy feladataink hatékony megoldásához nekünk is ismernünk és alkalmaznunk kell a hagyományos tudás mellett az új lehetőségeket is.
És még egy gondolat: ez a kiadvány a MECHANIKA tárgy megértésének, elsajátításának segítségére készült. Mindig emlékezzenek azonban arra, hogy a szakma NEM tantárgyakból áll. A mérnököt elsősorban egy speciális **szemlélet**, a problémalátó és -megoldó (az elsajátított, megismert elméleti és gyakorlati ismeretek felhasználásán alapuló, de azon sokszor túlmutató) világszemlélet jellemzi, amelyben a **fizikai** törvények, a **gazdasági** törvények és a **jogi** törvények között kell a legjobb megoldást megkeresni. Miközben tehát egy-egy tantárggyal foglalkoznak, mindig próbálják meg az ott tanultakat más tantárgyak ismereteivel is, és gyakorlati tapasztalataikkal is összekapcsolni, hogy végül az egész megszerzett tudásanyaguk ne csak az ismeretek tárháza legyen, hanem a tudás organikus szövete, amely egy-

egy konkrét kérdés felvetődése esetén a műszaki lehetőségeket a környezeti hatásokkal, a gazdasági követelményekkel és a jogi lehetőségekkel együtt komplexen elemzi, és mindezek figyelembevételével határozza meg az OPTIMÁLIS MEGOLDÁSt.

A mérnöki munkában mindig egymásnak feszülő, egymással szemben álló feltételek, hatások között kell a megoldást keresnünk, az egyensúlyt megtalálnunk. Ez az egyensúlykeresés jellemzi leginkább a mérnöki munkát:

- a szerkezetet érő hatások egyensúlya
- a felhasználni kívánt anyagok-technológiák és az emberi erőforrások egyensúlya
- a megvalósítás költségeinek és a mobilizálható forrásainak egyensúlya
- a funkcionalitás és az esztétika egyensúlya
- a hagyomány és a modernitás egyensúlya
- a döntés és a végrehajtás egyensúlya
- a munka és a szórakozás egyensúlya
- …és végül a mérnök, az **ember** saját, belső egyensúlya.

Kívánjuk, hogy életükben minden számonkérésnél (beleértve a MECHANIKA vizsgákat is!) találják meg ezt az egyensúlyt, és mind társadalmilag, mind anyagilag elismert, megbecsült emberként élhessenek, dolgozhassanak.

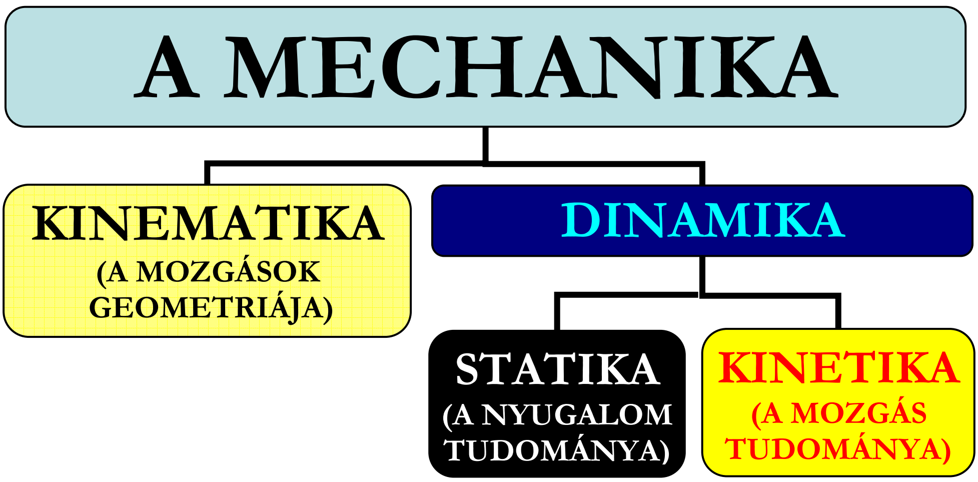
2. Bevezetés

2.1. A mechanika alapelemei, szemlélet- és tárgyalásmódja

2.1.1. A mechanika helye a természettudományok között

A MECHANIKA névvel fizikai tanulmányaink során találkoztunk először: a MECHANIKA a testek mozgásának, ill. a testek (elmozdulási jellemzőket befolyásoló) egymásra hatásának törvényszerűségeivel foglalkozik. Ily módon a MECHANIKA tárgyköre igen széles: a kozmológia éppúgy használja a MECHANIKA törvényszerűségeit, mint a nanotechnológia, a molekuláris folyamatok vizsgálata.

2.2. A mechanika területei



A kinematikai vizsgálatokban csak a mozgás, mint jelenség tulajdonságaival foglalkozunk, figyelmen kívül hagyva a létrehozó okot, míg a dinamikai vizsgálatok a mozgásokat a létrehozó ok(ok)kal együtt, komplex egységben elemzik. A statika a dinamikának az a speciális esete, amikor a mozgás zérus értékű, a test nyugalomban van (egy, általunk választott, a test elmozdulási lehetőségeihez képest mozdulatlannak tekinthető testhez viszonyítva).

2.3. A mechanika anyagai

A MECHANIKA MEREV vagy SZILÁRD testek, FOLYADÉK vagy GÁZ állapotú anyagok ill. ezek részecskéi MOZGÁSÁLLAPOTÁNAK ill. ALAK- MÉRETVÁLTOZÁSÁNAK vizsgálatával, elemzésével, összefüggéseinek feltárásával foglalkozik.

A mérnöki gyakorlatban első közelítésben a számítás egyszerűsége miatt előszeretettel tételezzük fel anyagainkat **végtelen merevnek**, de tudjuk, hogy a pontos(abb) eredmények elérése, a szerkezetek (ténylegesen **mindig** kialakuló) alakváltozásainak meghatározása csak a **szilárd** anyagtulajdonságok figyelembevételével lehetséges.
Szerkezeti anyagként a folyékony és gáznemű anyagokat nem használhatjuk, de a vízépítési műtárgyak tervezése-kivitelezése elképzelhetetlen a folyadékok mechanikájának ismerete nélkül, egyre magasabbra törő épületeink, antennatornyaink szélteherre történő vizsgálatát pedig csak a gázok mechanikájának ismeretében tudjuk helyesen elvégezni.

2.4. A mérnöki modellalkotás

A mérnöki munka során a valóságot teljes részletességgel, minden hatásával ábrázolni, vizsgálni és elemezni nem lehet, de nem is érdemes. A mérnök első feladata az **észszerű egyszerűsítés**, olyan MODELL alkotása, ami a valós, vizsgálandó szerkezetet vagy jelenséget minden LÉNYEGES tulajdonságában kellő pontossággal megközelíti, de emellett a rendelkezésre álló szakmai és számítástechnikai erőforrásokkal gazdaságosan vizsgálható. A modellalkotás a szerkezetépítési gyakorlatban négy szinten valósul meg: a szerkezeti **ANYAG**, a **SZERKEZET, a TERHLÉS** és a **VISELKEDÉS** modelljének meghatározásában.

2.5. A mechanika anyagmodelljei

Az anyagmodellek vizsgálata során az egyirányú terhelés és az ennek nyomán keletkező, ugyanazon irányban fellépő alakváltozás összefüggését elemezzük. A függvényeket grafikusan is bemutatjuk. A bemutatott diagramok tartalmaznak még nem definiált fogalmakat is (ezeket a későbbiek során fogjuk tárgyalni), de az anyagmodellek jellemző viselkedésének bemutatására így is alkalmasak.

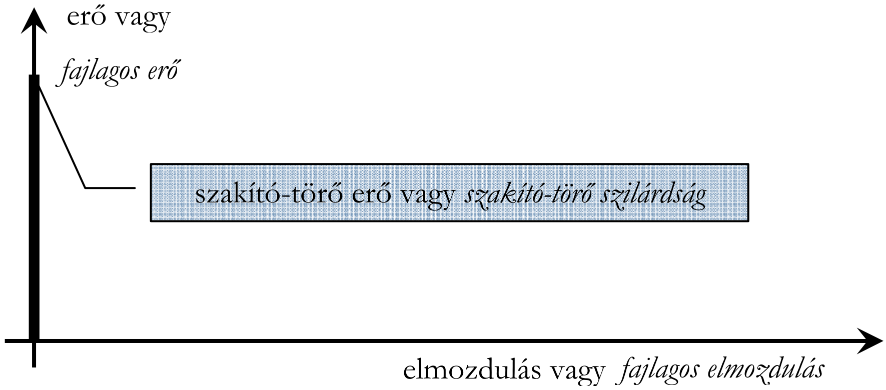
2.5.1. Merev anyag

A mérnöki számításokat jelentősen egyszerűsíti, ha a szerkezetek anyagait (végtelen) merevnek tekintjük, azaz feltételezzük, hogy a szerkezetek a terhelés folyamata során **semmilyen** alakváltozást nem szenvednek. Ez a tulajdonság rendkívül előnyös, hiszen a terhelés folyamatában nem kell tekintettel lennünk a szerkezet alakváltozásának a terhek elhelyezkedését esetleg módosító hatására. A valóságban anyagaink sohasem ilyenek, de a szerkezeteinken a legtöbb esetben olyan kis mértékű deformáció alakul ki, amely a szerkezet **alakját**, még pontosabban a **terhelés elhelyezkedését** csak elhanyagolható mértékben változtatja meg, így az eredeti, deformációmentes geometrián elvégzett számítások eredményei csak elhanyagolható mértékben különböznek az alakváltozásokat is figyelembe vevő számítási eredményektől. Az ilyen esetekben megengedhető, és a számítások szempontjából igen előnyös, ha az anyagot végtelen **MEREV**nek tekintjük.

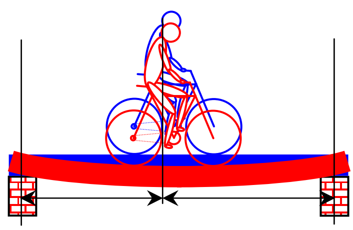
A mérnöki szerkezetek vizsgálata során **első közelítésben figyelmen kívül hagyhatjuk a szerkezet alakváltozását**, és a számításokat a **merev**

testekre érvényes összefüggések alapján, a terheket az eredeti alakon működtetve végezhetjük el (**megmerevítés elve**).

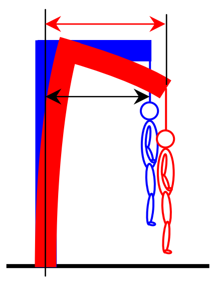
A merev (idealizált) anyag erő-elmozdulás diagramja



Természetesen ha a szerkezet alakváltozásának meghatározása a cél, akkor ez az egyszerűsítés nem alkalmazható, pontosabban: magának az **alakváltozásnak** a kiszámítása során nem alkalmazható.
Akkor is számításba kell vennünk a szerkezet alakváltozásait, ha a deformációk miatt (a terhek helyzetének megváltozása révén) a szerkezet igénybevételei növeked(het)nek.



A tartó alakváltozása a tehernek a megtámasztásoktól mérhető (vízszintes) távolságában nem okoz változást, a szerkezet (kicsiny alakváltozások mellett) megváltozott alakjában is az eredetivel azonosan viselkedik, a **számítások az eredeti alakon is végezhetők (I. rendű elmélet)**.



A tartó alakváltozása révén a tehernek a megtámasztástól mérhető (vízszintes) távolsága növekszik, a szerkezet a deformáció révén kedvezőtlenebb helyzetbe kerül (többlet igénybevételt kap), szélső esetben tönkremegy, vagy funkcióját veszti, **a számítások csak a megváltozott alakon végezhetők (II. vagy III. rendű elmélet)**.

2.5.2. Rugalmas anyag

Az ideálisan rugalmas anyag a terhelő hatásokra a **terhelés mértékével egyenesen arányos deformációval** válaszol, és a tehermentesítés után **eredeti alakjába tér vissza**. A rugalmas anyagú szerkezet az alakváltoztatására fordított munkát (rugalmas energiaként) tárolja, és az alakváltozást okozó teher megszüntetésével ez az energia vissza is nyerhető.

A rugalmas anyagmodell is idealizált, de a tényleges szerkezeti anyagaink a terhelési folyamat egy-egy szakaszában mind rugalmas viselkedést mutatnak, vagy legalábbis elfogadható közelítéssel tekinthetők ideálisan rugalmasnak. Ez a leggyakrabban alkalmazott anyagmodell, vizsgálatával a MECHANIKÁn belül egy külön tudományterület, a **rugalmasságtan** foglalkozik. A rugalmas anyagok körében a terhelés-alakváltozás **egyenes arányossága** az összefüggések **linearitása** miatt igen előnyös tárgyalásmódot és számítási megoldásokat tesz lehetővé.

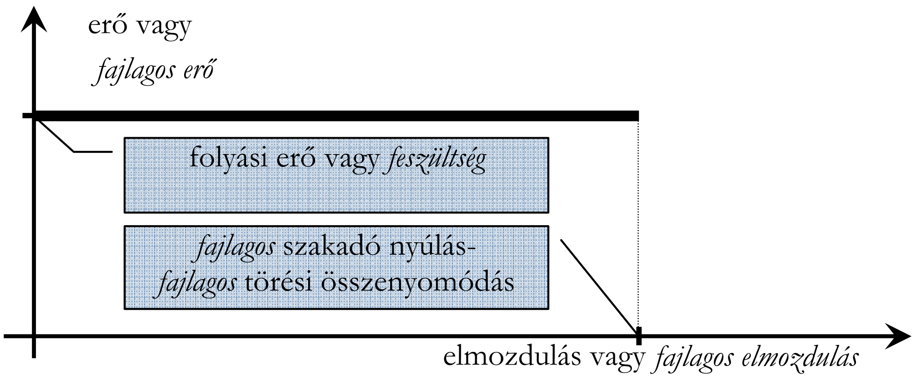
A(z ideálisan) rugalmas anyag erő-elmozdulás diagramja

2.5.3. Képlékeny anyag

Az ideálisan képlékeny anyag a terhelésre egyenletesen növekedő (a terhelés mértékével arányos **sebességű**) alakváltozással reagál, és ez a képlékeny alakváltozás a teher megszűnésével nem tűnik el, nem áll vissza, csak nem növekszik tovább. A képlékeny anyagok alakváltoztatására fordított munka tehát az anyagban nem tárolódik, és így nem is nyerhető vissza.

Az ideálisan képlékeny anyagok (mint pl. a méz!) tartószerkezeti felhasználásra alkalmatlanok, de pl. szigetelőanyagként ez a tulajdonság előnyös lehet.
Tartószerkezeteink anyagai a teher növelése során mind mutatnak képlékeny tulajdonságot is. A képlékeny alakváltozások figyelembevétele azonban csak a függvénykapcsolatok linearitásának feladásával lehetséges, azaz számításaink (esetenként igen jelentősen) bonyolultabbá válnak. Ugyanakkor összetett szerkezetekben a (helyi) képlékeny alakváltozások megengedése lehetővé teszi a terhek-igénybevételek átrendeződését, végső soron a szerkezet teherbírásának növelését (az alakváltozások növekedése árán).

A(z ideálisan) képlékeny anyag erő-elmozdulás diagramja



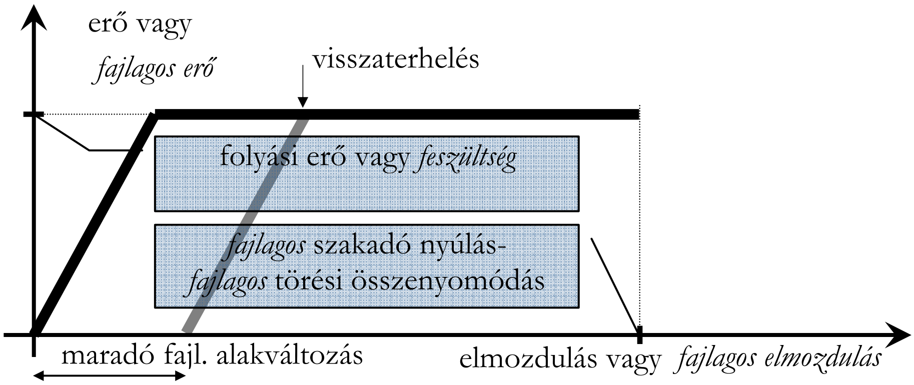
2.5.4. Merev-képlékeny anyag

A(z idealizált) merev-képlékeny anyag a teher egy (az anyagra jellemző) határértékéig, az ún. folyási határig a terhet alakváltozás nélkül veszi fel, ha viszont a teher ezt az értéket elérte, az anyag további terheket nem képes felvenni, és a terhek tartása mellett is képlékeny viselkedést mutat. A merev-képlékeny anyag erő-elmozdulás diagramja a merev és a képlékeny modell diagramjainak egyesítésével állítható elő, ezt külön nem ábrázoltuk.

2.5.5. Rugalmas-képlékeny anyag

A rugalmas-képlékeny anyag az anyagra jellemző folyási határig (ideálisan) rugalmasan viselkedik, a folyási határt elérő teherre viszont képlékeny viselkedést mutat. A terhet a folyási határ alá csökkentve (visszaterhelés) visszanyeri rugalmas tulajdonságát, és viselkedése az eredeti állapottal azonos paraméterekkel leírható rugalmas viselkedés lesz.

A(z ideálisan) rugalmas-képlékeny anyag erő-elmozdulás diagramja

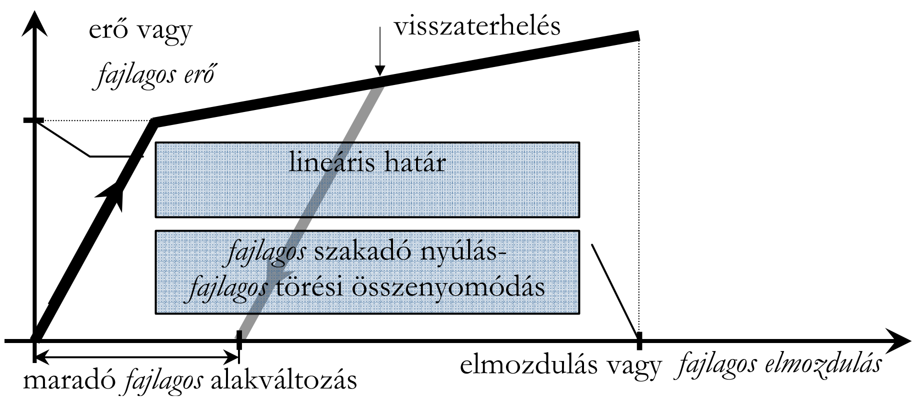


Visszaterhelés során az ilyen anyagokban az erő-elmozdulás függvény az eredeti, lineáris szakasszal párhuzamos lesz, azaz a lineáris határt meghaladó terhekből már képlékeny, maradó alakváltozások is keletkeznek, az alakváltoztatásra fordított energia csak részben tárolódik, csak részben nyerhető vissza, másik része az anyagban képlékeny alakváltozást okozva elnyelődik.

2.5.6. Rugalmas-lágyuló anyag

A rugalmas-lágyuló anyag egy jellemző lineáris határig, a folyási határig (ideálisan) rugalmasan viselkedik, az ezt meghaladó teherre az ideálisan rugalmas tulajdonságú szakaszhoz képest ugyanakkora tehernövekedésre nagyobb alakváltozásnövekedéssel reagáló, kisebb meredekségű, de szintén lineáris (bi-lineáris) erő-elmozdulás diagrammal jellemezhető viselkedést mutat. A rugalmas-lágyuló anyagmodell alkalmazása során tehát az erő-elmozdulás összefüggések egyszerűen kezelhető lineáris függvények maradnak.

A(z ideálisan) rugalmas-lágyuló anyag erő-elmozdulás diagramja

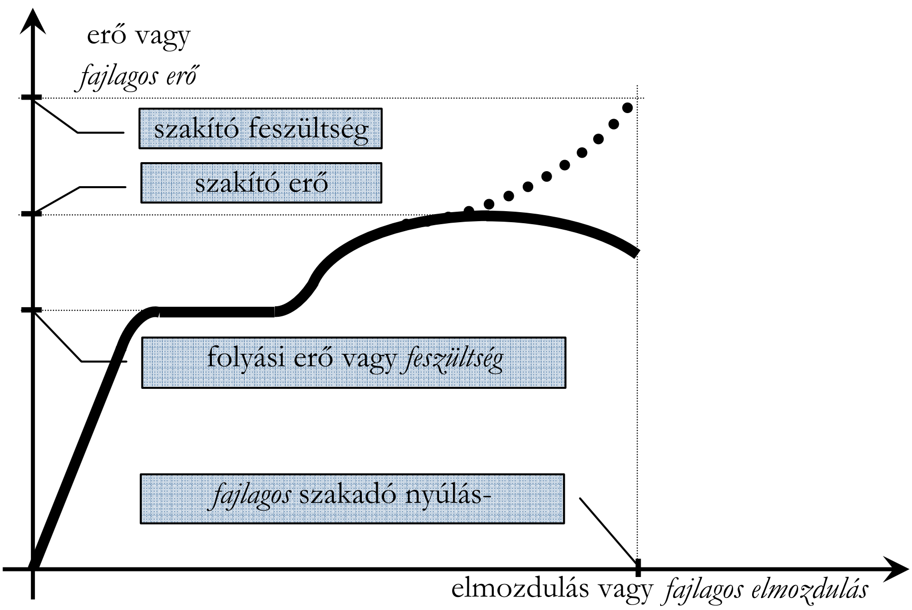


2.5.7. Az (idealizált) anyagmodellek

A fentiekben ismertetett anyagmodellek mindegyike idealizált, a modell tulajdonságait nem a valós szerkezeti anyagok mérési adatai, hanem az egyszerű számíthatóság, a tiszta viselkedés alapján vettük fel. A szerkezeti anyagok valós, mért diagramjai természetesen mutatnak hasonlóságot, esetenként igen jó egyezést az idealizált modellek diagramjaival, és ennek alapján a tényleges szerkezeti anyagok (legalábbis a terhelési folyamat egyes szakaszaiban) jól helyettesíthetők az idealizált anyagmodellekkel. A bemutatott anyagmodelleken kívül más, még összetettebb, bonyolultabb, a valós viselkedést jobban közelítő modellek is használatosak, sőt a számítástechnika fejlődése lehetővé teszi, hogy egy-egy speciális feladatra akár magunk alakítsuk ki a legjobban megfelelő anyagmodellt.. A legmegfelelőbb (már elegendően pontos, de még elegendően egyszerű) anyagmodell kiválasztása a tervező mérnök egyik igen fontos feladata, amelyhez mind a tényleges anyagtulajdonságok, mind a rendelkezésre álló anyagmodellek, mind pedig a szerkezetekre vonatkozó számítási eljárások alapos ismeretére szükség van.

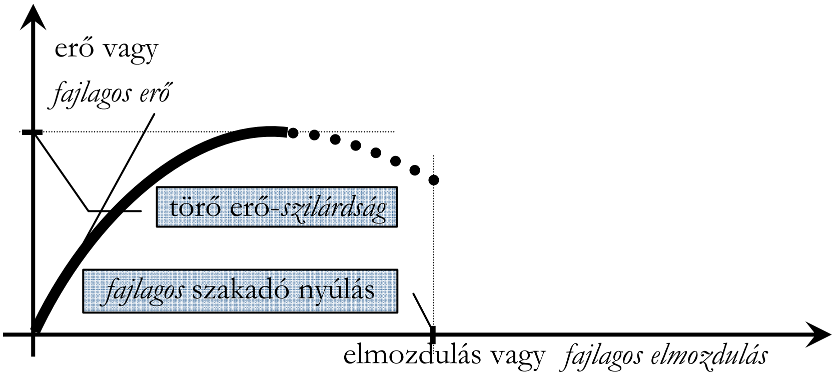
A tényleges szerkezeti anyagok esetében a valós diagramot mutatjuk be.

ACÉL



Az acélt, mint szerkezeti anyagot a megfelelő szaktárgyakban a későbbiekben részletesen fogják tárgyalni, itt most csak tájékoztatásul mutattuk be a leggyakrabban alkalmazott szerkezeti acél jellegzetes diagramját.

BETON



A betont, mint szerkezeti anyagot a megfelelő szaktárgyban a későbbiekben részletesen fogják tárgyalni, itt most csak tájékoztatásul mutattuk be a beton egy jellemző (nyomó)erő-elmozdulás diagramját.

2.6. A mechanika szerkezeti modelljei

Általánosságban a terhelt szerkezetünk alakjára semmiféle megszorítást nem teszünk. Az ilyen esetekre vonatkozó törvényszerűségeket az ÁLTALÁNOS SZILÁRDSÁGTAN tárgyalja. A legtöbb szerkezetünk azonban olyan geometriai kialakítású, hogy méretarányai folytán van domináns dimenziója, amelyhez képest a másik (a többi) méret lényegesen kisebb, és így a hatások változása ezen kis méretek mentén elhanyagolható, vagy egyszerű közelítéssel vehető figyelembe.

2.6.1. Rúdszerkezetek

Azokat a szerkezeteket, amelyek elemein az egyik (hossz-)mérethez képest a másik két irányú méret lényegesen (legalább egy nagyságrenddel) kisebb, RÚDSZERKEZETEKnek nevezzük. A rúdszerkezet elemei a mechanikai vizsgálatok során a tengelyvonalaikkal jeleníthetők meg.

A zalaegerszegi deltavágány vasúti hídja

Íves térbeli rácsos szerkezet

Matematikailag úgy jelenik meg az egyszerűsítési lehetőség, hogy a szerkezet pontjaihoz rendelhető hatások leírására a hatások háromváltozós függvényei helyett egy, a tengely mentén bekövetkező változást leíró egyváltozós függvényt, és egy, a keresztmetszet pontjai közötti változást leíró kétváltozós függvényt alkalmazhatunk.

Mechanikai tanulmányaink során a tartószerkezeteknek csak ezzel a csoportjával fogunk találkozni: síkbeli és térbeli, többnyire egyenes tengelyű elemekből összeállított rúdszerkezetekkel fogunk foglalkozni.

2.6.2. Felöletszerkezetek

Azokat a szerkezeteket, amelyekben az egyik (vastagsági) méret a másik kettőhöz viszonyítva lényegesen (legalább egy nagyságrenddel) kisebb, FELÜLETSZERKEZETEKnek nevezzük. Ezek vizsgálata meghaladja jelen mechanikai tanulmányaink lehetőségeit, de elnevezésüket és viselkedésük lényegét már most célszerű megismerni.

LEMEZ

Azt a kétdimenziós, sík felületszerkezetet, amelyre csak a **síkjára merőleges** teher működik, LEMEZnek nevezzük.

LIFT-SLAB technológiával készülő irodaház födémlemezei

TÁRCSA
Azt a kétdimenziós, sík felületszerkezetet, amelyre csak a **síkjával párhuzamos** teher működik, TÁRCSÁnak (esetenként faltartónak) nevezzük.
A fenti képen szereplő födémlemez a vízszintes terhek elosztásában tárcsaként viselkedik.
HÉJ
Azt felületszerkezetet, amely a térben **legalább egy irányban görbült**, HÉJnak nevezzük.

A sidney-i Operaház héjszerkezete

Az oroszlányi víztorony

A számítógépes alkalmazások sok esetben héjként definiálják a sík, görbületmentes felületelemeket is, ha azokra mind a **síkjukra merőleges**, mind azzal **párhuzamos** teher működik.

2.7. A mechanika tehermodelljei

A MECHANIKA számára (ahogyan az anyagokat és a szerkezeteket) a terheket és hatásokat is matematikailag kezelhető formában kell megjelenítenünk, modelleznünk kell. A mérnöki szerkezeteinkre ható terhek és hatások közül a leggyakoribb a súlyteher (részben magának a tartószerkezetnek a saját súlya, részben az általa hordozott szerkezetek, járművek, anyagok, emberek, stb. súlya). E súlyteher valójában az anyag minden egyes pontjára működik, tehát **térfogaton megoszló** teher. Felületszerkezetek esetében a szerkezet kicsiny vastagsága miatt a súlyterhet a vastagság mentén összegezve, az idealizált középfelületen **felületi teherként** működtethetjük. Rúdszerkezetekben a keresztmetszet mindkét mérete kicsiny a tartó hosszához viszonyítva, így a súly a keresztmetszetre koncentrálható, és csak a hossz menti, **lineáris megoszlást** kell figyelembe vennünk. Végül olyan esetekben, amikor a teher igen kis felületen (pontszerűen) adódik át a tartószerkezetre (akár felületszerkezetre, akár rúdszerkezetre) **koncentrált terhet** alkalmazhatunk.

Vannak olyan terhelésfajták, amelyek eleve csak felületi teherként léteznek (szélteher, hóteher, stb.), de megfelelő geometriai feltételek esetén ezek is egyszerűsíthetők és helyettesíthetők vonalmenti megoszló vagy koncentrált teherrel.

Más megközelítésben a teher **állandó teher**, ami mindig működik a szerkezeten (pl. önsúly), **esetleges teher**, ami véletlenszerűen terheli a szerkezetet (pl. hasznos teher, meteorológiai terhek) és **rendkívüli teher**, ami csak igen kis valószínűséggel fordul elő az élettartam során (pl. földrengés, vezetékszakadás, jármű-ütközés). A szerkezet terheiből a legkedvezőtlenebb, ún. **mértékadó teher** meghatározási módját szabályzatok írják elő, ezzel a szaktárgyakban fognak megismerkedni. A MECHANIKÁban a teher jellegével nem kell foglalkoznunk, csak hatásait kell meghatároznunk.

2.8. A mechanika számítási-viselkedési modelljei

A mechanikai számításokban az alkalmazott anyagtulajdonságokat, a szerkezeteket, a terheket is egyszerűsített, matematikailag kezelhető modellekkel szerepeltetjük. Végül a megkívánt, elvárható pontosságot kielégítő közelítő feltételek alkalmazásával a szerkezetek viselkedését leképező számítási eljárásokat is egyszerűsíthetjük, modellezhetjük.

2.8.1. Megmerevített modell

Az anyagmodellek tárgyalásánál láttuk, hogy a merev testekben a terhekből semmiféle alakváltozás nem keletkezik, így a számítást mindig az eredeti geometriai adatokon lehet elvégezni. Az így leegyszerűsített viselkedési modellt alkalmazzuk a STATIKA tárgykörében.

2.8.2. I. rendű viselkedési modell

Ha a szerkezet alakváltozásaira is szükségünk van, akkor a merev anyagmodell helyett a szilárd anyag-modellre kell áttérnünk. Ugyanakkor láttuk, hogy a gyakorlati szerkezetek és terhek többségében a keletkező kis elmozdulások a terhek pozíciójában, és így hatásában csak elhanyagolható mértékű változást okoznak, így a megtámasztásokra adódó hatások meghatározására az eredeti, deformálatlan szerkezeti geometria alkalmazható.

Az I. rendű elméletben a használt (esetenként egyszerűsített) függvénykapcsolatok lineárisak, így a külön-külön működtetett terhek hatásainak összege (a számított elmozdulásokban is!) megegyezik az együttesen működő terhekből számítható hatással, azaz az egymásra halmozás alkalmazható.

Az I. rendű elméletben a szilárd anyagmodellen és a deformálatlan geometrián már számítjuk a keletkező alakváltozásokat, de elhanyagoljuk ennek (vissza)hatását a szerkezet viselkedésében. Mérnöki számításaink túlnyomó többsége az I. rendű elmélettel végezhető.

2.8.3. II. rendű viselkedési modell

Ha a szerkezet deformációja a teher pozíciójában kedvezőtlen változást okoz, akkor az alakváltozás visszahatását még akkor sem hanyagolhatjuk el, ha az a szerkezet méreteihez képest kicsiny mértékű. Ilyen esetekben érvényben tarthatjuk az elmozdulásszámításban alkalmazott linearizáló közelítéseket, de a kiszámított elmozdulásokkal korrigált geometrián újra el kell végeznünk a számításokat. Látjuk, hogy ez egy iteratív folyamat lesz, aminek egyik következménye, hogy a terhek-hatások egymásra halmozhatósága megszűnik, másik következménye pedig, hogy bizonyos szerkezet-teher-geometria kombinációkban ez az iteráció divergens eredményt ad, azaz a szerkezet nem képes a megadott kombinációban a terhek viselésére.

A II. rendű elméletben a szilárd anyagmodellen és a deformált geometrián végezzük iteratív módon a számításokat, de az alakváltozások számításában érvényben tartjuk a kis elmozdulásokra érvényes linearizáló közelítéseket. Ezt a számítási eljárást kell alkalmaznunk pl. stabilitásra érzékeny, központosan vagy külpontosan nyomott elemek vizsgálata során, ill. lapos kötelek-kötélhálók, ívek, héjak stb. vizsgálata során.

2.8.4. III. rendű viselkedési modell

Ha a szerkezet alakváltozásai olyan mértékűek, hogy emiatt a szerkezet geometriája is jelentősen módosul, akkor az elmozdulások közelítő, lineáris számítása nem ad kielégítő pontosságot. Ilyen esetben pontosabb, a trigonometriai összefüggéseken alapuló eljárást kell alkalmaznunk.

A III. rendű elméletben a szilárd anyagmodellen és a deformált geometrián végezzük iteratív módon a számításokat, és az alakváltozások számításában a valós, trigonometriai összefüggéseket alkalmazzuk. A III. rendű elmélet alkalmazására igen ritkán (pl. héjszerkezetek horpadási vizsgálata során, nagy belógású kötelek-kötélhálók vizsgálata során van szükség).

2.9. A mechanikai számítások pontossága

A MECHANIKA mért fizikai mennyiségekkel dolgozik (méretek, terhek, ellenállás, alakváltozás), így bemenő adatai is mindig hibával terheltek (valószínűségi változók). Úgy is felfoghatjuk, hogy minden adathoz egy tűrésmező tartozik, és a tényleges érték e tűrésmezőn belül bármi lehet. Ha konkrét tűrésmezőt nem rendelünk az adatokhoz, akkor a számadat értékes jegyei alapján állapíthatjuk meg az adat pontosságát.
Például:

MÉRT ÉRTÉK	TŰRÉSMEZŐ	A LEHETSÉGES TÉNYLEGES ÉRTÉK
1,2 m	± 1 %	1,188 m – 1,212 m
1,2 m	± 0,1 %	1,1988 m – 1,2012 m
1,2 m	nincs megadva	1,15 m – 1,24 m
1,20 m	nincs megadva	1,195 m – 1,204 m
1,200 m	nincs megadva	1,1995 m – 1,2004 m
0,0012 km	nincs megadva	1,15 m – 1,24 m
0,00120 km	nincs megadva	1,195 m – 1,204 m
0,001200 km	nincs megadva	1,1995 m – 1,2004 m

Az adatokkal végzett műveletek során a véletlenszerű hiba halmozódik. Minthogy az építőiparban a geometriai adatokban cm rendű (acélszerkezetek esetében mm rendű) pontosság várható el, a terhek felvételénél pedig ennél is nagyobb a bizonytalanság, számításainkban az eredményt ±1 % tűrésmezővel helyesnek fogadhatjuk el. Ahhoz, hogy ezt a feltételt az eredményeinkben teljesíteni tudjuk, a számítás során az adatokat legalább egy nagyságrenddel pontosabban kell felvennünk.

A mechanikai számításokban **négy-öt értékes jeggyel kell dolgozni**, ennél több jegyet figyelembe venni viszont fölösleges, mert az adatok bizonytalansága miatt ezeknek a jegyeknek már nincs információtartalma.

2.10. A mechanikai számítások eredményközlése

A MECHANIKA előjeles fizikai mennyiségekkel dolgozik, így az eredmények megadásánál a mértékegység közlése mindig kötelező!! Emellett az eredmények hibalehetőségének csökkentésére az eredmény grafikus jelét, irányát is meg szoktuk adni. Mechanikai számításaink eredményeit mindig a következő formátumban kell megadni:

előjel mérőszám (4-5 értékes jegyre) mértékegység irány

2.11. Ellenőrző kérdések

Sorolja fel a mechanika területeit!
Mi a különbség a végtelen merev és a szilárd test között?
Sorolja fel a legfontosabb mechanikai anyagmodelleket!
Mi jellemzi a merev anyagmodellt?
Mi jellemzi a rugalmas anyagmodellt?
Mi jellemzi a képlékeny anyagmodellt?
Mi jellemzi a merev-képlékeny anyagmodellt?
Mi jellemzi a rugalmas-képlékeny anyagmodellt?
Mi jellemzi a rugalmas-lágyuló anyagmodellt?
Mi jellemzi a rúdszerkezeteket?
Mi jellemzi a felületszerkezeteket?
Milyen teherfajtákat ismer?
Milyen mechanikai számítási-viselkedési modelleket ismer?
Hogyan definiálható az I. rendű viselkedési modell?
Hogyan definiálható az II. rendű viselkedési modell?
Hogyan definiálható az III. rendű viselkedési modell?

3. Erők – erőrendszerek

Mechanikai tanulmányaink első szakaszában a szerkezetek – egyébként kicsiny – saját deformációit elhanyagolva a **merev testek statikájával** foglalkozunk.

3.1. Az erő fogalma

Mérnöki szerkezeteinket különböző hatások érik, és ahhoz, hogy megfelelő szerkezeteket konstruálhassunk, ismernünk kell ezeket a terhelő hatásokat, és számolnunk kell velük. A számításokban viszont csak olyan mennyiségekkel tudunk dolgozni, amelyek **mérhetők**, **számszerűsíthetők**, amelyek **matematikailag kezelhetők**. A matematika – részben épp a gyakorlati mérnöki igények nyomán – sokféle mennyiség **fogalmát** és a kezelésükre alkalmas **algoritmusokat** már megalkotta, így a terhelő hatások jellege, tulajdonságai alapján kiválaszthatjuk a kezelésükre legalkalmasabb matematikai fogalmakat és eljárásokat.

3.1.1. A szerkezeteinket érő hatások

Mozgásállapot-változtató hatás

Két test egymásra hatása akár közvetlen érintkezés nélkül is megvalósulhat: a gravitációs hatás, a mágneses-elektromos tér hatása, vagy közvetlen érintkezéssel az ütközés a testek **mozgásállapotát** (sebességét, gyorsulását) megváltoztatja. A mérnöki szerkezetekben azonban igen ritkán alkalmazunk mozgó elemeket, és azok is lassú mozgásúak (zsilipkapuk, forgó-emelhető hidak, emelt födémek, víztorony-kelyhek, betolt hidak, stb.), így a **tényleges mozgást megváltoztató hatás** kívül esik az építőmérnöki gyakorlat érdeklődési körén.

Tudjuk azonban, hogy a **nyugalmi helyzet** csak egy **speciális mozgásállapot**, amikor egy – általunk választott – bázishoz (a mérnöki gyakorlatban általában a talajhoz) viszonyított mozgás zérus értékű. A nyugalmi állapotban lévő testekre ható gravitáció, elektromos-mágneses tér a testek nyugalmi állapotát meg akarja változtatni, és ennek megakadályozása a mi feladatunk. E tekintetben tehát a testek egymásra hatásából (elsősorban a gravitációból) fakadó mozgásállapot-változtató hatással is foglalkoznunk kell.

Alakváltoztató hatás
A mérnöki gyakorlatban a testek egymásra hatása leginkább **alakváltoztató** hatásként jelenik meg (pl. súlyteher vagy hőmérsékletváltozás hatására bekövetkező alakváltozás). Ezek az alakváltozások a tényleges szerkezeteinkben a szerkezeti méreteknél **nagyságrendekkel kisebbek**, így a szerkezet **geometriáját** (a legtöbb esetben) alig befolyásolják. Szerkezeteink vizsgálata során tehát **tudjuk, hogy keletkeznek deformációk**, és (a későbbiekben) meg is ismerjük ezek meghatározási módját, de a számunkra legfontosabb feladat, a **nyugalmi állapot biztosítása során ezek számba vétele elhagyható**.

A **szilárd anyagú** szerkezeteinket a **nyugalmi állapot vizsgálata során** az ébredő alakváltozások elhanyagolásával **merev testekként** kezelhetjük; ez a **megmerevítés elve**.

Méretváltoztató hatás
Szerkezeteink terhelése során előfordul olyan eset is, amikor a terhelő hatás nyomán sem a mozgásállapot, sem az alak nem változik, csak a szerkezet **mérete** (ilyen lehet a gömb alakú gáztartályok méretváltozása a nyomás megváltozásakor, az egyenes rúd méretváltozása egyenletes hőmérsékletváltozás hatására, stb.). Megállapíthatjuk azonban, hogy ezek az esetek valójában az **alakváltozási hatás** vizsgálatára vezethetők vissza, hiszen az **egész szerkezeten csak méretváltozást** okozó hatások a **szerkezet részein-elemein alakváltozásokként** jelennek meg.

3.2. Az erő definíciója

A testek egymásra hatását valamilyen mérhető, matematikailag is kezelhető mennyiségként kell meghatároznunk.

A testek egymásra hatásának mértékét ERŐ-nek nevezzük.

3.2.1. Az erő tulajdonságai

A testek egymásra hatását a hatás nagyságával, irányával és támadási pontjával jellemezhetjük.

Az erőt **nagysága**, **iránya** és **támadáspontja** határozza meg (az irány helyett szokás az irányítás nélküli hatásvonalat és az ezen felvett irányítást, értelmet külön megkülönböztetni).

Mindezek alapján az erő matematikailag **helyhez kötött vektormennyiségként** kezelhető. A **merev testek statikájában**, a testek alakváltozásának elhanyagolása esetén a **támadáspontnak nincs jelentősége**, mert az erő a **hatásvonala mentén** (hatásának megváltozása nélkül) **eltolható**.

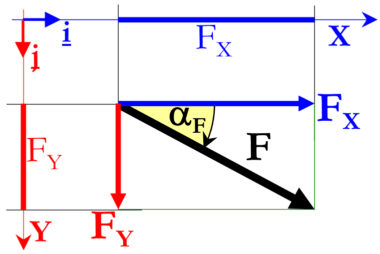
3.2.2. Az erő megadása

A **helyhez kötött vektort** akkor tekinthetjük ismertnek, ha egyértelműen meghatározott a **hely**, és egyértelműen meghatározott a **vektor**.
A **hely** azonosításához a **síkban két adat**, a térben három adat szükséges, a (szabad) **vektor** azonosításához a **síkban két adat**, a térben három adat szükséges.
A számítások során többnyire a **koordinátageometria** eszköztárát alkalmazzuk, ehhez az erő **helyét a hatásvonal egy pontjának két** (a térben három) **koordinátájával**, a (szabad) **vektort pedig két** (a térben három) **tengelyirányú vetületével** azonosíthatjuk.
Szerkesztéses megoldásokban a vektor **nagyságával** és egy bázisként elfogadott félegyenestől számított **hajlásszögével** is azonosítható. A szerkesztésekben az erők helyét **léptékhelyes geometriai ábrán** szokás megadni.

A számítási feladatokban az esetek túlnyomó többségében a derékszögű koordinátarendszer alkalmazása a legcélszerűbb, de előfordulhatnak tengely- ill. pontszimmetrikus feladatok, amelyekben a henger-, vagy a gömbi koordinátarendszer alkalmazható célszerűen.

Az általános állású erők koordinátatengely-irányú hatását kétféleképpen is megjeleníthetjük. Az erőt helyettesíthetjük vele azonos hatást kifejtő, de koordinátatengely-irányú **erőkkel**, amelyeknek természetesen saját **vektoruk** és **hatásvonaluk** van (a helyettesítő erők hatásvonalainak a helyettesítendő erő hatásvonalán kell metsződnie). Ezeket a tengelyirányú helyettesítő erőket **összetevőknek** (komponenseknek) nevezzük.
A számításban a felvett koordinátarendszer a tengelyirányokat kitűzi, így gyakran az erőket elegendő a tengelyekre vetített (skalár) értékükkel szerepeltetni. Az erők (vektorainak) koordinátatengelyekre vetített értékeit az erő **vetületeinek** nevezzük.

A **skalárvetületekből** a **vektorösszetevőket** a tengelyirányú **egységvektorokkal** történő szorzással kaphatjuk meg (ez a szorzat a helyinformációt nem tartalmazza, ezért nevezzük az így kapott mennyiséget **vektorösszetevőnek**).



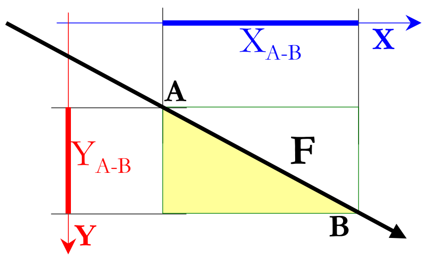
$$\underline{\mathbf{F}}_X = F_X \times \underline{\mathbf{i}} \qquad \underline{\mathbf{F}}_Y = F_Y \times \underline{\mathbf{j}}$$

Az erő vektornagysága és állásszöge és a vetületnagyságok között trigonometriai vagy pitagoraszi összefüggésekkel teremthetünk kapcsolatot.

$$F_X = |\mathbf{F}| \times \cos\alpha_F \qquad F_Y = |\mathbf{F}| \times \sin\alpha_F \qquad \text{ill. } (|\mathbf{F}|)^2 = (F_X^2 + F_Y^2)$$

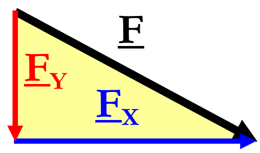
Az α szöget az X tengely pozitív ágától az óra járásával megegyező pozitívsággal szokás felvenni. Ha az α szöget a **teljes 360°-os** tartományban értelmezzük, akkor a trigonometriai összefüggések **előjelhelyesen** adják meg a vetületek értékeit. Ha az α szöget csak a **0-90°-os** tartományban értelmezzük, akkor a vetületek előjeleit **szemléletből** kell megállapítanunk.

Ha az α hajlásszög nem ismert, az erő hatásvonalával párhuzamos átfogójú, a tengelyekkel párhuzamos befogójú derékszögű háromszög és az $\underline{\mathbf{F}}$-$\underline{\mathbf{F}}_X$-$\underline{\mathbf{F}}_Y$ **vektorháromszög hasonlósága** alapján is meghatározhatók az erő vetületei.



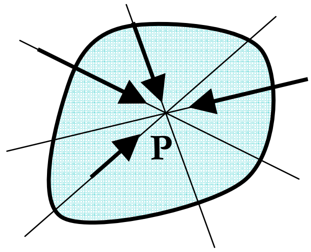
$$\frac{|\underline{\mathbf{F}}_Y|}{|\underline{\mathbf{F}}|} = \frac{\mathbf{Y_{A\text{-}B}}}{\sqrt{(\mathbf{X_{A\text{-}B}}^2 + \mathbf{Y_{A\text{-}B}}^2)}}$$

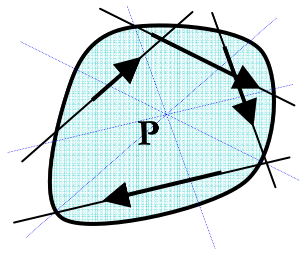
$$\frac{|\underline{\mathbf{F}}_X|}{|\underline{\mathbf{F}}|} = \frac{\mathbf{X_{A\text{-}B}}}{\sqrt{(\mathbf{X_{A\text{-}B}}^2 + \mathbf{Y_{A\text{-}B}}^2)}}$$



3.2.3. Az erő hatásai

Az erőknek a testekre vonatkozó elmozdító hatását az erőfogalom kifejtése során tárgyaltuk. A testek síkbeli-térbeli kiterjedése miatt azonban az **eltoló** hatás mellett az **elfordító** hatással is számolnunk kell.



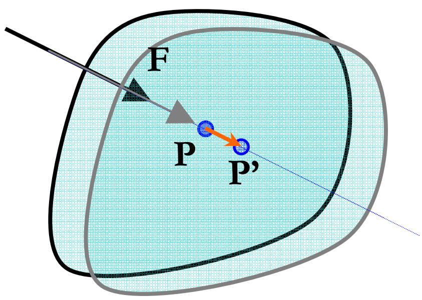


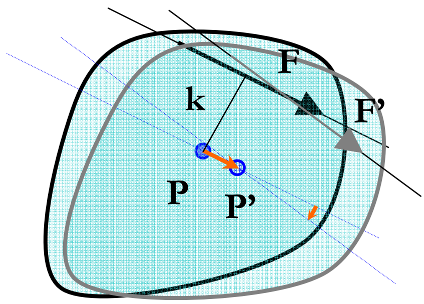
A **hatásvonalak közös metszéspontja** miatt az erők a testet csak **eltolni** akarják, elfordító hatás nem lép fel.

Az előbbi esettel azonos vektorú, de **hatásvonalaikban nem közös metszéspontú erők** a testre az eltoló hatás mellett **elfordító hatást** is kifejtenek.

Az erő(k) által a sík **P** pontjára (a tér **t** tengelyére) kifejtett **forgató hatást** az erő(k) **P** pontra (**t** tengelyre) vonatkozó **nyomatékának** nevezzük.

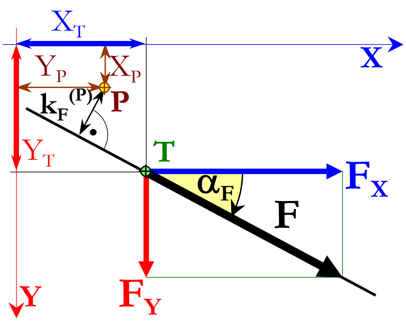
Az elforgató hatás az **erő nagyságától** és a **forgásközéppont helyzetétől** függ.





Az **F** erőnek a **P** pontra vonatkozó nyomatéka az **F** erő **nagyságának** és az **F** hatásvonala és a **P** pont **merőleges távolságának** (erőkar=k) szorzataként számítható. Az **erő nyomatékát** az **összetevők** (nem a vetületek!) ugyanazon pontra vett **nyomatékösszegeként** is meghatározhatjuk.

$$M_F^{(P)} = -|\mathbf{F}| \times k_F^{(P)}$$
$$M_F^{(P)} = -F_X \times (X_T - X_P) + F_Y \times (X_T - X_P)$$



A forgatónyomaték előjelét az óramutató járásával megegyező forgásirány esetén tekintjük pozitívnak. Ha a fenti összefüggésbe az erőösszetevőket és a koordinátákat **előjelhelyesen** helyettesítjük be, a forgatónyomatékot **előjelhelyesen** kapjuk.

3.3. Műveletek erőkkel

3.3.1. Az egyenértékűség

Az erőkkel-erőrendszerekkel végzett műveletek célja jobbára **két erőcsoport hatásazonosságának** kimutatása, bizonyítása. Ezt a célt tömören, még a matematikai-szerkesztési lépések előtt célszerű írásba foglalni.

A két erőcsoport hatásazonosságát kimondó egyenlőséget egyenértékűségnek nevezzük. Az egyenértékűségben (vagy más nevén: egyensúlyi kijelentésben) mindkét oldalon **csak az erők felsorolása** szerepel. Az egyenértékűségben (megkülönböztetésül) az **egyenlőségjel fölé pontot** is teszünk.

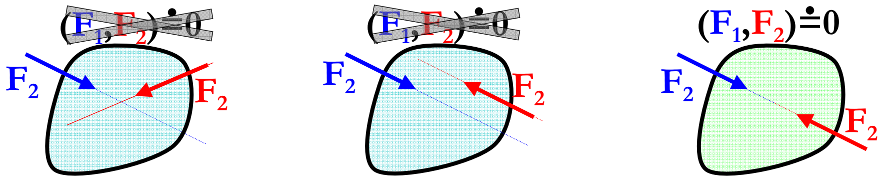
$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \ldots, \mathbf{F}_i, \ldots, \mathbf{F}_n) \doteq \mathbf{R}$$

A fenti egyenértékűség szerint az **(F)** erőrendszer **minden hatásában** azonos az **R** (eredő) erővel. Az egyenértékűség alapján minden olyan **matematikai egyenlet, szerkesztési összefüggés** alkalmazható, ami a fenti hatásazonosságot biztosítja.

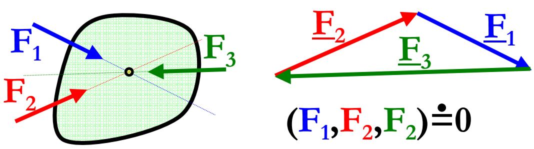
3.3.2. A statika axiómái

Vannak a statikában is olyan teljesen természetes, a gyakorlatban mindig érvényesülő, de (kiindulási pont híján) szigorú logikával nem bizonyítható állítások, amelyeket alapigazságoknak, axiómáknak minősítve a további állításaink már bizonyíthatók. A statikában négy axiómát fogalmazunk meg. A következőkben ezen alapigazságok szöveges, és grafikus megfogalmazását foglaltuk össze.

1. axióma: KÉT ERŐ AKKOR ÉS CSAK AKKOR VAN EGYENSÚLYBAN, HA HATÁSVONALUK KÖZÖS, VEKTORUK ELLENTETT.



2. axióma: HÁROM ERŐ AKKOR ÉS CSAK AKKOR VAN EGYENSÚLYBAN, HA HATÁSVONALAIK KÖZÖS METSZÉSPONTÚAK, VEKTORAIKBÓL PEDIG ZÁRT, NYÍLFOLYTONOS VEKTORHÁROMSZÖG KÉPEZHETŐ.



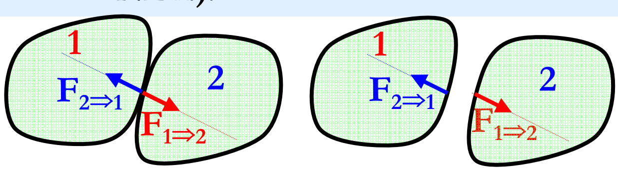
$(F_1,F_2,F_2)\doteq 0$

3. axióma: EGY ERŐRENDSZER HATÁSA NEM VÁLTOZIK, HA ÖNMAGÁBAN EGYENSÚLYBAN LÉVŐ ERŐCSOPORTOT ADUNK HOZZÁ, VAGY VESZÜNK EL BELŐLE.

$$(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_n)\doteq R \quad (Q_1,Q_2,\ldots,Q_i,\ldots,Q_n)\doteq 0 \Rightarrow [(F),(Q)]\doteq R$$

$$[(F),(Q)]\doteq R \quad (Q)\doteq 0 \Rightarrow (F)\doteq R$$

4. axióma: KÉT TEST EGYMÁSRA HATÁSAKOR A KÉT TEST ÁLTAL EGYMÁSRA KIFEJTETT ERŐ EGYMÁS ELLENTETTJE LESZ (hatásvonaluk azonos, vektoruk ellentett, DE: MÁS-MÁS TESTRE MŰKÖDNEK!).



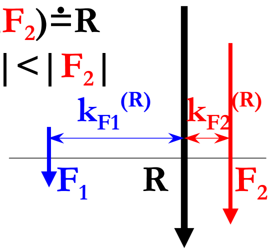
$F_{2\Rightarrow 1}=-F_{1\Rightarrow 2}$

3.3.3. Két párhuzamos erő eredője

Párhuzamos erők esetén az eredő **nagysága** és **állása** igen könnyen meghatározható: az eredő **hatásvonala** az erők hatásvonalaival **párhuzamos** lesz, az eredő **nagysága** pedig az erőnagyságok **algebrai összegeként** adódik. Az eredő helyének meghatározásához a számításban az erők forgatónyomatékainak azonosságát használjuk fel, a szerkesztésben pedig segéderőket veszünk figyelembe.

$(F_1,F_2) \doteq R$

$|F_1|<|F_2|$

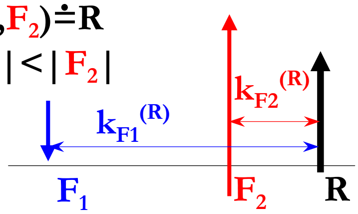


$$R=F_1+F_2$$
$$M_R^{(R)}=0=-F_1\times k_{F1}^{(R)}+F_2\times k_{F2}^{(R)}$$
$$F_1\times k_{F1}^{(R)}=F_2\times k_{F2}^{(R)}$$
$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{k_{F2}^{(R)}}{k_{F1}^{(R)}}$$

Egy irányban álló két párhuzamos erő eredője a két erő hatásvonala **között**, a **nagyobbik** abszolút értékű **erőhöz közelebb** van (az eredő az erőnagyságokkal **fordított** arányban osztja a két erő közötti távolságot).

$(F_1,F_2) \doteq R$

$|F_1|<|F_2|$

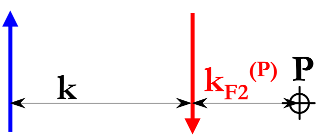


$$R=F_1-F_2$$
$$M_R^{(R)}=0=-F_1\times k_{F1}^{(R)}+F_2\times k_{F2}^{(R)}$$
$$F_1\times k_{F1}^{(R)}=F_2\times k_{F2}^{(R)}$$
$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{k_{F2}^{(R)}}{k_{F1}^{(R)}}$$

Ellenkező irányban álló két párhuzamos erő eredője a két erő hatásvonalán **kívül**, a **nagyobbik** abszolút értékű **erő oldalán** van (az eredő és az erők távolságai az erőnagyságokkal **fordított** arányban alakulnak).

$(F_1,F_2) \doteq R$

$|F_1|=|F_2|$



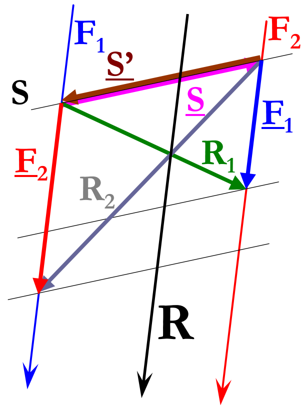
$$R=F_1-F_2=0$$
$$\Sigma M_{F1,F2}^{(P)}=+F_1\times(k+k_{F2}^{(P)})-F_2\times k_{F2}^{(P)}$$
$$\Sigma M_{F1,F2}^{(P)}=+F_1\times k+F_1\times k_{F2}^{(P)}-F_2\times k_{F2}^{(P)}$$
$$|F_1|=|F_2|=F \Rightarrow F_1\times k_{F2}^{(P)}-F_2\times k_{F2}^{(P)}=0$$
$$\Sigma M_{F1,F2}^{(P)}=+F\times k$$

Ellenkező irányban álló, azonos abszolút értékű két párhuzamos erő **eredőjének erővetülete zérus**, az **erőrendszer nyomatéka** viszont **a sík bármely pontjára azonos**: az erőnagyság és a hatásvonalak közötti távolság szorzata. Az ilyen tulajdonságú erőrendszert **erőpárnak**, koncentrált nyomatéknak nevezzük.

Két párhuzamos erő eredőjének helyét (segéderők felvételével) meg is szerkeszthetjük.

$(\mathbf{F_1},\mathbf{F_2}) \doteq \mathbf{R}$

Az $\mathbf{F_1}$ és $\mathbf{F_2}$ erők hatásvonalainak párhuzamossága miatt az eredő **helyét** a hatásvonalak **metszéspontjával** nem lehet meghatározni. Adjunk hozzá az **(F)** erőrendszerhez egy **S** és **S'** erőkből álló, az **F** erők hatásvonalait metsző, önmagában egyensúlyban lévő erőrendszert!



$(\mathbf{S},\mathbf{S'}) \doteq \mathbf{0}$ a harmadik axióma szerint:

$(\mathbf{S},\mathbf{F_1},\mathbf{F_2},\mathbf{S'}) \doteq \mathbf{R}$

$(\mathbf{S},\mathbf{F_1}) \doteq \mathbf{R_1}$ $(\mathbf{F_2},\mathbf{S'}) \doteq \mathbf{R_2}$

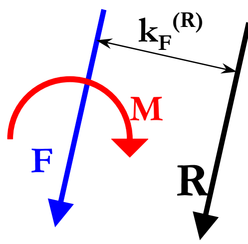
$(\mathbf{R_1},\mathbf{R_2}) \doteq \mathbf{R}$

Válasszuk meg a vektorábra léptékét úgy, hogy az **S** segéderő **vektora éppen megegyezzék** az **S hatásvonalának** az $\mathbf{F_1}$ és $\mathbf{F_2}$ **hatásvonala közé eső szakaszával**. Így (kivételesen) a **geometriai** és a **vektorábrát egyesítve** szerkeszthetjük meg. Az **S** erő vektorának folytatásában (az $\mathbf{F_2}$ hatásvonalára!!) felmérve az $\mathbf{F_1}$ erő vektorát, a vektorábra kezdő- és végpontját összekötve az $\mathbf{R_1}$ részeredő **vektorát**, és egyúttal (minthogy a vektorábra kezdőpontja az **S** és $\mathbf{F_1}$ erők hatásvonalainak metszéspontja volt) **hatásvonalát** kapjuk. Teljesen hasonló módon az $\mathbf{F_2}$ erő vektorát az $\mathbf{F_1}$ hatásvonalára felmérve az **S'** és az $\mathbf{F_2}$ erők vektorainak nyílfolytonos vektorábráját kapjuk, amely az $\mathbf{R_2}$ részeredő **vektorát** és egyúttal **hatásvonalát** jelöli ki. Az $\mathbf{R_1}$ és $\mathbf{R_2}$ részeredők eredője az eredeti $\mathbf{F_1}$ és $\mathbf{F_2}$ erők eredőjével azonos, **helyét** (hatásvonalának egy pontját) az $\mathbf{R_1}$ és $\mathbf{R_2}$ **részeredők hatásvonalainak metszéspontja** határozza meg.
A tényleges szerkesztésben már nem szükséges a teljes gondolatmenetet mindig végigvezetni, elegendő annyit megjegyezni, hogy az $\mathbf{F_1}$ erő **vektorát** az $\mathbf{F_2}$ **hatásvonalára**, az $\mathbf{F_2}$ **vektorát** az $\mathbf{F_1}$ **hatásvonalára** tetszőleges helyen felmérve az **egyik vektor kezdőpontját a másik vektor végpontjával** összekötve a két segédegyenes **metszéspontja** az eredeti erők eredőjének **hatásvonalát** jelöli ki. A szerkesztés **ellentétes** értelmű erők esetén is alkalmazható. **Erőpár** esetén a párhuzamosok közé zárt párhuzamosok tétele miatt a vektorok kezdő- és végpontjait összekötő egyenesek is **párhuzamosak** lesznek, azaz az (egyébként zérus nagyságú) eredő erő a **végtelenben** lesz, azaz az erőpár csak **forgatónyomatékkal** rendelkezik.

3.3.4. Egy erő és egy erőpár eredője

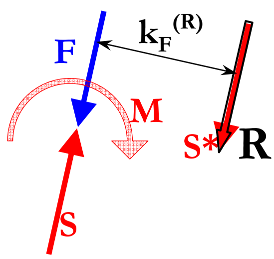
Egy **koncentrált erő** a sík **bármely** pontjára **azonos eltoló** hatást, és **változó elfordító** hatást fejt ki, egy **erőpár** pedig a sík **bármely** pontjára **azonos elfordító** és **zérus eltoló** hatást fejt ki. Ebből következik, hogy eredőjük az eltoló hatást csak az erőtől örökölheti, vagyis az **eredő vektorának ill. vetületeinek az erő vektorával ill. vetületnagyságaival meg kell egyeznie**. Az erőpárban megtestesülő **elfordító** hatást az eredő (önmagával párhuzamos) **eltolásával** pótolhatjuk.

Az eljárás **tetszőleges** állású erő esetén alkalmazható. Ha az erőhatásvonalra **merőleges** tengellyel dolgozunk, akkor a merőleges kart szolgáltatja, ha a szokásos koordinátatengelyeket használjuk, akkor a módszer az erő és az eredő tengelymetszékeinek különbségét adja.



$$(F,M) \doteq R$$
$$\underline{F}=\underline{R}$$
$$M_F^{(R)}+M=M_R^{(R)}=0$$
$$M_F^{(R)}=-F\times k_F^{(R)}=M$$
$$k_F^{(R)}=M/F$$

Kicsit más gondolatmenettel is ugyanerre az eredményre jutunk: helyettesítsük az **M** erőpárt egy **S** és egy **S*** erővel (ezt végtelen sokféleképp megtehetjük). Vegyük fel az **S** erőt úgy, hogy **hatásvonala** az **F** hatásvonalával **azonos** legyen, **vektora** pedig az **F** vektorának **ellentettje** legyen.



$$(F,M) \doteq R$$
$$M \doteq (S,S^*)$$
$$(F,S,S^*) \doteq R$$
$$(F,S) \doteq 0$$
$$S^* \doteq R$$

Ez esetben az **S*** erő vektora az **F** vektorral azonos lesz, helyét pedig úgy kaphatjuk, hogy az **S-S*** erőpár forgatónyomatéka **mind értékében, mind előjelében egyezzék meg az M erőpár forgató hatásával**. Ennek alapján az **S** és az **S*** erők közötti merőleges távolságot a $k_F^{(R)}=M/F$ hányados szolgáltatja. Az **F** és az **S** erők **közös hatásvonalúak és ellentett vektorúak** lévén **egyensúlyban** vannak, elvételük nem változtatja az erőrendszer hatását, azaz **az eredő maga az S* erő** lesz.

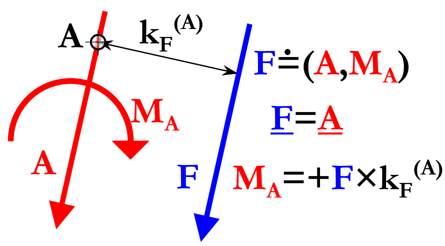
Egy erő és egy erőpár eredőjét úgy kapjuk, hogy az erőt önmagával párhuzamosan eltoljuk, olyan irányba és olyan mértékkel, hogy az eltolásból származó nyomatékváltozás az erőpár hatását pótolja.

•

3.3.5. Az erő pontra redukálása

Egy erőnek egy **ismert ponton átmenő erővel és egy vele egyidejűleg működtetett koncentrált nyomatékkal** történő helyettesítését az **erő pontra redukálásának** nevezzük.

A pontra redukálás valójában az előző pontban ismertetett feladat, az erő és erőpár eredőmeghatározásának **inverz** feladata. Ennek megfelelően az ismert **A** ponton átmenő erő vektorának kell pótolnia az eredeti **F** erő eltoló hatását, tehát az **A** erő **vektora** ill. **vetületei** az **F** erő **vektorával,** ill. **vetületeivel azonosak lesznek**. Az **A** pontra az **A** erő nyomatéka zérus, az **F** erő által az **A** pontra kifejtett forgató hatást tehát az $\mathbf{M_A}$ nyomatéknak kell pótolnia.



3.3.6. Az erők mértékegysége

A koncentrált erők mértékegysége a **N**, vagy annak megfelelő prefixummal ellátott többszöröse.

A forgatónyomaték mértékegysége (a származtatásnak megfelelően) **N×m**, ill. ennek megfelelő prefixummal ellátott többszöröse.

3.4. Az erők helyettesítése

A helyettesítési feladatban olyan erőt vagy erőcsoportot keresünk, amely kielégíti az előre meghatározott feltételeket, és az eredeti erőrendszert minden hatásában pótolni, helyettesíteni képes. Ha az eredeti erőrendszert egyetlen erő képes helyettesíteni, ezt az erőt az erőrendszer **eredőjének**, **eredő erőnek** nevezzük.

Az erők hatásainak tárgyalása során megállapítottuk, hogy egy (merev) testre az **erők eltoló** és **elfordító**, az **erőpárok** (koncentrált nyomatékok) csak **elfordító** hatást fejtenek ki. Ennek alapján rögzíthetjük, hogy

- a **csak erőpárokból** álló erőrendszer **eredője csak erőpár** lehet
- a **hatásvonalaikkal egyetlen pontra** illeszkedő erők esetében az **eredő erő hatásvonala is erre a pontra** illeszkedik (az eredő hatásvonalán ennek a pontnak rajta kell lennie)
- az **eltoló hatásaikban** (azonos irányú vetületeikben) **zérust adó** erőrendszerek eredőjének az **eltoló hatás irányában álló tengelyre vett vetülete zérus**
- a **mind eltoló hatásaikban** (síkban két, nem párhuzamos tengelyre, a térben három, páronként nem párhuzamos tengelyre vett vetületeikben), **mind pedig elfordító hatásaikban** (a síkban a síkra merőleges tengelyre számított, a térben három, páronként nem párhuzamos tengelyre számított nyomatékaikban) **zérust adó erőrendszer eredője zéruserő, azaz az erőrendszer egyensúlyban van**.

3.4.1. Helyettesítés egyetlen erővel – az eredő meghatározása

A fentiekben összefoglalt általános megállapításoknak megfelelően az erőrendszert helyettesítő egyetlen erő vetületeinek (nyomatékának), ill. szerkesztés esetén vektorának meg kell egyezniük a helyettesítendő erőrendszer ugyanazon tengelyekre (pontokra) vett, összegzett vetületeivel (nyomatékával), ill. vektorösszegével. Ennek megfelelően zérus vetületösszeg esetén az eredőnek a vizsgált tengelyre nincs vetülete, tehát hatásvonala a tengelyre merőleges. Ha a helyettesítendő erőrendszer vetületösszege minden (a síkban: két, nem párhuzamos, a térben: három, páronként nem párhuzamos) tengelyre zérus, akkor az erőrendszer (egyetlen) erővel nem helyettesíthető.

Az eredő meghatározása számítással

Az egyenértékűség:

$$\left(F_1, F_2, F_3, \ldots F_i, \ldots, F_n\right) \doteq R \doteq \left(R_X, R_Y, R_Z\right)$$

A vetületi egyenletek:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = R_X \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iY} = R_Y \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iZ} = R_Z$$

Vegyük észre, hogy az **eredő vetületeinek** előállításához csak a helyettesítendő **erők vetületeinek összegeire** volt szükségünk. Ezek ismeretében az eredő erő vektora a (térbeli) Pitagorasz-tétel alkalmazásával állítható elő:

$$\overline{R} = \overline{R_X} + \overline{R_Y} + \overline{R_Z} = \sqrt{\left(R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2\right)}$$

Az eredő állását, a koordinátatengelyekkel bezárt szögeinek értékét az ún. **iránykoszinuszok** meghatározásával kaphatjuk meg:

$$\cos\alpha_X = \frac{R_X}{R} \qquad \cos\alpha_Y = \frac{R_Y}{R} \qquad \cos\alpha_Z = \frac{R_Z}{R}$$

Ha a helyettesítendő erőrendszerben található olyan pont, amelyen minden hatásvonal keresztülmegy – az erőrendszer **közös metszéspontú erőkből** áll –, akkor az eredő vektorát ehhez a ponthoz illesztve a helyettesítő erő, az eredő helyét is megkaptuk.

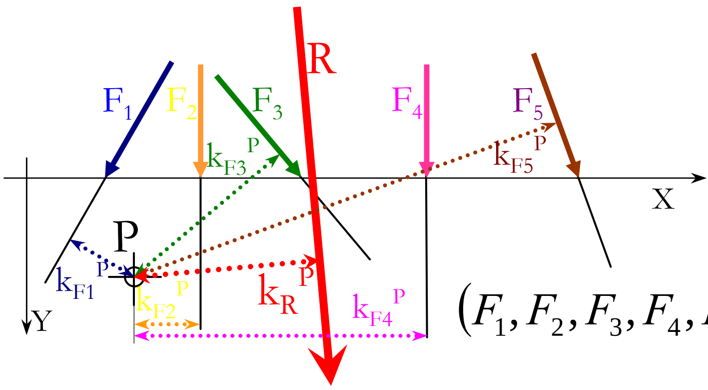
Ha a helyettesítendő erőrendszer erői **nem közös metszéspontú erők**, ill. a helyettesítendő erőrendszerben **erőpár**(ok) is van(nak), akkor – amennyiben létezik – az eredő **vektorát,** ill. **vetületeit a közös metszéspontú erőrendszerrel azonos módon, vetületi egyenletekből kaphatjuk meg**.

Az eredő helyének meghatározásához azonban az erők **elforgató** hatását, az erők **nyomatékát** kell felhasználnunk: az eredő (már ismert) vektorának olyan pozícióban kell lennie, hogy az általa kifejtett elforgató hatás az egész erőrendszer által kifejtett, összegzett elforgató hatással legyen azonos. Ezt az összehasonlítást a sík bármelyik pontjára (a térben bármelyik, nem párhuzamos tengelypárra) felírhatjuk, az egyenlet megoldása mindenképpen az eredő valós helyét, pontosabban: **az eredő hatásvonalának**

egy pontját szolgáltatja. Minthogy az eredő vetületeit, és ezáltal vektorát már meghatároztuk, a hatásvonal egy pontjának ismerete a vektor állásának, iránykoszinuszainak ismeretében az eredő hatásvonalát is teljesen meghatározza.

A sík egy tetszőleges **P** pontjára felírva a nyomatéki egyenletet, abban csak **egy ismeretlen**, az eredő hatásvonalának a **P** ponttól mérhető $\mathbf{k_R}^{\mathbf{P}}$ karja szerepel. A P pont, a hatásvonal állása és a kar ismeretében az eredő helyzete egyértelműen meghatározható (az egyenletben mind az erők, mind a koncentrált nyomatékok összegzett forgatónyomatékát szerepeltettük).

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Fi}^{P} + \sum_{j=1}^{k} M_{j} = \sum_{i=1}^{n} F_{i} \times k_{Fi}^{P} + \sum_{j=1}^{k} M_{j} = M_{R}^{P} = R \times \boxed{k_{R}^{P}}$$



$$\left(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\right) \doteq R$$

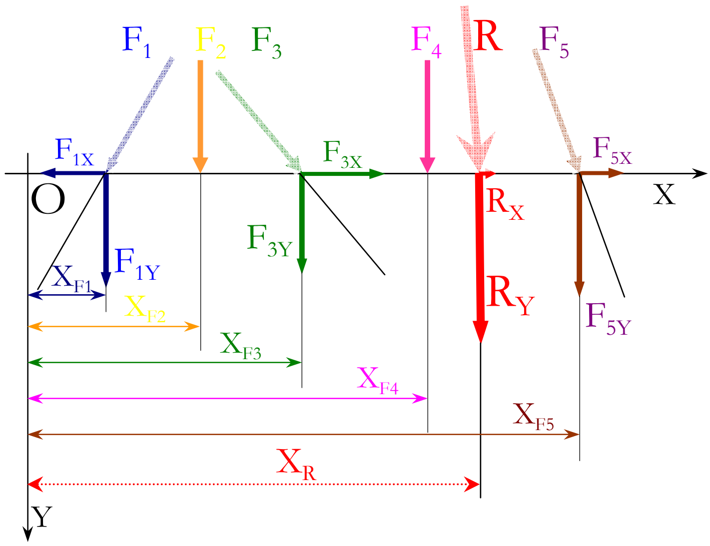
A fenti, általános megoldás jelentősen egyszerűsíthető, ha a forgatónyomatékokat az erők **tengelyirányú vetületeiből** határozzuk meg, a nyomatékokat az általános **P** pont helyett egy könnyebben kezelhető pontra (pl. az origóra) írjuk fel, és a számításban az eredőt valamelyik (egyelőre feltételezett helyzetű) tengelymetszési pontjában két összetevőjével helyettesítjük. Ha a helyettesítendő erőket egy **viszonyítási egyenes** (pl. az X tengely) metszési pontjaiban bontjuk fel összetevőikre, és a nyomatékokat is e **viszonyítási tengely egy pontjára** (esetünkben az origóra) írjuk, akkor az erők egyik (esetünkben az X) irányú összetevői a nyomatéki egyenletben **zérus karral** szerepelnek, azaz kihagyhatók. Az ismert vektorú, tehát mindkét összetevőjében ismert nagyságú eredőt ugyanezen viszonyítási egyenessel képzett (egyelőre csak feltételezett helyzetű) metszéspontjában felbontva a nyomatéki egyenletben az eredőnek is csak az egyik (esetünkben az $\mathbf{R_Y}$) összetevője szerepel, és az egyenletből **egyetlen ismeretlen-**

ként az ehhez tartozó kart (esetünkben az eredőhatásvonal és az X tengely metszéspontjának X_R koordinátáját) határozhatjuk meg.

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Fi}^{O} + \sum_{j=1}^{k} M_j = \sum_{i=1}^{n} F_{iY} \times X_{Fi} + \boxed{\cancel{\sum_{i=1}^{n} F_{iX} \times 0}} + \sum_{j=1}^{k} M_j = M_R^O = R_Y \times \boxed{X_R} + \boxed{\cancel{R_X \times 0}}$$

(A fenti, általános egyenletben mind az erők, mind a koncentrált nyomatékok összegzett forgatónyomatékát szerepeltettük.)

$$\left(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\right) \doteq R \doteq \left(R_X, R_Y\right)$$



Az erők nagyságának, állásszögének és hatásvonala helyének ismeretében az F_{iY} irányú összetevők nagysága és X_{Fi} koordinátája, valamint az eredő R_X és R_Y komponense meghatározható, és így az origóra felírt nyomatéki egyenletben **csak az eredőhatásvonal és az X tengely metszéspontjának X_R koordinátája az ismeretlen**.

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^O = R_Y \times X_R \Rightarrow X_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i^O}{R_Y}$$

Ne feledjük, hogy az eljárásban az eredő helyét, a metszéspont X_R koordinátáját csak **feltételeztük** az X tengely pozitív ágára, így a valóságban az akár a negatív oldalon is lehet. X_R előjelét a helyettesítendő erőrendszer

origóra összegzett nyomatékának előjele, az eredő Y komponensének előjele és az eredőhatásvonal (általunk felvett!) metszésponti koordinátájának előjele határozza meg. Ha X_R a számításból pozitívra adódik, akkor a metszéspontot az X tengelyen az origótól számítva helyes oldalra vettük fel, ha az előjel negatív, a kapott távolságot az origótól a feltételezett iránnyal ellentétesen kell felmérnünk.
Ha az eredőnek nincs Y irányú összetevője, akkor a fentiekkel analóg módon kereshetjük az Y tengelymetszék helyét is.

Az eredő meghatározása szerkesztéssel

Szerkesztés esetén – amint azt az axiómák esetében már láttuk – **külön** kell vizsgálnunk a **vektorokra** és **külön** a **hatásvonalakra** vonatkozó feltételek teljesülését.
Az eredőtől azt várjuk, hogy minden hatásában tökéletesen helyettesítse az erőrendszert. Ennek megfelelően **az eredő vektora az erőrendszert alkotó erők vektorainak összegével lesz azonos**. Az eredő vektorának megszerkesztéséhez egy – általunk választott erőléptékű – vektorábrában **nyílfolytonosan** felrajzoljuk az erők vektorait. Az első és a második vektor összegét a parallelogramma-szabály alapján az első vektor kezdőpontjából a (nyílfolytonosan felrajzolt) második vektor végpontjába nyílütközéssel berajzolt vektor adja. Az így megkapott $\underline{\mathbf{R}}_{\underline{1\text{-}2}}$ részeredő-vektorhoz a fentiek szerint hozzáadva az $\underline{\mathbf{F}}_{\underline{3}}$ erő vektorát, az $\underline{\mathbf{R}}_{\underline{1\text{-}3}}$ részeredő vektorát kapjuk. Az eljárást azonos módon folytatva a teljes erőrendszer eredőjének vektorát tudjuk előállítani.

Egy erőrendszer eredőjének vektorát az első erő vektorának kezdőpontjából az utolsó erő vektorának végpontjába nyílütközéssel berajzolt vektor adja.

Vegyük észre, hogy az eredő **vektorának** meghatározása során az **erők hatásvonalait**, ill. az erőrendszerben szereplő (de erővektorral nem rendelkező!) **erőpárokat nem kellett figyelembe vennünk**. Az eredő **vektora** tehát (azonos erőkből álló) **közös metszéspontú és** általános, **szétszórt erőrendszer** esetén **azonos**.

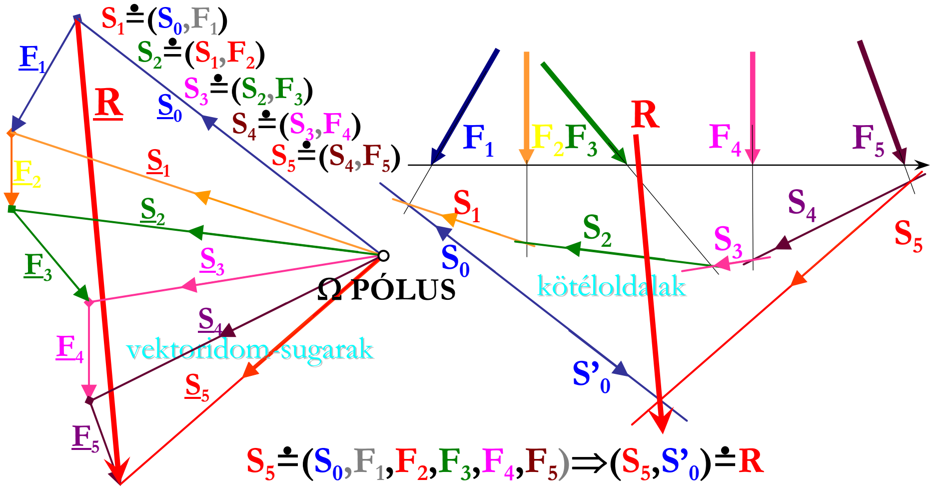
Az eredő **helyének** meghatározásához a **hatásvonalakra** vonatkozó összefüggéseket kell felhasználnunk. Az első két erő eredőjének hatásvonala át fog menni a két erő hatásvonalának metszéspontján, ennek megfelelően az $\underline{\mathbf{R}}_{\underline{1\text{-}2}}$ vektort az $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ erők hatásvonalainak metszéspontjába illesztve megkapjuk az $\mathbf{R}_{1\text{-}2}$ részeredő hatásvonalát. Az $\mathbf{R}_{1\text{-}2}$ hatásvonalának és az F_3 erő hatásvonalának metszéspontjára illeszkedni fog az $\mathbf{R}_{1\text{-}3}$ részeredő.

A szétszórt síkbeli erőrendszer esetében az **eredő helyét** (az eredő hatásvonalának egy pontját) a páronkénti összegzéssel szekvenciálisan felvett **utolsó részeredő és az utolsó erő hatásvonalának metszéspontja** szolgáltatja.

Ha az erőrendszerben **erőpárok** is vannak, azok egyszerű **algebrai összegzéssel mindig egyesíthetők**, az így kialakuló **egyetlen erőpár** pedig mindig helyettesíthető **tetszőleges nagyságú erőkből álló** (de természetesen azonos előjelű, és azonos forgatóértékű nyomatékot szolgáltató) **két párhuzamos erővel**. Ezek az erők az eredő **vektorának** meghatározásában nem játszanak szerepet, hiszen a két erő ellentett vektorú, de az eredő **helyét** már módosítani fogják.

Párhuzamos, vagy közel párhuzamos állású erők esetében a hatásvonalak metszéspontjainak meghatározása bizonytalan, ezért a megbízható eredmények eléréséhez a szerkesztést segéderők felvételével végezzük el.
Az eredeti erőrendszer hatása, eredője nem módosul, ha az erőrendszerhez (a III. axiómának megfelelően) önmagában egyensúlyban lévő erőrendszert adunk hozzá. Az **S** segéderőt tetszőleges nagyságúra és állásúra választhatjuk, de célszerű úgy felvenni, hogy az első erőhöz hozzáadva a részeredő és a következő erő hatásvonalainak metszéspontja könnyen megrajzolható legyen. Ezek után az **S’** erő természetesen az **S** erővel azonos hatásvonalú és ellentett vektorú lesz. Az S és S’ erőkkel kibővített erőrendszerben az erők sorrendjét az S erővel kezdjük, és az S’ erővel zárjuk. Ezek után szerkesszük meg a vektorábrát, páronként meghatározva a részeredők $\underline{\mathbf{S}}_i$ vektorait is. E részeredők hatásvonalai az őket alkotó két erő hatásvonalainak metszéspontjain mennek keresztül, így a hatásvonalak ábrája is megszerkeszthető.

$$(\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2,\mathbf{F}_3,\mathbf{F}_4,\mathbf{F}_5)\doteq\mathbf{R}+(\mathbf{S},\mathbf{S'})\doteq 0\Rightarrow(\mathbf{S},\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2,\mathbf{F}_3,\mathbf{F}_4,\mathbf{F}_5,\mathbf{S'})\doteq\mathbf{R}$$



$$\mathbf{S}_5\doteq(\mathbf{S}_0,\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2,\mathbf{F}_3,\mathbf{F}_4,\mathbf{F}_5)\Rightarrow(\mathbf{S}_5,\mathbf{S'}_0)\doteq\mathbf{R}$$

A VEKTOROK ÁBRÁJA
(vektorsokszög)

A HATÁSVONALAK ÁBRÁJA
(kötélsokszög)

Az egyenértékűségekből látható, hogy az utolsó (esetünkben az $\mathbf{S}_5$ jelű) részeredő valójában a teljes helyettesítendő erőrendszer és az **S** jelű segéderő eredője. Ha ehhez hozzáadjuk az **S** erő ellentettjét, azaz az **S'** erőt, akkor az eredeti erőrendszer eredőjét kapjuk. A vektorábrában jól látszik, hogy az **S** vektor megfordításával kapható **S'** vektor és az $\mathbf{S}_5$ részeredő eredője valóban (az erőrendszer vektorábrájából már ismert) **R** eredő lesz. Így szemlélve viszont az **R** eredő **két erő eredőjeként** jelenik meg, azaz **hatásvonalának át kell mennie a két erő hatásvonalainak metszéspontján**. Az **S'** erő hatásvonala (az ellentettség miatt) az **S** hatásvonalával azonos, az $\mathbf{S}_5$ részeredő hatásvonalát pedig a szerkesztés szolgáltatta. E két hatásvonal metszéspontja az eredeti erőrendszer eredőhatásvonalának egy pontját adja meg.
A fenti szerkesztésből kiadódó geometriai ábra, a hatásvonalak ábrája megegyezik egy olyan végtelen hajlékony, súlytalan kötél alakjával, amelyet az eredeti erőrendszer elemei terhelnek, ezért a hatásvonalak ábráját **kötélsokszögnek**, magát a szerkesztést pedig **kötélsokszög-szerkesztésnek** nevezzük. A továbbiakban a segéderők és a részeredők vektorait vektoridom-sugaraknak, hatásvonalaikat kötéloldalaknak fogjuk nevezni, és (bár sosem tévesztjük szem elől, hogy ezek a mennyiségek erők) a vektorábrában és a kötélsokszögben szerkesztő vonalakként dol-

gozhatunk velük. A vektorábrában a vektoridom-sugarak közös kezdőpontját póluspontnak nevezzük, és Ω-val jelöljük.

A kötélsokszög-szerkesztés a szétszórt síkbeli erőrendszer eredőjének **helyét** határozza meg, az **első erőt megelőző** és az **utolsó erőt követő kötéloldalak metszéspontjaként** azonosítva **az eredő hatásvonalának egy pontját**.

Vegyük észre, hogy az eredő **vektorának** meghatározásához nem volt szükség a kötélsokszög megszerkesztésére, **az eredővektort a vektorábra önmagában szolgáltatta**.

A kötélsokszög tulajdonságai

A vektorábra vektoridomsugarai egy-egy **részeredő** és egy-egy (a vektorábrában hozzá csatlakozó) **erő** eredővektorai, a kötélsokszög kötéloldalai pedig ugyanezen eredő **hatásvonalai**. E származtatás miatt a vektoridomsugarak és kötéloldalak között szigorú, kölcsönös megfeleltetés érvényes. Az Ω pólus két koordinátájának és az első kötéloldal helyének szabad felvétele pedig azt jelzi, hogy egy erőrendszerre (háromszorosan) végtelen sok kötélsokszög szerkeszthető, vagy másként fogalmazva: az erőrendszerre szerkesztett kötélsokszögre három geometriai feltételt is szabhatunk.

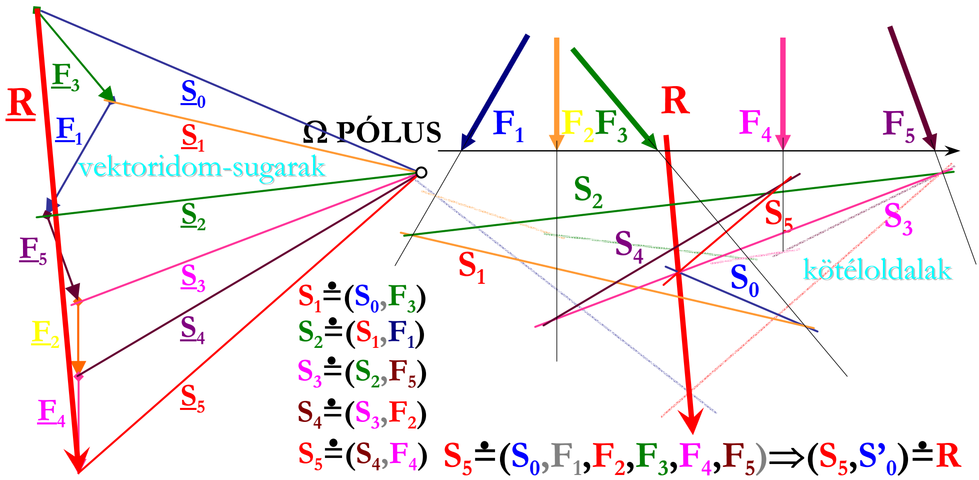
A vektorábrában **egy pontra illeszkedő vektoridomsugarak** megfelelő kötéloldalai a **geometriai ábrában egy háromszög oldalegyenesei** lesznek, és megfordítva: a geometriai ábrában **egy pontban metsződő kötéloldalak** megfelelő vektoridomsugarai a **vektorábrában egy háromszöget határoznak meg**.

A kötélsokszög e tulajdonsága **mindig biztosan eligazít** bennünket a szerkesztés során, még akkor is, ha a kötélsokszög alakja nem olyan „tiszta", ahogyan az ábránkban az erők szekvenciális felvétele nyomán kialakult.

A **vektorábrában az erők vektorait tetszőleges sorrendben** rajzolhatjuk fel, a sorrend változtatása az eredő vektorát nem érinti, azaz az erővektorok bármilyen permutációjában ugyanaz marad. A kötélsokszög-szerkesztésben azonban láttuk, hogy a kötéloldalak sorrendje **szigorúan** a **vektorábrában rögzített erősorrend** szerint alakul. Nyilvánvaló tehát, hogy más erősorrendet választva a kötélsokszögünk teljesen más alakot

ölt, de – helyes szerkesztés esetén – végeredményként az eredőhatásvonalnak egy (másik) pontját határozza meg.
A szerkesztés során a célszerű a vektoridomsugarak és a kötéloldalak azonosító jeleit magunknak feltüntetni, hogy a kötéloldalakat mindig azon két hatásvonal közé rajzoljuk, amelynek vektoraival a megfelelő vektoridomsugár a vektorábrában egy pontban találkozik.

$$(F_3, F_1, F_5, F_2, F_4) \doteq R + (S, S') \doteq 0 \Rightarrow (S, F_3, F_1, F_5, F_2, F_4, S') \doteq R$$



A VEKTOROK ÁBRÁJA
(vektorsokszög)

A HATÁSVONALAK ÁBRÁJA
(kötélsokszög)

A fenti ábrán ugyanarra az erőrendszerre **más erősorrenddel** szerkesztettük meg a kötélsokszöget. Ebben az esetben a kötélsokszög kissé „kusza”, de a **jelölések alapján végigkövethető a vektoridomsugarak és a kötéloldalak összefüggésének érvényesülése**. Az első (**F_3**) erőt megelőző **S_0**, és az utolsó (**F_4**) erőt követő **S_5** kötéloldal metszéspontja itt is kijelöli az **eredő hatásvonalának egy pontját**. Ellenőrzésképpen kihalványítva felrajzoltuk az előző szerkesztés kötélsokszögét is, ami egyértelműen mutatja, hogy a két kötélsokszög ugyanannak az eredőhatásvonalnak egy-egy pontját azonosítja.

Az eredőmeghatározási feladat lehetséges eredményei

A helyettesítési feladatok bevezetésében láttuk, hogy az erőrendszer tulajdonságainak függvényében az eredő lehet egy erő, lehet egy erőpár, és lehet egy zéruserő, amikoris az erőrendszer egyensúlyban van. Az eredőmeghatározás számítási és szerkesztési eljárásának ismeretében célszerű összefoglalni, milyen feltételek esetén, az erőrendszer milyen tulajdonságai mellett számíthatunk eredő erőre, eredő erőpárra ill. egyensúlyra.

AZ EREDŐ	**SZÁMÍTÁS**	**SZERKESZTÉS**
általános erő	$\Sigma F_{iX} \neq 0$ **ÉS** $\Sigma F_{iY} \neq 0$	a vektorábra kezdő- és végpontja sem X, sem Y irányban nincs ugyanazon az egyenesen (**a vektorsokszög nyitott**)
X irányú erő	$\Sigma F_{iX} \neq 0$ **ÉS** $\Sigma F_{iY} = 0$	a vektorábra kezdő- és végpontja X irányban azonos egyenesre esik, de Y irányban nem (**a vektorsokszög nyitott**)
Y irányú erő	$\Sigma F_{iX} = 0$ **ÉS** $\Sigma F_{iY} \neq 0$	a vektorábra kezdő- és végpontja Y irányban azonos egyenesre esik, de X irányban nem (**a vektorsokszög nyitott**)
erőpár	$\Sigma F_{iX} = 0$ **ÉS** $\Sigma F_{iY} = 0$ **ÉS** $\Sigma M_i^{\text{tetszőleges pontra}} \neq 0$	a vektorábra kezdő- és végpontja egybeesik (**a vektorsokszög zárt**), de a kötélsokszög első és utolsó (ilyen esetekben egymással mindig párhuzamos!) kötéloldala nem esik egybe (a **kötélsokszög nyitott**
zéruserő (egyensúly)	$\Sigma F_{iX} = 0$ **ÉS** $\Sigma F_{iY} = 0$ **ÉS** $\Sigma M_i^{\text{tetszőleges pontra}} = 0$	a vektorábra kezdő- és végpontja egybeesik (**a vektorsokszög zárt**), és a kötélsokszög első és utolsó (ilyen esetekben egymással mindig párhuzamos!) kötéloldala is egybeesik (a **kötélsokszög zárt**)

3.4.2. Helyettesítés egy ismert ponton átmenő erővel
(és egy, vele egyidejűleg működő erőpárral)

Az eredőmeghatározás során láttuk, hogy egy általános erőrendszer esetén a helyettesítő erőnek mind a **nagysága**, mind a **helye** ismeretlen. Ha tehát kikötjük, hogy a helyettesítő erő hatásvonalának **egy meghatározott pontra** kell illeszkednie, akkor az **erőrendszernek erre a pontra vonatkozó nyomatékát** (amennyiben ez nem zérus), **a ponton átmenő erő nem tudja helyettesíteni**, ennek pótlását másként kell megoldanunk. A feladatot úgy egyszerűsíthetjük, hogy az erőrendszert a (már ismert módon előállítható) **eredőjével** helyettesítjük, és akkor valójában a feladat úgy fogalmazható át: **egy erő helyettesítése ismert ponton átmenő erővel**. A helyettesítés azt jelenti, hogy a helyettesítendő és a helyettesítő erők **vektorainak**, ill. azok **vetületeinek** rendre **meg kell egyezniük**, így a kiegyenlítetlen forgatónyomaték helyettesítésére csak egy **erőpárt**, egy koncentrált nyomatékot alkalmazhatunk. Ezt a helyettesítési feladatot az **erő pontra redukálásának** is szoktuk nevezni.

$$\mathbf{R} \doteq (\mathbf{A}, \mathbf{M}_A)$$

Az $\mathbf{M}_A$ erőpár forgató hatása, nyomatéka a **sík bármely pontjára azonos**, az alkalmazott index csak azt jelzi, hogy ez az erőpár az **A** erővel **együttesen** alkotja a helyettesítő erőrendszert.
Számítási megoldás esetén az **X** és **Y** tengelyre vonatkozó vetületi egyenletekben $\mathbf{M}_A$ nem szerepel, ezek tehát közvetlenül szolgáltatják az **A** egyensúlyozó erő összetevőinek nagyságát; ha pedig a nyomatéki egyenletet az **A** pontra írjuk fel, abban az **A** erő nem szerepel, tehát az $\mathbf{M}_A$ egyensúlyozó nyomaték értékét is úgy határozhatjuk meg, hogy korábbi részeredményeinket nem kell felhasználnunk.

A nyomatéki egyenletet természetesen a sík bármelyik pontjára felírhatjuk, az eredmény ettől nem függ, de az **A**-tól eltérő pontot választva a nyomatéki egyenletben az **A** erő általunk számított (így esetleg hibával terhelt) komponenseit is szerepeltetnünk kell.

SZÁMÍTÁS	SZERKESZTÉS
$\Sigma F_{iX}=R_X=A_X$ $\Sigma F_{iY}=R_Y=A_Y$ $\Sigma M_i^A=M_R^A=M_A$	az erőrendszer vektorábrája a helyettesítő erő (**R**, vagy **A**) vektorát megadja, a helyettesítő nyomatékot az $\mathbf{R}\times\mathbf{k}_R^A$ szorzattal kaphatjuk meg ($\mathbf{k}_R^A$ az **R** eredő és az **A** pont merőleges távolsága), l. a 3.5.2. pontban

3.4.3. Helyettesítés egy ismert ponton átmenő, és egy ismert hatásvonalba eső erővel

Egy erőrendszer nemcsak az eredőjével, hanem – amint az előző pontban is láttuk – egy, általunk megszabott feltételeket kielégítő másik erőrendszerrel (szerencsésebb megfogalmazásban: erőcsoporttal) is helyettesíthető. Síkbeli erőrendszerek esetén a **helyettesítés teljes értékű**, ha az egyenértékűség két oldalán álló erőcsoportok **két, egymással nem párhuzamos tengelyre számított vetülete**, és a **sík tetszőleges pontjára számított nyomatéka megegyezik**. A három statikai egyenlet három feltételt jelent, azaz három ismeretlen mennyiség meghatározását teszi lehetővé. Az eredőkeresés során semmilyen külön feltételt nem szabtunk a helyettesítő erőre, a három ismeretlen az eredő két vetülete, és a hatásvonal tengelymetszési pontjának a pozíciója volt. Amikor a helyettesítést ismert ponton átmenő erővel kívántuk megoldani (a pont két koordinátáját megszabtuk), akkor ismeretlenként a helyettesítő erő vetületeit és a vele egyidejűleg működtetendő nyomaték nagyságát kellett felvennünk. A helyettesítő erőcsoportra **más feltételeket is megszabhatunk**, csak arra kell vigyáznunk, hogy a helyettesítő erőcsoport adatai között **maradjon három ismeretlen mennyiség**.

A lineáris egyenletrendszerek elméletéből tudjuk, hogy egyértelmű megoldásra csak akkor számíthatunk, ha az egyenletek és az ismeretlenek száma megegyezik. Ha az ismeretlenek száma meghaladja az egyenletek számát (túl kevés feltételt szabtunk), akkor a rendelkezésre álló paraméter-kombinációk végtelen (a többletismeretlenek számával megegyezően, esetlegesen sokszorosan végtelen) megoldási lehetőséget biztosítanak. Ha pedig az egyenletek száma nagyobb az ismeretlenek számánál, akkor túl sok a feltétel, és (általános esetben) a rendelkezésre álló paraméterkombináció nem képes az egyenletekben megtestesülő összes feltételt kielégíteni.

A mérnöki számításokban gyakran előforduló feladat, hogy az erőrendszert két erővel kell helyettesítenünk, ahol az egyik erő (**A**) hatásvonalának **egyetlen pontját** és a másik erő (**B**) **hatásvonalát** a ismerjük. Ez esetben meghatározandó az **A** erő **két összetevője** (vagy az erő nagysága és állásszöge), valamint a **B** erő **nagysága**.

A helyettesítő erők meghatározása számítással

A számításhoz az $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_3}$, $\mathbf{F_4}$, $\mathbf{F_5}$ erőket hatásvonalaiknak egy viszonyítási tengellyel (célszerűen az **A** ponton átmenőként felvett **X** tengellyel) alkotott metszéspontjaiban a választott (célszerűen derékszögű) koordinátarendszer tengelyeivel párhuzamos **komponenseikkel** helyettesítjük.

$$(\mathbf{F_1},\mathbf{F_2},\mathbf{F_3},\mathbf{F_4},\mathbf{F_5}) \doteq (\mathbf{F_{1X}},\mathbf{F_{1Y}},\mathbf{F_2},\mathbf{F_{3X}},\mathbf{F_{3Y}},\mathbf{F_4},\mathbf{F_{5X}},\mathbf{F_{5Y}})$$

Így a feladat egyenértékűsége a következőképpen alakul:

$$(\mathbf{F_{1X}},\mathbf{F_{1Y}},\mathbf{F_2},\mathbf{F_{3X}},\mathbf{F_{3Y}},\mathbf{F_4},\mathbf{F_{5X}},\mathbf{F_{5Y}}) \doteq (\mathbf{A},\mathbf{B})$$

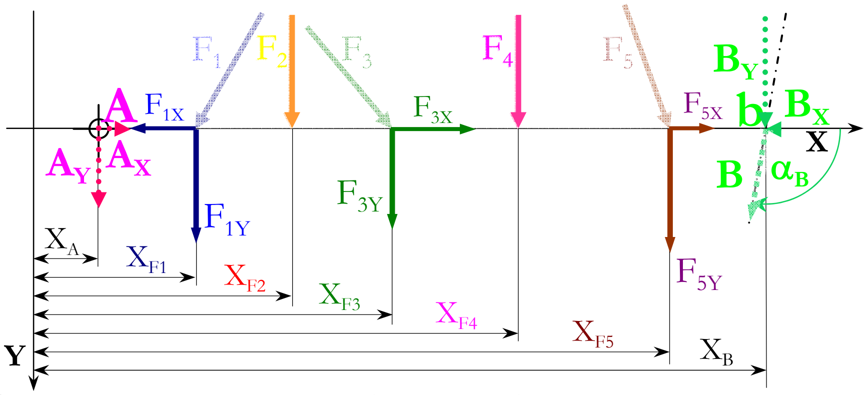
Az egyenértékűség két oldalán álló erőcsoport **egyenértékűsége** matematikailag azt jelenti, hogy a két oldalon álló erőknek a koordinátatengelyekre számított **vetületösszegei** és a sík egy pontjára (pl. az origóra) számított **nyomatékösszegei megegyeznek**.

Számításunkban az **erők vetületeinek előjelét** a **komponensek állása**, **nyomatékainak előjelét** pedig a **komponensek állása és a forgásközépponthoz viszonyított helyzete** együttesen határozza meg. Az ismert erők esetében ezek az adatok rendelkezésünkre állnak, az ismeretlen erők esetében azonban egyelőre nem tudjuk, hogy a komponensek a választott tengelyekkel **megegyező** vagy **ellentétes** irányban fognak-e állni. **Tételezzünk fel az ismeretlen erők komponenseinek valamilyen állást**, célszerűen a tengelyek pozitív ágával megegyező állást, és ennek felhasználásával az **ismeretlen erők** mind a vetületi, mind a nyomatéki egyenletekben **előjeles mennyiségként** szerepeltethetők. Ha az egyenletek megoldásaiban a keresett erőkomponensek előjele **pozitív**, az azt jelenti, hogy az erő állásában feltételezett irány **helyes** volt, ha az eredmény **negatív**, akkor a keresett erőkomponens az általunk feltételezett iránnyal **ellentétesen** fog állni.

A mérnöki számításokban általános, és igen hatékonyan alkalmazható elv, hogy a keresett előjeles mennyiség **előjelét** a számításban kiinduló adatként **feltételezzük**, és így a számítást (mintegy) ismert adatokon, könynyebben végezhetjük el. Ilyen esetekben a **matematikai megoldás előjele azt mutatja meg** (sem többet, sem kevesebbet!), **hogy az általunk feltételezett állás-irány helyes volt-e vagy sem**. Ha a feltételezett irányt **mindig** az alkalmazott koordinátarendszer pozitív ágával megegyezően vesszük fel, akkor az eredmény előjele a feltételezés helyességén túl a komponensnek a **koordinátarendszerben érvényes vetületi előjelét** is szolgáltatja.

Vegyük észre, hogy feltételezésünk helyességét vizsgálva egy **relatív** információhoz jutunk, ami csak a mi választásunk szempontjából értékelhető. A keresett erő irányát mindig szabadon vehetjük fel, tehát a kapott előjel a felvett irány függvényében alakul. Az erőknek a választott koordinátarendszerben értelmezett **vetületi előjelei abszolút** információként **minden erő esetében** csak **ugyanazt az irányt**, a koordinátatengely, mint abszolút viszonyítási rendszer által meghatározott irányt jelölhetik.
A későbbiekben látni fogjuk, hogy a számítás egyszerűsítésére nemcsak a keresett mennyiség előjelét, hanem **nagyságát** is feltételezhetjük (pl. egységnyire), és így a számítási eljárásban csak egy **szorzószámot** kell keresnünk, ami azt adja meg, hogy az általunk felvett (pl. egységnyi) keresett mennyiség **hányszorosa** esetén teljesülnek a matematikai egyenletekben megfogalmazott feltételek.

A számítás egyszerűsítésére a koordinátarendszert úgy vesszük fel, hogy a viszonyítási tengelyként (is) szolgáló **X** tengely az **A** erő hatásvonalának ismert pontján, az **A** ponton menjen át. Így a két keresett erőt meghatározó 3+3=6 adatból az **A** erő hatásvonalának $\mathbf{X_A}$ tengelymetszéke, a **B** erő hatásvonalának $\mathbf{X_B}$ tengelymetszéke és a **B** erő állásszöge ismert, és három ismeretlenként az **A** erő nagyságát és állásszögét (másként: az **A** erő két összetevőjét) valamint a **B** erő nagyságát kell meghatároznunk.



A felírható vetületi és nyomatéki egyenletek:

$$F_{1X}+F_{2X}+F_{3X}+F_{4X}+F_{5X}=\boxed{\sum_{i=1}^{n}F_{iX}=A_X+B_X}$$

$$F_{1Y}+F_{2Y}+F_{3Y}+F_{4Y}+F_{5Y}=\boxed{\sum_{i=1}^{n}F_{iY}=A_Y+B_Y}$$

$$F_{1Y}\times X_{F1}+F_{2Y}\times X_{F2}+F_{3Y}\times X_{F3}+F_{4Y}\times X_{F4}+F_{5Y}\times X_{F5}=\boxed{\sum_{i=1}^{n}M_i^O=A_Y\times X_A+B_Y\times X_B}$$

A felírható **három** egyenletben ismeretlenként az $\mathbf{A_X}$, az $\mathbf{A_Y}$, a $\mathbf{B_X}$ és a $\mathbf{B_Y}$ komponens jelenik meg. Vegyük azonban észre, hogy míg az **A** erő általános állása miatt az $\mathbf{A_X}$ és az $\mathbf{A_Y}$ nagysága **egymástól függetlenül** változhat, a **B** erő hatásvonala adott, így a $\mathbf{B_X}$ és $\mathbf{B_Y}$ nagysága csak arányosan, egymáshoz kötötten változhat, a $\mathbf{B_X}$ és $\mathbf{B_Y}$ esetében **a két összetevő aránya kötött**. A **valóban ismeretlen**, meghatározandó mennyiségek áttekinthetősége érdekében a számítási megoldás során célszerű a **B** erő komponenseit a **B** erő **nagyságával**, mint **paraméterrel** kifejezni, felhasználva a hatásvonal ismert állásszögét.

$$|B_X| = B\cos\alpha_B \quad |B_Y| = B\sin\alpha_B$$

A **kézi** számításokban a hatásvonalak állásszögét általában csak a **0-90°** szögtartományban szoktuk értelmezni, és az így kiadódó (valójában előjel nélküli) vetület **előjelét szemlélet alapján** rendeljük hozzá a kiszámított vetületértékhez. Ugyanakkor a **gépi** számítások megkövetelik a nagyon szigorú és konzekvens előjelértelmezést, ilyen esetekben az állásszöget az **X** tengely pozitív ágától, az óra járásával megegyező irányban a (feltételezett) vektorig kell mérnünk, és ezzel a **vetületek előjelei automatikusan kiadódnak**.

Így a három egyenlet a következőképpen alakul:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = \boxed{A_X} - \boxed{B}\cos\alpha_B \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iY} = \boxed{A_Y} + \boxed{B}\sin\alpha_B \quad \sum_{i=1}^{n} M_i^O = \boxed{A_Y} \times X_A + \boxed{B}\sin\alpha_B \times X_B$$

A három egyenletből a három ismeretlen **egyértelműen** meghatározható, de mindegyik egyenlet (legalább) **két** ismeretlent tartalmaz, tehát a keresett mennyiségeket csak a **teljes egyenletrendszer** megoldásával kaphatjuk meg.

Kézi számítás esetén a számítás gyorsítása és a kapott eredmények hibakockázata miatt igen előnyös, ha az egyenletek csak egy-egy ismeretlent tartalmaznak. Első egyenletként a nyomatékok azonosságát vizsgálva, és a nyomatéki pontot az **A** pontra választva az egyenletben az **A erő nem szerepel**, az egyenletből a **B** ismeretlen **közvetlenül** számítható (megjegyezzük, hogy amennyiben az **A** pont az **X** tengelyen van, akkor a **B** erőnek csak a másik összetevőjével kell számolnunk). Ezek után, a **B** erő ismeretében a két vetületi egyenlet mindegyikében már csak **egy-egy** ismeretlen marad, azaz az **A** erő két keresett összetevője is **egyismeretlenes** egyenletekből számítható (bár ez esetben a **B** eredmény felhasználása miatt az **A** hibakockázata nagyobb).

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^A = \boxed{B}\sin\alpha_B \times (X_B - X_A) \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iX} = \boxed{A_X} - B\cos\alpha_B \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iY} = \boxed{A_Y} + B\sin\alpha_B$$

A **hibakockázat mérséklésére második egyenletként is választhatunk nyomatéki egyenletet**, mégpedig olyan pontra felírva, amelyre **csak egy** ismeretlen erőösszetevő fejt ki nyomatékot. Ilyen pont lehet a **B** erő hatásvonalának **X** tengelymetszéke, hiszen erre a pontra sem a **B** erő, sem az **A** erő **X** irányú összetevője nem forgat, azaz ebből az egyenletből az $\mathbf{A_Y}$ összetevő **közvetlenül** számítható.

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^A = \boxed{B}\sin\alpha_B \times (X_B - X_A) \quad \sum_{i=1}^{n} M_i^B = \boxed{A_Y} \times (X_A - X_B) \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iX} = \boxed{A_X} - B\cos\alpha_B$$

Elvileg az $\mathbf{A_X}$ közvetlen számítására is van lehetőség: ha a nyomatéki pontot a **B** erő hatásvonalának és az $\mathbf{A_Y}$ összetevő hatásvonalának metszéspontjára írjuk fel, ebben a nyomatéki egyenletben csak az $\mathbf{A_X}$ összetevő szerepel. Ezt a megoldást azonban a metszéspont meghatározásának problémája miatt csak ritkán alkalmazzuk. Abban a – meglehetősen gyakori – esetben, ha a **B** erő az **Y** tengellyel párhuzamos, akkor az **X** irányú vetületi egyenletből a **B** erő kiesik, és abból az **A** erő **X** irányú összetevője közvetlenül megkapható.

Megjegyezzük, hogy a fentiekben bevezetett új egyenletek **nem növelik a függetlenül felírható statikai egyenletek számát**, egy egyenértékűség alapján továbbra is csak **három** (matematikailag) független egyenlet írható fel, azaz az **új egyenletek csak egy másik egyenlet helyett**, annak kiváltására alkalmazhatók. A fentiekben bemutatott egyenlet-kombinációk tehát **matematikai**, megoldhatósági **szempontból teljesen egyenértékűek**, különbség csak a **megoldás egyszerűségében**, ill. az **eredmények újrafelhasználásának szükségességében**, azaz az eredmények számítási függetlenségében, hibakockázatában mutatkozik.

Egy feladat megoldása során **tetszőlegesen választhatjuk meg az alkalmazandó három statikai egyenletet**, de az egy egyenértékűségre felírt **negyedik** egyenlet már bizonyosan **az előző egyenletek matematikai következményegyenlete lesz**, azaz azok valamilyen lineáris kombinációjaként előállítható. Ezek az egyenletek ismeretlenek meghatározására már nem alkalmazhatók, de a kiszámított értékek ellenőrzésére igen, hiszen kicsi a valószínűsége, hogy hibás számítás esetén egy más jellegű egyenletből ugyanaz a (hibás) eredmény adódjék.

A helyettesítő erők meghatározása szerkesztéssel

Szerkesztéses megoldásban az erők **hatásvonalait** és **vektorait** tekintjük ismertnek, és a keresett erők esetében is ezeket az adatokat akarjuk meghatározni. A vizsgált feladatban mind az **A** erő, mind a **B** erő helye ismert, az **A** erő hatásvonalának **egy pontját**, a **B** erőnek pedig a **teljes hatásvonalát** ismerjük. A feladat tehát az **A** és **B** erők **vektorainak** előállítása, aholis a **B** erő vektorának az állása ismert, csak a vektor nagyságát kell meghatároznunk.

$$(\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2,\mathbf{F}_3,\mathbf{F}_4,\mathbf{F}_5) \doteq (\mathbf{A},\mathbf{B})$$

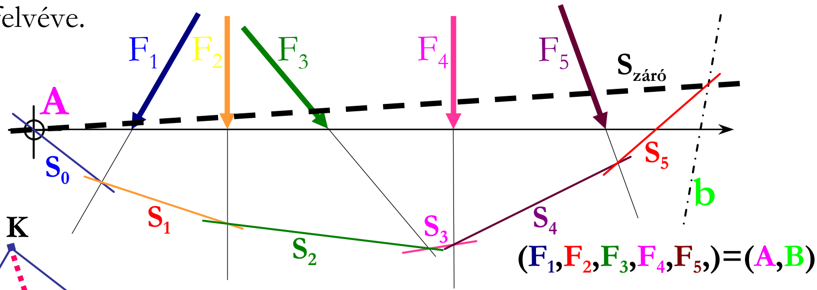
Az egyenértékűség alapján a két oldalon álló erőcsoport eredője mind vektorában, mind geometriai helyében azonos lesz. A helyettesítendő erőrendszer vektorábráját léptékhelyesen felrajzolva a vektorábra **K** kezdőpontja egyúttal az **(A,B)** erőcsoport vektorábrájának kezdőpontja is lesz, **V** végpontja pedig **(A,B)** erőcsoport vektorábrájának végpontja is lesz. Az egyenértékűségben felvett erősorrendet választva a kezdőponthoz az **A** vektor, a végponthoz a **B** vektor csatlakozik. A **B** erő hatásvonala ismert, a **B** vektornak a vektorábrában ezzel a hatásvonallal párhuzamosnak kell lennie. A helyettesítendő erőrendszer vektorábrájának végpontjához illesztve a **B** hatásvonallal párhuzamos egyenest, már csak ezen kell meghatároznunk a **B** vektor kezdőpontjának helyét, ami egyúttal az **A** vektor végpontja is lesz. Ehhez az információhoz azonban a vektorábra már nem elegendő, ehhez az erők pozícióját tartalmazó **geometriai ábrát** kell igénybe vennünk.

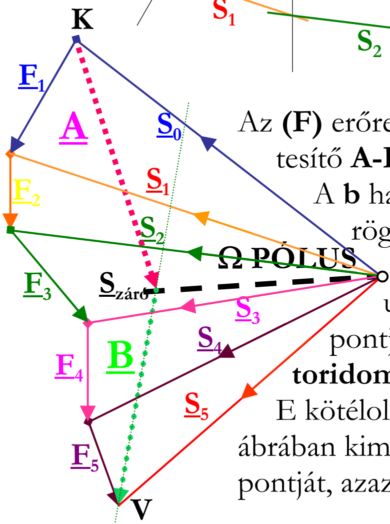
Az egyenértékűség két oldalán álló erőcsoportok eredőinek nemcsak a vektora, hanem a **helye** is azonos lesz. Az eredő helyét (hatásvonalának egy pontját) a kötélsokszög-szerkesztésben az első erőt megelőző és az utolsó erőt követő kötéloldalak metszéspontja határozza meg. A helyettesítendő és a helyettesítő erőrendszer eredőinek azonos pozícióját akkor tudjuk garantálni, ha mindkét erőrendszer kötélsokszögében az első erőt megelőző és az utolsó erőt követő kötéloldal azonos. Ehhez az szükséges, hogy a helyettesítendő és a helyettesítő erők vektorábrájában azonos Ω póluspontot vegyünk fel, és a geometriai ábrában az első erőt megelőző kötéloldal egyenesét is mindkét erőcsoportra azonosra válasszuk. Így valójában a két erőrendszer vektorábrája egyesíthető, és az ábrában (az $\underline{\mathbf{A}}$ és $\underline{\mathbf{B}}$ vektorok közötti vektoridom-sugár kivételével) az összes vektoridom-sugár megrajzolható.

A vektorábra alapján a **helyettesítendő erők kötélsokszöge** is megrajzolható, mégpedig úgy, hogy az **első erőt megelőző kötéloldalt** (az állása megtartásával) **szabadon vesszük fel**. A korábbiakban megállapítottuk, hogy az eredő azonossága érdekében a helyettesítendő és a helyettesítő erők vektorábrájának azonossága mellett a **kötélsokszögeik első és utolsó kötéloldalainak azonosságát** is biztosítanunk kell. Ugyanakkor azt is láttuk, hogy a kötélsokszögben **egy erő hatásvonalát** a vektorábrában az erő vektorához illeszkedő **vektoridomsugaraknak megfelelő kötéloldalak azonos pontban metszik**. Minthogy a helyettesítő erők közül az egyiknek, az ismert ponthoz rögzített, de ismeretlen állásszögű (esetünkben **A** jelű) erőnek a hatásvonalából **csak egy pont**, nevezetesen az **A** pont ismert, az <u>**A**</u> vektorhoz csatlakozó két kötéloldal metszéspontjaként **csak ezt a pontot** használhatjuk fel. Ehhez a kötélsokszög **első** (a közös vektorábra alapján ismert állású) **kötéloldalát ezen a ponton átmenő egyenesként** kell felvennünk. A kötélsokszögek első és utolsó kötéloldalának azonossága alapján az utolsó (a **B** erőt követő) kötéloldal a helyettesítendő erők kötélsokszögének utolsó kötéloldalával azonosan szintén felrajzolható. Az **A** és **B** erőre szerkeszthető kötélsokszögből már csak az a kötéloldal hiányzik, amely az **A** erőt követi és a **B** erőt megelőzi, azaz az **A** hatásvonalát abban a pontban metszi, ahol az első kötéloldal, a B hatásvonalát pedig abban a pontban, ahol az utolsó kötéloldal. Ezek a pontok a geometriai ábrában ismertek, összekötésükkel a hiányzó kötéloldal berajzolható. Ennek alapján viszont a vektorábrában megszerkeszthető az <u>**A**</u> **vektor végpontjához** és a <u>**B**</u> **vektor kezdőpontjához** tartozó (eddig ismeretlen állászögű) **vektoridomsugár**. A <u>**B**</u> vektor **állásának** és az <u>**A**</u>-<u>**B**</u> vektorok közötti vektoridomsugár **állásának** ismerete a vektorábrában meghatározza a <u>**B**</u> **vektor kezdőpontját**, és ezzel egyúttal az <u>**A**</u> **vektor végpontját**, vagyis az általunk **keresett ismeretleneket**.

A **helyettesítési feladat megoldhatósága természetesen nem függ a keresett erők helyzetétől** (az ismert pont, amin az egyik helyettesítő erőnek át kell mennie, **tetszőleges** helyzetű lehet) **és sorrendjétől sem**. A szerkesztés elvének ismeretében azonban látható, hogy a **helyettesítendő és a helyettesítő erőcsoport kötélsokszögeinek azonossága** és az **erőket megelőző-követő kötéloldalaknak a hatásvonallal alkotott közös metszéspontja csak úgy biztosítható, ha a kötélsokszög első kötéloldalát az ismeretlen állású erő hatásvonalának (egyelőre egyetlen) ismert pontjához illesztve vesszük fel**.

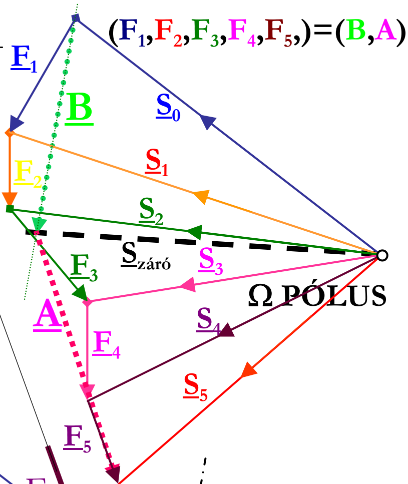
A következő ábrákon a már korábban is bemutatott erőrendszer helyettesítését mutatjuk be, az ismeretlen erőket először **A-B**, majd **B-A** sorrendben felvéve.

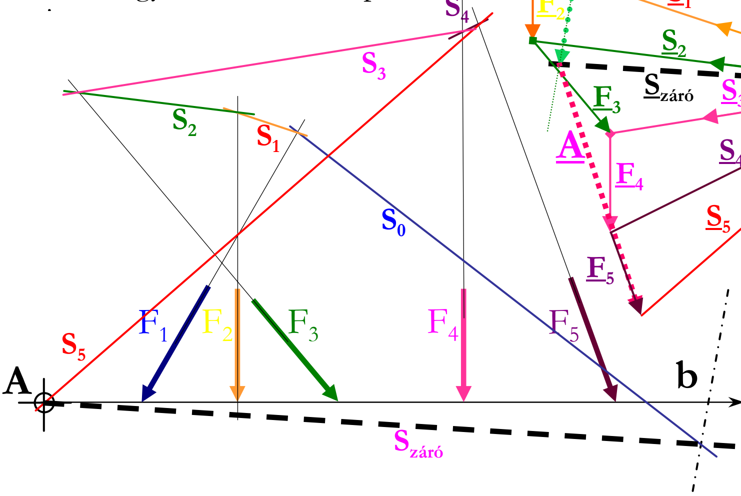




Az **(F)** erőrendszer vektorábrájának végpontja a helyettesítő **A-B** erőrendszer **B** vektorának végpontja is. A **b** hatásvonalat ide illesztve a **B** vektor állását rögtön megkapjuk. Az első kötéloldal és az **a** hatásvonal metszéspontját, az **A** pontot az utolsó kötéloldal és a **b** hatásvonal metszéspontjával összekötve a vektorábra **hiányzó vektoridomsugarával párhuzamos kötéloldalt** kapjuk. E kötéloldallal párhuzamos vektoridomsugár a vektorábrában kimetszi a **B** vektor **kezdő**- és az **A** vektor **vég**pontját, azaz előállítja a keresett erőnagyságokat.

A helyettesítő erők sorrendjének felcserélése esetén az **A** vektorhoz az $\mathbf{S_5}$ vektoridomsugár csatlakozik, emiatt az $\mathbf{S_5}$ kötéloldal egyenesét kell az **A** ponton átve-



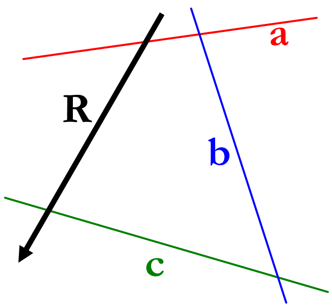


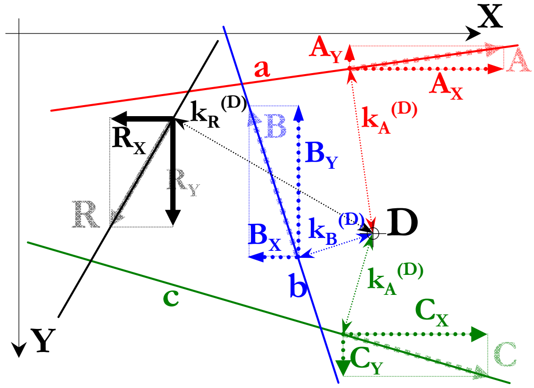
3.4.4. Helyettesítés három, ismert hatásvonalba eső erővel

Mint azt a korábbi feladatokban észrevehettük, a helyettesítés során a helyettesítő erőrendszernek **három ismeretlen adatát** tudjuk a rendelkezésre álló statikai egyenletek felhasználásával meghatározni. Így helyettesítő erőrendszerként választhatunk **három, ismert hatásvonalú, de ismeretlen nagyságú erőkből álló erőcsoportot is**. Ez esetben a hatásvonalak az erők geometriai pozícióit és állásszögét egyértelműen meghatározzák, ismeretlenként csak az erők **nagyságát** kell előállítanunk.
Minthogy egy erőrendszert az **eredőjével** helyettesíthetünk, a továbbiakban (a számítási-szerkesztési elvek tisztább bemutatása érdekében) az **(F)** erőrendszer helyett mind a számításban, mind a szerkesztésben annak **R** eredőjét fogjuk szerepeltetni.

A helyettesítő erők (nagyságának) meghatározása számítással

A helyettesítendő erők, ill. a fentiek szerint azok **R** eredője mellett a három, helyettesítő erő **hatásvonala** is ismert, így a keresett erők az **X** és **Y** tengelyekre vett vetületi, és a sík egy tetszőleges (pl.: **D**) pontjára vett nyomatéki egyenletekből **egyértelműen előállíthatók**. Az egyenletek felírásához a keresett erők **irányát** (és ezzel vetületeik-nyomatékaik előjelét **fel kell tételeznünk**. Ha a számítási eredmény **pozitív** előjelűre adódik, a **feltételezett irány helyes** volt, ha az előjel **negatív**, a keresett erő iránya az általunk **felvett iránnyal ellentétes** lesz.





$$R \doteq (A,B,C) \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_{iX} = R_Y = A_X + B_X + C_X \\ \Sigma F_{iX} = R_Y = A_Y + B_Y + C_Y \\ \Sigma M_i^{(D)} = M_R^{(D)} = M_A^{(D)} + M_B^{(D)} + M_C^{(D)} \end{cases}$$

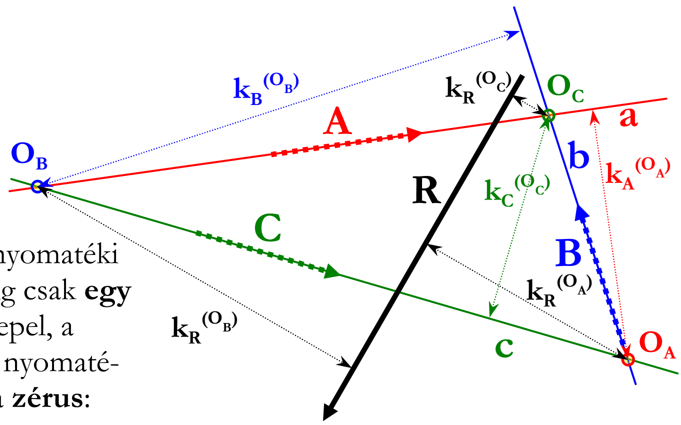
Általános esetben a statikai egyenletek háromismeretlenes lineáris egyenletrendszert alkotnak, és a keresett erőnagyságok csak a **teljes egyenletrendszer megoldásaként** állíthatók elő.
A megoldás **lényegesen egyszerűbb**, ha sikerül elérnünk, hogy a lineáris egyenletrendszerben a vegyes indexű együtthatók zérus értékűek legyenek, azaz **egy-egy egyenlet csak egy-egy ismeretlent** tartalmazzon. Erre a **nyomatéki egyenlet** kínál biztos lehetőséget, hiszen a nyomatéki pontot teljesen szabadon vehetjük fel. Tudjuk, hogy azok az erők, amelyeknek hatásvonalán a nyomatéki pont rajta van erre a pontra nem fejtenek ki elforgató hatást, erre a pontra vett forgatónyomatékuk zérus. Ha pedig olyan pontot választunk nyomatéki (forgásközép)pontnak, amelyen **két ismeretlen erő hatásvonala is átmegy** (a két ismeretlen erő hatásvonalainak **metszéspontja**), akkor erre a pontra az ismeretlen erők közül **csak a harmadiknak** van nyomatéka, és így a keresett erőnagyság az egyismeretlenes nyomatéki egyenletből **közvetlenül** meghatározható.

A három, ismert hatásvonalú erővel történő helyettesítés feladatkörében **a két ismeretlen erő hatásvonalának metszéspontját a harmadik erő főpontjának, azt az eljárást, ami a keresett erőnagyságot a főpontra felírt nyomatéki egyenletből állítja elő, főponti módszernek nevezzük**.

A nyomatéki egyenlet után a vetületi egyenletek szoktak következni, de általános esetben a két vetületi egyenlet is összefügg, kétismeretlenes egyenletrendszert alkot. Ugyanakkor az első nyomatéki egyenlet felírása után az erőrendszer „nem tudja”, hogy a nyomatéki egyenletet már felhasználtuk, így egy újabb ismeretlen meghatározására is alkalmazhatunk nyomatéki egyenletet.

Az egy erőrendszerre felírható **három statikai egyenletben** nem kötelező vetületi egyenletet alkalmazni, **használhatunk kizárólag nyomatéki egyenleteket is**. Az egyenletek **matematikai függetlenségének** biztosítására csak azt kell kikötnünk, hogy **az a három pont, amelyekre a nyomatéki egyenleteket felírjuk, ne essék egy egyenesbe**.

$$\mathbf{R} \doteq (\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$$



A főpontokra felírt nyomatéki egyenletekben mindig csak **egy ismeretlen erő** szerepel, a többi ismeretlen erő nyomatéka ezekre a pontokra **zérus**:

$$\Sigma M_i^{(O_A)} = M_R^{(O_A)} = M_A^{(O_A)} + M_B^{(O_A)} + M_C^{(O_A)}$$
$$\Sigma M_i^{(O_B)} = M_R^{(O_B)} = M_A^{(O_B)} + M_B^{(O_B)} + M_C^{(O_B)}$$
$$\Sigma M_i^{(O_C)} = M_R^{(O_C)} = M_A^{(O_C)} + M_B^{(O_C)} + M_C^{(O_C)}$$

A nyomatéki egyenleteket egyszerűsítve, a nyomatékokat az erők és erőkarok szorzataival helyettesítve, a fenti ábra erőirányait alkalmazva:

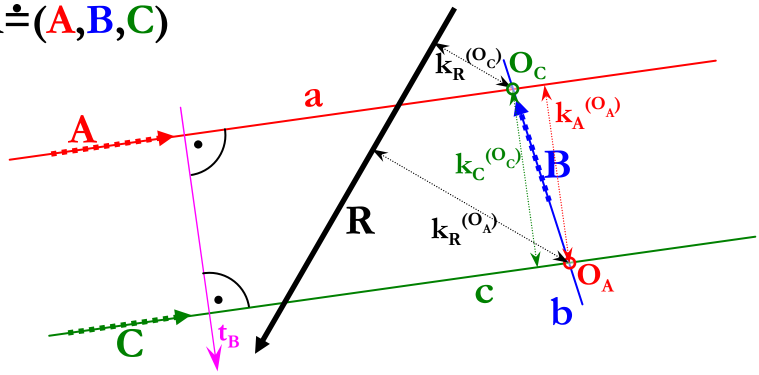
$$\Sigma M_i^{(O_A)} = M_R^{(O_A)} = \boxed{-R \times k_R^{(O_A)} = +A \times k_A^{(O_A)}} = M_A^{(O_A)}$$
$$\Sigma M_i^{(O_B)} = M_R^{(O_B)} = \boxed{+R \times k_R^{(O_B)} = -B \times k_B^{(O_B)}} = M_B^{(O_B)}$$
$$\Sigma M_i^{(O_C)} = M_R^{(O_C)} = \boxed{-R \times k_R^{(O_C)} = -C \times k_C^{(O_C)}} = M_C^{(O_C)}$$

Az ismert hatásvonalú erők egyismeretlenes egyenletekből egyszerűen meghatározhatók. A fenti példákban **A** és **B** negatívra, **C** pozitívra adódik, azaz **A** és **B** iránya a feltételezettel ellentétes, **C** iránya megegyező.

Általános állású hatásvonalak esetén a hatásvonalak metszéspontjai páronként fellelhetők, és pozíciójuk (trigonometriai vagy hasonlósági összefüggésekkel) meg is határozható, így a főponti módszer mindhárom ismeretlen helyettesítő erő nagyságának meghatározására alkalmas.

Ha a keresett erők hatásvonalai közül **kettő párhuzamos**, akkor ezeknek **nincs metszéspontja**, tehát a **harmadik** ismeretlen erőnagyság előállítására a **főponti nyomatéki módszer nem használható**. Ez esetben viszont a **párhuzamos hatásvonalpárra merőlegesen felvett tengelyre felírt vetületi egyenletben csak a harmadik erő nagysága szerepel**, azaz a keresett erőnagyság ez esetben is a többitől **függetlenül**, **egyismeretlenes** egyenletből határozható meg.

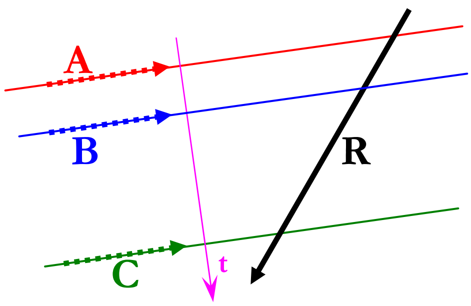
$$R \doteq (A,B,C)$$



$$\Sigma M_i^{(O_A)} = M_R^{(O_A)} = M_A^{(O_A)} + M_B^{(O_A)} + M_C^{(O_A)}$$
$$\Sigma F_{i,tB} = R_{tB} = A_{tB} + B_{tB} + C_{tB}$$
$$\Sigma M_i^{(O_C)} = M_R^{(O_C)} = M_A^{(O_C)} + M_B^{(O_C)} + M_C^{(O_C)}$$

Ha **mindhárom ismeretlen erő párhuzamos**, de a helyettesítendő **eredő nem párhuzamos velük**, akkor az eredőnek a helyettesítő erőkre merőleges vetületét egyik erő sem képes helyettesíteni, a **feladatnak nincs megoldása**.

Matematikailag a **t** tengelyre felírt vetületi egyenletben **nincs ismeretlen**, azaz nincs olyan kereshető, felvehető mennyiség, aminek a helyes megválasztásával az ebben az egyenletben megtestesülő feltételt (hogy ti. az összes erőnek a **t** tengelyre vett vetülete zérus legyen) ki lehetne elégíteni.



Ha az eredőt **három, egymással is, és az eredővel is párhuzamos erővel** akarjuk helyettesíteni, akkor a rájuk merőleges **t** tengelyre felírható vetületi egyenlet **üres** lesz, **nem hordoz információt**, a vizsgálatból **elhagyható**. Így viszont a megmaradó **két** (matematikailag független) **statikai egyenlet nem elegendő a három ismeretlen** helyettesítő erő nagyságának meghatározására: **a feladat** (statikailag) **határozatlan**.
Matematikailag az egyenletek számát meghaladó ismeretlenek esetén a feladatnak végtelen sok (paraméteres) megoldása van, amelyek mindegyike kielégíti az egyenletekben megfogalmazott feltételeket. Ezek közül egy,

konkrét megoldást csak újabb feltétel (egyenlet) megadásával lehet kiválasztani.

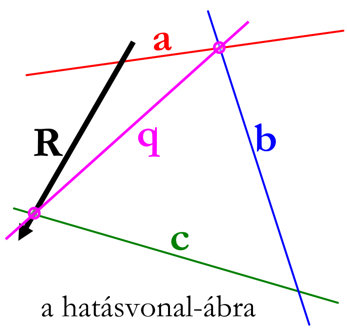
A helyettesítő erők (nagyságának) meghatározása szerkesztéssel

A feladatok szerkesztéses megoldása során mindig külön-külön kell biztosítanunk a **hatásvonalakra** és a **vektorokra** vonatkozó feltételek teljesülését. A második axióma például azt fogalmazza meg, hogy **két erő eredőjének hatásvonala** tartozik átmenni a **két erő hatásvonalainak metszéspontján**, **vektorának kezdő- és végpontja pedig tartozik megegyezni a két erő** (nyílfolytonos) **vektorábrájának kezdő- és végpontjával**. Sajnálatos módon, a tárgyalandó feladatban nem két erő és egy eredő, hanem három erő és egy eredő helyettesítési feltételeit kell megvizsgálnunk. Ha azonban a **három** ismeretlen nagyságú erő közül **kettőt** ideiglenesen egy (rész)eredővel helyettesítünk, az eredeti egyenértékűségben a helyettesítő erők száma **kettőre** csökken, és így a II. axiómában megfogalmazott feltételek felhasználhatók a keresett erőnagyságok meghatározására.

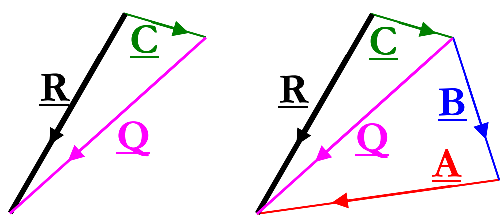
Az egyenértékűségek

$$\mathbf{R} \doteq (\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}) \qquad \mathbf{Q} \doteq (\mathbf{A},\mathbf{B}) \qquad \mathbf{R} \doteq (\mathbf{Q},\mathbf{C})$$

alapján a **Q** segéderő az **A** és **B** erőket helyettesíti, így hatásvonalának át kell mennie az **A** és **B** erők hatásvonalainak metszéspontján. Másrészt viszont az eredeti egyenértékűségben az **A** és **B** erők helyére iktatott **Q** erő a **C** erővel együtt helyettesíti az **R** erőt, így az **Q** és **C** erők hatásvonalainak az **R** erő hatásvonalán kell metsződnie. E két geometriai feltétel egyértelműen meghatározza a **Q** (segéd)erő **q** hatásvonalát, és ennek ismeretében az **R** vektor felhasználásával felszerkeszthetővé teszi a helyettesítő **Q** és **C** vektorok (nyílfolytonos) vektorábráját. A **Q** erő az **A** és **B** erők helyettesítésére született, így vektora és az **a**-**b** hatásvonalak ismeretében az **A** és **B** erők vektorai is megszerkeszthetők.

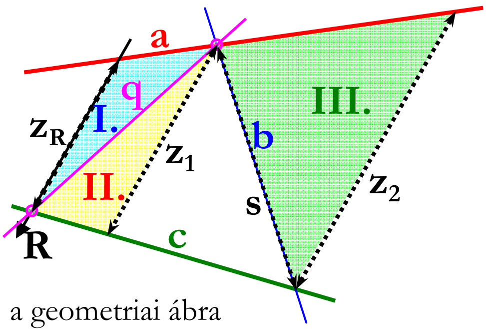


a hatásvonal-ábra

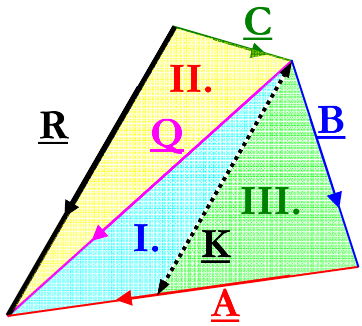


a vektorábrák

A fenti szerkesztési eljárás első alkalmazójáról Karl CULMANN-ról a CULMANN-szerkesztés nevet viseli.
Abban a meglehetősen gyakori esetben, amikor a három, ismert hatásvonalú erő **egyike** a helyettesítendő erővel közel **párhuzamos**, kettő pedig a helyettesítő erőre közel merőleges hatásvonalú, a CULMANN-szerkesztésen alapuló hasonlósági tulajdonságok felhasználásával az eredővel közel párhuzamos állású erő nagyságának meghatározására igen egyszerű összefüggés vezethető le.



a geometriai ábra



a vektorábra

A **hatásvonalak** és a **vektorok párhuzamossága** alapján megállapítható, hogy a **geometriai** és a **vektorábra** azonos jelölésű háromszögei, ill. az **I.** és **II.** háromszögek által alkotott négyszögek **hasonlóak**. Ennek alapján:

$$K:R=z_R:z_1 \qquad B:K=s:z_2 \qquad B=K\times\frac{s}{z_2}=R\times\frac{z_R}{z_1}\times\frac{s}{z_2}=R\times\frac{s\times z_R}{z_1\times z_2}$$

Az eredővel (közel) párhuzamos állású erő **nagysága** tehát az eredő **nagyságából** egy **geometriai metszékekből álló tört szorzásával** kapható, ahol a **metszékek mindegyike a másik két hatásvonal között** olvasandó le, és a **z** jelű metszékek mindegyike az eredő hatásvonalával **párhuzamos**. Az **s** jelű metszék a **keresett erő** hatásvonalának a másik két erő hatásvonala közé eső szakasza, a $\mathbf{z_R}$ jelű metszék az **eredő** hatásvonalának a másik két erő hatásvonala közé eső szakasza, a $\mathbf{z_1}$ és $\mathbf{z_2}$ jelű metszék a **keresett erő és a másik erők hatásvonal-metszéspontjaiban** az eredővel **párhuzamosan** berajzolt egyeneseknek a másik két erő hatásvonala közé eső szakasza. Az összefüggés a keresett eredőnek **csak a nagyságát** szolgáltatja, az irányát szemléletből (vázlatos vektorábra, főponti nyomaték előjelének becslése) alapján kell megállapítanunk.
A fenti képletet (származtatása okán) **hasonlósági módszerként** tartja nyilván a szakirodalom. (Megjegyezzük, hogy a hasonlósági összefüggése-

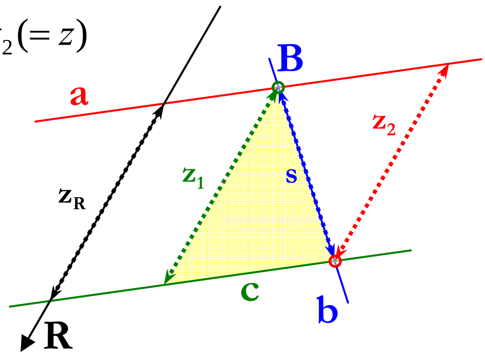
ket más esetekben is fel szoktuk használni, de a hasonlósági megnevezést **csak erre az eljárásra** alkalmazzuk.)
Ha a két másik hatásvonal **párhuzamos**, akkor – a párhuzamosok közé zárt párhuzamosok szabályának megfelelően – az eredő hatásvonalán, ill. a vele párhuzamosan felvett egyeneseken képződő metszékek hossza **azonos** lesz, így a **B** erő nagyságának meghatározására szolgáló összefüggésünk tovább egyszerűsödik:

$$B = R\frac{s \times z_R}{z_1 \times z_2}, ahol: z_R = z_1 = z_2 (= z)$$

Az azonos értékekkel egyszerűsítve:

$$B = R\frac{s}{z}$$

ami az ábrában megjelölt geometriai és vektorháromszög oldalarányai alapján is megkapható.



Ha a helyettesítendő eredő még merőleges is az **a** és **b** hatásvonalra, akkor a $\mathbf{z_R}$, $\mathbf{z_1}$ és $\mathbf{z_2}$ metszékek az **a** és **b** hatásvonalak távolságával egyeznek meg, és a számítás tovább egyszerűsödik.

Megjegyezzük, hogy a hasonlósági módszer alkalmazása főleg akkor előnyös, ha a helyettesítendó erő(k eredője) **függőleges** állású, mert más esetben a hatásvonalával párhuzamos, **z** jelű metszékek meghatározása számítási nehézségekkel járhat. Különösen gyors és egyszerű a megoldás akkor, ha az eredő függőlegessége mellett a **másik két** erő hatásvonala **párhuzamos**, esetleg az **eredőre merőleges**.

3.5. Az erők egyensúlyozása

Az egyensúly megteremtése, a tartószerkezetekre működő erők és hatások egyensúlyának biztosítása a legfontosabb statikai feladat.
Egy erőrendszer egyensúlyának feltételeit már az eredőkeresés feladatának diszkussziójában láttuk, itt azonban (fontosságára való tekintettel) ismételten összefoglaljuk.
Az egyensúly feltétele számítás esetén:

Egy (síkbeli) **erőrendszer akkor és csak akkor lehet egyensúlyban**, ha az elemeire felírt **két, nem párhuzamos tengelyre vonatkozó vetületi egyenlet, és a sík tetszőleges pontjára felírt nyomatéki egyenlet zérust ad** eredményül. Az egyensúly akkor is fennáll, ha a vetületi egyenlet(ek) helyett nyomatéki egyenleteke(et) alkalmazunk, de a **két** nyomatéki egyenlet alkalmazása során a **nyomatéki pontok nem lehetnek a vetületi tengellyel párhuzamos egyenesen**, **három** nyomatéki egyenlet alkalmazása esetén pedig a **nyomatéki pontok nem lehetnek egy egyenesen**.

Az egyensúly feltétele szerkesztés esetén:

Egy (síkbeli) **erőrendszer akkor és csak akkor lehet egyensúlyban, ha az erők vektorábrája zárt** (az első vektor kezdőpontja és az utolsó vektor végpontja egybeesik), **és a hatásvonalakra szerkesztett kötélsokszög is zárt** (az első erőt megelőző és az utolsó erőt követő kötéloldal egybeesik). A **kötélsokszögszerkesztésben** az erőrendszerben szereplő **koncentrált nyomatékokat** is figyelembe kell venni, akár úgy, hogy erőpárként jelenítjük meg őket, akár úgy, hogy valamelyik koncentrált erőhöz hozzáadva, annak helyzetét módosítjuk hatásuk figyelembe vételére.

A **helyettesítés** és az **egyensúlyozás** (bizonyos értelemben) egymás **inverz műveletei**, azaz a bizonyos feltételeket kielégítő **helyettesítő dinámok ellentettjei** az ugyanazon feltételeket kielégítő **egyensúlyozó dinámok lesznek**.

$$\mathbf{(F)\doteq R \qquad [(F),Q]\doteq 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q\doteq R'}$$

3.5.1. Egyensúlyozás egyetlen erővel

Ha egy erőrendszer egyetlen erővel helyettesíthető, azaz **létezik az eredő erő**, akkor az **eredő ellentettje** (az előző pontban bemutatott általános egyenértékűségeknek megfelelően) **egyúttal az erőrendszer egyensúlyozó ereje lesz**:

$$(F) \doteq R \qquad [(F),R'] \doteq 0 \Rightarrow Q \doteq R' \qquad [(F),Q] \doteq 0$$

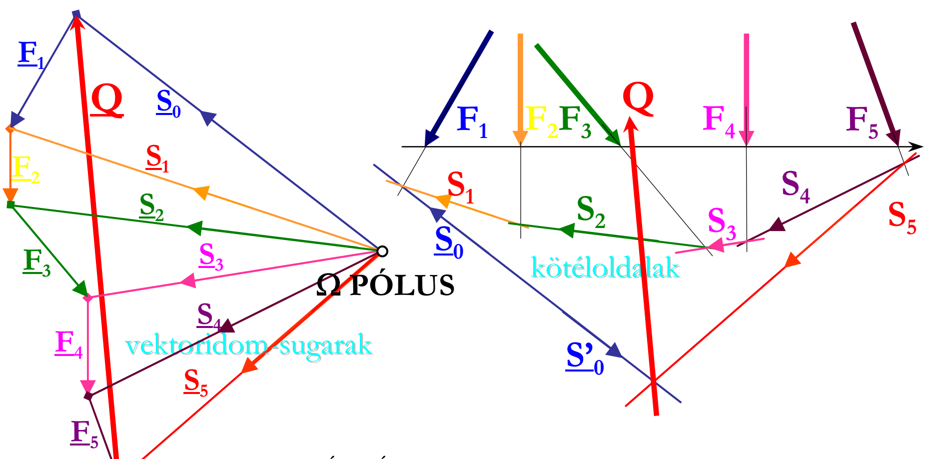
Az egyensúlyozó erő nagyságának, vetületeinek, állásának, helyének meghatározására mindazok az eljárások, módszerek alkalmasak és használhatók, amelyeket az erőrendszer egyetlen erővel történő helyettesítési feladata esetében ismertettünk.

Számítás esetén:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} + Q_X = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iY} + Q_Y = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} M_i + M_Q = 0$$

Szerkesztés esetén:

$$(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, Q) \doteq 0$$



A VEKTOROK ÁBRÁJA A HATÁSVONALAK ÁBRÁJA

Az egyensúlyhoz szükséges a **vektorábra zártsága**, ennek alapján az egyensúlyozó erő **vektorát** tudjuk előállítani. A vektorábrát a hatásvonalaktól függetlenül is megszerkeszthetjük.

Az egyensúlyhoz szükséges a **kötélsokszög zártsága**, ennek alapján az egyensúlyozó erő **helyét** tudjuk előállítani. Az egyensúlyozó erő helyének meghatározása során a koncentrált nyomatékok hatását is figyelembe kell vennünk.

3.5.2. Egyensúlyozás egy ismert ponton átmenő erővel

(és egy vele együtt működő erőpárral)

Az erőrendszert egy ismert ponton átmenő erővel, és egy, vele egyidejűleg működtetett erőpárral már tudjuk helyettesíteni. Az **(F)** erőrendszer egyensúlyozására – ugyancsak egy ismert ponton átmenő erővel, és egy, vele egyidejűleg működtetett erőpárral – a helyettesítő dinámok **ellentettjei** alkalmazhatók:

$$\mathbf{(F)\doteq(A,M_A)\quad[(F),Q_A,M_{QA}]\doteq 0\qquad Q_A,M_{QA}\doteq(A',M_A')}$$

A $\mathbf{Q_A}$ egyensúlyozó **társerő** és az $\mathbf{M_{QA}}$ egyensúlyozó **társerőpár** meghatározására ugyanazok a módszerek alkalmasak, amelyeket a helyettesítési feladatban megtárgyaltunk.

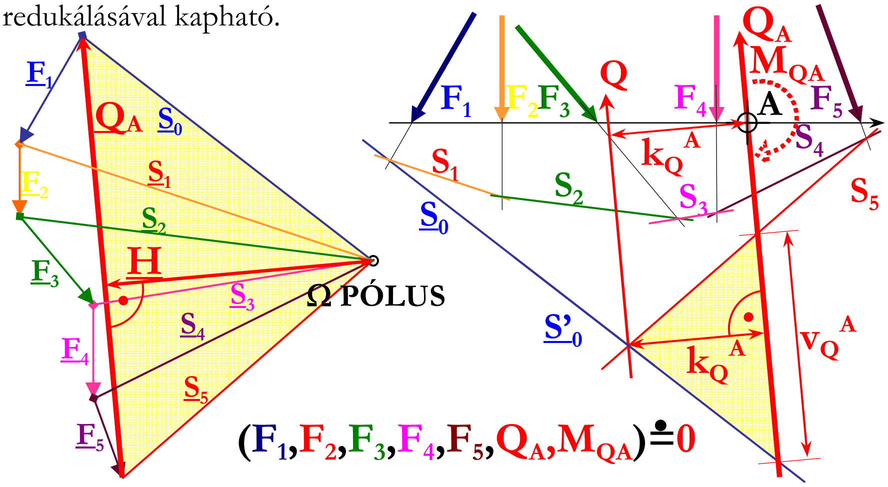
Számítás esetén:

A koordinátatengelyekre felírt vetületi egyenletekben az egyensúlyozó $\mathbf{M_{QA}}$ nyomaték nem szerepel, innen az egyensúlyozó társerő összetevői közvetlenül számíthatók. Az **A** pontra felírt nyomatéki egyenletben viszont a társerő összetevői nem szerepelnek, ebből az egyenletből tehát közvetlenül az egyensúlyozó társerőpár nagysága határozható meg.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX}+Q_{AX}=0\qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iY}+Q_{AY}=0\qquad \sum_{i=1}^{n} M_i^{(A)}+M_{QA}=0$$

Szerkesztés esetén:

A $\mathbf{Q_A}$ egyensúlyozó társerő vektora az **A** pont helyétől függetlenül, a vektorábra alapján határozható meg, és megegyezik az eredővektor ellentettjével. Az egyensúlyozó $\mathbf{M_{QA}}$ erőpár a **Q** egyensúlyozó erőnek az **A** pontra redukálásával kapható.

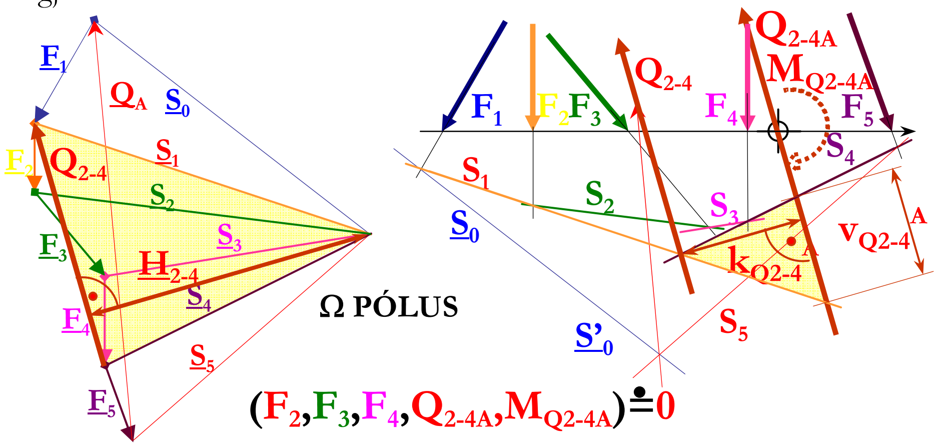


Az $\mathbf{M_{QA}}$ egyensúlyozó társerőpár legegyszerűbben a **Q** egyensúlyozó erőből a **Q** hatásvonala és az **A** pont közötti merőleges távolság, a $\mathbf{k_{QA}}$ kar szorzataként kapható. A vektorábrában és a kötélsokszögben bejelölt háromszögek hasonlósága alapján (bevezetve a **Q** vektorra merőleges **H** pólustávolság, és az A ponton átmenő, a **Q** erővel párhuzamos egyenesből a **Q**-hoz tartozó két kötéloldal által kimetszett $\mathbf{v_{QA}}$ metszék fogalmát) a társerőpár ezek szorzataként is felírható:

$$\frac{Q}{H}=\frac{v_Q^A}{k_Q^A} \qquad M_{QA}=Q\times k_Q^A=H\times v_Q^A$$

Ez a megoldás számítási munkában nem kevesebb, előnye viszont, hogy a **H** pólustávolság konstans értéke miatt a $\mathbf{v_{QA}}$ metszékben **grafikusan** szolgáltatja egy erőrendszernek, vagy akár kisebb rész-erőrendszernek a sík kiválasztott pontjára vonatkozó nyomatékát. Ez a grafikus nyomatékszerkesztés **mind a helyettesítési**, **mind az egyensúlyozási** feladatokban alkalmazható, csak a keletkező nyomaték **előjelét** kell (a figyelembe vett helyettesítő vagy egyensúlyozó erő alapján) szemléletből felvenni.

Ha nem a teljes erőrendszer nyomatékát akarjuk meghatározni, akkor a **rész-erőrendszer eredőjének vektorához tartozó vektoridom-sugarat** kell alkalmaznunk, és a kiválasztott ponton keresztül **a rész-erőrendszer eredőjével párhuzamos egyenesből** kell a **rész-erőrendszert megelőző és követő kötéloldalakkal** meghatározni a nyomatékot grafikusan megjelenítő **v** metszéket.



Minthogy egy rögzített erőcsoporthoz a **H** pólustávolság konstans, az erőcsoport által a sík pontjaira kifejtett nyomaték a **v** metszékekben grafikusan, ábraszerűen kirajzolódik.

3.5.3. Egyensúlyozás egy ismert ponton átmenő, és egy ismert hatásvonalba eső erővel

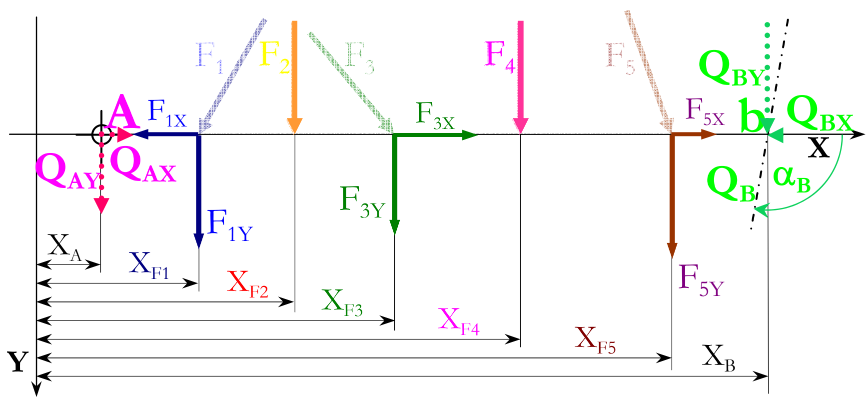
Az **A** ponton átmenő, és a **b** hatásvonalba eső egyensúlyozó erő ez esetben is az **A** ponton átmenő és **b** hatásvonalba eső helyettesítő erők ellentettje lesz, és meghatározási eljárásaik is azonosak a helyettesítő erőknél tárgyalt lehetőségekkel.

$$(\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2,\mathbf{F}_3,\mathbf{F}_4,\mathbf{F}_5) \doteq (\mathbf{A},\mathbf{B}) \qquad [(\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2,\mathbf{F}_3,\mathbf{F}_4,\mathbf{F}_5),\mathbf{Q}_A,\mathbf{Q}_B] \doteq 0$$

$$(\mathbf{Q}_A,\mathbf{Q}_B) \doteq (\mathbf{A'},\mathbf{B'})$$

Az egyensúlyozó erők meghatározása számítással

A számítási megoldáshoz az erőket tengelyirányú összetevőikkel helyettesítjük, majd a vetületi-nyomatéki egyenletekben ezeket a vetületeket szerepeltetjük. Az ismert állású $\mathbf{Q_B}$ erő esetében a két összetevő a $\mathbf{Q_B}$ nagyságának, mint paraméternek a segítségével az állásszög szögfüggvényeivel felírható.



Az általános, mindig használható háromismeretlenes egyenletrendszer megoldása helyett az egyenletek ügyes felvételével elérhetjük, hogy az ismeretlen erőkomponensek **egyismeretlenes** egyenletekből legyenek meghatározhatók.

Első egyenletként a csak a hatásvonalának egyetlen pontjával megadott erő ismert pontjára, az **A** pontra írjuk fel a nyomatéki egyenletet, mert ebben az egyenletben az $\mathbf{Q_A}$ erő két összetevője nem szerepel, és innen a $\mathbf{Q_B}$ erő nagysága közvetlenül számítható. A továbbiakban a két koordinátatengelyre felírt vetületi egyenletből az $\mathbf{Q_A}$ erő két összetevője számítható. A függőleges vetületi egyenlet helyett második egyenletként felírható a nyomatéki egyenlet a **b** hatásvonal és az $\mathbf{Q_{AX}}$ hatásvonal metszéspontjára, mert ez esetben még a $\mathbf{Q_B}$ erő (korábban már meghatározott) értékét sem kell felhasználnunk az $\mathbf{Q_{AY}}$ összetevő számítására. Természetesen az egy erőrendszerre felírható független statikai egyenletek száma a 3-at nem haladhatja meg, a negyedik és a további egyenletek új ismeretlenek meghatározására nem alkalmasak, csak ellenőrzésre használhatók.

A FELÍRHATÓ STATIKAI EGYENLETEK (3 számítási és 1 ellenőrző egyenlet)	
$\Sigma M_i^{(A)} = \Sigma F_{iY} \times (X_i - X_A) + Q_{BY} \times (X_B - X_A) = 0$	$\Sigma M_i^{(A)} = \Sigma F_{iY} \times (X_i - X_A) + Q_{BY} \times (X_B - X_A) = 0$
$\Sigma F_{iY} + Q_{AY} + Q_{BY} = 0$	$\Sigma M_i^{(B)} = \Sigma F_{iY} \times (X_i - X_B) + Q_{AY} \times (X_A - X_B) = 0$
$\Sigma F_{iX} + Q_{AX} + Q_{BX} = 0$	$\Sigma F_{iX} + Q_{AX} + Q_{BX} = 0$
$\Sigma M_i^{(B)} = \Sigma F_{iY} \times (X_i - X_B) + Q_{AY} \times (X_A - X_B) = 0$	$\Sigma F_{iY} + Q_{AY} + Q_{BY} = 0$
könnyebb számítás, nehezebb ellenőrzés	nehezebb számítás, könnyebb ellenőrzés

Ha az egyensúlyozandó erőrendszerben **koncentrált nyomatékok** (erőpárok) is vannak, a **nyomatéki** egyenletekben ezek hatását is figyelembe kell venni!

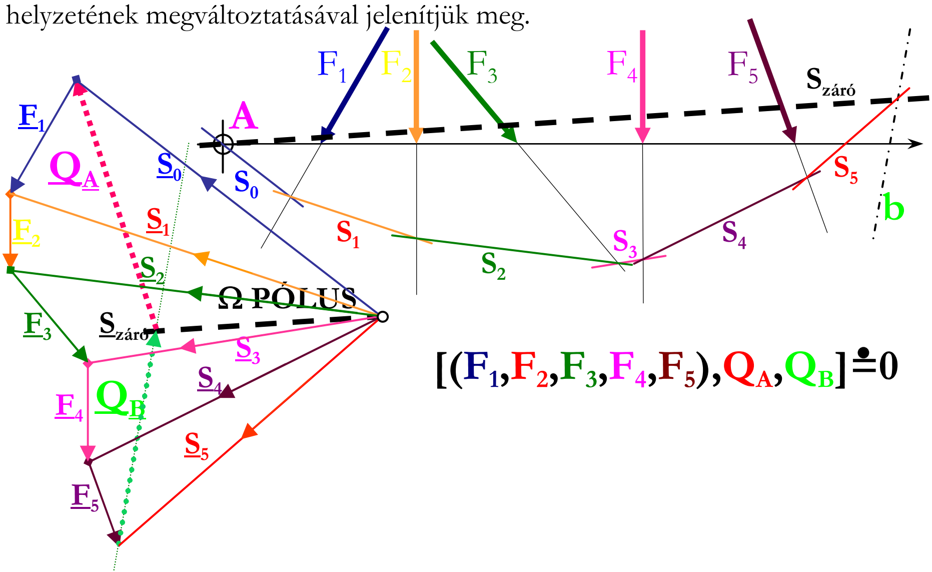
A fenti feladat a gyakorlatban (a kéttámaszú tartók támaszerőszámításában) **a leggyakoribb statikai számítási feladat, így a számítás alapos ismerete igen erősen ajánlott!**

Az egyensúlyozó erők meghatározása szerkesztéssel

A szerkesztéses megoldás (amint azt már a helyettesítési feladatnál láttuk), a vektorábra és a kötélsokszög tulajdonságainak kihasználásán alapul. Egy **erőrendszer egyensúlyának feltétele** mind **a vektorsokszög**, mind **a kötélsokszög zártsága**. Ennek megfelelően az ismert erőkre szerkesztett vektorábra egyik végpontjához az egyik (egyelőre ismeretlen nagyságú és állású), a másik végpontjához a másik keresett erő (egyelőre ismeretlen nagyságú) vektorának kell csatlakoznia. **A feladat**: **a vektorábrában meghatározni** e két ismeretlen vektor közös pontját, azaz **az ismert hatásvonalú erő vektorának egyenesén azt a pontot, amelyhez a másik, ismeretlen állású erő vektora is kapcsolódik**. E feladat megoldására a kötélsokszög azon tulajdonsága ad lehetőséget, miszerint **egy erő hatásvonalán mindig két** (az erő vektorát megelőző, és az erő vektorát követő vektoridomsugárhoz tartozó) **kötéloldal metsződik**. Ennek megfelelően a $\mathbf{Q_A}$ erő és a $\mathbf{Q_B}$ erő hatásvonalán is egy-egy ismert és egy (a két erő vektorai közötti, egyelőre ismeretlen állású vektoridom-sugárhoz tartozó) ismeretlen kötéloldalnak kell metsződnie. Minthogy a $\mathbf{Q_A}$ erő hatásvonalának csak **egyetlen pontját** ismerjük, a metszéspont garantálása csak úgy oldható meg, ha a kötélsokszög kezdő kötéloldalát ezen az A ponton vezetjük keresztül. Így a kötélsokszög zártságát biztosító, a $\mathbf{Q_A}$ és $\mathbf{Q_B}$ erők közötti kötéloldal az erőrendszerre rajzolt kötélsokszög utolsó oldala és a **b** hatásvonal metszéspontjából az **A** pontba húzható meg. E „záró"kötéloldal ismeretében vele párhuzamosan berajzolható a vektorábrába a záró vektoridomsugár, ami a $\underline{\mathbf{Q}}_\mathbf{B}$ vektor egyeneséből kimetszi a $\underline{\mathbf{Q}}_\mathbf{B}$ és a $\underline{\mathbf{Q}}_\mathbf{A}$ vektorok találkozási pontját, és ezzel megadja mind a $\mathbf{Q_A}$, mind a $\mathbf{Q_B}$ keresett erők vektorait.

Itt is megjegyezzük, hogy a vektorábrában az ismert erők **vektorait tetszőleges sorrendben** szerkeszthetjük fel, sőt az sem befolyásolja a megoldhatóságot, hogy a $\mathbf{Q_A}$ és $\mathbf{Q_B}$ erőket a vektorábrához milyen sorrendben csatlakoztatjuk. A vektorábra felvétele után, a **kötélsokszög szerkesztése során azonban csak a kötélsokszög tulajdonságait betartva dolgozhatunk**, és a kezdő kötéloldalt az **A** ponton keresztül kell felvennünk.

Ha az egyensúlyozandó erőrendszerben **erőpár(ok)** is van(nak), azokat először **egyetlen erőpárrá** tesszük össze, majd ezt az eredő erőpárt **valamelyik koncentrált erőhöz adjuk hozzá**, mert így az egyensúlyozandó erők száma nem nő, és az erőpárok forgató hatását a kötélsokszögben a kiválasztott koncentrált erő helyzetének megváltoztatásával jelenítjük meg.



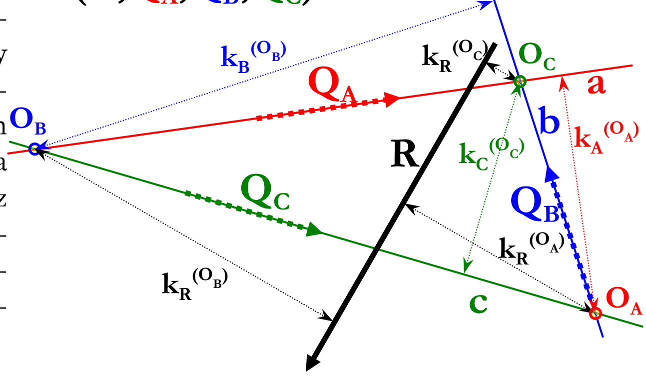
3.5.4. Egyensúlyozás három, ismert hatásvonalba eső erővel

A három, ismert hatásvonalú egyensúlyozó erő nagyságának meghatározására a helyettesítési feladatban megtárgyalt **főponti módszer** (számítás esetén) és a **Culmann módszer** (szerkesztés esetén) alkalmazható. Az eljárásokat a helyettesítési feladat tárgyalása során részletesen taglaltuk, itt változást csak az egyenletek 0-ra rendezése, ill. a vektorábra nyílfolytonossága jelent.

Az egyensúlyozó erők meghatározása számítással

A főpontokra felírt nyomatéki egyenletekben mindig csak **egy ismeretlen erő** szerepel, a többi ismeretlen erő nyomatéka ezekre a pontokra **zérus**. Az egyenletek felírása során az ismeretlen erőket **feltételezett** irányokkal szerepeltetjük:

$$(R,Q_A,Q_B,Q_C)\doteq 0$$



$$\Sigma M_i^{(O_A)}=M_R^{(O_A)}+M_{QA}^{(O_A)}+M_{QB}^{(O_A)}+M_{QC}^{(O_A)}=0$$
$$\Sigma M_i^{(O_B)}=M_R^{(O_B)}+M_{QA}^{(O_B)}+M_{QB}^{(O_B)}+M_{QC}^{(O_B)}=0$$
$$\Sigma M_i^{(O_C)}=M_R^{(O_C)}+M_{QA}^{(O_C)}+M_{QB}^{(O_C)}+M_{QC}^{(O_C)}=0$$

A nyomatéki egyenleteket egyszerűsítve, a nyomatékokat az erők és erőkarok szorzataival helyettesítve, a fenti ábra erőirányait alkalmazva:

$$\Sigma M_i^{(O_A)}= -R\times k_R^{(O_A)}+\boxed{Q_A}\times k_A^{(O_A)}=0$$
$$\Sigma M_i^{(O_B)}= +R\times k_R^{(O_B)}-\boxed{Q_B}\times k_B^{(O_B)}=0$$
$$\Sigma M_i^{(O_C)}= -R\times k_R^{(O_C)}-\boxed{Q_C}\times k_C^{(O_C)}=0$$

Az ismert hatásvonalú erők **egyismeretlenes** egyenletekből egyszerűen meghatározhatók. A kiadódó eredmény **előjele** azt mutatja meg, hogy az erő az általunk (tetszőlegesen) felvett irányban áll, vagy azzal ellentétesen működik. Kiindulásképpen tehát a hatásvonalon **bármelyik** erőirányt választhatjuk, az eredmény előjele alapján **mindenképpen a helyes irány** adódik ki a számításból. A fenti példákban $\mathbf{Q_A}$ és $\mathbf{Q_B}$ pozitívra, $\mathbf{Q_C}$ negatívra adódik, azaz $\mathbf{Q_A}$ és $\mathbf{Q_B}$ iránya a feltételezettel megegyezik, $\mathbf{Q_C}$ iránya ellentétes. A számításban nem használt **vetületi egyenletekkel ellenőrizhetjük** a számítási eredményeinket.

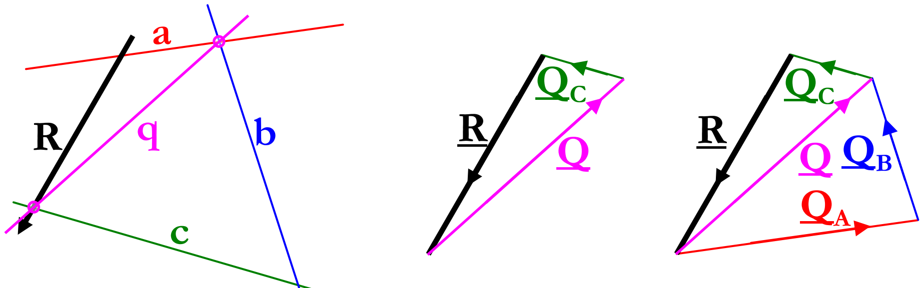
Az egyensúlyozó erők meghatározása szerkesztéssel
A feladatok szerkesztéses megoldása során mindig külön-külön kell biztosítanunk a **hatásvonalakra** és a **vektorokra** vonatkozó feltételek teljesülését. Az egyensúly szükséges (de nem elégséges!) feltétele, hogy az egyensúlyban lévő erők vektorai **zárt, nyílfolytonos vektorsokszöget alkossanak**. Egy ilyen tulajdonságú vektorábra **három erőből** mindig **egyértelműen** előállítható, **háromnál több erő** esetén viszont a vektorábra **többféle alakkal** is teljesítheti a zárt, nyílfolytonos feltételt, és ezek közül csak az lesz a helyes alak, amely mellett a **hatásvonalakra vonatkozó** feltételek is teljesülnek. A hatásvonalakra a három erő egyensúlyára vonatkozólag, ill. a kötélsokszög-szerkesztésben fogalmaztunk meg feltételeket. Esetünkben, amikor összesen **négy** erő egyensúlyát vizsgáljuk, célszerűnek látszik a **négy** erő vizsgálatát (két erőt eredőjükkel helyettesítve) **három** erő egyensúlyának vizsgálatára visszavezetni. Például a $\mathbf{Q_A}$ és $\mathbf{Q_B}$ egyensúlyozó erőket egy **Q** részeredővel helyettesítve az egyensúlyi kijelentések a következőképpen alakulnak:

$$(\mathbf{R},\mathbf{Q_A},\mathbf{Q_B},\mathbf{Q_C}) \doteq 0 \qquad \mathbf{Q} \doteq (\mathbf{Q_A},\mathbf{Q_B}) \qquad (\mathbf{R},\mathbf{Q},\mathbf{Q_C}) \doteq 0$$

Az átalakítás **nyeresége**, hogy az eredeti, **négy** erővel szemben csak **három** erővel kell foglalkoznunk, **vesztesége**, hogy az eredeti erőrendszerben **mindhárom keresett erő hatásvonala ismert** volt, az átalakított erőrendszerben viszont a **Q** egyensúlyozó erőnek **sem a nagysága, sem a hatásvonala nem ismert**. Ugyanakkor a három erő egyensúlyára vonatkozó hatásvonal-feltétel előírja, hogy a **három hatásvonalnak egy közös pontban kell metsződnie**, azaz a **Q** erő hatásvonalának egy pontját az **R** helyettesítendő eredő és a $\mathbf{Q_C}$ (ismert hatásvonalú) egyensúlyozó erő hatásvonalainak **metszéspontja** kijelöli. Emellett a **Q** erőt úgy képeztük, hogy a $\mathbf{Q_A}$ és a $\mathbf{Q_B}$ erők **eredője** legyen, azaz hatásvonalának át kell mennie a $\mathbf{Q_A}$ és $\mathbf{Q_B}$ erők (ismert) hatásvonalainak **metszéspontján**. Ezzel a **Q** erő hatásvonalának **két pontja**, azaz a **Q hatásvonala** ismertté vált. Az ismert hatásvonalak segítségével az **R**, **Q**, $\mathbf{Q_C}$ erők **egyensúlyi vektorháromszöge** megszerkeszthető, majd az abból kiadódó **Q** vektort $\mathbf{Q_A}$ és $\mathbf{Q_B}$ irányú összetevőkre bontva a keresett $\mathbf{Q_A}$, $\mathbf{Q_B}$, $\mathbf{Q_C}$ erők vektora – nagysága megszerkeszthető.

Ezt a (Culmann-féle) szerkesztést a **helyettesítési** feladat kapcsán is tárgyaltuk, látható, hogy az „ötlet” nem változott, csak a feltételeket kellett kissé másként megfogalmaznunk.

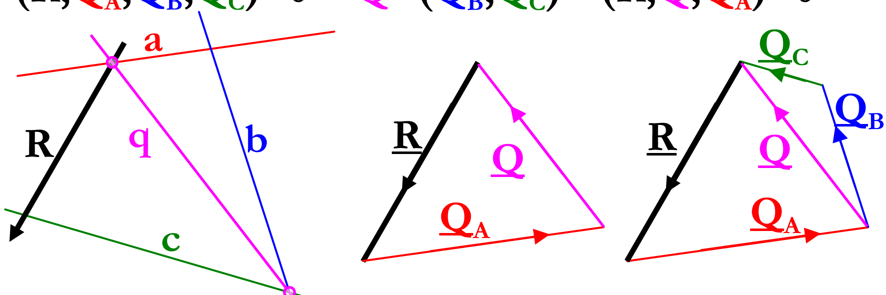
A szerkesztés vázlata (a hatásvonalak és a vektorábrák)



a hatásvonal-ábra a vektorábrák

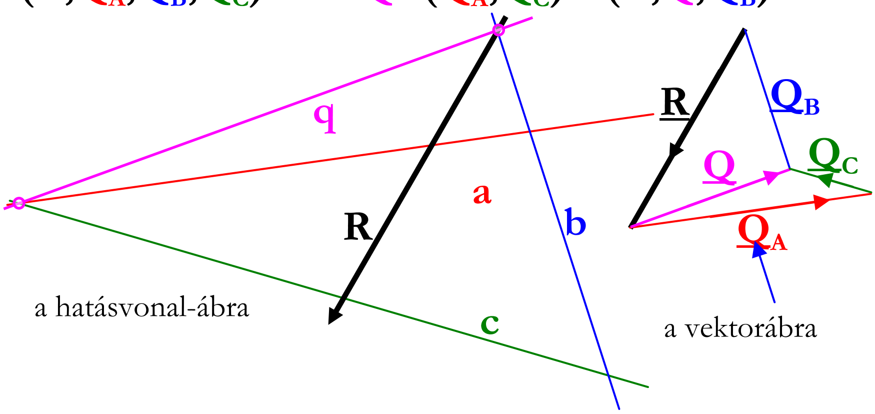
Természetesen az eredeti erőrendszerben az erők számának csökkentése céljából **bármelyik két erőt** helyettesíthetjük ideiglenesen az eredőjével, a megoldás ugyanarra az eredményre vezet.

$(R,Q_A,Q_B,Q_C)\doteq 0 \quad Q\doteq(Q_B,Q_C) \quad (R,Q,Q_A)\doteq 0$



a hatásvonal-ábra a vektorábrák

$(R,Q_A,Q_B,Q_C)\doteq 0 \quad Q\doteq(Q_A,Q_C) \quad (R,Q,Q_B)\doteq 0$



a hatásvonal-ábra a vektorábra

3.6. Megoszló erők

A szerkezeteinket érő **valódi** teher **nem koncentrált** erőként, hanem vagy a **szerkezet teljes térfogatán** (pl. gravitáció), vagy a szerkezet valamely **felületén** (pl. szélteher, hóteher) jelenik meg. Általában ezek a terhelő hatások összevonhatók egyetlen hatásvonalba és ezáltal helyettesíthetők a koncentrált erőként megjelenő eredőjükkel. Vannak azonban olyan esetek (pl. egy tartógerenda önsúlya), amikor az ilyen helyettesítés túlságosan durván közelíti a teher elhelyezkedését, a szerkezet válaszát, emiatt finomabb, jobb közelítésre van szükség. A síkbeli erőrendszerek körében a koncentrált erők mellett a **vonalmenti megoszló** teher fogalmával és tulajdonságaival kell megismerkednünk.

A **vonalmenti megoszló** teher maga is fikció, hiszen csak az egyik irányban adja meg a teherfüggvénynek a folytonos változás lehetőségét, de a vizsgált síkra merőleges irányban kiterjedése nincs. Alkalmazása azonban a síkbeliként közelíthető szerkezetek esetében megengedhető és kellően pontos.

A **vonalmenti megoszló teher** valójában a **teherintenzitás folytonos függvénye**, amely a **vizsgált szakasz minden pontjához a teher aktuális intenzitásvektorát rendeli**. Ha az intenzitásvektorok mind **párhuzamosak**, akkor **párhuzamos megoszló teherről** beszélünk, és ez esetben az intenzitásfüggvény csak az teherintenzitások **nagyságát** rendeli a geometriai pozícióhoz.

A szerkezeteinket érő megoszló terhelés többségében párhuzamos megoszló teher, az ettől eltérő terhek pedig helyettesíthetők két párhuzamos megoszlású teher együttesével. Ennek megfelelően a továbbiakban csak a **párhuzamos megoszlású terhekkel** foglalkozunk.

Az általános megoszló teher intenzitásértékét **p**-vel, a párhuzamosan megoszló teher intenzitásértékét **q**-val jelöljük.

A párhuzamos vonalmenti megoszló teher eredője

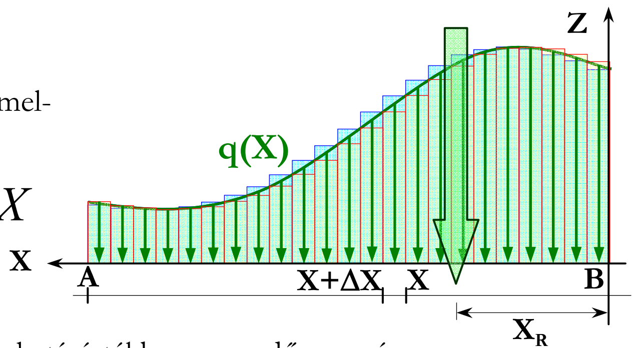
Egy A-B szakaszon működő, változó intenzitású teherfüggvényt helyettesítő koncentrált erőnek a teherfüggvény eltoló és elfordító hatásával azonos hatást kell kifejtenie. E hatások meghatározása érdekében osszuk fel az A-B szakaszt elegendően kicsiny részekre, és e kicsiny részeken a teherintenzitást tekintsük konstansnak. Így a teherfüggvényt lefedő, téglalap alakú lamellákat kapunk, amelyeknek területe $\mathbf{q}\times\Delta\mathbf{X}$ a lamellával közelít-

hető megoszló teher-rész eredője lesz. A lamellák területének összege (a teljes terhelési ábra területe) az **A-B** szakaszon működő megoszló teher teljes **Z** irányú elmozdító hatását jeleníti meg, tehát ez tekinthető a megoszló terhet helyettesítő **eredő erő** nagyságának.
A lamellák területösszege (amint az ábrán bemutattuk) valójában sosem egyezik meg az intenzitásfüggvény alatti terület értékével, de a felosztás finomításával a hiba csökken, a **felosztás minden határon túli finomításával pedig eltűnik**.

$$\mathbf{(q) \doteq R}$$

Az eredő nagyságát a lamellák területösszege adja:

$$R = \sum_{B}^{A} q(X) \times \Delta X$$



A felosztás finomításával, határértékben az eredő nagysága:

$$R = \lim_{\Delta X \Rightarrow 0} \left[\sum_{B}^{A} q(X) \times \Delta X \right] = \int_{B}^{A} q(X) dX$$

A megoszló teher eredőjének nagyságát a terhelési ábra területe adja meg. E terület általános teherfüggvény esetén a függvény határpontok közötti **határozott integráljaként** kapható meg, de egyszerű tehergeometria esetén **elemi síkidomok területösszegeként** is meghatározható.

Az eredő helyét a lamellák területeként azonosított elemi erők nyomatékösszegének felhasználásával kaphatjuk meg:

$$M_R^{(B)} = \lim_{\Delta X \Rightarrow 0} \left[\sum_{B}^{A} X \times q(X) dX \right] = \int_{B}^{A} X \times q(X) dX$$

$$x_R = \frac{M_R^{(B)}}{R} = \frac{\sum_B^A M_i^{(B)}}{\sum_B^A F_{i(Z)}} = \frac{\int_B^A X \times q(X)dX}{\int_B^A q(X)dX}$$

A teherintenzitás mértékegysége

A teherintenzitás a megoszló teher „**erősségének**” a függvénye, és (amint láttuk) a megoszló erőrendszer eredője az intenzitásfüggvény **határozott integráljaként**, a vizsgált szakaszon a függvény alatti **területként** adódik. Ennek megfelelően a vonalmenti megoszló erőrendszer intenzitásértékének dimenziója a **hossz mentén fajlagosított erődimenzió**, azaz **N/m**, vagy ennek megfelelő többszöröse.

Megjegyezzük, hogy a felületen megoszló erőrendszer alapmértékegysége értelemszerűen N/m^2, a térfogaton megoszló erőrendszer alapmértékegysége pedig N/m^3 lesz.

A merőleges teherintenzitás vetülete

A párhuzamos megoszló teher nemcsak koordináta-irányokban működhet, így a vetületi egyenletek felírása során szükségünk lesz az erőrendszer tengelyirányú vetületeinek értékére. Ezek a **vetületek mindig előállíthatók a megoszló erőrendszer** (koncentrált) **eredő erőjének megfelelő irányú (erő)vetületeiből**, de érdemes megvizsgálnunk, hogy maga a **megoszló erőrendszer vetíthető-e a tengelyekre**, helyettesíthető-e tengelyirányokban működő, vetületi megoszló erőrendszerekkel.

A ferde megoszló erőrendszer eredőjéből kiindulva:

$dR = q \times ds$ $\quad$ $\mathbf{dR = (dR_X, dR_Z)}$

$dR_X = dR \times \sin\alpha$ $\quad$ $dR_Z = dR \times \cos\alpha$

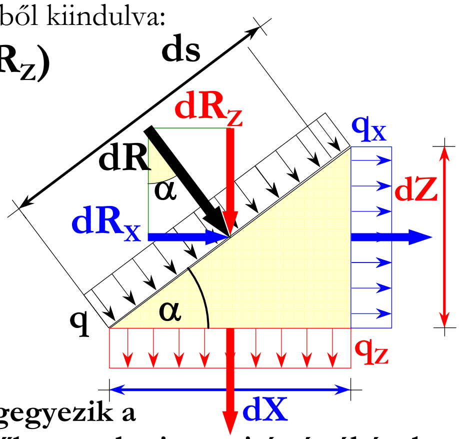
$dX = ds \times \cos\alpha$ $\quad$ $dZ = ds \times \sin\alpha$

$q_{X_Z} = dR_X/dZ = dR \times \sin\alpha/(ds \times \sin\alpha)$

$q_{Z_X} = dR_Z/dX = dR \times \cos\alpha/(ds \times \cos\alpha)$

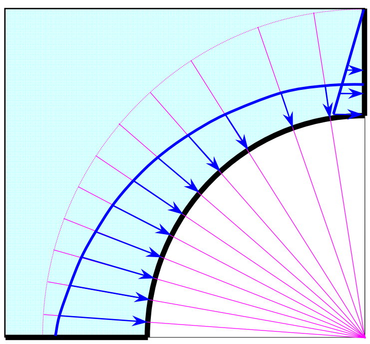
Az egyszerűsítés után:

$\mathbf{q_{X_Z} = dR/ds =}$ $\quad$ $\mathbf{q_{Z_X} = dR/ds = q}$

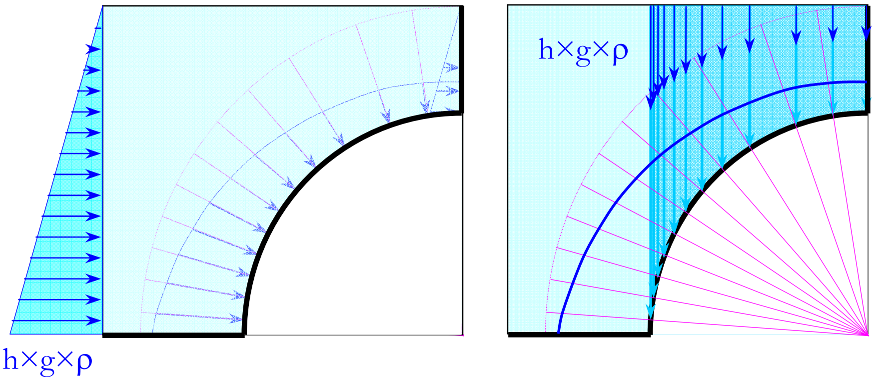


azaz **a vetületi intenzitás értéke megegyezik a ferde síkon (vonalon) működő merőleges teherintenzitás értékével**.

A terhelt felületre **merőleges megoszló teherre** vonatkozó intenzitásvetületek különösen olyan esetekben alkalmazhatók előnyösen, amelyekben a **terhelt felület görbe**. Például egy negyedhenger-felületű zsilipkapura működő víznyomás eredőjének nagyságát és irányát a vetületi intenzitások segítségével egyszerűen meghatározhatjuk. (Az ábrán a negyedkör fölött függőleges falszakaszt is alkalmaztunk.)
Az első ábrán a felületre mindenütt merőleges víznyomás **tényleges vektorait** rajzoltuk be. A víznyomás értéke, vagyis a felületre merőleges megoszló teher intenzitása a **mélység lineáris függvénye**.
A második ábra a víznyomás **vízszintes** összetevőit mutatja, amelyekre a vetületi intenzitásértékek és a tényleges, a felületre merőleges intenzitásértékek azonossága miatt a szintén **a mélységgel arányos, lineáris összefüggés érvényes**. Ennek alapján a víznyomás vízszintes hatása a **háromszög** alakú terhelési ábra alapján mind nagyságában, mind pozíciójában egyszerűen számítható.
A harmadik ábrán az első kettővel azonos mélységekben a **függőleges** teherintenzitásokat tüntettük fel (ezek értéke is azonos az ott érvényes merőleges intenzitás értékével). Az intenzitás-vektorok kezdőpontjait a vízfelszínre választva a végpontok egy **görbére** illeszkednek, amely görbe alkalmas függőleges nagyítással **éppen a terhelt felület**, esetünkben a negyedkör alakjához illeszkedik. A függőleges teherhányad meghatározásához tehát ennek a terhelési ábrának a területét és súlyvonalát kell előállítani, ami elemi geometriai eszközökkel megoldható.
A **vízszintes** és a **függőleges** teherhányadok **eredőiből** a vizsgálandó felületre működő **eredő erő nagysága, állása és helye** egyértelműen előállítható.



h×g×ρ



A **merőleges megoszló teher eredőjét** a vetületi hosszokon érvényes (az eredeti intenzitásértékkel azonos) **vetületi intenzitásoknak a vetületi hosszakon történő összegzése** mellett az eredeti, "felületi" hosszakon érvényes **intenzitásvetületeknek a tényleges hossz mentén történő összegzésével** is megkaphatjuk:

$$dR = q \times ds \qquad \mathbf{dR \doteq (dR_X, dR_Z)}$$

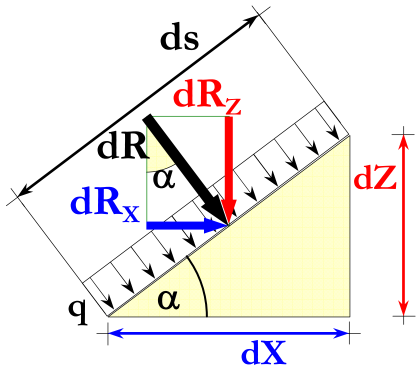
$$dR_X = dR \times \sin\alpha \qquad dR_Z = dR \times \cos\alpha$$

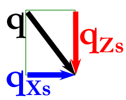
$$dX = ds \times \cos\alpha \qquad dZ = ds \times \sin\alpha$$

$$q_{Xs} = dR_X/ds = dR \times \sin\alpha/ds = (dR/ds) \times \sin\alpha$$

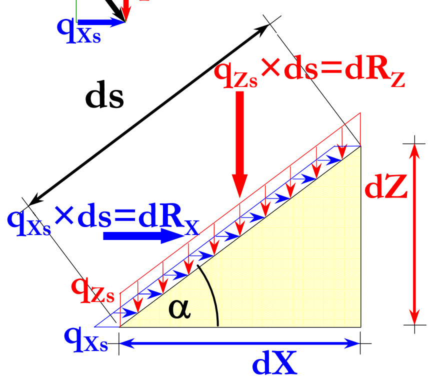
$$q_{Zs} = dR_Z/ds = dR \times \cos\alpha/ds = (dR/ds) \times \cos\alpha$$

$$\mathbf{q_{Xs} = q \times \sin\alpha \qquad q_{Zs} = q \times \cos\alpha}$$





A felületre merőlegesen működő megoszló teher eredőjének meghatározása során tehát dolgozhatunk a **vetületi intenzitásokkal**, amelyek a **ferde hossz vetületén** működtetendők, és **intenzitásuk az eredeti intenzitásértékkel azonos**, vagy dolgozhatunk az **intenzitásvetületekkel**, amelyek az eredeti, **ferde hosszon** működtetendők, **intenzitásértékük pedig az eredeti intenzitásérték pitagoraszi felbontásával kapható.**

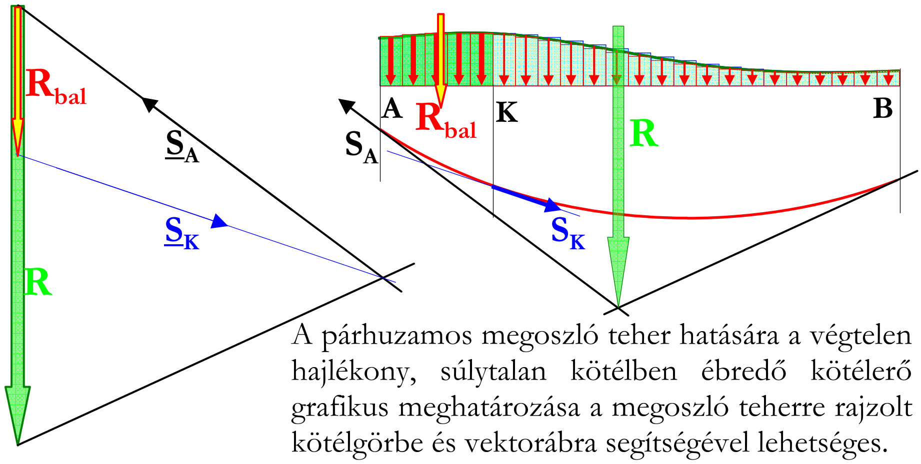


A kötélgörbe

Egy koncentrált erőkből álló erőrendszer eredőjének meghatározására a szerkesztéses megoldásban az összegezendő erők vektoraiból szerkesztett **vektorábrát** és az összegezendő erők hatásvonalaira rajzolandó **kötélsokszöget** alkalmaztuk. Megoszló teher esetén a terhelési hossz felosztásával **ΔX** szélességű lamellákra oszthatjuk a terhelési ábrát, és egy-egy lamellán belül a teherintenzitást (közelítőleg) konstansnak véve a teljes megoszló terhet a **lamellák tengelyvonalaiban működő, $\mathbf{R_i=q_i \times \Delta X}$ nagyságú koncentrált erők rendszerével helyettesíthetjük**. Erre a koncentrált erőkből álló erőrendszerre már meg tudjuk szerkeszteni a **vektorábrát**, ami az erőrendszer eredőjének **vektorát** állítja elő, és a **kötélsokszöget**, amely az erőrendszer eredőjének **helyét** szolgáltatja. Párhuzamos megoszló erőrendszer esetén az $\mathbf{R_i}$ részeredők vektoraihoz rajzolt **vektoridomsugarak mindegyikének az erőirányra merőleges** (többnyire vízszintes) **vetülete azonos**, a **H** pólustávolsággal megegyező érték lesz. Minthogy a vektoridomsugarak valójában a kötélsokszög „kötélágaiban” működő erők vektorait jelenítik meg, ez a megállapítás azt jelenti, hogy:

> **A párhuzamos erőrendszerrel terhelt kötélben a teherirányra merőleges kötélerő-összetevő a kötél minden pontjában azonos**. Más kötélhosszat, vagy a kötél számára más megfogási pontokat választva a kötélerő teherirányra merőleges összetevője más, de a kötél minden metszetében továbbra is azonos érték lesz.

Ha a koncentrált erők rendszerével a megoszló erőrendszert jobban akarjuk közelíteni, növelnünk kell a felosztás sűrűségét, csökkentenünk kell a **ΔX** lamellaszélességet. Ezáltal a kis koncentrált részeredők száma nő, nagysága csökken, és a kötélsokszög poligonjának oldalszáma nő, az oldalak közötti szögeltérés csökken. Ha a felosztást minden határon túl finomítjuk, és **ΔX** tart a zérushoz, akkor **határátmenetben** a zérus szélességű lamellákon a megoszló teher **intenzitása** jelenik meg teherként, a kötélsokszög poligonja pedig átmegy folytonos, törésmentes **kötélgörbébe**. A metszetekben keletkező **kötélerők teherirányra merőleges összetevőjének állandósága a kötélgörbére is érvényes**. A kötél valamelyik metszetében fellépő **kötélerő vektorát** a vektorábrából a választott metszethez tartozó **kötélgörbe-érintővel párhuzamos vektoridom-sugárként** kapjuk.



A párhuzamos megoszló teher hatására a végtelen hajlékony, súlytalan kötélben ébredő kötélerő grafikus meghatározása a megoszló teherre rajzolt kötélgörbe és vektorábra segítségével lehetséges.

A kötélgörbe alakjának, függvényének meghatározásához a matematikai analízis eszköztárára lenne szükségünk, ennek hiányában közelítő megfontolásokkal juthatunk el a függvény meghatározásához.

Az **X** helyen a kötélgörbe érintőjének meredekségét az **X** hely kicsiny környezetében értelmezett $(\Delta Z/\Delta X)_X$ differenciahányados közelíti. Az $\mathbf{X+\Delta X}$ helyen az érintőmeredekséget a hely kicsiny környezetében értelmezett $(\Delta Z/\Delta X)_{X+\Delta X}$ differenciahányados közelíti. A két meredekség különbsége, a meredekségek $\mathbf{\Delta X}$ szakaszon bekövetkezett változása, „növekménye” valójában a $\mathbf{\Delta X}$ szakaszon működő megoszló teher egyensúlyozását szolgálja, oly módon, hogy a $\mathbf{\Delta X}$ szakaszt megelőző ill. követő metszetek kötélerőinek függőleges komponens-különbsége a $\mathbf{\Delta X}$ szakaszon működő részeredő értékével lesz azonos. A párhuzamosan megoszló teher kötélerőinek teherirányra merőleges összetevője azonban minden metszetben a **H** pólustávolsággal azonos, tehát az egyes metszetek kötélerőinek meredekségéből a kötélerő függőleges komponense a **H** pólustávolsággal történő szorzással megkapható:

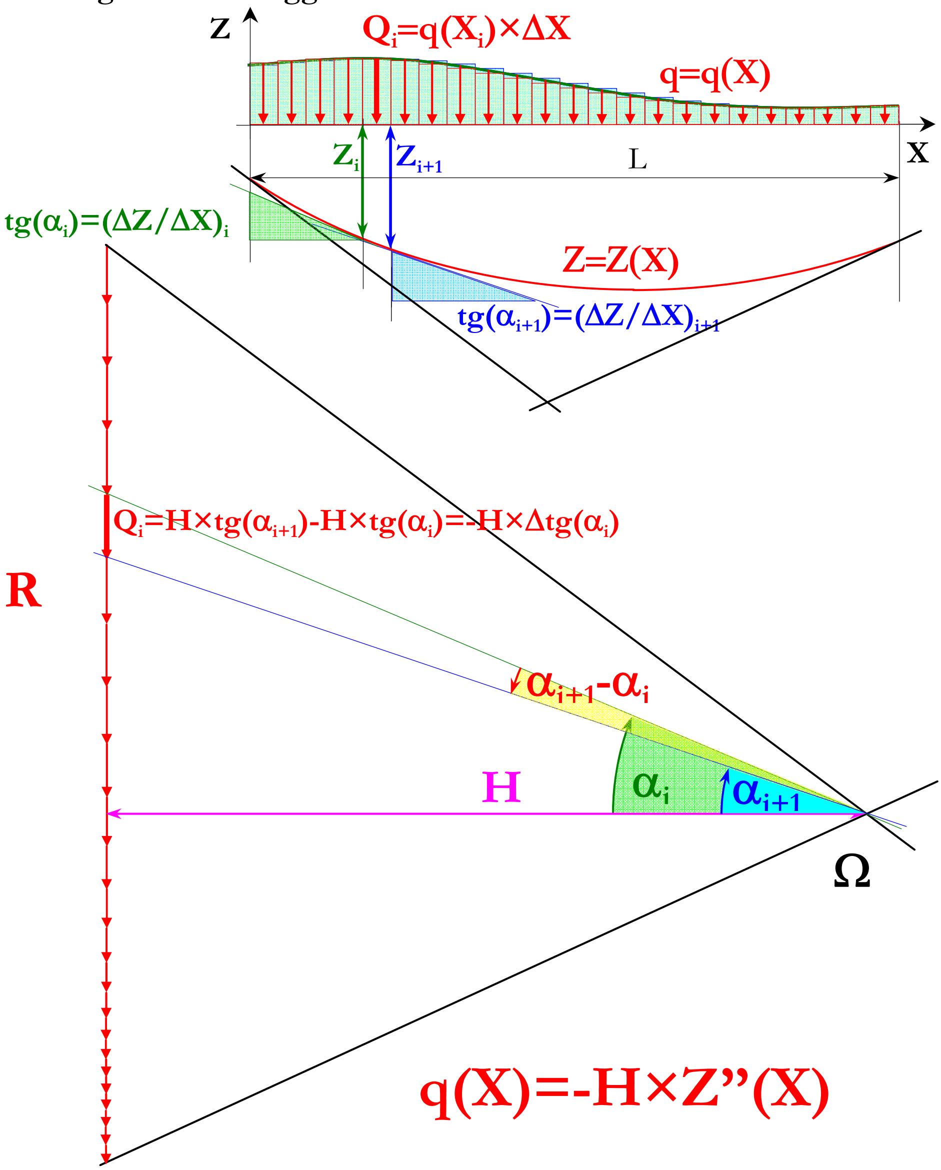
$$q_i \times \Delta X = \Delta Q = H \times [-\Delta\,\mathrm{tg}(\alpha_i)] = -H \times \left[\Delta \frac{\Delta Z}{\Delta X}\right]_i$$

$$q(X) = \frac{\Delta Q}{\Delta X} = H \times \frac{-\Delta tg(\alpha_i)}{\Delta X} = -H \times \left[\frac{\Delta}{\Delta X}\left(\frac{\Delta Z}{\Delta X}\right)\right]$$ határátmenetben:

$$q(X) = \frac{dQ}{dX} = H \times \frac{-dtg(\alpha_i)}{dX} = -H \times \left[\frac{d}{dX}\left(\frac{dZ(X)}{dX}\right)\right] = -H \times \frac{d^2Z(X)}{dX^2} = -H \times Z''(X)$$

azaz a kötélgörbe Z(X) alakfüggvényét egy másodrendű differenciálegyenlet megoldásaként kaphatjuk meg.

A kötélgörbe összefüggései:



Ha a **q teherintenzitás konstans**, akkor a görbe **másodfokú parabola** lesz. Ha a megtámasztási pontok azonos magasságban vannak, és a kötél maximális belógását **h**-val jelöljük, akkor a konstans értékű vízszintes kötélerő-összetevő **H** értéke:

$$H=q\times L^2/8h$$

3.7. Ellenőrző kérdések

Ismertesse az erő fogalmát!
Hogyan csoportosíthatjuk a szerkezeteket érő hatásokat?
Mi a megmerevítés elve?
Milyen jellemzők határozzák az erőt?
Mit jelent az, hogy az erő helyhez kötött vektormennyiség?
A merev testek statikájában az erő helyhez kötött vektormennyiség-e?
Mit értünk az erő komponensein?
Mit értünk az erő vetületein?
Azonos fogalom-e az erő komponense ill. vetülete?
Hogyan nevezzük egy erő a sík egy pontjára kifejtett forgató hatását?
Mit értünk egy erő egy pontra vonatkozó nyomatékán?
Mi az egyenértékűség fogalma?
Mi az egyensúlyi kijelentés tartalma?
Írjon fel egy tetszőleges egyensúlyi kijelentést!
Milyen összefüggés van az egyenértékűség és az egyensúlyi kijelentés között?
Mi az axióma fogalma, s mi a jelentősége?
Mit mond ki a statika első axiómája (két erő egyensúlya)?
Mit mond ki a statika második axiómája (három erő egyensúlya)?
Mit mond ki a statika harmadik axiómája (egysúlyban levő erőrendszer hatása)?
Mit mond ki a statika negyedik axiómája (hatás-ellenhatás)?
Mit tudunk két azonos irányú párhuzamos erő eredőjéről?
Mit tudunk két ellenkező irányú párhuzamos erő eredőjéről?
Mit tudunk két ellenkező irányú, azonos nagyságú párhuzamos erő eredőjéről?
Mit tudunk egy erő és egy erőpár eredőjéről?
Mit nevezünk erő pontra redukálásának?
Mi az erőrendszer eredője?
Mit nevezünk az erők helyettesítési feladatainak?
Milyen helyettesítési feladatokat ismer?
Hogyan határozzuk meg az erőrendszer eredőjének nagyságát és állását számítással?
Hogyan határozzuk meg az erőrendszer eredőjének helyét számítással?
Hogyan kapjuk meg egy síkbeli erőrendszer eredőjének vektorát (nagyságát, irányát) szerkesztéssel?
Hogyan kapjuk meg egy síkbeli erőrendszer eredőjének helyét szerkesztéssel?

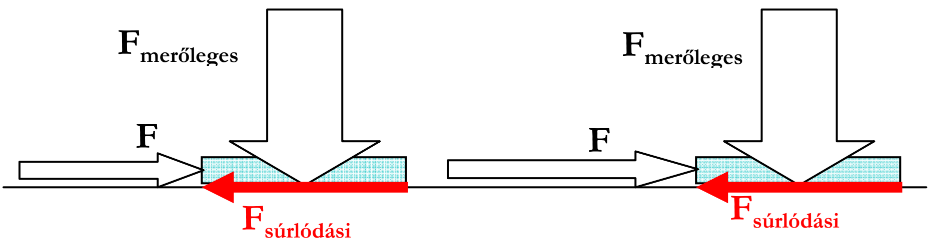
Hogyan befolyásolják az erőrendszerben levő erőpárok az eredő vektorát?
Hogyan befolyásolják az erőrendszerben levő erőpárok az eredő helyét?
Mi jellemzi a vektorábrában egy ponton átmenő vektoridom-sugarakat a kötélsokszög ábrában?
Mi jellemzi a kötélsokszög ábrában egy ponton átmenő kötéloldalakat a vektorábrában?
Síkbeli erőrendszer esetén mi az eredő erő feltétele a számítás során?
Síkbeli erőrendszer esetén mi az eredő erő feltétele a szerkesztés során?
Síkbeli erőrendszer esetén mi az eredő erőpár feltétele a számítás során?
Síkbeli erőrendszer esetén mi az eredő erőpár feltétele a szerkesztés során?
Síkbeli erőrendszer esetén mi az (eredő) egyensúly feltétele a számítás során?
Síkbeli erőrendszer esetén mi az (eredő) egyensúly feltétele a szerkesztés során?
Síkbeli erőrendszer esetén az eredő szerkesztésekor hogyan kezelhetők a nyomatékok?
Milyen ismeretleneket kell meghatározni, ha egy síkbeli erőrendszert egy adott ponton átmenő erővel kívánunk helyettesíteni?
Egy adott ponton átmenő erővel és egy hozzá tartozó nyomatékkal való helyettesítés esetén hogyan határozható meg számítással az adott ponton átmenő erő?
Egy adott ponton átmenő erővel és egy hozzá tartozó nyomatékkal való helyettesítés esetén hogyan határozható meg számítással az adott ponthoz tartozó nyomaték?
Egy adott ponton átmenő erővel és egy hozzá tartozó nyomatékkal való helyettesítés esetén hogyan határozható meg szerkesztéssel az adott ponton átmenő erő?
Egy adott ponton átmenő erővel és egy hozzá tartozó nyomatékkal való helyettesítés esetén hogyan határozható meg szerkesztéssel az adott ponthoz tartozó nyomaték?
Egy adott ponton átmenő és egy adott hatásvonalú erővel való helyettesítés esetén számításkor melyek a legcélszerűbben felírható egyenletek?
Egy adott ponton átmenő és egy adott hatásvonalú erővel való helyettesítés esetén szerkesztéskor melyek a vektorábra felvételének szempontjai?
Egy adott ponton átmenő és egy adott hatásvonalú erővel való helyettesítés esetén szerkesztéskor melyek a kötélsokszög felvételének szempontjai?
Három ismert hatásvonalú erővel való helyettesítés esetén milyen számító ill. szerkesztő eljárásokat ismer?

Három ismert hatásvonalú erővel való helyettesítés esetén mi a főponti módszer lényege?
Három ismert hatásvonalú erővel való helyettesítés esetén használható-e a vetületi egyenlet?
Három ismert hatásvonalú erővel való helyettesítés esetén mikor használható hatékonyan a vetületi egyenlet?
Három ismert hatásvonalú erővel való helyettesítés esetén milyen szerkesztő eljárást alkalmazunk, s ennek mi a lényege?
Három ismert hatásvonalú erővel való helyettesítés esetén mi a hasonlósági módszer lényege?
Mik a síkbeli erőrendszer egyensúlyának feltételei számításban?
Mik a síkbeli erőrendszer egyensúlyának feltételei szerkesztésben?
Milyen összefüggés fogalmazható meg a helyettesítés és az egyensúlyozás között?
Milyen összefüggés van az eredő és az egyensúlyozó erő között?
Síkbeli erőrendszer egy erővel történő egyensúlyozása esetén milyen egyenleteket célszerű felírni számításkor?
Síkbeli erőrendszer egy erővel történő egyensúlyozása esetén hogyan szerkeszthető meg az egyensúlyozó erő?
Síkbeli erőrendszer egy adott ponton átmenő erővel és a hozzá tartozó nyomatékkal történő egyensúlyozása esetén milyen egyenleteket célszerű felírni számításkor?
Síkbeli erőrendszer egy adott ponton átmenő erővel és a hozzá tartozó nyomatékkal történő egyensúlyozása esetén hogyan szerkeszthető meg az egyensúlyozó erő és nyomaték?
Síkbeli erőrendszer egy adott ponton átmenő és egy adott hatásvonalú erővel történő egyensúlyozása esetén számításkor milyen egyenleteket célszerű felírni?
Síkbeli erőrendszer egy adott ponton átmenő és egy adott hatásvonalú erővel történő egyensúlyozása esetén hogy szerkeszthetők meg az egyensúlyozó erők?
Síkbeli erőrendszer egy adott ponton átmenő és egy adott hatásvonalú erővel történő egyensúlyozása esetén szerkesztő eljárás esetén milyen alapvető szabályokat kell betartani?
Síkbeli erőrendszer esetén az egyensúlyozó erő szerkesztésekor hogyan kezelhetők a nyomatékok?
Síkbeli erőrendszer három adott hatásvonalú erővel történő egyensúlyozása esetén számításkor milyen egyenleteket célszerű felírni?

Síkbeli erőrendszer három adott hatásvonalú erővel történő egyensúlyozása esetén hogyan szerkeszthetők meg az egyensúlyozó erők?
Definiálja a vonalmenti megoszló terhet!
Definiálja a vonalmenti párhuzamos megoszló terhet!
Határozza meg a párhuzamos vonalmenti megoszló teher eredőjének nagyságát!
Határozza meg a párhuzamos vonalmenti megoszló teher eredőjének helyét!
Hogyan számítható ki a felületre merőleges, párhuzamos megoszló teher eredője?
Párhuzamos erőrendszer esetén mit tudunk a kötélerőről?
Egyenletesen megoszló erőrendszer esetén milyen a kötélgörbe alakja?
Egyenletesen megoszló erőrendszer esetén mekkora a kötélerő nagysága?

4. Súrlódás

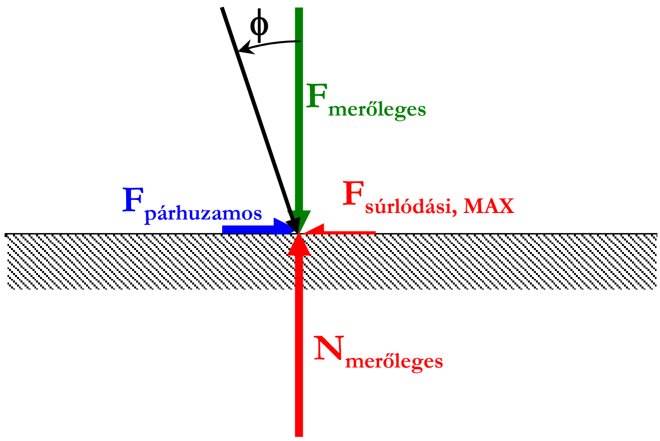
Amint azt fizikai tanulmányainkból tudjuk, a súrlódás a mozgást **akadályozó** (erő)**hatás**, amelynek **maximális értékét** a felületre merőleges nyomóerő és a felületre jellemző súrlódási együttható szorzata adja. A súrlódó kapcsolatban tehát alapállapotban a súrlódási erő a mozgást létrehozni akaró erő ellentettje lesz, mindaddig, míg a ez az erő a súrlódási erő – fentiekben ismertetett – maximumát meg nem haladja. Amíg tehát a mozgást létrehozni akaró erő kisebb, mint a súrlódási erő maximuma, addig **elmozdulás nem jön létre**, mert a súrlódási erő az elmozdítani akaró erőt egyensúlyozni tudja.



ha $F \leq F_{súrlódási,MAX} \Rightarrow F = F_{súrlódási} \Rightarrow F_{mozgató} = 0 \Rightarrow$ nincs mozgás

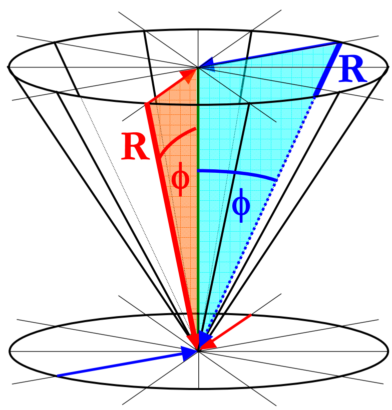
ha $F > F_{súrlódási,MAX} \Rightarrow F_{mozgató} = F - F_{súrlódási,MAX} \Rightarrow$ van mozgás

Az építőmérnöki gyakorlatban célunk a kapcsolt szerkezetek nyugalmi állapotának biztosítása, a kapcsolati erők egyensúlyi állapota. A súrlódásos kapcsolatban a felületre merőleges erővel egyidejűleg működő, a felülettel párhuzamos állású erő nagyságát mindaddig növelhetjük, amíg az a felületen ébredő súrlódási erő maximumát el nem éri. Eddig a határig a felület súrlódása képes egyensúlyozni a kapcsolati elemre működő erőket (pontosabban: azoknak a felülettel párhuzamos összetevőjét, hiszen a felületre merőleges összetevőt maga a felület nyomási ellenállóképessége, elmozdulásmentessége egyensúlyozza), tehát mozgás nem alakul ki. A súrlódási erő maximuma viszont a felületre merőleges (nyomó)erő nagyságával arányos, tehát annak növekedése a kapcsolat felülettel párhuzamos terhelhetőségét is (arányosan) növeli. Végső soron a nyugalmi állapot határát a súrlódásos kapcsolatban a felületre merőleges és a felülettel párhuzamos terhelő erők **aránya**, azaz az eredő **állása**, a felület normálisával bezárt **szöge** határozza meg. Ezt a határszöget, amelynek tangense a felület súrlódási együtthatójának értékével azonos, **súrlódási szög**nek nevezzük.



A súrlódás jelensége azonban **nem irányfüggő**, tehát a nyugalmi állapot fenntartásához a felületen bármilyen irányban számíthatunk a súrlódási ellenállásra. **Egy súrlódásos kapcsolatban tehát a nyugalom**, az **elmozdulásmentesség mindaddig fennmarad, amíg a terhelő erők** eredője egy, **a felület normálisával ϕ szöget bezáró alkotójú egyenes körkúp felületén kívül nem kerül**.

Ha a terhelő erők eredője a kúp alkotójába esik, a kapcsolat a megcsúszás határán van, a súrlódási erő a maximális értét veszi fel, ha pedig az eredő a felület normálisával a súrlódási szögnél kisebb szöget zár be, a tényleges súrlódási erő a maximális érték alatt marad.

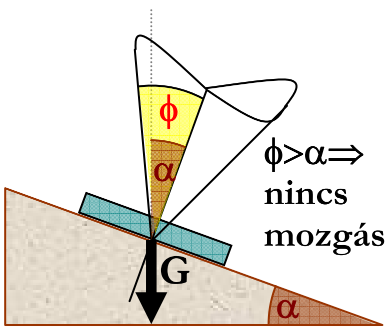


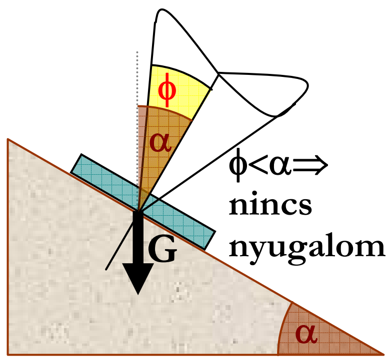
A súrlódás a mozgás (meg)akadályozásával, a mozgást létrehozni akaró erő kiegyensúlyozásával az építőmérnöki gyakorlatban igen hasznos jelenség: mindig segít a kapcsolatot terhelő erők egyensúlyának megteremtésében, sokszor pedig önmagában elegendő az egyensúly kialakulásához-fennmaradásához. **Azokat a kapcsolatokat, amelyekben a súrlódás önmagában elegendő a nyugalmi állapot biztosításához, önzáró kapcsolatoknak nevezzük**.

A legegyszerűbb (és legfontosabb!) önzáró kapcsolat a lejtő. A lejtő esetében a lejtőszög és a súrlódási szög viszonya határozza meg, hogy a lejtőre helyezett test megindul-e lefelé, vagy mozdulatlan marad.

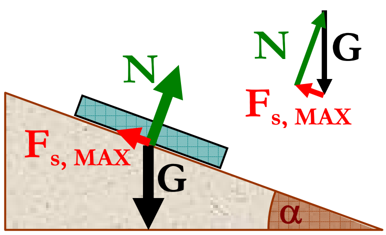
A lejtőre helyezett testre terhelő erőként a saját súlya hat. Ez tehát a terhelő erők eredője. Amennyiben ez az eredő a lejtő felületére merőleges tengely körül a súrlódási szöggel megrajzolt súrlódási kúp palástján belül marad, a súrlódási erő elegendő a súlyerő és a felületre merőleges támasztóerő eredőjeként értelmezhető lejtőmenti mozgatóerő egyensúlyozásához, azaz a test nem mozdul meg.

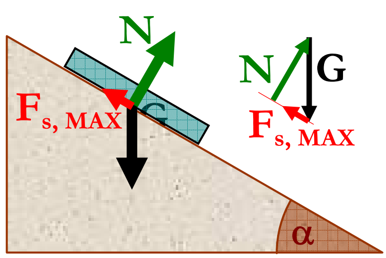
Ha a lejtő szögét növeljük, és a súlyerő hatásvonala a súrlódási kúpon kívülre kerül, a súrlódási erő maximális értéke is kisebb lesz a kialakuló lejtőmenti mozgatóerőnél, azaz a test a lejtőn (gyorsuló mozgással) lecsúszik.





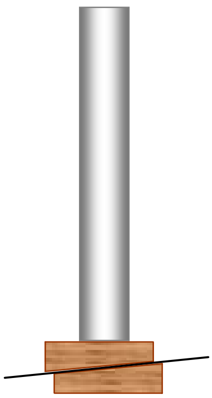
$$F_{mozgató} = G\sin(\alpha) - F_{súrlódási} = 0 \qquad F_{mozgató} = G\sin(\alpha) - F_{súrlódási,MAX} \neq 0$$



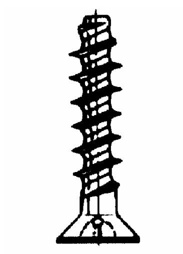


A lejtőnek ezt az önzáró tulajdonságát használjuk ki pl. a vasbetonszerkezetek kizsaluzásakor szükséges állványleeresztés során, amikor az alátámasztó oszlopokat ékpárokkal rögzítjük, amelyek a beállított szintet biztosítva, elmozdulások nélkül veszik fel a terhelő erőket, majd az állvány süllyesztésekor egy-két kalapácsütéssel megnövelve a vízszintes erőt, az ékek elmozdulnak, és az állványelemek tehermentesülnek.
De ugyanez a jelenség az alapja a csavarkapcsolatok alkalmazhatóságának: valójában a csavarmenet is egy lejtő. Ha a menetemelkedés kicsi, a csavarban fellépő tengelyirányú erő a meneteken fellépő súrlódási erő révén megakadályozza a csavaranya lecsavarodását, a kapcsolat önzáró.

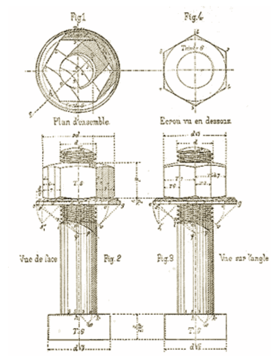
Gépészeti alkalmazásokban előfordul a csavarorsós meghajtás, ott a csavar nagy menetemelkedésű, hogy a súrlódás minél kevésbé akadályozza a mozgást, hiszen a cél a mozgás továbbítása.



ékpáros állvány alátámasztó szerkezet

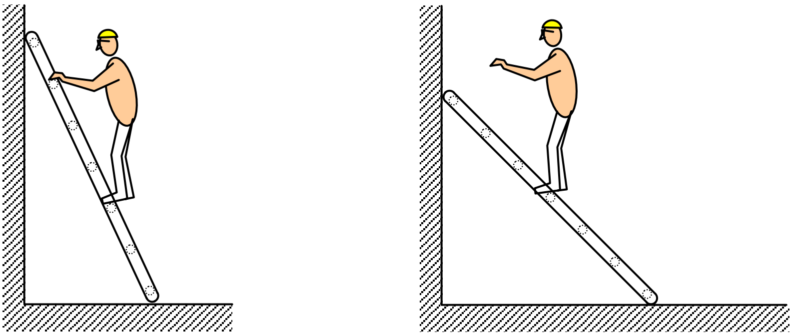


facsavar



acél csavarok

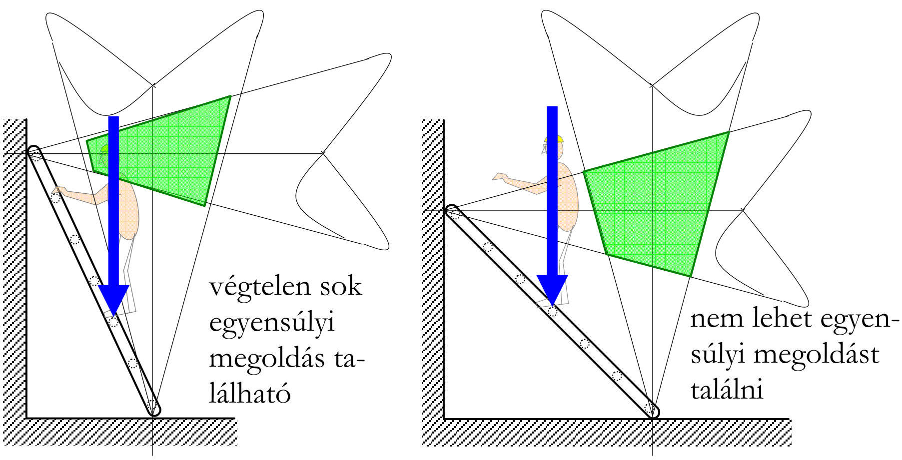
Súrlódásos kapcsolatokat alkalmazva feladataink többnyire határozatlanok lesznek. Nem találunk egyértelmű megoldást, csak azt tudjuk kimutatni, hogy a kapcsolatok elegendőek-e a megtámasztott szerkezet nyugalmi állapotának biztosítására, de nem tudjuk pontosan meghatározni, hogy melyik kapcsolat milyen mértékben veszt részt az egyensúlyi állapot kialakításában.



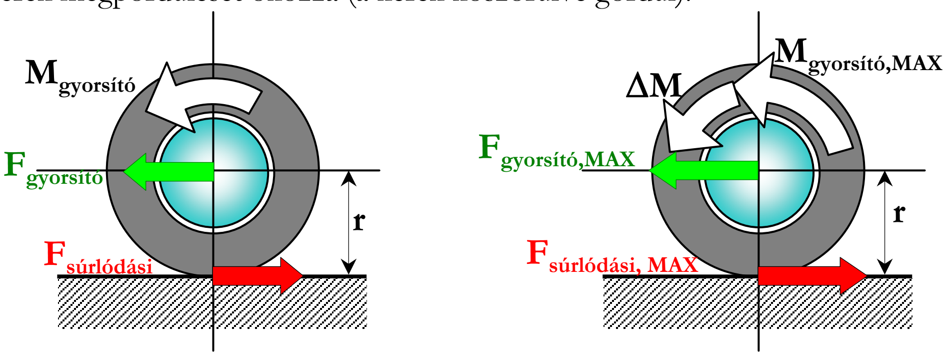
A falhoz támasztott, a falhoz is és a padlóhoz is súrlódásos kapcsolattal csatlakozó létra állékonyságának feltétele, hogy a terhelő erő hatásvonalának **legyen olyan pontja**, **amely a két kapcsolati felület súrlódási kúpjának metszetébe esik**.

Ha **egyetlen** ilyen pont van, akkor egyértelműen meghatározhatók a támaszerők (ilyen esetben egyébként mindkét felületen a súrlódási erő maximuma alakul ki).

Ha ilyen pont is létezik, akkor az egyensúly biztosítható, de (épp a tényleges súrlódási erők ismeretének hiányában) a kapcsolati erőkre egyértelmű megoldás nem adható. Ilyen esetben viszont a súrlódásban tartalék rejlik: a kapcsolati felületek kisebb súrlódási együttható mellett is alkalmasak az egyensúly biztosítására, vagy a létra még laposabb szögben is állékony marad. Vegyük észre, hogy a tartalék **nem** a terhelő erő nagyságában jelenik meg: az **egyensúlyi állapot lehetősége vagy lehetetlensége a terhelő erő nagyságától független** (a súrlódási erő maximuma a felületre merőleges erő arányában jelentkezik), **csak a terhelő erő helyzetétől függ**.



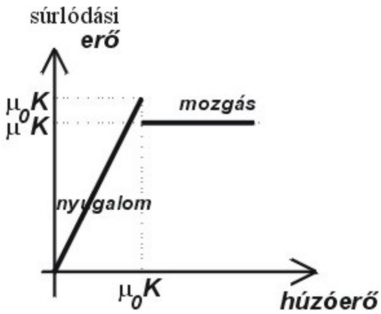
A következő, sokszor előforduló, és (főleg telente) mindnyájunkat érintő probléma, hogy a talajhoz súrlódásos kapcsolattal csatlakozó kerék mekkora (indítási) nyomaték átvitelére képes (kipörgésveszély), ill. mekkora, a tengely magasságában keletkező (fékező) erő átvitelére képes (megcsúszás-blokkolásveszély). A kerék tiszta, csúszásmentes gördülésének feltétele az, hogy a csatlakozási felületen a kerék mozgásállapot-változásához szükséges erő a súrlódási erő maximumát ne haladja meg.
A súrlódási erő maximális értéke a felület minőségét jellemző súrlódási együttható és a felületre merőleges nyomóerő szorzataként adódik. Ha tehát a kerék tapadása nem megfelelő, e két paraméter változtatására van lehetőségünk: pl. homokszórással növelhetjük a csúszós (út)felület súrlódási együtthatóját (a budapesti villamos motorkocsik esetében beépített, a vezető által működtethető „homokoló"), vagy a járműre rakott többletsúlyokkal növelhetjük a felületre merőleges nyomóerő értékét (összkerékhajtású traktorok első tengelye fölött alkalmazott vaselemek).
A motor által a hajtott kerékre átvitt nyomaték a súrlódási erő révén gyorsítóerőként jelenik meg a tengelyen. A nyomaték növelésével az erőpár erőnagyságai is arányosan növekednek, egészen addig, míg a kerék és az útburkolat közötti súrlódási erő el nem éri a maximumát. Ez a kipörgési határnyomaték. A kerékre ható nyomatékot tovább növelve a súrlódási erő már nem növekedhet, így a gyorsítóerő sem nő, a többletnyomaték a kerék megpördülését okozza (a kerék köszörülve gördül).

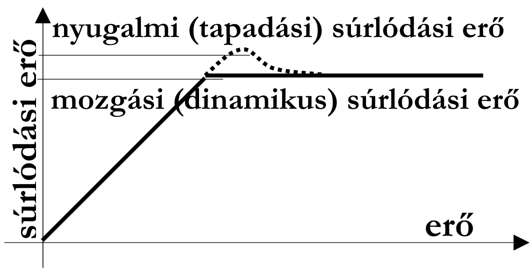


$$\Sigma F_{i,vízsz} = F_{gyorsító} + F_{súrlódási} = 0 \quad M_{gyorsító,MAX} = F_{gyorsító,MAX} \times r = F_{súrlódási,MAX} \times r$$

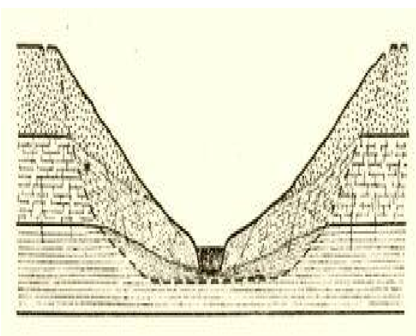
Fékezés esetén a jelenség hasonló: amíg a fékezőerő a súrlódási erő maximuma alatt marad, a kerék nem csúszik meg, hanem (egyre lassulva) gördül. A fékezőerőt a súrlódási erő maximuma fölé növelve a többletfékezőerő vetületi kiegyenlítés híján a kerék merevtest-szerű mozgását, megcsúszását okozza (a kerék csúszva gördül).

A súrlódás jelenségének ismeretéhez még egy fontos megállapítás tartozik: a (nyugalmi) súrlódás kimerülése, a mozgás megindulása után a súrlódási ellenállás lecsökken, azaz a mozgási súrlódási erő-együttható kisebb, mint a nyugalmi súrlódási erő-együttható. Ezt fizikai tanulmányaikból a következő ábra szemlélteti. Ugyanezt ábrázolja – kissé más megközelítésben – a másik ábra is.





Ennek a hatásnak az ismerete az építőmérnöki gyakorlatban azért fontos, mert a mi szakterületünkön a cél a szerkezetek nyugalmi állapotának biztosítása, és a súrlódás jelenségét is e cél érdekében használjuk fel. Ugyanakkor tudnunk kell, hogy a súrlódási ellenállás a mozgás megindulásakor hirtelen lecsökken, azaz a meginduló mozgás nem lassú és kismértékű lesz, hanem hirtelen, nagy elmozdulás, ami már csak egy teljesen más egyensúlyi helyzetben fog stabilizálódni. Ez a jelenség leginkább a talajtömegek mozgása során szembetűnő, amikor pl. az átázás miatt lecsökkent belső súrlódás nem elégséges a talajtömeg súlyának egyensúlyozására, és a talaj egy csúszólap mentén lesuvad.



Völgysuvadás sematikus és valóságos képe

Ellenőrző kérdések

Mi a súrlódási hatás lényege?
Mekkora lehet egy súrlódásos kapcsolatban a súrlódási erő?
Mitől és hogyan függ a súrlódási erő?
Mitől és hogyan függ a súrlódási erő maximális értéke?
Hogyan lehet csökkenteni a súrlódási erő maximális értékét?
Hogyan lehet növelni a súrlódási erő maximális értékét?
Mit jelent a súrlódásos kapcsolat önzárósága?
Milyen feltételek esetén önzáró egy súrlódásos kapcsolat?
Milyen feltételeket kell kielégíteni egy testre ható erők eredőjének, ha azt kívánjuk, hogy a test a (súrlódásos) megtámasztó felületen nem mozduljon el?
A (súrlódásos felületű) falsarokba támasztott rúdelem nyugalmi állapotához milyen feltételt kell kielégítenie a rá ható erők eredőjének?
Hogyan függ a (súrlódásos felületű) falsarokba támasztott rúdelem nyugalmi állapotának lehetősége a terhelő erők eredőjének NAGYSÁGÁtól?
Hogyan függ a (súrlódásos felületű) falsarokba támasztott rúdelem nyugalmi állapotának lehetősége a terhelő erők eredőjének HELYZETÉtől?
Mi a tiszta gördülés definíciója?
Mikor mondjuk, hogy a kerék köszörülve gördül?
Milyen feltételek mellett alakul ki a csúszva gördülés?
Miért veszélyes, ha az egyensúly biztosításakor a nyugalmi súrlódással számolunk?

5. Egyszerű tartók

A mérnöki gyakorlatban TARTÓSZERKEZETnek nevezünk minden olyan szerkezetet, amely részlegesen vagy kizárólagosan a terhek felvételére és a terhek más szerkezetekre (végső soron a talajra) történő továbbítására szolgál.

Ebben a fejezetben olyan tartószerkezetekkel foglalkozunk, amelyek **egyetlen** merev (ill. mint tudjuk, a valóságban: szilárd anyagú) elemből állnak.

5.1. A kényszerek

A tartószerkezetek a rájuk ható terhek következtében el akarnak mozdulni. E mozgások megakadályozására kényszerítenünk kell őket, hogy az általunk tervezett-kialakított helyükön maradjanak. Erre a kényszerítésre KÉNYSZEReket alkalmazunk.

A kényszerek olyan szerkezetek-szerkezeti kialakítások, amik a megtámasztandó szerkezet bizonyos pontjainak elmozdulásait korlátozzák.

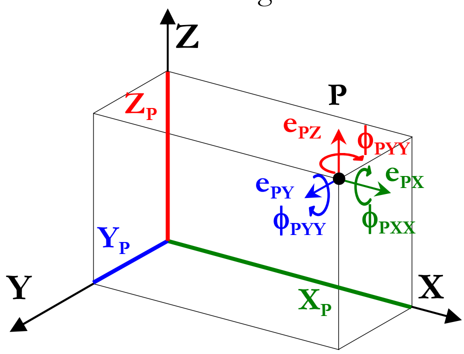
Ez a korlátozás lehet egy- vagy többdimenziós, lehet teljes vagy részleges.

Általános, mindig érvényes elvként kell megjegyeznünk, hogy **amilyen jellegű és irányú elmozdulást a kényszer (meg)akadályoz, olyan jellegű és irányú támaszigénybevételre mindig számítanunk kell!**

5.1.1. A kényszerek fokszáma

Egy pontnak a síkban háromféle, a térben hatféle elmozdulási lehetősége van, másként fogalmazva egy pont elmozdulási szabadságfoka a síkban 3, a térben 6.

A pontok abszolút (az X-Y-Z globális koordinátarendszerben értelmezett) eltolódásait $\mathbf{e_X}$, $\mathbf{e_Y}$ és $\mathbf{e_Z}$, elfordulásait ϕ_{XX}, ϕ_{YY} és ϕ_{ZZ} jelöli (az elfordulások azonosítóiban gyakran csak egyszer írják ki a forgástengely jelét, így a jelölés: ϕ_X, ϕ_Y és ϕ_Z-re egyszerűsödik).



Egy pont síkbeli támasztókényszere tehát maximum két eltolódás és egy elfordulás megakadályozására képes, azaz maximum két erővel és egy nyomatékkal helyettesíthető. Egy térbeli támasztókényszer maximálisan három eltolódás- és ugyancsak három elfordulás-összetevő kialakulását akadályozhatja (meg), ezért három (célszerűen koordinátatengely-irányú) erővel, és három (célszerűen koordinátatengelyek körül forgató) nyomatékkal helyettesíthető.

A megtámasztó kényszerekre jellemző az általuk **(meg)akadályozott elmozdulásösszetevők, ill. az ezekkel mindig megegyező számú kényszererő-komponensek száma** (ami az elvégzendő számításokban is fontos információ, ezért ezt alkalmazzuk a kényszerek megjelölésére, minősítésére), amit **a kényszerek FOKSZÁMának** nevezünk.

A síkbeli kényszerek tehát maximálisan 3-as fokszámúak, a térbeli kényszerek maximálisan 6-os fokszámúak lehetnek.

A tényleges szerkezetekben a megtámasztási pontoknak (elvileg) tetszőleges elmozduláskomponenseit gátolhatjuk a megfelelő kényszerek kialakításával, tehát a kényszerek fokszáma 1-től a maximális értékig bármilyen kombinációban elképzelhető, de a gyakorlatban csak néhány kialakítást szokás alkalmazni.

5.1.2. A kényszerek rugalmassága

Számításainkban azt szoktuk feltételezni, hogy a megtámasztások teljesen merevek, bármekkora terhet elmozdulások nélkül képesek felvenni. Ez a feltételezés első közelítésként elfogadható, és azzal az igen előnyös következménnyel jár, hogy a támaszkényszerekben a gátolt alakváltozás zérus lesz.

Azokat a támaszkényszereket, amelyek esetében a felvett erő- ill. nyomaték-komponens irányában elmozdulás nem lép fel, FIX megtámasztású kényszereknek nevezzük.

Meg kell azonban említenünk, hogy az alátámasztó szerkezeteknek is (még a talajnak is!) **van** alakváltozása, ami a támaszpontok elmozdulásai révén a vizsgált tartószerkezet viselkedését is befolyásolja. Ezzel a hatással e tárgy keretében nem foglalkozunk, de a hatás létét ismerni kell. A megtámasztó szerkezetekben is feltételezve a rugalmas viselkedést, azokat a támasztókényszereket, amelyekben a felvett erő- ill. nyomaték-komponens irányában elmozdulás, mégpedig a rugalmas viselkedés miatt a felvett erő- ill. nyomaték-komponenssel **arányos** elmozdulás keletkezik, RUGALMAS megtámasztású kényszereknek nevezzük.

5.1.3. A kényszerek elnevezése

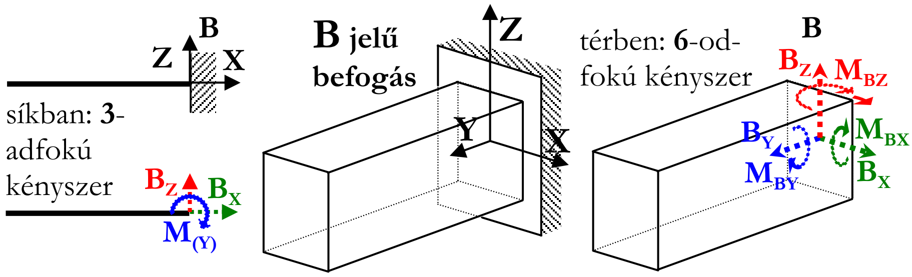
Nem minden megtámasztó kényszer kapott nevet, de a leggyakrabban alkalmazott kényszerek név szerint is azonosíthatók.

BEFOGÁS

A megtámasztott pont minden irányú elmozdulását megakadályozó kényszert BEFOGÁSnak nevezzük.

A síkbeli befogás a sík két koordinátatengelyének irányába eső (alkalmas nagyságú) erővel és a síkban működő, azaz a sík normálisa körül forgató (alkalmas nagyságú) nyomatékkal helyettesíthető. A térbeli befogás a három koordinátatengellyel párhuzamos erőkkel és az ezen tengelyek körül forgató nyomatékokkal helyettesíthető. (Ezek a kényszerek a síkban ill. a térben **önmagukban** elegendők egy tartóelem megtámasztásához.)

A befogási kényszer rajzjele és a feltételezett helyettesítő kényszererők:



CSUKLÓ

Ha a megtámasztó kényszer csak egy tengely körüli elfordulást tesz lehetővé, akkor CSUKLÓnak, csuklós megtámasztásnak nevezzük.

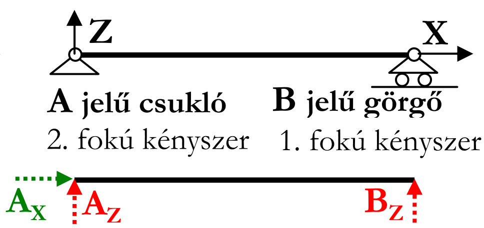
A síkban ez az elfordulás egyértelműen a normális körüli elfordulás (nem is lehet más), a térben bármilyen tengely körüli elfordulás lehet. Ha a térbeli kapcsolat a kapcsolt ponton átmenő mindhárom (egymásra kölcsönösen merőleges) tengely körül megengedi az elfordulások kialakulását, TÉRBELI CSUKLÓnak, vagy GÖMBCSUKLÓnak nevezzük.

GÖRGŐS TÁMASZ

Ha a kapcsolat a síkban az elfordulást és az egyik tengely irányába eső eltolódást is megengedi (azaz a szerkezet a megtámasztó síkon elgurulhat)**, a kényszer neve GÖRGŐS TÁMASZ.**

Ilyen tulajdonságú kényszer a térbeli szerkezetekben is kialakítható, de ott arra is van példa, hogy a kapcsolat többirányú eltolódást, ill. több tengely körüli elfordulást is lehetővé tesz.
A csuklós és a görgős kényszer rajzjele és a feltételezett irányú helyettesítő kényszererők:

A kényszerek a gerenda belső pontjait is támaszthatják, de a **gerenda folytonosságát nem szakítják meg**, azaz a megtámasztási pontban a szabad elfordulás a felette lévő **teljes** gerendaszelvényre vonatkozik.



A görgős támasz a nevét a hídszerkezetekben alkalmazott, ilyen tulajdonságú kényszerekről kapta, ahol a súrlódási hatás minimalizálása érdekében valóban acélgörgőkre támaszkodik a hídszerkezet. A kisebb nyílásméretű hidakon és a magasépítési szerkezetekben az ilyen tulajdonságú megtámasztó kényszerekben a megtámasztó síkkal párhuzamos elmozdulás lehetőségét általában csak valamilyen súrlódáscsökkentő réteg beépítésével oldják meg, ténylegesen görgőket nem alkalmaznak.

A görgős megtámasztás szigorúan véve csak nyomóerő felvételére alkalmas. Minthogy azonban a szerkezeteink önsúlya mindenképp nyomásként jelenik meg a támaszokban, ez mintegy „előfeszíti" a kapcsolatot, és ezáltal a támasz a hasznos teherből ébredő húzóerő felvételére is felemelkedés nélkül képes lesz. Szükség esetén a húzóerő felvételére a görgős támaszokban lekötést is beépíthetnek.


Csuklós hídtámasz

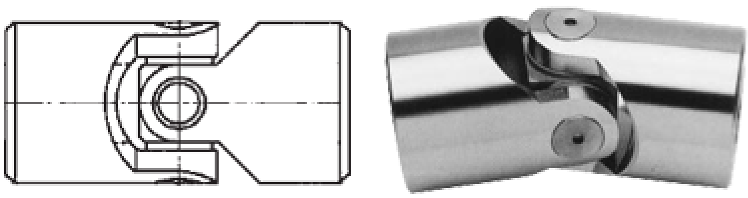

Görgős hídalátámasztás

TÁMASZTÓRÚD

Amennyiben a terhelt szerkezet megtámasztására a szerkezethez is és a talajhoz is csuklósan kapcsolt (egyenestengelyű) rudakat alkalmazunk, ezek a rájuk működő két erő egyensúlyi feltétele alapján csak a tengelyükbe eső erők felvételére, azaz csak a tengelyükbe eső eltolódások megakadályozására képesek. Az ilyen rudakat TÁMASZTÓRUDaknak nevezzük.

A támasztórudak működését, az általuk elérhető megtámasztó hatást a rúd tényleges alakja **nem** befolyásolja. Ha a támasztószerkezet terheletlen, és mindkét végén csuklós kapcsolatú, akkor a két erő egyensúlyi feltétele a **rúdalaktól függetlenül** a két csuklópont által meghatározott egyenesbe rögzíti a megakadályozott eltolódás és a felvehető erő irányát. Ha a két csuklópont közé nem merev (szilárd) anyagú rúd, hanem hajlékony kötél kerül, a kapcsolat a támasztórúddal megegyezően működik, de **valóban** csak húzóerő felvételére lesz alkalmas. Egy pontot a síkban két, a térben három támasztórúddal megtámasztva a pont minden eltolódásösszetevője zérus lesz, azaz a kapcsolat a síkbeli ill. a térbeli csuklóval **azonosan** működik.

A térbeli szerkezetek esetében a megtámasztott pont 6-os elmozdulási szabadságfoka a fentiekben ismertetett kombinációk mellett további lehetőségeket kínál, amelyek közül most csak egyet emelünk ki: a(z elsősorban a gépészetben, a hajtásláncokban alkalmazott) KARDÁNCSUKLÓt. A kardáncsukló a kapcsolati pont lehetséges 6 elmozduláskomponenséből két tengely körül engedi meg az elfordulások kialakulását, a harmadik tengelyben viszont (ezért alkalmazzák!) nyomaték átvitelére képes.



Kardáncsukló szerkezeti rajza és a kész szerkezet képe

A tényleges szerkezetek alakváltozásai-elmozdulásai a szerkezet méreteihez képest kicsinyek, így elegendő, ha a megtámasztások a „szabad" elmozdulást (pl. a csukló az elfordulást) csak meglehetősen szűk határok között biztosítják.

5.2. A statikai váz

A rúdszerkezetek vizsgálata során a terheket és a szerkezet válaszfüggvényeit a rúd **tengelyvonala** mentén, a tengelyben felvett (lokális) koordinátarendszerben értelmezzük. Így a rúdszerkezeteket a továbbiakban csak a tengelyvonalukkal jelenítjük meg, és a megtámasztásokat is csak sematikusan jelöljük.

> **A tartószerkezet és megtámasztásait sematikusan bemutató ábrázolását a tartó STATIKAI VÁZának nevezzük.**

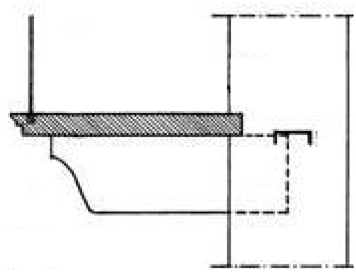
5.3. Az egyszerű tartók alaptípusai

5.3.1. Befogott tartó – konzoltartó

Az egyik végén befalazott, elmozdulásmentesen rögzített gerendatartót KONZOLnak, konzoltartónak nevezzük.

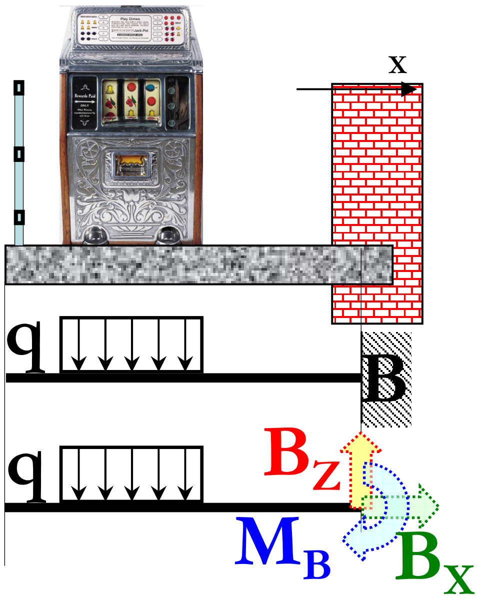
A konzoltartóban a megtámasztást (bár az a valóságban **mindig** egy nem elhanyagolható hosszúságú tartószakasz) **egy pontban** tételezzük fel.

A gyakorlatban annak meghatározása, hogy ezt az elméleti megtámasztási pontot hol vehetjük fel, esetenként komoly mérnöki megfontolásokat igényel!

Egy szép (budai) kőkonzolos erkély képe és oldalnézeti rajza

A támasztó erők-nyomatékok meghatározása során a **tényleges szerkezeti kialakítás** alapján felvesszük a tartó **STATIKAI VÁZ**át, amelyen szerepeltetjük a koncentrált ill. a vonalmenti megoszló (statikai) terheket és a megtámasztó kényszert. Ezután a **kényszert helyettesítjük** a feltételezett (javasolhatóan az X-Y-Z globális koordinátarendszer pozitív tengelyágaival megegyező) irányú, egyelőre ismeretlen nagyságú erőkkel, és a tartó-terhelés síkjában keletkező, pozitív forgásirányú nyomatékkal. Az így előálló erőrendszer



egyensúlya alapján a kapcsolati dinámok meghatározhatók.

$$\left[(q), B_X, B_Z, M_{BY},\right] \doteq 0$$

A (síkbeli) konzoltartóra ható aktív (terhelő) és passzív (megtámasztó) erőkre felírt egyensúlyi kijelentésben **három ismeretlen** érték szerepel, a szerkezet (síkbeli) elmozdulásmentessége alapján pedig **három** (matematikailag független) **statikai egyenlet** írható fel, azaz a statikai egyenletek elegendőek az ismeretlenek meghatározásához: a szerkezet **STATIKAILAG HATÁROZOTT**. Ugyanakkor a befogás, mint megtámasztás a szerkezetnek minden síkbeli elmozdulását meg tudja akadályozni (természetesen feltételezzük, hogy a terhelés nem meríti ki a megtámasztás teherviselőképességét), azaz a szerkezet elmozdulásmentesen megtámasztott, megtámasztása **MEREV**.
Az ismeretlen kapcsolati dinámok meghatározására szolgáló egyenletek :

$$\sum F_{iX} = 0 \Rightarrow B_x \quad \sum F_{iZ} = 0 \Rightarrow B_Z$$

$$\sum M_{iY}^{B} = 0 \Rightarrow M_{BY}^{B}$$

A feladat valójában egy erő(rendszer) egyensúlyozása ismert ponton átmenő erővel és egy vele egyidejűleg működő erőpárral

Itt a nyomatéki egyenletet a befogási pontra célszerű felírni, mert így abban a befogásban keletkező, ismeretlen támaszerő-komponensek nem fognak szerepelni.
A fenti egyenletek az egyértelmű megoldáson túl **független** megoldásokat szolgáltatnak, azaz bármelyik egyenletet írjuk is fel, a megoldás során **nincs szükség a többi keresett ismeretlen dinám nagyságának ismeretére**. Ezt azt jelenti, hogy a megoldásainkban a számítási hiba elkövetésének valószínűsége azonos, nem halmozódik, másként fogalmazva: az egyik ismeretlen meghatározása során (esetlegesen) elkövetett hiba a további ismeretlenek hibátlanságát nem teszi lehetetlenné.
A fenti egyenletek felírása és megoldása tetszőleges alakú befogott konzol esetén azonos, különbség csupán a terhelő erők vetületeinek és a befogási pontra vett nyomatékainak meghatározásában van.

5.3.2. Kéttámaszú tartó

A két pontjában (egy elsőfokú és egy másodfokú kényszerrel) megtámasztott gerendát KÉTTÁMASZÚ TARTÓnak nevezzük.

A kéttámaszú tartó mind a magasépítésben, mind a mélyépítésben a leggyakoribb szerkezet, és még a bonyolultabb, összetett szerkezetek vizsgálatát is sokszor kéttámaszú tartókra vezetjük vissza.

A nagy nyílásméretű tartók, pl. a hídszerkezetek esetében a megtámasztásokra külön szerkezeteket (sarukat) építünk be, amelyek a támaszerők hatásvonalait egyértelműen kijelölik. A kisebb szerkezetekhez, különösen a magasépítési tartókhoz (nyíláskiváltók, födémgerendák, stb.) ilyen megtámasztó szerkezeteket nem alkalmazunk, egyszerűen a falra-pillérre támasztjuk őket. Ilyen esetekben a megtámasztó hatás valójában egy **felületen** érvényesül, és a megtámasztó erők eredőjének helye egyértelműen nem jelölhető ki. Az ilyen szerkezetek esetében a koncentrált támaszerő helyének, hatásvonalának meghatározása mérnöki megfontolásokat igényel.

Kéttámaszú vasbetonhíd

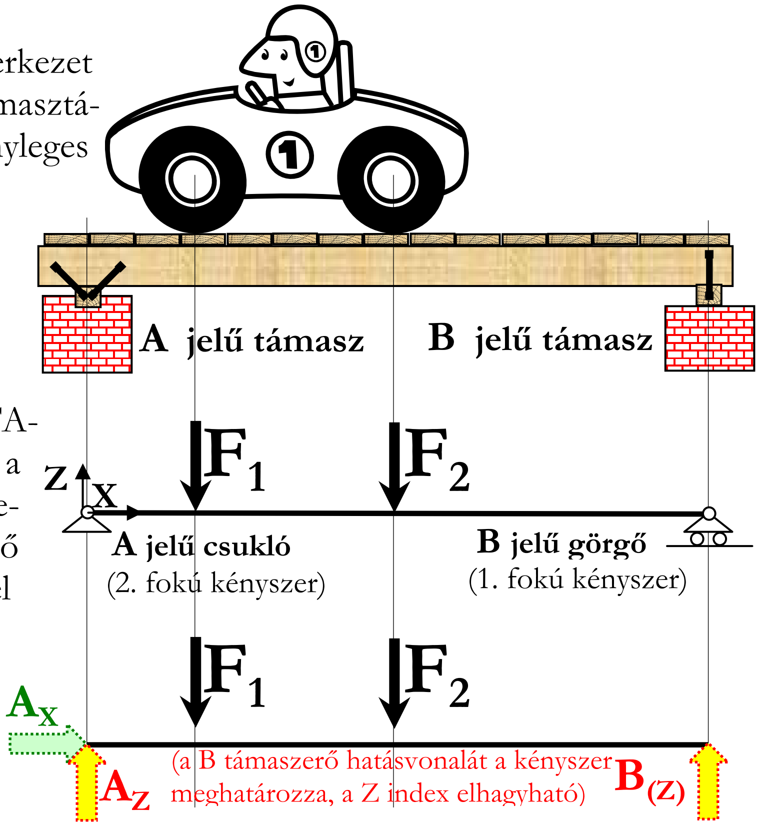
Kéttámaszú keretdaru

Kisebb kéttámaszú szerkezetekben (még hídszerkezetekben is!) sokszor elhagyjuk a megtámasztó sarukat, és a vízszintes eltolódás lehetőségét egy súrlódáscsökkentő réteg beépítésével biztosítjuk.

A kerettartó kéttámaszúságát mutatja, hogy a bal oldali keretláb a gerendacsatlakozásnál kiszélesedik, sarokmerev kapcsolattal készült, tehát a bal oldali keretláb vízszintes erők felvételére is képes.

A tartó vizsgálata, a támaszerők meghatározása során most is először a tényleges helyzetet, a **valós megtámasztásokat vesszük szemügyre**, majd ezek alapján **felvesszük a tartó STATIKAI VÁZát**, végül pedig a statikai vázon a **kényszereket helyettesítjük a támaszerők feltételezett**

összetevőivel (ezek irányát célszerű az X-Y-Z globális koordinátarendszer pozitív tengelyágaival megegyezően felvenni).



a tényleges szerkezet a valós megtámasztásokkal és a tényleges teherrel

a szerkezet STATIKAI VÁZa a tényleges terhelést megjelenítő terhelő erőkkel

a STATIKAI VÁZ a feltételezett irányú kényszer-

a külső és belső erőkre felírható egyensúlyi kijelentés

$$\left(F_1, F_2, A_X, A_Z, B_{(Z)}\right) \doteq 0$$

A kéttámaszú tartóra ható aktív (terhelő) és passzív (megtámasztó) erőkre felírt egyensúlyi kijelentésben **három ismeretlen** érték szerepel, a szerkezet (síkbeli) elmozdulásmentessége alapján pedig **három** (matematikailag független) **statikai egyenlet** írható fel, azaz a statikai egyenletek elegendőek az ismeretlenek meghatározásához: a szerkezet **STATIKAILAG**

HATÁROZOTT. Ugyanakkor a két megtámasztás (azon egy eset kivételével, amikor a görgős támasz által meghatározott hatásvonal a csuklós támaszponton megy át) a szerkezetnek minden síkbeli elmozdulását meg tudja akadályozni (természetesen feltételezzük, hogy a terhelés nem meríti ki a megtámasztás teherviselőképességét), azaz a szerkezet elmozdulásmentesen megtámasztott, megtámasztása **MEREV**.
Az ismeretlen kapcsolati dinámok meghatározására szolgáló egyenletek:

$$\sum M_{iY}^{A\_csuklópont} = 0 \Rightarrow B_{(Z)} \quad \sum F_{iX} = 0 \Rightarrow A_X$$

$$\sum F_{iZ} = 0 \Rightarrow A_Z$$

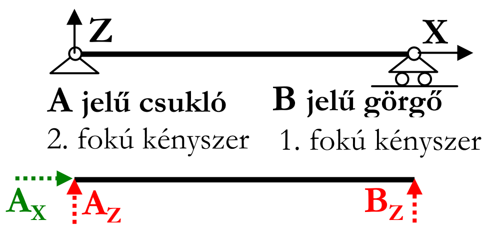
Ebben az egyenletben már fel kell használnunk $B_{(Z)}$ kiszámított értékét!

A feladat valójában egy erő(rendszer) egyensúlyozása egy ismert ponton átmenő, és egy ismert hatásvonalba eső erővel.

Itt először a csuklópontra vonatkozó nyomatéki egyenletet célszerű felírni, mert így abban csak az elsőfokú kényszer támasztóereje szerepel. A továbbiakban a két vetületi egyenlet alkalmas a csuklóerők értékének kiszámítására.
A görgős támasz kialakítása a támaszerő hatásvonalát egyértelműen kijelöli, ezért a görgős támaszban keletkező támaszerő esetében az irányt jelző indexelés elhagyható.
A fenti egyenletek alapján a csuklós támasz függőleges erőkomponense már csak a görgős támaszra meghatározott támaszerő felhasználásával állítható elő, azaz **nem független** megoldás. A Z irányú vetületi egyenlet helyett a csuklós támasz vízszintes támaszerőkomponensének és a görgős támaszban ébredő támaszerő hatásvonalának metszéspontjára (ez vízszintes állású gerenda és vízszintes síkra támaszkodó görgős támasz esetén maga a görgős alátámasztás támaszpontja) nyomatéki egyenletet felírva azonban A_Z értékére is független megoldáshoz juthatunk.

$$\sum M_{iY}^{B} = 0 \Rightarrow A_z$$

Ebben az egyenletben sem A_X, sem B_Z nem szerepel!



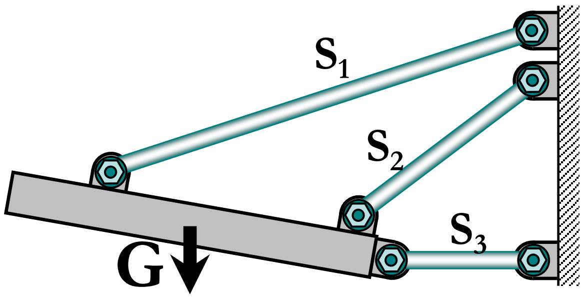
A fenti egyenletek felírása és megoldása tetszőleges alakú kéttámaszú tartó esetén azonos, különbség csupán a terhelő erők vetületeinek és a nyomatékainak meghatározásában van.

5.3.3. Három rúddal megtámasztott szerkezet

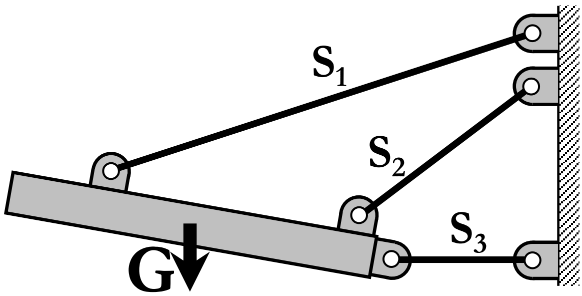
Egy tartóelem nyugalmi állapota úgy is biztosítható, ha három pontjának (egyeneseiben nem közös metszéspontú és nem párhuzamos) eltolódását meggátoljuk, azaz ezeket a pontokat egy-egy elsőfokú kényszerrel, pl. rúddal megtámasztjuk. Az ily módon megtámasztott tartónak külön elnevezése nincs, de viselkedése mindenképp külön vizsgálatra érdemes. A támasztórudakra vonatkozóan (a szokásos terheletlenség és mindkét végi szabadon elforduló megtámasztás mellett) csak azt kell kikötnünk, hogy tengelyeik, azaz a **megtámasztó erők hatásvonalai nem lehetnek közös metszéspontúak**, ebbe beleértve a párhuzamosságot is.

Sok esetben a támasztórúd-párok a megtámasztó vagy a megtámasztott szerkezeten közös pontba futnak, ilyen esetekben a rúdpárok megtámasztó hatása a közös pontjukba elképzelt csuklós támasz hatásával azonos, és a támaszerők meghatározása is történhet ennek figyelembevételével.

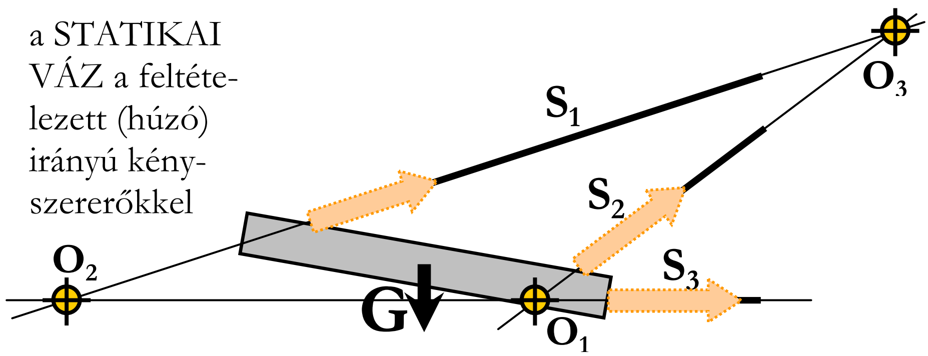
Bakdaru, amelynek gerendája tekinthető három rúddal megtámasztottnak a tényleges szerkezet a valós megtámasztásokkal és a tényleges teherrel



a szerkezet STATIKAI VÁZa a tényleges terhelő erőkkel



a STATIKAI VÁZ a feltételezett (húzó) irányú kényszererőkkel



a külső és belső erőkre felírható egyensúlyi kijelentés

$$\left(G, S_1, S_2, S_3\right) \doteq 0$$

A feladat valójában egy erő(rendszer) egyensúlyozása három, ismert hatásvonalba eső erővel.

A három rúddal megtámasztott tartóra ható aktív (terhelő) és passzív (megtámasztó) erőkre felírt egyensúlyi kijelentésben **három ismeretlen** érték szerepel, a szerkezet (síkbeli) elmozdulásmentessége alapján pedig **három** (matematikailag független) **statikai egyenlet** írható fel, azaz a statikai egyenletek elegendőek az ismeretlenek meghatározásához: a szerkezet **STATIKAILAG HATÁROZOTT**. Ugyanakkor a három rúd tengelye mentén működő megtámasztás (azon egy eset kivételével, amikor a három rúd tengelyvonalának **van** közös metszéspontja) a szerkezetnek minden síkbeli elmozdulását meg tudja akadályozni (természetesen feltételezzük, hogy a terhelés nem meríti ki a megtámasztás teherviselőképességét), azaz a szerkezet elmozdulásmentesen megtámasztott, megtámasztása **MEREV**.
Az ismeretlen kapcsolati dinámok meghatározására szolgáló legcélszerűbb egyenletek a rúderők hatásvonalainak metszéspontjaira, a FŐPONTokra felírt nyomatéki egyenletek lesznek:

$$\sum M_{iY}^{O_1} = 0 \Rightarrow S_1 \quad \sum M_{iY}^{O_2} = 0 \Rightarrow S_2$$

$$\sum M_{iY}^{O_3} = 0 \Rightarrow S_3$$

Ezekben az egyenletben mindig csak **egy** ismeretlen támaszerő szerepel!

A feladat valójában egy erő(rendszer) egyensúlyozása három, ismert hatásvonalba eső erővel.
Itt mindhárom statikai egyenletet a rúderőhatásvonal-párok által meghatározott FŐPONTOKRA vonatkozó nyomatéki egyenletként célszerű felírni, mert így azokban mindig csak a **harmadik** rúderő értéke szerepel ismeretlenként. A vizsgálat során a rúderőket húzottnak (+) szokás feltételezni, ha a feltételezettől eltérően nyomás (-), akkor az egyenletekből negatívra adódik.
A fenti egyenletek alapján a rúderők mindegyike független megoldásként állítható elő, azaz bármelyik egyenletet írjuk is fel, a megoldás során **nincs szükség a másik két keresett ismeretlen rúderő nagyságának ismeretére**. Ezt azt jelenti, hogy a megoldásainkban a számítási hiba elkövetésének valószínűsége azonos, nem halmozódik, másként fogalmazva: az egyik ismeretlen meghatározása során (esetlegesen) elkövetett hiba a további ismeretlenek hibátlanságát nem teszi lehetetlenné.

Ha a támasztórudak közül kettő párhuzamos, és emiatt a harmadik rúdhoz főpont nem található, a párhuzamos rúdpárra merőlegesen felvett tengelyre vonatkozó vetületi egyenlet ad lehetőséget a harmadik rúderő értékének (ugyancsak a többitől független) meghatározására.

Egyébként általános esetben a főponti nyomatéki egyenlet(ek) helyett vetületi egyenlet(ek)et is felírhatunk az ismeretlen rúderő(k) meghatározására – sok esetben ez(ek) geometriailag lényegesen egyszerűbbek – , de ez(ek) (többnyire) nem ad(nak) független megoldást, így további (már nem független) egyenlettel ellenőrizni kell az eredményeket.

AZ EGYSZERŰ TARTÓK ÖSSZEFOGLALÓ TÁBLÁZATA	
BEFOGOTT KONZOL	
A megtámasztó kényszer:	(síkbeli) merev befogás
A megtámasztás által megakadályozott elmozdulások:	a befogási pont bármilyen irányú (síkbeli) elmozdulása, azaz két irányú eltolódása és (síkbeli) elfordulása
A kényszererők – kényszernyomatékok:	a befogási pontban működő általános állású erő és egy vele egyidejűleg működő nyomaték
Az egyensúlyi kijelentés:	$[(F_{terhelő}), B, M_B]=0$ vagy $[(F_{terhelő}), B_X, B_Z, M_B]=0$
A tartóra felírható statikai egyenletek:	$\Sigma F_{iX}=0 \Rightarrow B_X$ $\Sigma F_{iZ}=0 \Rightarrow B_Z$ $\Sigma M_{IY}^{(B)}=0 \Rightarrow M_B$
KÉTTÁMASZÚ TARTÓ	
A megtámasztó kényszer:	1 (síkbeli) csukló+1 rúd (vagy görgős támasz)
A megtámasztás által megakadályozott elmozdulások:	a csuklópont bármilyen irányú (síkbeli), azaz két irányú eltolódása és a másik megtámasztott pont egy irányú (síkbeli) eltolódása
A kényszererők – kényszernyomatékok:	a csuklópontban működő általános állású erő és a másik megtámasztott pontban a támaszkényszerrel megegyező hatásvonalú erő
Az egyensúlyi kijelentés:	$[(F_{terhelő}), A, B]=0$ vagy $[(F_{terhelő}), A_X, A_Z, B]=0$
A tartóra felírható statikai egyenletek:	$\Sigma M_{IY}^{(A)}=0 \Rightarrow B$ $\Sigma F_{iX}=0 \Rightarrow A_X$ $\Sigma F_{iZ}=0 \Rightarrow A_Z$ vagy $\Sigma M_{IY}^{(B)}=0 \Rightarrow A_z$
HÁROM RÚDDAL MEGTÁMASZTOTT TARTÓ	
A megtámasztó kényszer:	3 rúd (vagy görgős támasz)
A megtámasztás által gátolt elmozdulások:	a három megtámasztott pont egy (rúd)irányú (síkbeli) eltolódása
A kényszererők – kényszernyomatékok:	a három megtámasztott pontban a támaszkényszerrel megegyező hatásvonalú erő
Az egyensúlyi kijelentés:	$[(F_{terhelő}), S_1, S_2, S_3]=0$
A tartóra felírható statikai egyenletek:	$\Sigma M_{IY}^{(O1)}=0 \Rightarrow S_1$ $\Sigma M_{IY}^{(O2)}=0 \Rightarrow S_2$ $\Sigma M_{IY}^{(O3)}=0 \Rightarrow S_3$

5.4. A tartószerkezet megtámasztottságának minősítése

Már az egyszerű tartók három alapesetének vizsgálata során is végiggondoltuk, hogy a rendelkezésünkre álló statikai egyenletek elegendőek-e az ismeretlen támaszerő-összetevők meghatározásához, azaz a tartó megtámasztása STATIKAILAG HATÁROZOTT-e, ill. hogy az alkalmazott megtámasztások (bármilyen terhek esetén is) elégségesek-e a megtámasztott szerkezet nyugalmi állapotának, a rá működő aktív (terhelő) és passzív (megtámasztó) erők egyensúlyának biztosításához, azaz a tartó megtámasztása MEREV-e.
Érdemes ezt a két kérdést a tartószerkezetekre vonatkozóan általánosítva is megvizsgálni.

5.4.1. A megtámasztottság kinematikai minősítése

Egy tartó megtámasztásait, megtámasztottságát minősíthetjük a tartó ÁLTALÁNOS (a tényleges terhektől FÜGGETLEN) ELMOZDULÁSI LEHETŐSÉGE alapján.

Ha az alkalmazott támaszkényszerek mellett a tartó TETSZŐLEGES teher mellett is NYUGALOMBAN marad, a megtámasztást **MEREV**nek minősítjük.

Ha az alkalmazott támaszkényszerek mellett található LEGALÁBB EGY olyan terheléskombináció, amelyre a tartó NEM KÉPES NYUGALOMBAN MARADNI, a megtámasztást **LABILIS**nak minősítjük.

5.4.2. A megtámasztottság statikai minősítése

Ha a támaszigénybevételek EGYÉRTELMŰ meghatározására (figyelembe véve a tényleges terheket) a felírható STATIKAI egyenletek elégségesek, a szerkezet megtámasztását **STATIKAILAG HATÁROZOTT**nak minősítjük.

Ha a statikai egyenletek alapján (figyelembe véve a tényleges terheket) SOKFÉLE támaszigénybevétel-rendszer mellett is nyugalomban tartható a tartó, akkor a megtámasztás minősítése **STATIKAILAG HATÁROZATLAN**.

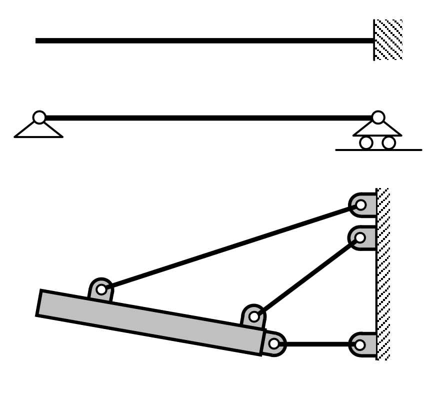
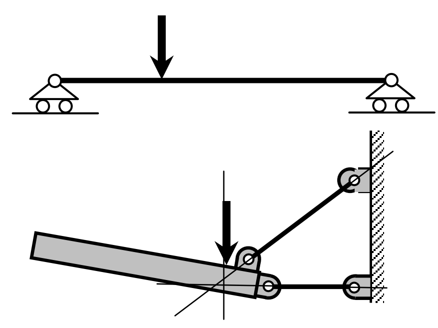
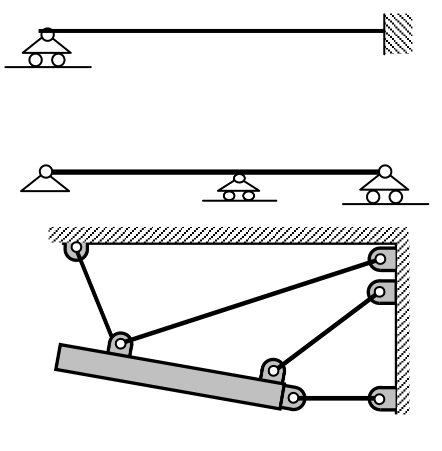
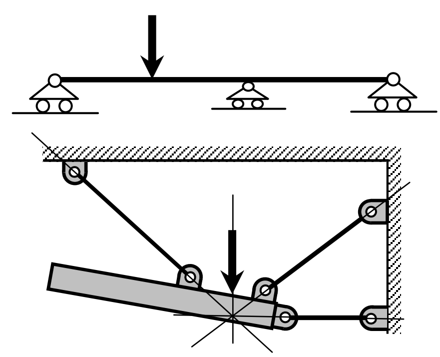
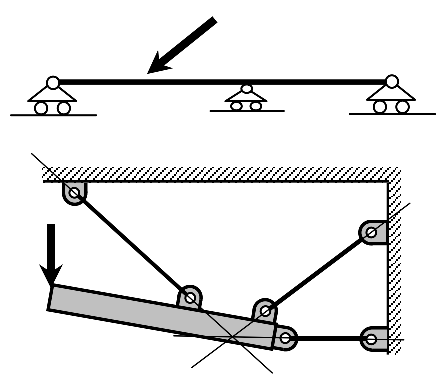
Ha pedig (figyelembe véve a tényleges terheket) NEM LÉTEZIK olyan támaszigénybevétel-rendszer, amely mellett a szerkezet nyugalomban maradhat, a megtámasztást **STATIKAILAG TÚLHATÁROZOTT**nak, vagy másként **ELMOZDULÓ**nak minősítjük.

A tartószerkezetek megtámasztásait matematikai alapon is megközelíthetjük: az alkalmazott statikai összefüggéseinkben (az általában elegendő pontosságú I. rendű elmélet használata során) csak elsőfokú, lineáris függvényeket alkalmazunk. Így a statikai egyenleteink lineáris egyenletrendszerek, amelyekben minden ismeretlen CSAK ELSŐ FOKON fordul elő, és az ismeretlenek SZORZATA nem szerepel. Az ilyen tulajdonságú egyenletrendszerekre igaz, hogy a megoldhatóság, a megoldás létezése a (matematikailag FÜGGETLEN) EGYENLETEK és az ISMERETLENEK számának összevetéséből adódik.

A MEGTÁMASZTOTTSÁG MATEMATIKAI MINŐSÍTÉSE	
Az egyenletek száma < ismeretlenek száma	**STATIKAILAG HATÁROZATLAN** (végtelen sok megoldás létezik)
Az egyenletek száma = ismeretlenek száma	**STATIKAILAG HATÁROZOTT** (egyértelmű megoldás létezik)
Az egyenletek száma > ismeretlenek száma	**STATIKAILAG TÚLHATÁROZOTT** (NINCS megoldás)

Ha az egyenletek száma az ismeretlenek számánál nagyobb, akkor túl sok (egyenletekben megtestesülő) feltételt szabtunk, amelyek kielégítéséhez kevés a változtatható paraméter. Ilyen esetekben csak akkor adódik megoldás, ha két (vagy több) feltételünk lényegében azonos, azaz két (vagy több) egyenletünk matematikailag KÖVETKEZMÉNY-EGYENLET. Ezért kellett a fentiekben rögzítenünk, hogy a minősítésben a FÜGGETLEN matematikai egyenletek számát kell figyelembe vennünk.

5.4.3. A megtámasztottsági esetek példái

	MEREV	LABILIS
STAT. HATÁROZOTT		
STAT. HATÁROZATLAN		
ELMOZDULÓ (statikailag túlhatározott)		

5.5. Ellenőrző kérdések

Mi a tartószerkezet fogalma?
Mi a kényszer?
Mi a kényszererő?
Mi a megtámasztás fokszáma?
Milyen kényszereket ismer?
Hogyan lehet megállapítani egy megtámasztás fokszámát?
Milyen egyszerű síkbeli tartókat ismer?
Milyen célszerű statikai egyenletek írhatók fel befogott konzoltartó esetén?
Milyen célszerű statikai egyenletek írhatók fel kéttámaszú tartó esetén?
Milyen célszerű statikai egyenletek írhatók fel három rúddal megtámasztott tartó esetén?
Mikor mondhatjuk, hogy egy szerkezet megtámasztása statikailag határozott?
Milyen szükséges feltétel feltétele van a megtámasztás statikai határozottságának?
Lehet-e nyugalomban a statikailag határozatlan megtámasztású szerkezet?
Lehet-e nyugalomban a labilis megtámasztású szerkezet?
Milyen teherre várható elmozdulás a merev megtámasztású szerkezeten?
Lehet-e egy statikailag határozatlan szerkezet labilis megtámasztású?

6. Összetett tartók

Ha a szükséges tartóméret meghaladja a gyártástechnológiai vagy szállítási-szerelési korlátokat, lehetőségünk van a tartószerkezetet TÖBB DARABból összeállítani.

A TÖBB ELEMBŐL, az elemek közötti BELSŐ KÉNYSZEREK segítségével összeállított szerkezeteket ÖSSZETETT TARTÓKnak nevezzük.

Az egyedi tartóelemekből mind síkbeli, mind térbeli hálózatú tartószerkezet összeállítható. Az alábbiakban csak a síkbeli összetett tartók vizsgálatával foglalkozunk.
Az összetett tartókban KÜLSŐ és BELSŐ kapcsolatok biztosítják az elemek megfelelő kapcsolatát és a szerkezet egészének nyugalmi állapotát. Így a támaszerők is KÜLSŐ ill. BELSŐ kapcsolati erőkként határozhatók meg, és a szerkezet, ill. elemeinek megtámasztása is külön-külön minősítendő.

6.1. A tartóelemek belső kapcsolata

Amint azt már az egyszerű tartók vizsgálata során megállapítottuk, EGY SÍKBELI tartóelem **statikailag határozott** (a statikai egyenletek felhasználásával egyértelműen meghatározható) és **merev** (bármilyen dinámrendszerre elmozdulásmentességet garantáló) kapcsolata hármas összfokszámú kényszercsoporttal biztosítható (a fokszám-összeg csak szükséges, de nem elégséges feltétel: a kényszererők hatásvonalai **nem lehetnek közös metszéspontúak!**).
A síkbeli összetett tartók elemei közötti kapcsolatokra ugyanaz a három alapeset alkalmazható, amelyeket az egyszerű tartók külső kapcsolati lehetőségeiként megismertünk.

6.2. A két tartóelem befogott kapcsolata

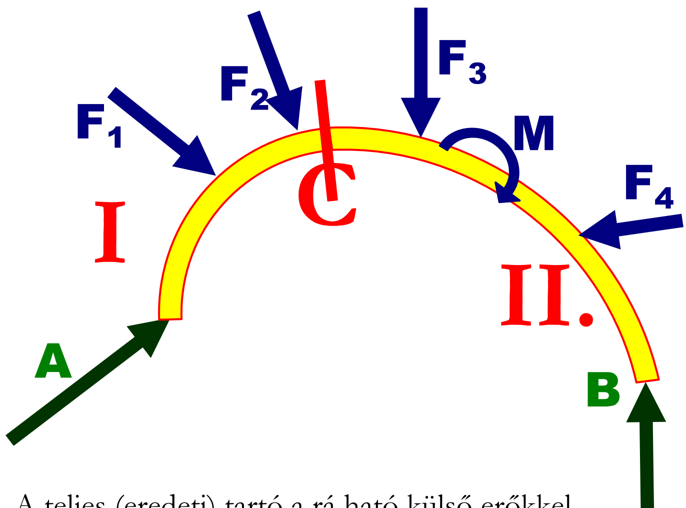
Ha jól meggondoljuk, ez a kapcsolattípus egy tartóelem **bármelyik** keresztmetszetére elmondható, hiszen a folytonos szerkezetet épp az jellemzi, hogy bármely keresztmetszetében **a megelőző és a követő határkeresztmetszetek relatív elmozdulása minden körülmények között**

zérus, azaz a pontban a **belső** (síkbeli) **kapcsolat fokszáma 3**, a kapcsolat **merev** (és statikailag határozott).

Kissé erőltetettnek tűnik egy ilyen „kapcsolat”-ot belső kényszernek tekinteni, de (a későbbiekben látni fogjuk, hogy) néha igen előnyös e szokatlan és indokolatlannak tűnő szemléletmód végiggondolása is.

Az ilyen összetett szerkezet azonban nemcsak a folytonos tartó egy belső keresztmetszete(i) merevségének vizsgálata, hanem a **különálló elemek valódi összekapcsolása** révén is származtatható: ha a kapcsolati pontban a csatlakozó metszeteket összeragasztjuk vagy összehegesztjük, ill. más módon **elmozdulásmentesen összekapcsoljuk**, a két tartóelem a kapcsolat elmozdulásmentessége révén **egyetlen szerkezetként** fog viselkedni, és úgy is vizsgálható.

Működjön az ábrán látható íves tartóra egy $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_3}$, $\mathbf{F_4}$, **M** aktív dinámokból és **A, B** passzív (támaszerők) erőkből álló **egyensúlyi** erőrendszer.



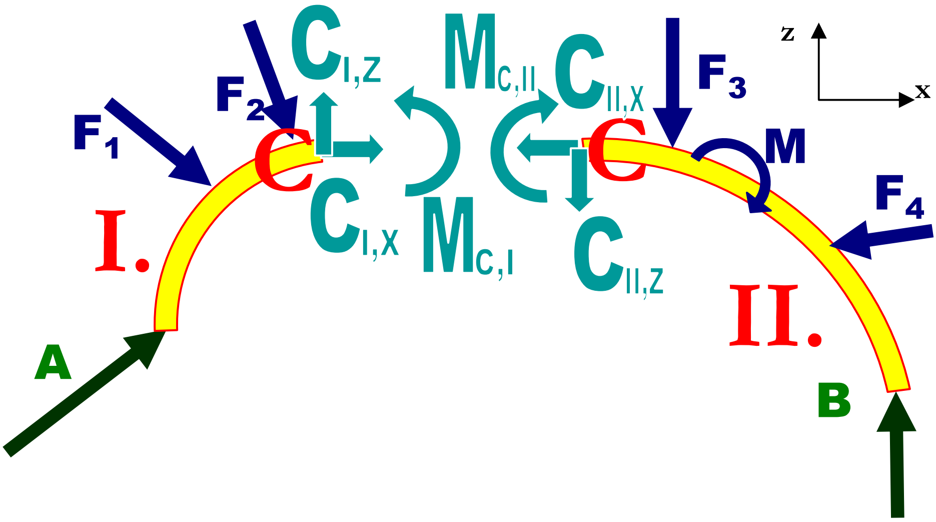
A teljes (eredeti) tartó a rá ható külső erőkkel

A szerkezetre működő dinámok egyensúlyát leíró egyensúlyi kijelentés:

$$\left(F_1, F_2, F_3, F_4, M, A, B\right) = 0$$

A **C** jelű keresztmetszetet **kapcsolati pontnak** tekintve a tartó két darabjára a rájuk ható aktív és passzív külső erők mellett a C keresztmetszetben megszüntetett anyagi kapcsolatot helyettesítő **BELSŐ ERŐK** is működni

fognak. A kényszerek természetéből tudjuk, hogy minden megakadályozott elmozduláskomponens egy (vele megegyező jellegű és irányú) kapcsolati erőösszetevő megjelenését jelenti. Egy (akár belső!) **befogás** hatása tehát a síkban **két** (pl. koordinátatengely-irányú) **erő** és **egy** (a síkban működő) **nyomaték** beiktatásával helyettesíthető.
Az egyértelmű azonosíthatóság végett jelöljük meg a két tartóelemet is: legyen az egyik az **I.** jelű, a másik a **II.** jelű tartóelem (természetesen bármilyen más, egyértelmű azonosítás megfelelő). A **C** jelű (most kapcsolatinak tekintett) keresztmetszetben a 4. axiómának megfelelően a két tartóelemre működő erők-nyomatékok **egymás ellentettjei** lesznek.



A **C** pontban befogottan kapcsolt tartó elemei a külső és belső erőkkel

A szerkezet elemeire működő dinámok egyensúlyát leíró egyensúlyi kijelentések:
Az **I.** elemre:

$$\left(F_1, F_2, A, C_{I,X}, C_{I,Z}, M_{C,I}\right) = 0$$

A **II.** elemre:

$$\left(F_3, F_4, M, B, C_{II,X}, C_{II,Z}, M_{C,II}\right) = 0$$

A **C** ponti, belső kapcsolati dinámokra (minthogy a kapcsolati pontban külső erő nem hat):

$$\left(C'_{I,X}, C'_{I,Z}, M'_{C,I}, C'_{II,X}, C'_{II,Z}, M'_{C,II}\right) = 0$$

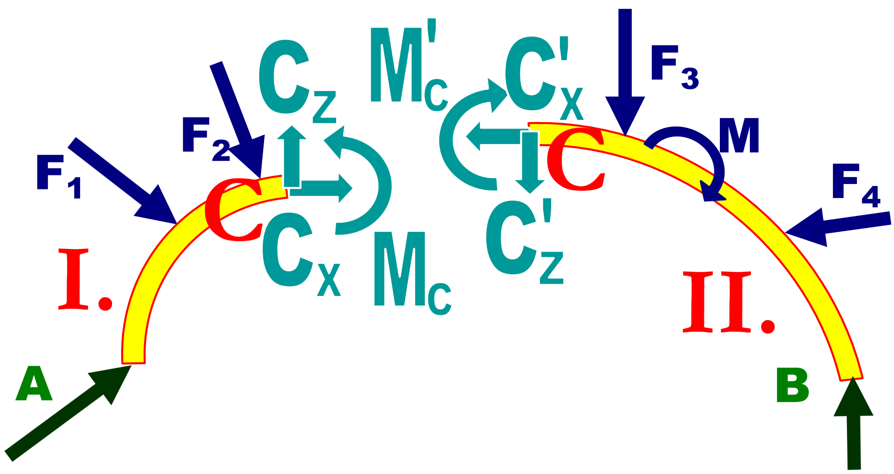
A fentiek alapján a két tartóelem **C** pontbeli összekapcsolásával kialakítottnak tekintett „összetett” tartó vizsgálata különálló, egyenként befogott tartóelemek vizsgálatára egyszerűsödik. A **C** pont mindkét tartóelem számára **minden síkbeli** (relatív) **elmozdulást megakadályozó** (belső) **kényszer**ként jelenik meg, azaz a tartóelemek külön-külön egy-egy **befogott konzol**ként viselkednek, és ismeretlen kapcsolati erőik-nyomatékaik is ennek megfelelően számíthatók.

A szerkezetekben a tartóelemek összekapcsolására kialakított **belső kényszerek** mindig **relatív elmozdulásokat** akadályoznak meg, így helyettesítésükre – a 4. axióma szerint – mindig a két csatlakozó elem mindegyikére működő, azonos nagyságú és ellentett értelmű **belső kapcsolati dinámokat** kell beiktatnunk.

A kapcsolatban a két elemre működő **kapcsolati dinámokat nem kell külön-külön ismeretleneknek tekintenünk**, egyszerűsíthetjük a jelölésrendszerünket (és ezzel a számítási munkánkat is) azzal, hogy pl. a **II.** jelű elemre működő kapcsolati dinámokat az **I.** jelű elem kapcsolati erőnek-nyomatékainak ellentettjeiként azonosítjuk (vagy fordítva).
Így az egyensúlyi kijelentések a következő alakot öltik:

Az **I.** elemre: A **II.** elemre:

$$\left(F_1, F_2, A, C_X, C_Z, M_C\right) = 0 \quad \left(F_3, F_4, M, B, C'_X, C'_Z, M'_C\right) = 0$$



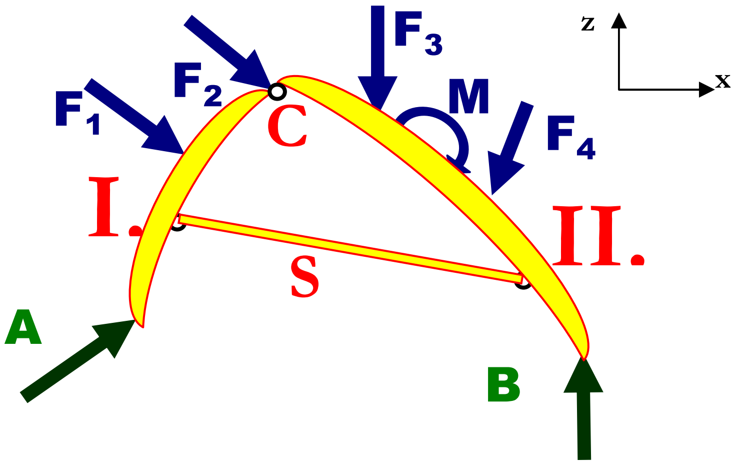
A tartóelemek és terheletlen **C** pont egyszerűsített kapcsolati erői

A folytonos tartószerkezet egy belső keresztmetszetében elképzelt befogási belső kényszerrel mindig tekinthető összetett tartónak, bár ez a megközelítés meglehetősen erőltetettnek tűnik. Látni fogjuk azonban, hogy az így előálló **belső kapcsolati dinámok** elengedhetetlenül fontosak lesznek a tartószerkezet (igénybevételi, szilárdsági) **megfelelőségi vizsgálata**, ill. a tartószerkezet **alakváltozásainak meghatározása** során. A folytonos tartószerkezet belső pontjaiban az anyagi kapcsolat helyettesítésére alkalmazandó belső kapcsolati erők-nyomatékok a tartó tengelyvonala mentén **függvényszerűen** is meghatározhatók, és ezzel a szerkezet „igénybevettsége" pontról-pontra figyelemmel kísérhető. E függvények előállítása során azonban a tartóelem-kapcsolatok számítása során alkalmazott globális (**X-Y-Z**) koordinátarendszer helyett célszerűbb a rúd keresztmetszeti lokális (**x-y-z**) koordinátarendszerét alkalmazni, és a belső kapcsolati dinámokat („igénybevételeket") ebben a lokális, a tartó tengelyét „kísérő" koordinátarendszerben értelmezni.

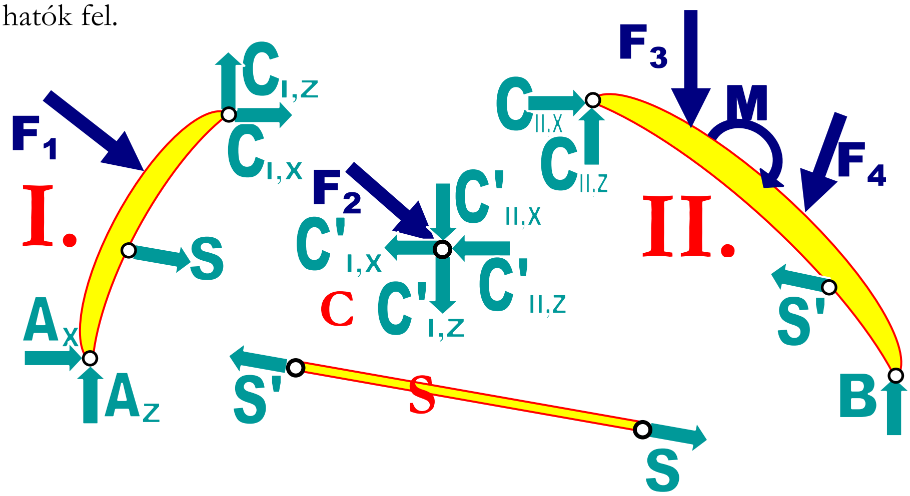
6.3. A két tartóelem „kéttámaszú" kapcsolata

Egy folytonos tartóból úgy is származtathatunk összetett szerkezetet, hogy egy belső pontban a folytonosságot (síkbeli relatív elmozdulás-mentességet) jelentő 3-as kapcsolati összfokszámot egy relatív elmozdulás (általában relatív elfordulás) megengedésével, egy kapcsolati merevség megszüntetésével, egy belső kapcsolati erő-nyomaték 0-ra választásával eggyel csökkentjük. Így a két csatlakozó elem kapcsolata elveszíti merevségét, ha tehát a két kapcsolódó elem (relatív) elmozdulásmentes összekapcsolódását biztosítani akarjuk, a keresztmetszetben elhagyott belső kapcsolatot más (külső vagy belső) kapcsolattal pótolni kell. A továbbiakban csak azzal az esettel foglakozunk, amikor a csatlakozási keresztmetszetben az eddig folytonos tartó nyomatékbírását szüntetjük meg, megengedve ezáltal a csatlakozó metszetek közötti relatív elfordulások kialakulását.
Ugyanerre a megoldásra eljuthatunk úgy is, hogy a két tartóelem egy-egy pontját eltolódásmentesen, azaz csuklósan kapcsoljuk egymáshoz.
Ebben az esetben az egyik lehetőség az elemek merev kapcsolatának biztosítására a két, immár csuklósan összekapcsolt elem egy-egy pontja közötti relatív eltolódás megakadályozása, egy (célszerűen egyenestengelyű) rúd beiktatásával. A csukló és a kapcsolórúd révén létrejövő belsőleg merev kapcsolat a tartóelemeket relatív elmozdulások nélkül rögzíti, tehát a továbbiakban az összetett szerkezetet egyetlen merev tartóként kapcsolhatjuk a talajhoz, akár befogással, akár kéttámaszú, akár három rudas kapcsolattal. Ennél a kialakításnál tehát az összetett szerkezet belső (elemek közötti), és külső (a szerkezet egésze és a talaj közötti) kapcsolati erői külön-külön vizsgálhatók, értékelhetők és számíthatók.

Általános esetben a két tartóelemet **egy csuklóval** és **egy kapcsolórúddal** kötjük össze. A belső kapcsolatot tehát **egy másodfokú** és **egy elsőfokú** kényszerrel valósítjuk meg, ami az összekapcsolt elemek (relatív) **elmozdulásmentességét** garantálja, tehát (belsőleg) **merev**, és a statikai egyenletek felhasználásával a kapcsolati erők **kiszámíthatóságát** is biztosítja, tehát **statikailag határozott** kapcsolat.



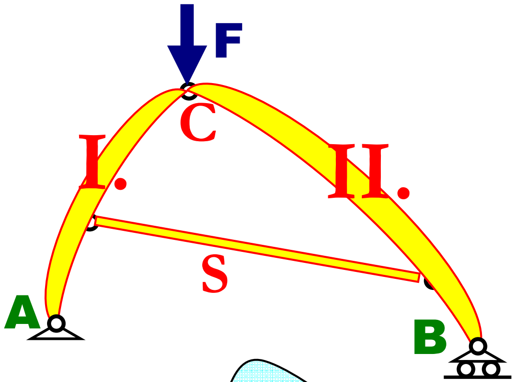
A **belsőleg merev** kapcsolatú szerkezetek a külső erőkre **egyetlen merev testként** reagálnak, tehát a külső kapcsolati erőket **csak a külső kényszerek** alapján **csak a külső erőkre** felírt, **az egész testre** (E) vonatkozó egyensúlyi kijelentésből és statikai egyenletekből meghatározhatjuk. Ugyanakkor a szétválasztott elemekre (I.elem, II. elem, C csukló) felírható egyenletek is lehetővé teszik a külső kapcsolati erőkomponensek kiszámítását, és így, a külső erőkre felírható egyenletek már ellenőrzésre használhatók fel.



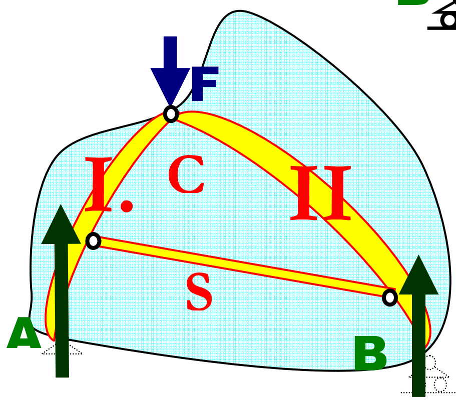
Az elemek szétválasztása után a megszüntetett anyagi kapcsolat, a kényszer helyén a feltételezett (célszerűen a koordinátarendszer pozitív tengelyágaival párhuzamos) irányú kényszererőket szerepeltetjük.
A szétválasztott elemekre **egyensúlyi kijelentései** alapján felírhatjuk a tartóelemekre a **statikai egyenleteket**, és megállapíthatjuk, hogy azokból milyen (már előállított) kapcsolati erőösszetevők felhasználásával milyen (még) **ismeretlen erőkomponenseket** tudunk meghatározni.

	EGYENSÚLYI KIJELENTÉS	EGYENLET	ISMERETLEN	ÚJ ISM.
E	$(F_1, F_2, F_3, F_4, M, A, B) = 0$	$\sum_E M_i = 0$ $\sum_E F_{iX} = 0$ $\sum_E F_{iZ} = 0$	A_X, A_Z $B_{(Z)}$	A_X, A_Z $B_{(Z)}$
I.	$(F_1, A, C_I, S) = 0$	$\sum_{I.} M_i = 0$ $\sum_{I.} F_{iX} = 0$ $\sum_{I.} F_{iZ} = 0$	A_X, A_Z $C_{I.X}, C_{I.Z}$ S	$C_{I.X}$ $C_{I.Z}$ S
C.	$(F_2, C'_I, C'_{II}) = 0$	$\sum_C F_{iX} = 0$ $\sum_C F_{iZ} = 0$	$C'_{I.X}, C'_{I.Z}$ $C_{II.X}, C_{II.Z}$	$C_{II.X}$ $C_{II.Z}$
II.	$(F_3, F_4, M, B, C_{II}, S') = 0$	$\sum_{II.} M_i = 0$ $\sum_{II.} F_{iX} = 0$ $\sum_{II.} F_{iZ} = 0$	$B_{(Z)}$ $C_{II.X}, C_{II.Z}$ S'	
ÖSSZES EGYENLET ÖSSZES ISMERETLEN		8+3		8

Látható, hogy **az elemekre (I., II., C) felírható összes statikai egyenlet (8db) elegendő az összes kapcsolati erőkomponens (8db) meghatározásához**, és az egész szerkezetre vonatkozó három statikai egyenlet már nem az ismeretlenek meghatározására, hanem a **kiszámított értékek ellenőrzésére** szolgál (vagy fordítva).



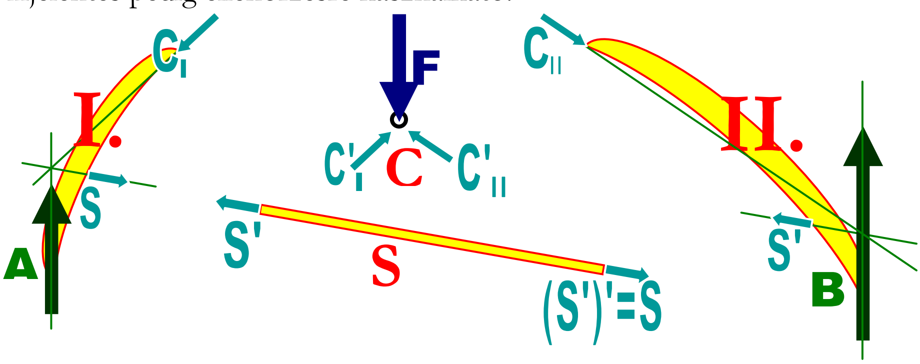
A függőleges erőt a **C** kapcsolati csuklóban működtetve a hatásvonalak szintén szemléletesen adódnak a **szerkesztési** gondolatmenet alapján.

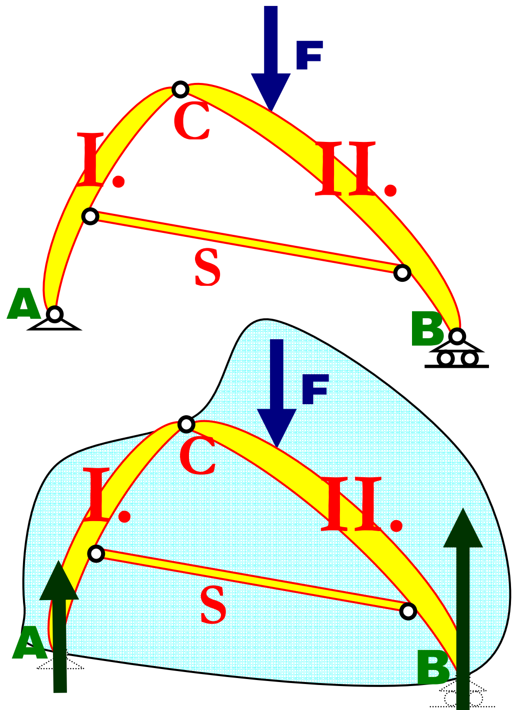


A **B** támaszerő és az **F** terhelő erő függőlegessége miatt az **A** csuklóban most is csak függőleges támaszerő keletkezhet. Az **A** és **B** támaszerők hatásvonala alapján azonban az erők **vektorainak** meghatározása szerkesztéssel nem egyszerű (kötélsokszöget felvéve ugyan megoldható). Ilyen esetben célszerű megvizsgálni a szétbontott tartóelemek egyensúlyi feltételeit is, mert azok (is) segíthetnek a külső kapcsolati erők nagyságának meghatározásában. Az **S** jelű elem ez esetben is **terheletlen**, így kapcsolórúdként kezelhető.

Az **A** és a **B** erő hatásvonalának ismeretében, felhasználva azt, hogy az **S** (és az **S'**) erő csak rúdirányú lehet, az **I.** ill. a **II.** jelű testre a csuklóban működő $\mathbf{C}_{I.}$ ill. $\mathbf{C}_{II.}$ erő hatásvonala kiadódik.

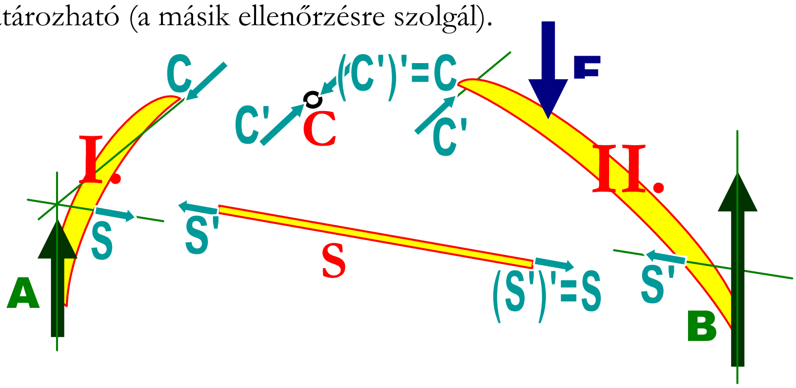
A **C** csukló egyensúlya alapján az **F** erő felhasználásával a $\mathbf{C'}_{I.}$ ill. $\mathbf{C'}_{II.}$ csuklóerőknek a **vektora** is meghatározható. Ezek ismeretében pedig mind az **I.** jelű, mind a **II.** jelű elemre egy-egy ismert erő ($\mathbf{C}_{I.}$ ill. $\mathbf{C}_{II.}$ erő) és két-két ismert hatásvonalú erő (**A**, **S,** ill. **B**, **S'**) működik, amelyek vektora egy-egy vektorháromszögből meghatározható. Az egész testre vonatkozó egyensúlyi kijelentés pedig ellenőrzésre használható.

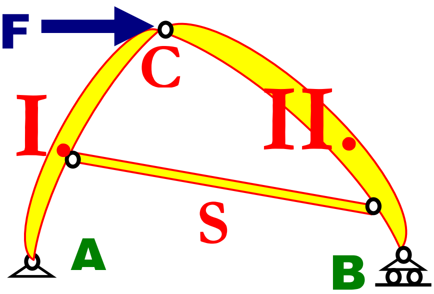




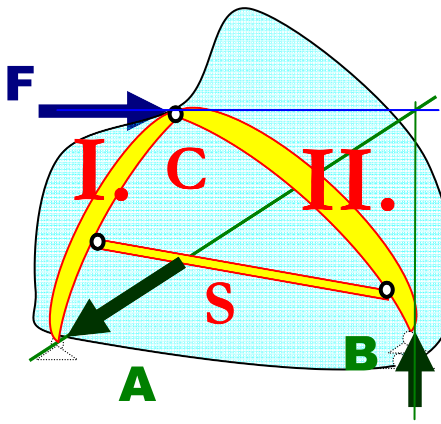
Egy terhelő erő esetén nagyon szemléletesen mutatja meg az összetett szerkezetek kapcsolati erőinek **hatásvonalát** a szerkesztési eljárás. A belsőleg merev kapcsolatú összetett szerkezet a külső kapcsolati erők meghatározása során **egyetlen merev tartóként** kezelhető, így a **B** támaszerő és az **F** terhelő erő függőlegessége miatt az **A** csuklóban is csak függőleges támaszerő keletkezhet.

Az **S** jelű rúdelem **csak két pontban** (a két végén) kapcsolódik más szerkezetekhez, **önmaga** pedig **terheletlen**, így rá csak (a két kapcsolatból származó) két erő működik. Ezek egyensúlya csak úgy lehetséges, ha a két erő közös hatás vonalú, emiatt az ilyen tulajdonságú (terheletlen) (rúd)elemet külön nem vizsgáljuk. Az **A** erő hatásvonalának ismeretében, felhasználva azt, hogy az **S** erő csak rúdirányú lehet, az **I.** jelű testre működő **C** erő hatásvonala kiadódik. A **C** csukló terheletlensége miatt a csuklóból a **II.** testre működő **C’** erő hatásvonala a **C** erő hatásvonalával azonos lesz. A **II.** elemre tehát az ismert **F** erőn kívül **három**, (most már) **ismert hatásvonalú erő** működik: a **B**, az **S’** és a **C’** erő, amelyek a már ismert módszerek egyikével (főponti módszer, Culmann szerkesztés) meghatározhatók. Ezután az egész test vagy az I. jelű elem egyensúlya alapján az ismeretlen A támaszerő meghatározható (a másik ellenőrzésre szolgál).

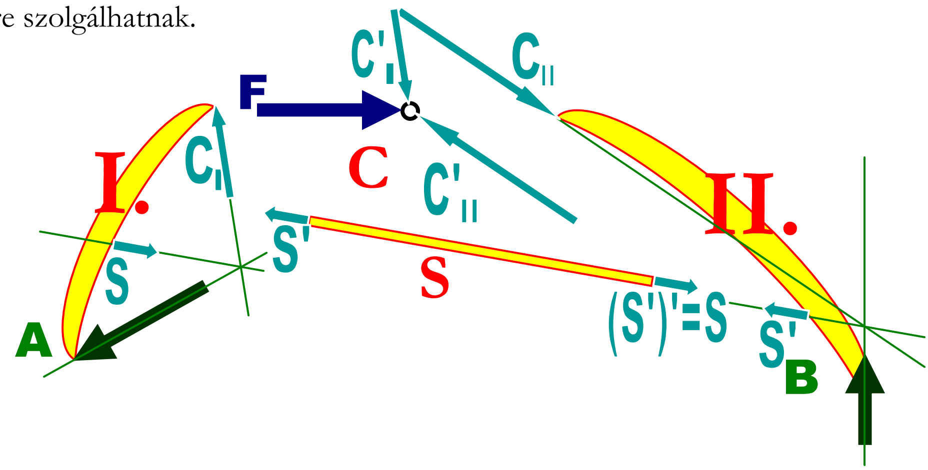




A **C** csuklót terhelő koncentrált erőt vízszintesre választva a szerkesztés mind a külső, mind a belső kapcsolati erők meghatározásában igen szemléletes és gyors megoldást kínál.
A belsőleg merev kapcsolatú összetett szerkezet a külső kapcsolati erők meghatározása során **egyetlen merev tartóként** kezelhető, így a **B** támaszerő függőleges és az **F** terhelő erő vízszintes hatásvonalának metszéspontja kijelöli az **A** csuklóerő hatásvonalát. Ennek ismeretében az **F-A-B** vektorháromszögből kiadódik az **A** és a **B** támaszerő vektora is.
Az **S** jelű elem ez esetben is terheletlen, tehát kapcsolórúdként működik.

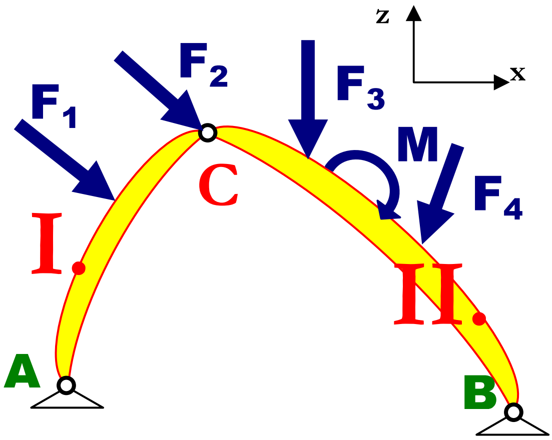


Az **A** és a **B** erő hatásvonalának ismeretében, felhasználva azt, hogy az **S** (és az **S'**) erő csak rúdirányú lehet, az **I.** ill. a **II.** jelű testre a csuklóban működő $\mathbf{C_{I.}}$ ill. $\mathbf{C_{II.}}$ erő hatásvonala kiadódik.
Ezek ismeretében pedig mind az **I.** jelű, mind a **II.** jelű elemre egy-egy ismert erő (**A** ill. **B** erő) és két-két ismert hatásvonalú erő (**S,** $\mathbf{C_{I.}}$ ill. **S'**, $\mathbf{C_{II.}}$ erő) működik, amelyek vektora egy-egy vektorháromszögből meghatározható. A csuklóra és az egész testre felírt egyensúlyi kijelentések ellenőrzésre szolgálhatnak.



6.4. A két tartóelem csuklós kapcsolata

A két, egymáshoz csak **egy csuklóval** (tehát belsőleg labilis módon) kapcsolt tartóelem **merev** megtámasztottsága úgy is elérhető, ha a belső kapcsolatok (fok)számát nem növeljük, további belső kapcsolatot nem alakítunk ki, de a csatlakozó két tartóelem egy-egy pontját eltolódásmentesen (csuklós kapcsolattal) a talajhoz rögzítjük, azaz a **külső kapcsolatok fokszámát 4-re növeljük**.



Azt a szerkezetet, amelyben a tartóelemek közötti külső és belső kapcsolatot három csukló biztosítja, HÁROMCSUKLÓS TARTÓnak nevezzük.

A háromcsuklós tartó **egészére** felírható egyensúlyi kijelentés:

$$\mathbf{E} \quad \left(F_1, F_2, F_3, F_4, M, A, B\right) = 0$$

A háromcsuklós tartó **I.** jelű elemére felírható egyensúlyi kijelentés:

$$\mathbf{I.} \quad \left(F_1, A, C_I\right) = 0$$

A háromcsuklós tartó **C** jelű csuklójára felírható egyensúlyi kijelentés:

$$\mathbf{C} \quad \left(F_2, C'_I, C'_{II}\right) = 0$$

A háromcsuklós tartó **II.** jelű elemére felírható egyensúlyi kijelentés:

$$\mathbf{II.} \quad \left(F_3, F_4, M, B, C_{II}\right) = 0$$

Először a megoldás lehetőségét vizsgáljuk meg. Tudjuk, hogy egy általános, szétszórt síkbeli erőrendszerrel terhelt test nyugalmi állapota, egyensúlyi kijelentése alapján három (matematikailag független) statikai egyenlet írható fel. Közös metszéspontú erőrendszer egyensúlya két (matematikailag független) statikai egyenlettel fejezhető ki. Ennek megfelelően a háromcsuklós tartó külső és belső kapcsolati erőinek meghatározására felírható egyenletek és az azokban szereplő ismeretlenek a következő táblázatban foglalhatók össze.

	EGYENSÚLYI KIJELENTÉS	EGYENLET	ISMERETLEN	ÚJ ISM.
E	$(F_1, F_2, F_3, F_4, M, A, B) = 0$	$\sum_E M_i = 0$ $\sum_E F_{iX} = 0$ $\sum_E F_{iZ} = 0$	A_X, A_Z B_X, B_Z	A_X, A_Z B_X, B_Z
I.	$(F_1, A, C_I) = 0$	$\sum_{I.} M_i = 0$ $\sum_{I.} F_{iX} = 0$ $\sum_{I.} F_{iZ} = 0$	A_X, A_Z $C_{I.X}, C_{I.Z}$	$C_{I.X}$ $C_{I.Z}$
C.	$(F_2, C'_I, C'_{II}) = 0$	$\sum_C F_{iX} = 0$ $\sum_C F_{iZ} = 0$	$C'_{I.X}, C'_{I.Z}$ $C'_{II.X}, C'_{II.Z}$	$C_{II.X}$ $C_{II.Z}$
II.	$(F_3, F_4, M, B, C_{II}) = 0$	$\sum_{II.} M_i = 0$ $\sum_{II.} F_{iX} = 0$ $\sum_{II.} F_{iZ} = 0$	B_X, B_Z $C_{II.X}, C_{II.Z}$	
ÖSSZES EGYENLET ÖSSZES ISMERETLEN		$8+3$		8

Az egész szerkezetre és annak minden elemére felírva a lehetséges statikai egyenleteket a külső és belső kapcsolati erők ismeretlen összetevői egyértelműen meghatározhatók, sőt az egyenletekből három egyenletre az ismeretlenek meghatározásához már nincs szükség, ezeket a számítási eredmények ellenőrzésére használhatjuk fel.

> **A háromcsuklós tartó** kapcsolati erői tehát a statikai egyenletek segítségével meghatározhatók, azaz a szerkezet (bár belsőleg labilis, külsőleg statikailag határozatlan, mégis) **egészében statikailag határozott megtámasztású.**

A csuklós kapcsolatok a kapcsolt elemek (síkbeli) relatív eltolódásait minden irányban megakadályozzák, emiatt **a háromcsuklós tartó egészében merev megtámasztású.**

A teljesség kedvéért meg kell jegyeznünk, hogy a **három csukló nem eshet egy egyenesbe**, mert akkor a szerkezet **labilis** szerkezetté válik.
A háromcsuklós tartó kapcsolati erői tehát statikai egyenletekkel meghatározhatók, de a gyakorlat számára a nyolcismeretlenes egyenletnél egyszerűbb megoldást kell keresnünk. A kéttámaszú tartók támaszerőinek számítása során első egyenletként a tartó egészére felírt, csuklópontra vonatkozó nyomatéki egyenlet bizonyult a legcélszerűbbnek, mert csak egy ismeretlent, a másik támaszerő nagyságát tartalmazta. Most **mindkét támaszpont csuklós kialakítású**, azaz bármelyikre írjuk is fel a nyomatéki egyenletet, abban a **másik támaszerő mindkét összetevője** szerepelni fog. Általános esetben tehát **egyismeretlenes megoldás nem található**, de azt még megkísérelhetjük, hogy a felírandó egyenletrendszer **kétismeretlenes** maradjon. Ehhez olyan egyenletet kell másodiknak választanunk, amelyben csak **ugyanazok** a támaszerő-összetevők szerepelnek ismeretlenként, mint amelyek az első, támaszponti nyomatéki egyenletben szerepeltek.
Ha pl. az első egyenletünket az egész szerkezetre vonatkozóan a **B** támaszpontra írtuk fel, abban az **A** támaszerő szerepelt, akkor a második egyenletünket **olyan** (I. elemre vonatkozó) **egyensúlyi kijelentés** alapján kell felírnunk, amelyben az **A** erő **szintén** szerepel, és **olyan (C csuklóra vonatkozó nyomatéki) egyenletként** kell felírnunk, hogy abban **csak az A** erő szerepeljen. Az így előálló kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásával az **A** támaszerő összetevőit megkapjuk. Természetesen meghatározandó ismeretlenként választhatjuk a **B** erő összetevőit is, s akkor a második egyenletet a II. jelű elemre kell felírni.

$$\mathbf{E}\quad (F_1,F_2,F_3,F_4,M,\boxed{A},B)=0$$
$$\mathbf{I.}\quad (F_1,\boxed{A},C_I)=0$$
$$\mathbf{C}\quad (F_2,C'_I,C'_{II})=0$$
$$\mathbf{II.}\quad (F_3,F_4,M,B,C_{II})=0$$
$$\sum_E M_i^B=0\Rightarrow A_X,A_Z$$
$$\sum_{I.} M_i^C=0\Rightarrow A_X,A_Z$$

$$\mathbf{E}\quad (F_1,F_2,F_3,F_4,M,A,\boxed{B})=0$$
$$\mathbf{I.}\quad (F_1,A,C_I)=0$$
$$\mathbf{C}\quad (F_2,C'_I,C'_{II})=0$$
$$\mathbf{II.}\quad (F_3,F_4,M,\boxed{B},C_{II})=0$$
$$\sum_E M_i^A=0\Rightarrow B_X,B_Z$$
$$\sum_{II.} M_i^C=0\Rightarrow B_X,B_Z$$

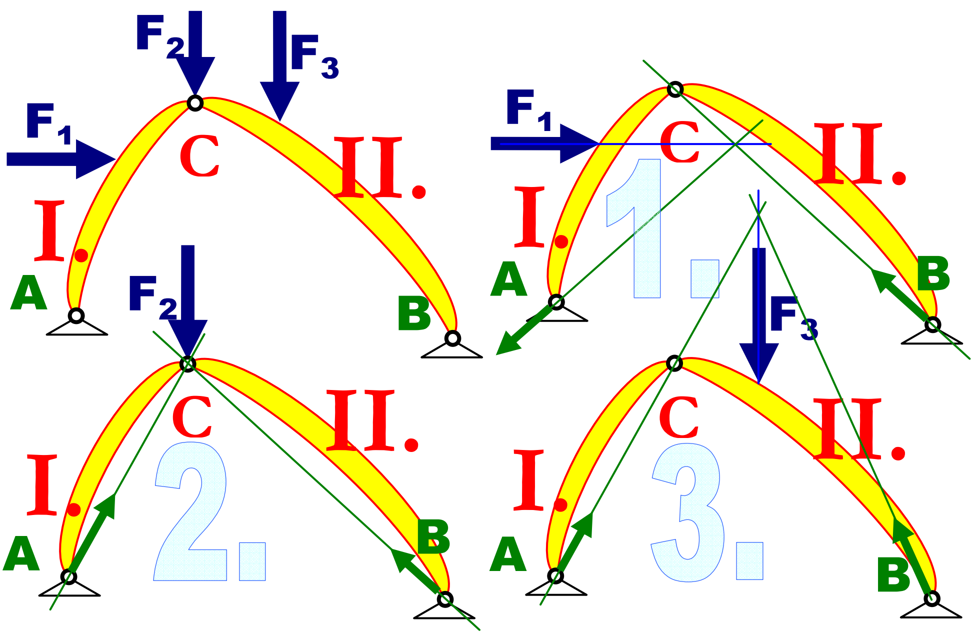
Az egyik támaszerő két összetevőjének ismeretében már **egyismeretlenes** (akár kizárólag vetületi) egyenletekkel meghatározható valamennyi további kapcsolati erő-összetevő.

SZERKEZET	EGYENLET	FELHASZNÁLT TÁMASZERŐ	KERESETT TÁMASZERŐ
EGÉSZ	$\sum_E F_{i,X} = 0$	A_X	B_X
EGÉSZ	$\sum_E F_{i,Z} = 0$	A_Z	B_Z
I. ELEM	$\sum_{I.} F_{i,X} = 0$	A_X	$C_{I,X}$
I. ELEM	$\sum_{I.} F_{i,Z} = 0$	A_Z	$C_{I,Z}$
C. CSUKLÓ	$\sum_C F_{i,X} = 0$	$C'_{I,X} = -C_{I,x}$	$C'_{II,X} = -C_{II,x}$
C. CSUKLÓ	$\sum_C F_{i,Z} = 0$	$C'_{I,Z} = -C_{I,z}$	$C'_{II,Z} = -C_{II,z}$

Látható, hogy a **teljes** szerkezet **összes** külső és belső kapcsolati erő-összetevőjének meghatározásához a kétismeretlenes egyenletrendszer mellett még 6 egyismeretlenes egyenlet megoldására van szükség. A **II.** jelű elem nyugalmi állapotát kifejező egyensúlyi kijelentést, és az ennek alapján felírható három statikai egyenletet a számítás során nem kellett figyelembe vennünk, ezek az egyenletek az eredmények ellenőrzésére használhatók fel. Természetesen az egyik csuklós támaszban keletkező két támaszerő-komponens ismeretében más egyenletek is alkalmazhatók, amelyekkel a konkrét feladatban esetleg gyorsabban és egyszerűbben állíthatók elő a keresett kapcsolati erő-értékek.

Az esetek jelentős részében a háromcsuklós tartó **két támaszpontja azonos magasságban van**, ilyen esetben pedig az **egyik** támaszcsuklóra felírt nyomatéki egyenletben a **másik** csuklóerő vízszintes összetevője nem szerepel, tehát a **másik** csuklóerő **függőleges** komponense azonnal, **egyismeretlenes** egyenlet megoldásával meghatározható. A támaszerők vízszintes összetevői azonban ez esetben is csak a szétbontott tartó egyik fél darabján a középcsuklóra felírt nyomatéki egyenletből határozhatók meg, tehát a **megoldáshoz felírandó egyenletek tartalma és sorrendje nem változik meg**, csak az általános esetben kétismeretlenes egyenletrendszer ebben a speciális esetben két egyismeretlenes egyenletre esik szét.

A szerkesztés, mint a keresett mennyiségek meghatározásának módszere, a bonyolultabb, összetett szerkezetek esetében a mai számítástechnikai lehetőségek mellett elhanyagolható jelentőségű. Ugyanakkor a szerkesztéses megoldásokban rejlő „ötlet”-ek (máshol és másként) a mai számításokban-ellenőrzési eljárásokban is kamatoztathatók. Az alábbiakban a háromcsuklós tartó külső és belső kapcsolati erőinek meghatározására alkalmas szerkesztési eljárást ismertetünk, amely az elsőrendű elmélet **linearitását** használja ki, és (latin nevén) **szuperpozíciós eljárásként** ismert.
A taróra három koncentrált erő műlödik: egy az **I.** jelű elemre, egy a **C** jelű csuklóra és egy a **II.** jelű elemre (ez a teherkombináció valójában **teljesen általános**, hiszen a tartóelemekre működő erők egy-egy erőrendszer **eredőjének** is tekinthetők). Az **egymásrahalmozhatóság** miatt az egyes terhelőerők hatását **külön-külön** is vizsgálhatjuk. **Ha az egyik tartófél terheletlen**, **akkor** arra csak két (a támaszcsuklóban és s középcsuklóban ébredő) erő működik, azaz a tartóelem **támasztórúdként viselkedik**, benne csak rúdirányú (a két csuklón átmenő) erő keletkezhet. Ezt felhasználva mindhárom esetre a három erő egyensúlya alapján felvehető a kapcsolati erők **hatásvonala**, és ennek ismeretében megrajzolható az egyensúlyi **vektorháromszög** is. Az eredeti szerkezet kapcsolati erőit pedig külön-külön meghatározott erőkomponensek **vektoriális összegeként** kaphatjuk meg. (A megoldás még egyszerűbb, ha az $\mathbf{F_2}$ erőt valamelyik tartófél végpontján működőnek tekintjük.)



Az **egymásrahalmozás** gondolata, azaz a **komplex hatások elemenkénti vizsgálatának lehetősége,** messze túlmutat a háromcsuklós tartók körén, sőt a szerkesztéses eljáráson is, és általánosságával, az alkalmazó igényeihez igazítható egyszerűségével valójában **az elsőrendű elmélet legfontosabb, legértékesebb hozadéka a mérnöki számításokban**.

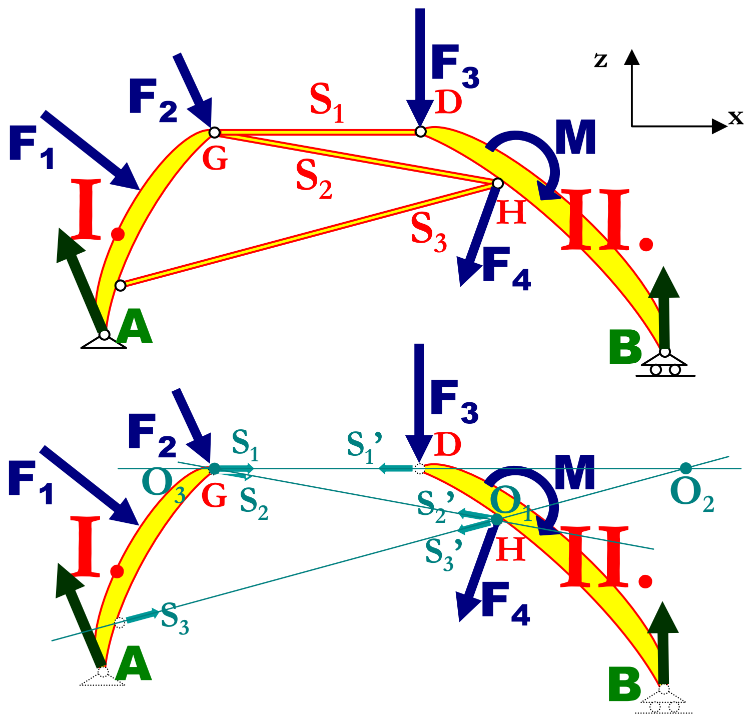
Mint tudjuk, előfordulhatnak olyan szerkezetek, olyan terhelésfajták, amelyek esetében az elsőrendű elmélet a valóságot túlságosan durván modellezi (nyomott rúd kihajlása, hajlított tartó kifordulása, nyomott lemezmezők horpadása). Ezekben az esetekben **a tartó alakváltozásainak módosító hatását is figyelembe kell vennünk** az erőjáték meghatározása során, azaz a függvénykapcsolatok teljes linearitásáról le kell mondanunk. Ilyen esetekben az egymásrahalmozás nem alkalmazható, **minden terhelési kombinációt külön-külön kell megvizsgálni, értékelni, elemezni és kiszámítani**.

Nagyfesztávolságú szerkezetekben, sport- és ipari csarnokokban, mezőgazdasági épületekben előszeretettel alkalmazzák a háromcsuklós tartókat, mert statikailag határozott megtámasztásuk miatt érzéketlenek a kinematikai terhekre (hőmérsékletváltozás, támaszmozgás, stb.), közbenső csuklós kapcsolatuk egyszerűen szerelhető, támaszcsuklójuk pedig a befogáshoz képest egyszerűbb alapozási szerkezettel kialakítható. Emellett a jól konstruált háromcsuklós tartók az erőjátékot hangsúlyozó alakjukkal a jó mérnöki szerkezet szépségét is kifejezik.

Ragasztott fatartókból kialakított háromcsuklós tartók

6.5. A két tartóelem „három rudas" kapcsolata

Egy merev test statikailag határozott és merev megtámasztásához három (nem egy pontban metsződő tengelyű, beleértve a párhuzamosságot is) megtámasztó rúd elegendő. Ennek megfelelően két merev tartóelem statikailag (belsőleg) határozott és merev összekapcsolásához három (nem egy pontban metsződő tengelyű) kapcsolórúd elegendő. A belső kapcsolat merevsége miatt a külső támaszerők keresése során az összetett tartó egyetlen merev testként kezelhető, tehát a külső kapcsolati erők a belső erők ismerete nélkül előállíthatók. A külső kapcsolati erők ismeretében a tartóelemek szétválasztása után mindkét elemre a külső aktív erők és a (már meghatározott) külső kapcsolati erők mellett a három kapcsolórúd tengelyében három-három ismert hatásvonalú, de ismeretlen nagyságú erő működik, amelyek meghatározása a már ismert főponti nyomatéki egyenletekkel, párhuzamos rudak esetében a harmadik rúdra (főpont hiányában) vetületi egyenlettel lehetséges.



A kapcsolórudak hatását a tartóelemeken a kapcsolati pontokba helyezett, a rúdtengelyekkel párhuzamos hatásvonalú, húzóerőnek feltételezett irányú, ismeretlen nagyságú erőkkel jelenítjük meg. A rudak végein működő

erők mindig egymás ellentettjei, így a két tartóelemre a rudakról átadódó erők is ellentett nagyságúak lesznek.
Ha egy kapcsolati pontba nem csak két elem találkozik, vagy a pontban külső erő is működik, akkor a teljesen korrekt megoldás szerint ennek a csuklónak az egyensúlyára külön egyensúlyi kijelentést kell felírni. Az ábrán ennek megfelelően jelöltük külön a D, G és H belső kapcsolócsuklókat. Ebben a szemléletmódban az ilyen „többkapcsolatú” csuklókból a tartóelemre a csuklóra működő erők eredője fog csuklóerőként átadódni.
Sokszor azonban célravezetőbb a csuklóra működő erőket közvetlenül a merev tartóelemre működőnek feltételezni (természetesen geometriailag ugyanabban a hatásvonalban, sőt elvileg ugyanabban a pontban!), mert így a tartóelemeken valóban csak a kapcsolórudak ismert hatásvonalú rúderői lesznek az ismeretlenek. Az alábbiakban mindkét szemlélet alapján felírtuk az egyensúlyi kijelentéseket. Látható, hogy a „korrekt” megoldás lényegesen bonyolultabb megközelítést ad, ugyanakkor, ha az egyszerűbb szemléletmódot választjuk, a sokkal könnyebben meghatározható rúderők ismeretében a tényleges csuklóerők már egyszerűen képezhetők.

TÖBBKAPCSOLATÚ	**KÉTKAPCSOLATÚ**
CSUKLÓKKAL	
E $(F_1, F_2, F_3, F_4, M, A, B) = 0$	**E** $(F_1, F_2, F_3, F_4, M, A, B) = 0$
I. $(F_1, G_I, S_3, A) = 0$	**I.** $(F_1, F_2, A, S_1, S_2, S_3) = 0$
II. $(M, D_{II}, H_{II}, B) = 0$	**II.** $(F_3, F_4, M, B, S_1', S_2', S_3') = 0$
D $(F_3, S_1', D_{II}') = 0$	
G $(F_2, S_1, S_2, G_I') = 0$	
H $(F_4, S_2', S_3', H_{II}') = 0$	

A szerkezetre-szerkezeti elemekre vonatkozó egyensúlyi kijelentések alapján felírhatók a megfelelő statikai egyenletek, amelyek megoldásai szolgáltatják a keresett kapcsolati erőösszetevőket.
A következő táblázatban először a többkapcsolatú csuklók alkalmazásával kialakított összetett szerkezetre, majd az egyszerűsített, kétkapcsolatú csuklók alkalmazásával kialakított összetett szerkezetre is összefoglaltuk a statikai egyenleteket, a felhasználandó és a meghatározható ismeretlen kapcsolati erőösszetevőket.

Többkapcsolatú csuklós megoldás

SZERKEZET	EGYENLET	FELHASZNÁLT TÁMASZERŐ	KERESETT TÁMASZERŐ
EGÉSZ	$\sum_E M_i^{(A)} = 0$		B
EGÉSZ	$\sum_E F_{i,X} = 0$		A_X
EGÉSZ	$\sum_E F_{i,Z} = 0$	B	A_Z
I. ELEM	$\sum_{I.} M_i^G = 0$	A_X, A_Z	S_3
I. ELEM	$\sum_{I.} F_{i,X} = 0$	A_X, S_3	$G_{I,X}$
I. ELEM	$\sum_{I.} F_{i,Z} = 0$	A_Z, S_3	$G_{I,Z}$
G csukló	$\sum_G F_{i,Z} = 0$	$G'_{I,Z} = -G_{I,z}$	S_2
G csukló	$\sum_G F_{i,X} = 0$	$G'_{I,x} = -G_{I,X}, S_2$	S_1
D csukló	$\sum_D F_{i,Z} = 0$		$D_{II,Z}'$
D csukló	$\sum_D F_{i,X} = 0$	$S'_1 = -S_1$	$D_{II,X}'$
H csukló	$\sum_H F_{i,Z} = 0$	S_2', S_3'	$H_{II,Z}'$
H csukló	$\sum_H F_{i,X} = 0$	S_2', S_3'	$H_{II,X}'$
II. ELEM	$\sum_{II.} M_i^B = 0$	D_{II}, H_{II}, B	Ellenőrzés!
II. ELEM	$\sum_{II.} F_{i,X} = 0$	D_{II}, H_{II}, B	Ellenőrzés!
II. ELEM	$\sum_{II.} F_{i,Z} = 0$	D_{II}, H_{II}, B	Ellenőrzés!

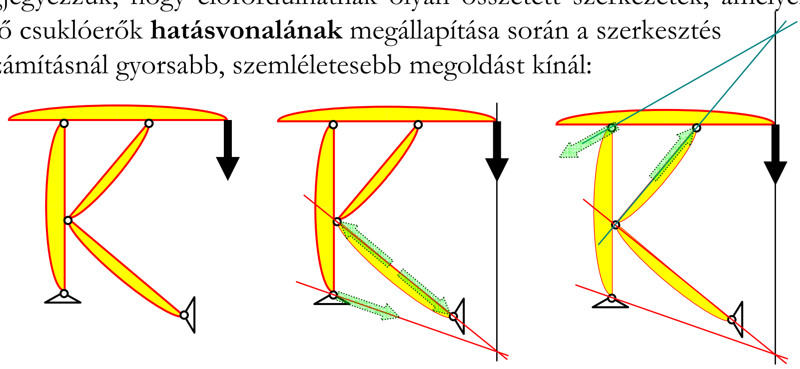
Az összefoglaló táblázatból látható, hogy az összes statikai egyenlet felírása esetén három egyenlet már nem új ismeretlenek meghatározására, hanem a már kiszámított kapcsolati erők egyensúlyi ellenőrzésére szolgál.

Kétkapcsolatú csuklós (egyszerűsített) megoldás

SZERKEZET	EGYENLET	FELHASZNÁLT TÁMASZERŐ	KERESETT TÁMASZERŐ
EGÉSZ	$\sum_{E} M_i^{(A)} = 0$		B
EGÉSZ	$\sum_{E} F_{i,X} = 0$		A_X
EGÉSZ	$\sum_{E} F_{i,Z} = 0$	B	A_Z
I. ELEM	$\sum_{I.} M_i^{O1} = 0$	A_X, A_Z	S_1
I. ELEM	$\sum_{I.} M_i^{O2} = 0$	A_X, A_Z	S_2
I. ELEM	$\sum_{I.} M_i^{O3} = 0$	A_X, A_Z	S_3
II. ELEM	$\sum_{II.} M_i^{O1} = 0$	$B_X, B_Z, S'_1, S'_2, S'_3$	Ellenőrzés!
II. ELEM	$\sum_{II.} M_i^{O2} = 0$	$B_X, B_Z, S'_1, S'_2, S'_3$	Ellenőrzés!
II. ELEM	$\sum_{II.} M_i^{O3} = 0$	$B_X, B_Z, S'_1, S'_2, S'_3$	Ellenőrzés!

Az egyszerűsített modell szétbontott elemein végzett számítás teljes egészében a három rúddal megtámasztott szerkezet számítási módszerével egyezik meg, általános esetben a három főponti nyomatéki egyenlet egyismeretlenes egyenletként szolgáltatja a rúderőket.

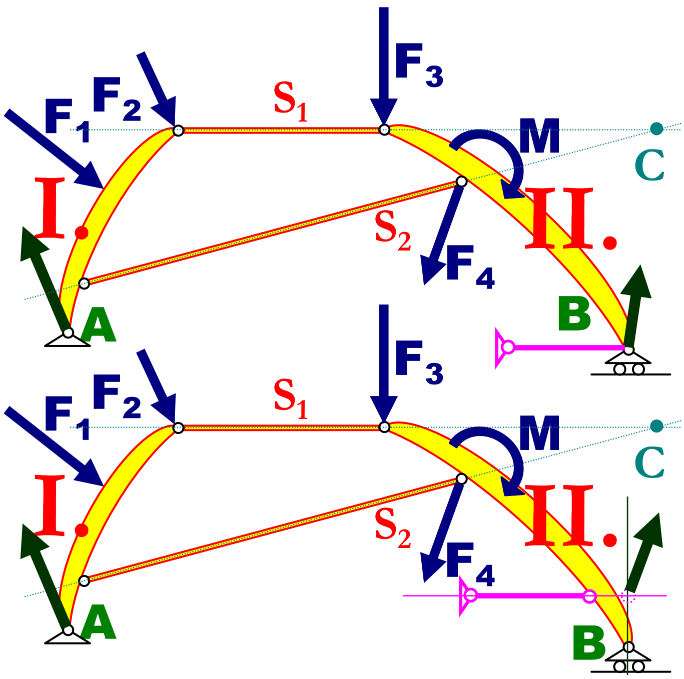
Megjegyezzük, hogy előfordulhatnak olyan összetett szerkezetek, amelyekben a belső csuklóerők **hatásvonalának** megállapítása során a szerkesztés a számításnál gyorsabb, szemléletesebb megoldást kínál:



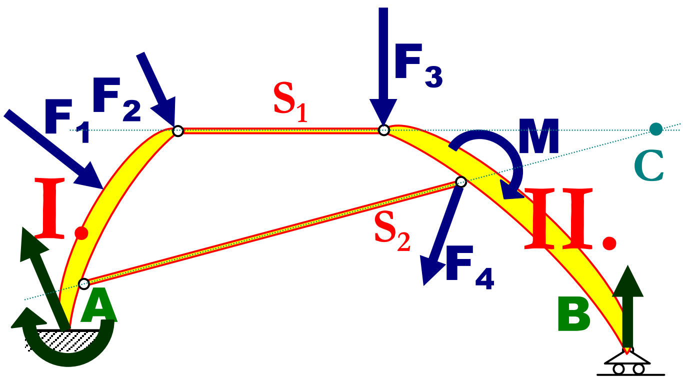
Két tartóelemet két rúddal összekapcsolva a kapcsolat (belsőleg) **labilis** lesz, a merev kapcsolathoz egy rúd, egy kapcsolati fokszám hiányzik, azt mondhatjuk, hogy a belső (kapcsolati) **merevségi hiány 1**. Az így összekapcsolt két merev anyagú tartóelem egymáshoz viszonyítva a két rúd hatásvonalának metszéspontja körül elfordulhat. Egy ilyen, belsőleg labilis összetett szerkezetet a merevségi feltételt kielégítő külső kapcsolati kényszerekkel a talajhoz kapcsolva az egész szerkezet (a belső labilitás miatt) nem lesz állékony, labilisan viselkedik. A szerkezeti elemeken a belső kapcsolat elégtelen merevsége miatt létrejöhető elmozdulások azonban a külső kapcsolódási pontok elmozdulási szabadságfokának csökkentésével, azaz külső többletkapcsolatok kialakításával is megakadályozhatók. Így a belsőleg labilis szerkezet megtámasztottsága külsőleg statikailag határozatlanná válik, de épp a külső **merevségi többlet** kiegyenlítő hatásával válik az összetett szerkezet megtámasztottsága **egészében statikailag határozott és merev** megtámasztássá.

A belső kapcsolórúd hiányát a külső görgős támasz eltolódási lehetőségének megakadályozásával kiváltva a szerkezet egy (kissé szokatlan alakú) **háromcsuklós tartó**nak tekinthető, hiszen a két tartóelem között csak a kapcsolórudak hatásvonalainak metszéspontja körüli relatív elfordulás alakulhat ki, azaz ez a pont belső kapcsolócsuklóként viselkedik.

Ugyanerre a megállapításra jutunk akkor is, ha a többletkényszer a görgős külső támasztású elemnek nem a támaszpontját, hanem valamely más pontját támasztja meg, ez esetben csak annyi a változás, hogy az eredeti görgős támasz és az új támasztókényszer hatásvonalainak metszéspontja lesz a második (fiktív) külső támaszcsukló.



A belsőleg labilis kapcsolatú összetett tartó egészében merev megtámasztottságát úgy is elérhetjük, ha a belső merevségi hiány pótlására a csuklós támasz elfordulási szabadságfokát korlátozzuk, azaz a csuklós külső támasz helyett befogást alkalmazunk. Ez esetben a görgős megtámasztású elem egyensúlyi kijelentésében a külső támaszerő és a két belső rúderő egy-egy ismert hatásvonalú erőként jelenik meg, amelyek meghatározására a vetületi és nyomatéki (különösen a főponti nyomatéki) egyenletek elegendőek és alkalmasak.



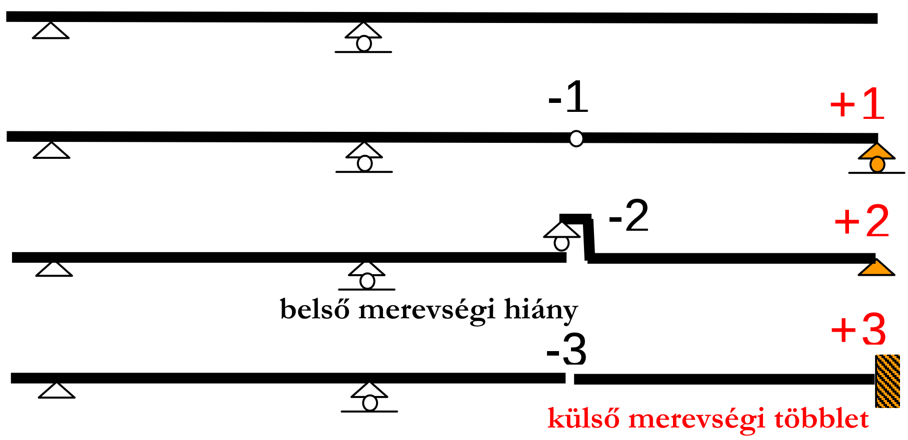
6.6. Csuklós többtámaszú gerendatartók

(GERBER-tartók)

Az egyenestengelyű kéttámaszú konzolos szerkezetek esetében a túlságosan nagy konzolkinyúlás nagy alakváltozásainak elkerülésére a konzolvéget célszerű megtámasztani. Így viszont a külső kapcsolati fokszám 1-gyel nő, a szerkezet statikailag határozatlanná válik. Ha (számítástechnikai vagy szerkezeti okokból) a szerkezet megtámasztásának statikai határozottságához ragaszkodunk, akkor a külső merevségi többlet kompenzálására a belső merevséget valahol csökkentenünk kell: pl. a gerenda egy pontjában a nyomatéki teherbírást, azaz a (relatív) elfordulási merevséget megszüntetjük, a pontban a csatlakozó gerendaelemeket (belső) csuklóval kapcsoljuk össze.

Az egyenestengelyű gerendákból **belső csuklós kapcsolatokkal és megfelelő fokszámú külső kapcsolati kényszerekkel összeállított szerkezetet csuklós többtámaszú tartónak, vagy GERBER-tartónak nevezzük**. A GERBER-tartók egészükben mindig statikailag határozott és merev megtámasztású szerkezetek.

A konzolos kéttámaszú tartóból származtatható legegyszerűbb GERBER-tartó-variációkat a következő ábra mutatja.

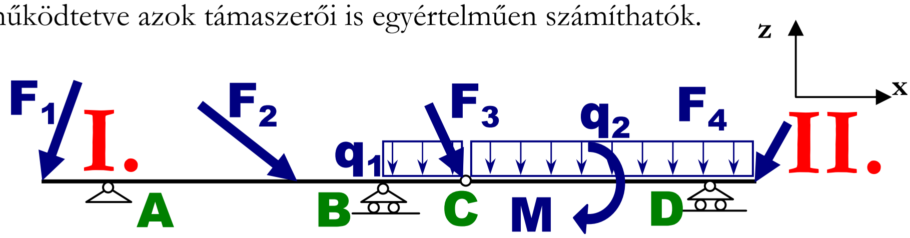


GERBER-tartó több tartóelem összekapcsolásával is előállítható, de a belső kapcsolatok miatt kialakuló **belső merevségi hiány** és a külső többletkapcsolatokban megjelenő **külső merevségi többlet** fokszámának mindig **azonos**nak kell lennie, hogy a szerkezet egészében statikailag határozott maradjon.

A GERBER-tartók kapcsolódó elempárjai kapcsolatonként egymásra, pontosabban az **egyik** a **másikra** támaszkodik. Ez a támaszkodási hierarchia, tehát hogy melyik a **támasztott** és melyik a **támasztó** elem, kapcsolati pontonként megállapítható, és ennek segítségével az egész tartó támaszkodási hierarchiája felrajzolható.

A GERBER-tartó belső kapcsolati pontjában kapcsolt elemek közül azt a tartóelemet, amely önmagában nem állékony, egyensúlya csak a kapcsolati pontban a másik elemről átadódó egyensúlyozó erő segítségével biztosítható, **befüggesztett rész**nek, **befüggesztett tartó**nak nevezzük. A másik, a támasztóerőt kifejtő elem neve **fő rész**. **A befüggesztett rész-fő rész viszony csak EGY kapcsolati pontra érvényes**, ugyanaz a tartóelem egyik kapcsolati pontjában lehet támasztó, míg a másik kapcsolati pontjában támasztott elem.

Előfordulhat, hogy a külső kapcsolati kényszerek olyan elrendezésűek, hogy a függőleges erőkre fő részként megtámasztott elem a vízszintes erők felvételére nem alkalmas, azokat egy másik (a függőleges terhek szempontjából befüggesztettnek minősülő) tartóelem támaszkényszere tudja csak felvenni. Ilyen esetben a vizsgálatot a **függőleges erőkre és a vízszintes erőkre külön-külön kell elvégeznünk**.
Nyilvánvaló, hogy a támasztó szerkezeti elem egyensúlyi vizsgálatában már szerepeltetnünk kell annak a támasztóerőnek az **ellentettjét**, amelyet a támasztó elem a kapcsolati pontban a támasztott elemre kifejt. Ennek alapján a kapcsolati erők meghatározását mindig a **támasztott** elem egyensúlyának vizsgálatával kell kezdenünk. Többelemes GERBER-tartó esetében a támaszkodási hierarchia alapján kereshető meg a „legbefüggesztettebb" tartóelem, az, amelyikre egy elem sem támaszkodik. Ennek az elemnek az egyensúlyozó kapcsolati erőit a kéttámaszú tartók támaszerőmeghatározási eljárásaival meg tudjuk határozni, és a kapott támaszerők ellentettjeit az alátámasztó elemek konzolvégein teherként működtetve azok támaszerői is egyértelműen számíthatók.

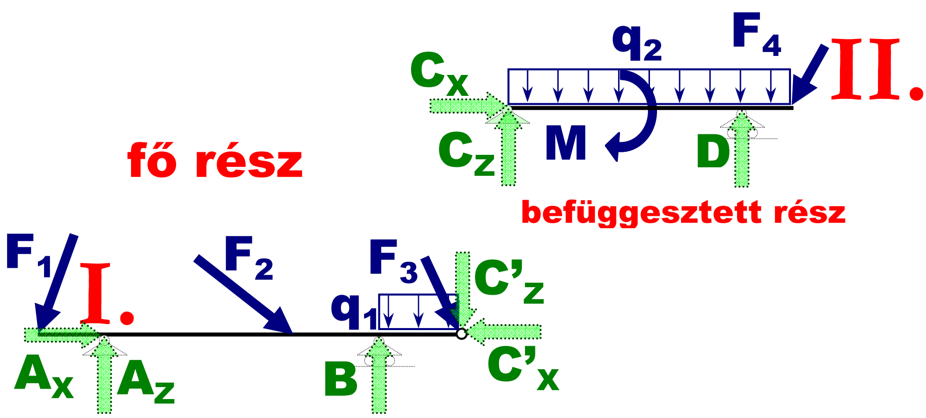


Az **I.** jelű kéttámaszú tartóelem megtámasztása merev, azaz bármilyen terhekre biztosítja a szerkezet egyensúlyát, nyugalmi állapotát. Ebből következően a konzolvég **C** jelű pontjában nem keletkezhet sem függőleges, sem vízszintes eltolódás (a **C** pontban a csatlakozó elemvégek egymáshoz képest elfordulhatnak!). A **C** pont tehát a **II.** jelű elem számára egy eltolódásmentes, elfordulásképes támasztókényszerként, gyakorlatilag **támaszcsukló**ként viselkedik.

A fenti okfejtésben felhasználtuk, hogy a szerkezet anyaga **végtelen merev**, azaz a terhektől semmilyen deformációt nem szenved. Tudjuk, hogy a tényleges szerkezeteink anyaga **nem merev**, **hanem szilárd**, azaz a teher, az igénybevétel mindig csak deformációkkal együttesen fordulhat elő. A valóságban tehát a **C** pontban mind függőleges, mind vízszintes elmozdulás keletkezik, de ez a szerkezet kialakítása és az elmozdulás kicsinysége miatt a számítható kapcsolati erők nagyságát csak elhanyagolható mértékben módosítja.

A **II.** jelű tartóelemre a **D** jelű görgős és a **C** jelű csuklós(ként viselkedő) kényszer helyére felrajzolhatjuk a feltételezett (célszerűen a pozitív tengelyágakkal megegyező) irányú támaszerőket, és a megfelelő nyomatéki és vetületi egyenletekből a kényszererők nagysága egyértelműen meghatározható. A **II.** jelű elem egyensúlyához a **C** pontban szükséges támaszerőket csak a fő rész, az **I.** jelű elem tudja kifejteni, így a **II.** elemről az **I.** elemre ezen támaszerők **ellentettje** fog (többletteherként) működni. Ezután már az **I.** jelű kéttámaszú tartó reakcióerői is egyszerűen meghatározhatók.

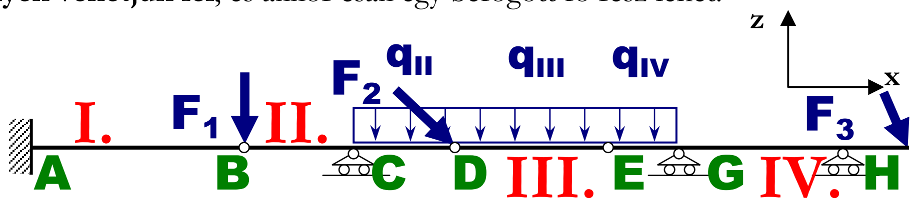
A **fő rész** vizsgálata során tehát a tartóelem saját terhein kívül a rá támaszkodó **befüggesztett rész reakcióerőinek ellentettjét** is **teherként kell figyelembe venni**.



A fenti GERBER-tartóban az **I.** jelű elem mind a függőleges, mind a vízszintes terhek felvételére alkalmas megtámasztásokkal rendelkezett, és a **II.** jelű elem egymagában sem a függőleges, sem a vízszintes terhek egyensúlyozására nem volt képes. Így a fő rész – befüggesztett rész viszony a két tartóelem között mind a függőleges, mind a vízszintes erőkre azonosan alakult, tehát a vizsgálat során a terhek irány szerinti szétválasztására nem volt szükség.

A közbenső csukló a befüggesztett tartó támaszkényszereként működik, ahol a befüggesztett tartó egyensúlyához szükséges (támasz) erőt a fő rész konzolvége fejti ki. Ha a csuklóra közvetlenül hat koncentrált erő, a csukló egyensúlyát külön kellene vizsgálni (többkapcsolatú csukló), de itt (is) megtehetjük azt az egyszerűsítést, hogy a **csuklóra ható koncentrált erőt a fő rész konzolvégén működőnek tekintjük**. Amennyiben a pontos csuklóerőkre is kíváncsiak vagyunk, úgy a terhelt **C** csuklót természetesen külön kell vizsgálni.

Az elemekre bontás során a középcsukló felett átmenő megoszló terhelést értelemszerűen a két tartóelemen külön-külön kell működtetnünk.
Ha a GERBER-tartó elemei között van egy **befogott tartó** is, akkor biztos, hogy ez a tartóelem **fő részként működik**. Egy többelemű GERBER-tartón **a függőleges erőkre** ezen kívül **másik fő részként működő elemek is lehetségesek** (akár befogott tartó is!), de a **vízszintes erőket** a statikailag határozott tartókon egyértelműen **csak egy helyen vehetjük fel**, és akkor csak egy befogott fő rész lehet.



A megtámasztottság kinematikai vizsgálata
Ha a szerkezet külső és belső kapcsolatai (a szerkezeti elemeket deformációmentesnek tekintve) sehol nem teszik lehetővé elmozdulások kialakulását, akkor a megtámasztás merev. Esetünkben az **A** támasz az **I.** jelű elemet mereven megtámasztja, és a csuklós kapcsolatok miatt a vízszintes elmozdulásokat a többi tartóelemben is megakadályozza. Az elfordulások és a függőleges eltolódások kialakulásának lehetőségét vizsgálva viszont azt láthatjuk, hogy a **II.** jelű elemen a **B** és a **C** pontok nem tolódhatnak el, azaz az elem mozdulatlan marad. Ugyanígy a **G** és a **H** pontok megtámasztottsága miatt a **IV.** jelű elemen sem alakulhat ki sem elfordulás, sem függőleges eltolódás. A **II.** és a **IV.** jelű elemek elmozdulásmentessége miatt viszont a D és az E pontok és így a **III**. jelű elem sem mozdulhat el, vagyis a **teljes tartó mozdulatlan marad**, a GERBER-tartó **megtámasztása merev.**

A szerkezetre felírható egyensúlyi kijelentések és statikai egyenletek:

	EGYENSÚLYI KIJELENTÉS	EGYENLET	ISMERETLEN
III.	$\left(\left(q_{III.}\right), \boxed{D_X, D_Z, E_X, E_Z}\right)=0$	3	4
II.	$\left(\left(q_{II.}\right), F_2, D_X', D_Z', \boxed{B_X, B_Z, C}\right)=0$	3	3
I.	$\left(F_1, B_X', B_Z', \boxed{A_X, A_Z, M_A}\right)=0$	3	3
IV.	$\left(\left(q_{IV.}\right), F_3, E_X', E_Z', \boxed{G, H}\right)=0$	3	2
E	$\left(F_1, F_2, F_3, (q), A_X, A_Z, M_A, C, G, H\right)=0$	3	**Ellenőrzés!**

Látható, hogy az összes elemre felírt független statikai egyenletek száma megegyezik az ismeretlen kapcsolati erőkomponensek számával, tehát a **megtámasztás statikailag határozott** (az egész szerkezetre felírható három további egyenlet már az ellenőrzést szolgálhatja).
A megtámasztottságot az A pontban befogott (nagy kinyúlású) konzoltartóból levezetve azt látjuk, hogy a tartón az **A** ponti 3-as fokszámú befogás mellett a **C**, **G** és a **H** pontokban egy-egy elsőfokú kényszert alkalmazunk, viszont a **B**, **D** és **E** pontokban a belső csukló kialakításával a gerenda belső merevségét (csuklónként) eggyel csökkentettük. **A külső merevségi többlet és a belső merevségi hiány kiegyenlíti egymást, így a teljes szerkezet egészében statikailag határozott és merev megtámasztású**.

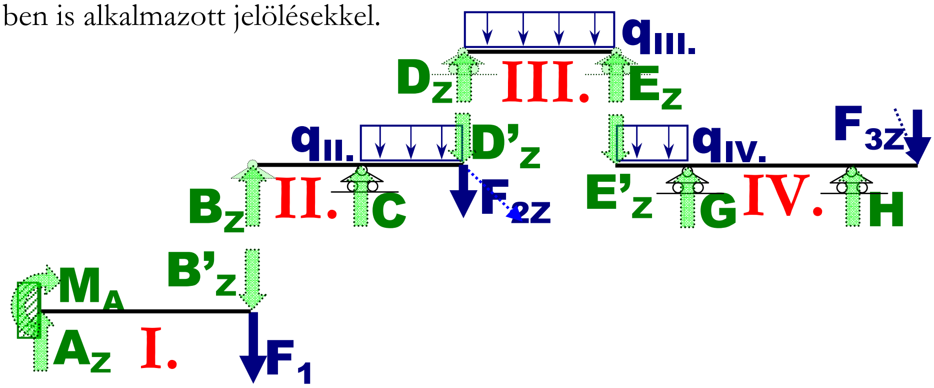
Az egyenletek és az ismeretlenek számának azonossága azonban csak egy 12 ismeretlenes egyenletrendszer megoldásával biztosítja az ismeretlenek meghatározását, ami kézi számításra nem alkalmas. Az egyensúlyi kijelentéseket végignézve azt látjuk, hogy a **III.** jelű elemre felírt három egyenletünkben négy ismeretlen van, tehát a **D** és **E** kapcsolati erők két-két komponense **csak a III. elem** egyenleteiből nem határozható meg. Ha a **kezdeti kisebb egyenletrendszer** lehetőségét keresve a többi tartóelem egyensúlyi kijelentéseit is megvizsgáljuk, azt találjuk, hogy **kiindulásként** felírva az egyenlethármasokat, ezekben is mindegyik elem esetében háromnál több ismeretlen van, azaz önmagukban ezek az egyenletcsoportok sem alkalmasak az ismeretlen kapcsolati erőösszetevők meghatározására. Egyszerűsítő megoldásként csak az erők irányok szerinti szétválasztása jöhet szóba, amikoris a **III.** jelű elem függőleges erőire (a vízszintes vetületi egyenlet kihagyásával) felírható két statikai egyenlet elegendő a két függőleges támaszerőkomponens meghatározására.

A teljes szerkezet együttes vizsgálatára vonatkozóan matematikai nézőpontból felvázolt megoldási nehézségek mechanikai oldalról is jelentkeznek:
Az ábrából és az egyensúlyi kijelentésekből látható, hogy a **III.** jelű elem mindkét végén további tartóelemekre támaszkodik, azaz a **III.** elemhez viszonyítva mind a **II.** jelű, mind a **IV.** jelű elem fő részként funkcionál. Ugyanakkor a vízszintes erők felvételére csak az A jelű támasz alkalmas, tehát a **IV.** elem a vízszintes erőkre nem lehet fő rész. Megoldást ismét csak a függőleges és a vízszintes erőkre történő vizsgálat szétválasztása jelent, amikoris a megtámasztottsági hierarchia külön-külön egyértelmű, és a támaszerőkomponensek egyszerű meghatározását teszi lehetővé.

Természetesen végül a két megoldásból adódó támaszerőkomponenseket együtt kell az eredményvázlatban a tartóelemeket egyensúlyozó erőkként szerepeltetni.

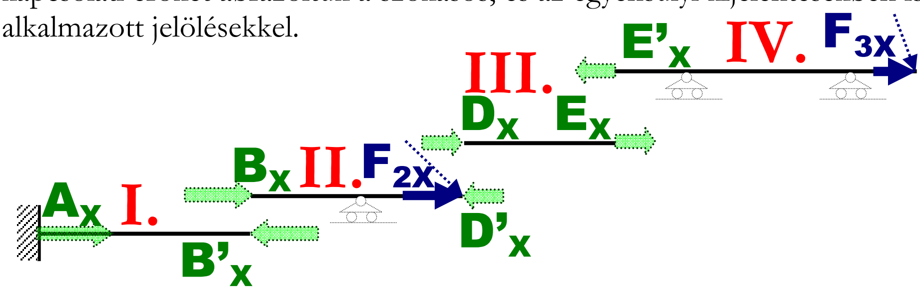
Vizsgálat függőleges erőkre

Az ábrán a függőleges terhelő erőket és a pozitívnak feltételezett függőleges kapcsolati erőket ábrázoltuk a szokásos, és az egyensúlyi kijelentésekben is alkalmazott jelölésekkel.



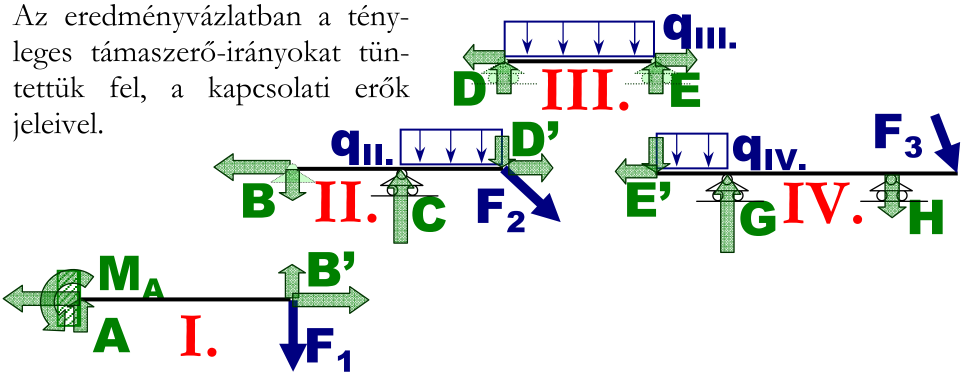
Vizsgálat vízszintes erőkre

Az ábrán a vízszintes terhelő erőket és a pozitívnak feltételezett vízszintes kapcsolati erőket ábrázoltuk a szokásos, és az egyensúlyi kijelentésekben is alkalmazott jelölésekkel.



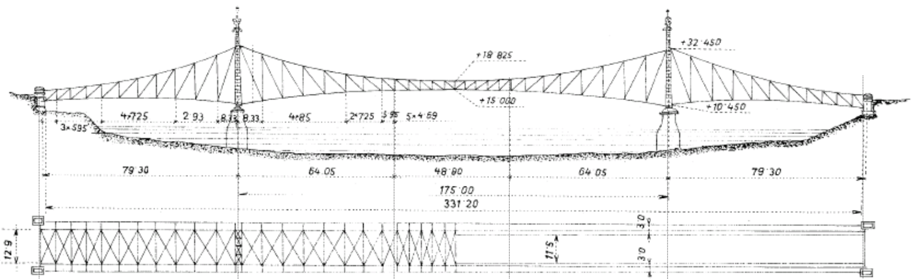
Az elemenkénti eredményvázlat

Az eredményvázlatban a tényleges támaszerő-irányokat tüntettük fel, a kapcsolati erők jeleivel.



Egy nagyon szép GERBER-tartós szerkezet:

A budapesti Szabadság híd nézete



A híd szerkezeti kialakítása

A hídszerkezet statikai váza

A befüggesztett tartó az egyik végén csuklóval, a másik végén ingaoszloppal támaszkodik a konzolos kéttámaszú főelemekre.
Az alul-felül csuklós kapcsolatú ingaoszlop a kapcsolt elemek között a vízszintes elmozdulást is megengedi.
A csuklóban a szerkezetek valódi mozgását a csukló körüli rozsda megjelenése bizonyítja.

$$\Sigma M_i = 0$$

6.7. Feszítő- és függesztőműves tartók

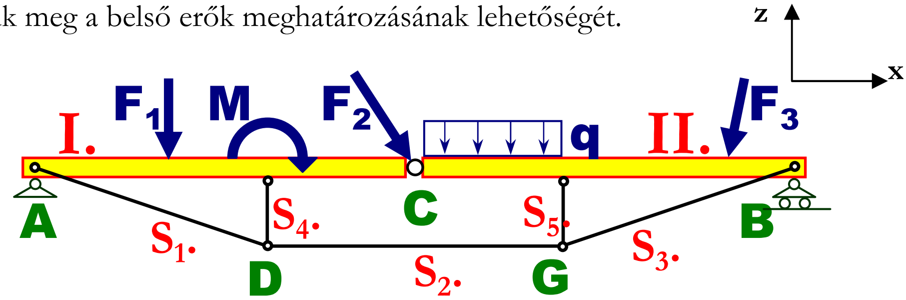
Ha két gerendaelemet csuklósan kapcsolunk össze, a kapcsolat hiányzó nyomatékbírását, elfordulásmentességét egy, a gerendák tengelyvonalán kívül elhelyezett rúddal is biztosíthatjuk. Természetesen ezt a külső, párhuzamos rudat merev és határozott módon a két gerendaelemhez kell kapcsolnunk. Egy pont merev (és statikailag határozott) megtámasztásához a síkban két kapcsolórúd szükséges, tehát a nyomatékbírásra alkalmazott, párhuzamos rudunk két végpontját két-két rúddal köthetjük a gerendaelemekhez.

Ha a csuklósan kapcsolt gerendák (belső) merevítését a gerendatengely **alatt** futó csuklós kapcsolatú rúdrendszerrel valósítjuk meg, az összetett tartót **feszítőműves szerkezet**nek nevezzük.

Ha a csuklósan kapcsolt gerendák (belső) merevítését a gerendatengely **felett** futó csuklós kapcsolatú rúdrendszerrel valósítjuk meg, az összetett tartó neve: **függesztőműves szerkezet**.

A gyakorlatban a feszítőműves-függesztőműves megerősítést leggyakrabban **nem** csuklósan kapcsolt, összetett gerendatartók hiányzó merevségének pótlására, hanem **kéttámaszú, folytonos gerendák merevségének és teherbírásának növelésére** szokás alkalmazni. Könnyen belátható, hogy a gerendatengelyen kívül futó, a gerendához két (esetleg több) ponton kapcsolt párhuzamos (esetleg poligonális) rúdrendszer a gerendával együtt deformálódik, és ezzel (a benne keletkező húzó- ill. nyomóerők árán) **csökkenti a gerenda alakváltozásait és belső igénybevételeit**. Különösen előnyös lehet a feszítőmű alkalmazása **szerkezetek utólagos megerősítése** során, hiszen a beavatkozás a beépített, megerősítendő tartó fölötti szerkezeteket nem érinti, a teljes megerősítés alulról elvégezhető. Megjegyezzük, hogy ilyen esetben a feszítőmű csak a megerősítés **utáni** terhekre működik, ha a megerősítést a tartó eredeti terheire is dolgoztatni akarjuk, a beépítés előtt a tartót ideiglenesen tehermentesíteni kell (pl. a feszítőmű támaszkodási pontjaiban meg kell emelni), vagy a feszítőmű elemeit a beépítés után meg kell feszíteni (a bennük várható megnyúlást a kapcsolat fixálása előtt ki kell alakítani). Az így kialakított szerkezet természetesen statikailag határozatlan, ezért vizsgálatát csak a későbbiekben tudjuk elvégezni, de a csuklós kapcsolatú gerendák feszítő-függesztőműves merevítésének tárgyalása (a határozatlan szerkezetek jó előkészítéseként) már most is elvégezhető.

A feszítő- és függesztőműves összetett tartók viselkedése, belső erőik meghatározása azonos módon történik, különbség csak annyiban mutatkozik, hogy a megerősítő rúdszerkezet elemeiben ellenkező előjelű erők ébrednek. Az alábbiakban ezért csak egy feszítőműves szerkezeten mutatjuk meg a belső erők meghatározásának lehetőségét.



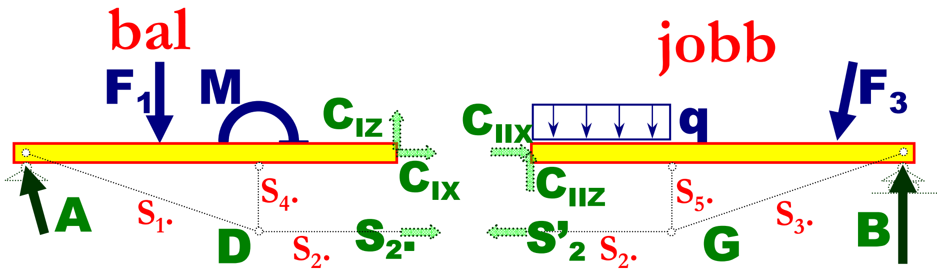
Mind a feszítőműves, mind a függesztőműves szerkezetben a csuklós gerendakapcsolat miatti merevségi hiányt egy belső, a külső kapcsolati rendszertől **független** szerkezeti kialakítással, merevítő rúdrendszerrel pótoltuk, azaz a külső kapcsolatok szempontjából a feszítő- függesztőműves összetett szerkezet **egyetlen merev tartóként kezelhető**, megtámasztottsága **belsőleg merev.**

A szerkezetre felírható egyensúlyi kijelentések és statikai egyenletek:

	EGYENSÚLYI KIJELENTÉS	EGYENLET	ISMERETLEN
I.	$\left(F_1, M, \boxed{A_X, A_Z, C_{I,X}, C_{I,Z}, S_1, S_4}\right)=0$	3	6
II.	$\left[(q), F_3, \boxed{B, C_{II,X}, C_{II,Z}, S_3, S_5}\right]=0$	3	5
C	$\left(F_2, C_{I,X}', C_{I,Z}', C_{II,X}', C_{II,Z}'\right)=0$	2	0
D	$\left(S_1', \boxed{S_2}, S_4'\right)=0$	2	1
G	$\left(S_3', S_2', S_5'\right)=0$	2	0
E	$\left[F_1, F_2, F_3, (q), M, A_X, A_Z, B\right]=0$	3	**Ellenőrzés!**

Látható, hogy az elemek egyensúlya alapján felírható statikai egyenletek és az ismeretlen kapcsolati erőkomponensek száma az **összes elemre** ismét megegyezik, tehát a szerkezet megtámasztottsága **statikailag határozott**. A szerkezet egészére felírható három egyensúlyi egyenlet már a számítások ellenőrzésére használható fel. A fentiekből azonban az is látszik, hogy a belső szerkezettől független külső kapcsolati erők meghatározása után a belső kapcsolatokra egyszerű, egy-két ismeretlenes egyenletek nem írhatók fel.

A kapcsolati erők meghatározásában egy új, a szerkezeti elemek szerinti felbontástól eltérő felbontás kínál egyszerű és gyors eredményt: a **C** csuklón átmenő függőleges síkkal vágjuk két részre a szerkezetet! Így az átvágott belső anyagi kapcsolat pótlására a **C** csuklóerő két összetevőjét és az $\mathbf{S_2}$ rúderőt kell kapcsolati erőként beiktatnunk. Ha a szétvágott szerkezet egyik felére felírjuk a **C** csuklóra vonatkozó nyomatéki egyenletet, abban (a külső kapcsolati erők ismeretében) már csak az $\mathbf{S_2}$ rúderő lesz ismeretlen. Ennek ismeretében a **D** vagy az **G** csukló egyensúlya alapján az $\mathbf{S_1}$-$\mathbf{S_4}$, ill. az $\mathbf{S_3}$-$\mathbf{S_5}$ rúderők is könnyen meghatározhatók, ez után pedig az **I.** ill. **II.** elemek egyensúlyi egyenleteiből a $\mathbf{C_{I.}}$ és a $\mathbf{C_{II.}}$ csuklóerők is egyszerűen adódnak.

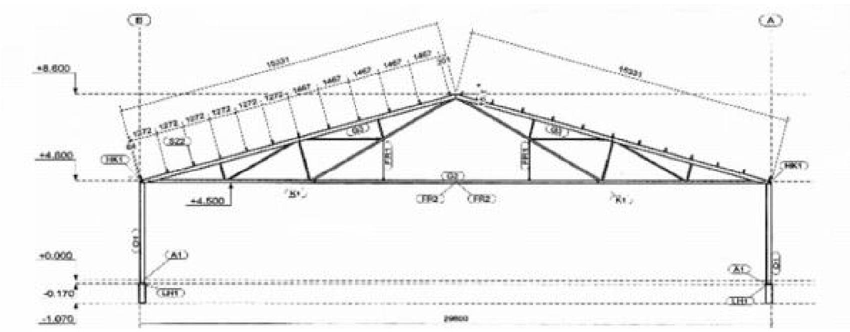


A szerkezetre felírható egyensúlyi kijelentések és statikai egyenletek:
(Ez esetben a belső merevség miatt a külső kapcsolati erők a belső kapcsolatok vizsgálatától függetlenül kezelhetők, ezért a szerkezet **egészére** vonatkozó egyensúlyi kijelentést nem szerepeltettük, és a külső kapcsolati erőket ismertnek tekintettük.)

	EGYENSÚLYI KIJELENTÉS	EGYENLET	ISMERETLEN
bal	$(F_1, M, A_X, A_Z, \boxed{C_{I,X}, C_{I,Z}, S_2}) = 0$	3	3
D	$(\boxed{S_1}', S_2, \boxed{S_4}') = 0$	2	2
C	$(F_2, C_{I,X}', C_{I,Z}', \boxed{C_{II,X}', C_{II,Z}'}) = 0$	2	2
G	$(\boxed{S_3}', S_2', \boxed{S_5}') = 0$	2	2
jobb	$[(q), F_3, B, C_{II,X}, C_{II,Z}, S_3, S_5] = 0$	3	Ellenőrzés!

A statikai egyenletek és az ismeretlen kapcsolati erőkomponensek összevetése alapján az egyenletek száma **nemcsak összesítésben** egyezik meg a keresett ismeretlenek számával, hanem **minden vizsgált elemen különkülön is**, azaz az ilyen típusú felbontás esetén az összességében 9 ismeretlenes egyenletrendszer három- és kétismeretlenes blokkokra esik szét, amelyek ráadásul önmaguk is egyismeretlenes egyenletekként írhatók fel.

A feszítőműves szerkezetben a rövid rúdelemek lesznek nyomottak, és a hosszú rudak húzottak. A nyomott rudak esetében mindig számolnunk kell a rúdelem stabilitásvesztésének lehetőségével, melynek veszélye a rúdhossz növekedésével rohamosan nő. Így a stabilitási szempontokat is figyelembe véve a feszítőmű egyszerűbben, kisebb anyagfelhasználással valósítható meg, mint egy ugyanolyan geometriájú függesztőmű.



Egy speciális, feszítőműnek is tekinthető mezőgazdasági tetőszerkezet

A tetőhajlást adó szarugerendákat alsó feszítőművek erősítik, a két, középen csuklósan kapcsolódó szerkezetet pedig egy alsó feszítőrúd teszi belsőleg merev szerkezetté.

A Nyugati Pályaudvar acélcsarnoka

A csarnok rácsos szaruzatát filigrán rudakból álló feszítőmű merevíti.

6.8. A szimmetria

A szimmetriával tartószerkezeteink tervezése-ellenőrzése során sok alkalommal találkozunk, egyszerűsítő hatását kihasználjuk, többnyire törekszünk is arra, hogy lehetőség szerint szimmetrikus tulajdonságú szerkezeteket alakítsunk ki. A szimmetria minden szerkezetben megjelenhet, de a háromcsuklós tartó belső csuklóerőinek alakulásában a szimmetriatulajdonság hatása különösen szemléletesen jeleníthető meg.

A **szimmetria** a szerkezeteinkben **többrétegűen** jelentkezhet:

szimmetrikus **geometria** (a tartó tengelyvonal-hálózata)

szimmetrikus **megtámasztottság** (szimmetrikus pozícióban azonos támaszkényszerek

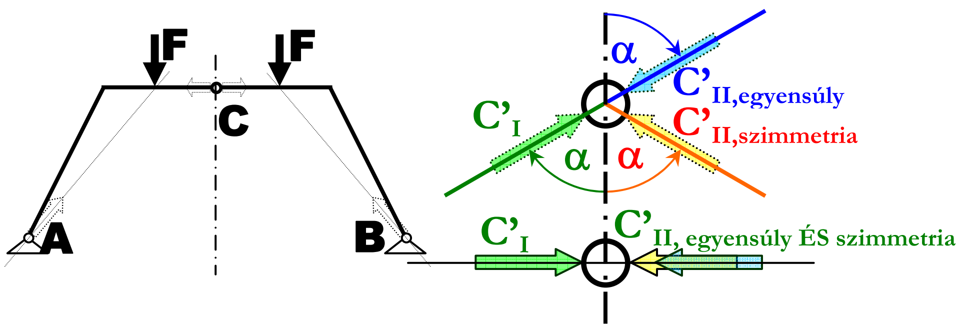
*szimmetrikus **merevség** (a szimmetrikus pozícióban lévő rúdelemek azonos keresztmetszeti kialakítása – ezzel a kérdéskörrel részletesen majd a SZILÁRDSÁGTAN keretében foglalkozunk)*

szimmetrikus **terhelés**

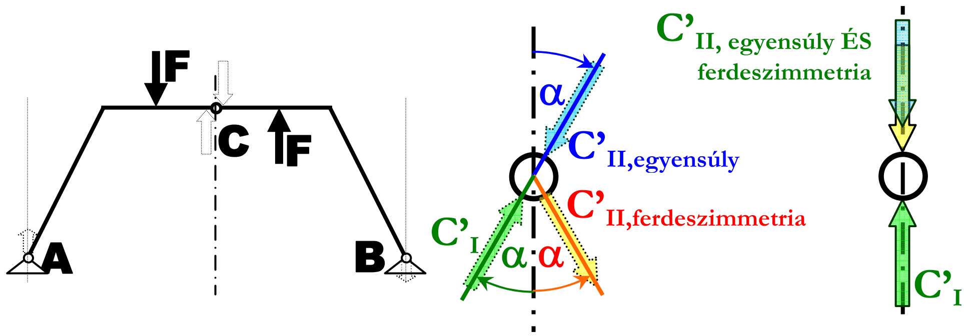
A tartószerkezeteinktől szimmetrikus viselkedést csak akkor várhatunk el, ha szimmetriájuk **mind a négy rétegben** érvényesül. Ez esetben viszont a szimmetrikus viselkedés mind a külső, mind a belső kapcsolati dinámokra kiterjed, és **a szimmetriafeltétel az egyensúlyi feltételekkel párhuzamosan, azokkal egyidejűleg elégítendő ki**.

Itt most (egyelőre) csak a kapcsolati erőkről beszélünk, de megjegyezzük, hogy a szimmetriatulajdonság a tartónak más, igénybevettségi-igénybevételi, alakváltozási jellemzőiben is megjelenik.

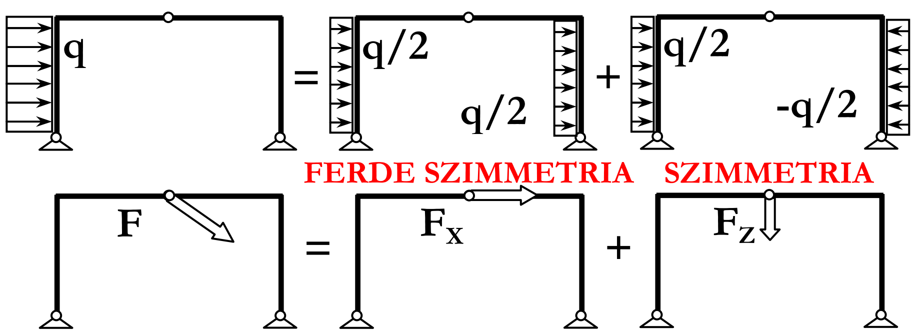
A szimmetriatengelyben lévő, külső terhelés nélküli pontok (gyakorlatilag: terheletlen belső kapcsolati csuklók) esetében a **statikai és a szimmetriafeltétel egyidejű kielégítése csak vízszintes kapcsolati erők esetén lehetséges**. Ez a megállapítás igen leegyszerűsíti a külső kapcsolati erők meghatározását is, hiszen ily módon a két féltartó esetében az **egyik** (a belső csuklópontban keletkező) **kapcsolati erő hatásvonala ismert**.



A **ferde szimmetria** (a szimmetrikus **pozíciójú** pontokban a jellemző mennyiségek egymás **ellentettjei**) szintén szigorú szimmetriatulajdonságot fogalmaz meg, ami leginkább a szimmetrikus tartók **terhelésében**, de esetenként akár a tartók geometriájában is megjelenhet.
A **ferdén szimmetrikus teherrel terhelt**, **szimmetrikus** háromcsuklós tartó terheletlen középcsuklójában az egyensúlyi és a szimmetriafeltétel egyidejűleg csak akkor teljesülhet, ha a csuklóerő **függőleges** hatásvonalú.



A szimmetriatulajdonságok természetesen más tartószerkezetek esetében is felhasználhatók, sőt vannak olyan tartóelemek-szerkezeti vizsgálatok, amelyek a szimmetriát meg is követelik. A szimmetriatulajdonságok egyszerűsítő hatásának kihasználása érdekében esetenként a nem szimmetrikus terhelést is szimmetriatulajdonságot hordozó teherelemekből összeállítottnak tekintik, mert a több teherelemen elvégzett, egyenként egyszerűbb számítások még mindig könnyebben, kevesebb munkával végezhetők el, mint egy bonyolultabb, egyszerűsítő lehetőségeket nem tartalmazó számítás. Emellett az egyszerűbb, szimmetriatulajdonságokat mutató terhelésre a szerkezet viselkedése is könnyebben követhető, így az esetleges modellfelvételi, számítási hibák könnyebben észrevehetők, és időben korrigálhatók.



6.9. Összefoglalás

Az **ÖSSZETETT TARTÓK** esetében a megoldást **MINDIG** az összetett tartószerkezet **RÉSZEKRE BONTÁS**ával, az egyes tartóelemekre és az egész szerkezetre érvényes **EGYENSÚLYI KIJELENTÉSEK** és **EGYENSÚLYI EGYENLETEK** felírásával állíthatjuk elő. (Az egész szerkezet, ill. az egyes tartóelemek egyensúlyozási esetei mindig visszavezethetők az egyszerű tartók valamelyik alapesetére.)

Az összetett szerkezet **MEGTÁMASZTOTTSÁG**ának minősítése során **KÜLÖN** kell minősítenünk a szerkezetet a talajhoz kapcsoló **KÜLSŐ** kapcsolatokat és az elemeket egymáshoz kapcsoló **BELSŐ** kapcsolatokat.

Általánosságban kimondhatjuk, hogy az összetett szerkezetekben **a belső merevségi hiány** (alkalmasan megválasztott) **külső merevségi többlettel pótolható, és az így kialakított szerkezet**, amely belsőleg labilis, külsőleg statikailag határozatlan, **egészében véve statikailag határozott és merev megtámasztású**, azaz a tartóelemek külső és belső kapcsolati dinámjai csak a statikai egyenletek segítségével meghatározhatók.

6.10. Ellenőrző kérdések

Mi az összetett tartó fogalma?
Két tartóelemből összetett tartó esetén milyen belsőleg merev és statikailag határozott kapcsolatokat ismer? Mondjon legalább két példát!
Két tartóelemből összetett tartó esetén milyen belsőleg labilis kapcsolatokat szoktak alkalmazni? Mondjon legalább két példát!
Lehet-e egy statikailag határozott összetett tartó belsőleg merev és külsőleg statikailag határozott?
Lehet-e egy statikailag határozott összetett tartó belsőleg merev és külsőleg statikailag határozatlan?
Lehet-e egy statikailag határozott összetett tartó belsőleg labilis és külsőleg statikailag határozott?

Lehet-e egy statikailag határozott összetett tartó belsőleg labilis és külsőleg statikailag határozatlan?
Két merev testből álló egy csuklóval és egy rúddal összekapcsolt testre hány egyensúlyi kijelentés írható fel, ha a csukló is terhelt?
Két merev testből álló egy csuklóval és egy rúddal összekapcsolt testre hány egyensúlyi kijelentés írható fel, ha a csukló terheletlen?
Két merev testből álló egy csuklóval és egy rúddal összekapcsolt test belsőleg merev-e és statikailag határozott-e?
Két merev testből álló egy csuklóval és egy rúddal összekapcsolt test belsőleg labilis-e?
A háromcsuklós tartóra hány független egyensúlyi kijelentés írható fel, ha a csukló is terhelt?
A háromcsuklós tartóra hány független egyensúlyi kijelentés írható fel, ha a csukló terheletlen?
A háromcsuklós tartó belsőleg merev-e?
A háromcsuklós tartó belsőleg labilis-e?
A háromcsuklós tartó statikailag határozott-e?
A háromcsuklós tartó belsőleg labilis, lehet-e egyidejűleg külsőleg is labilis?
A megoldás egyszerűsége miatt mindegy-e, hogy a háromcsuklós tartó két támaszpontja azonos vagy eltérő magasságban van-e?
Ha a háromcsuklós tartó két támasza azonos magasságban van, meghatározható-e az összes külső és belső erő egyismeretlenes egyenletekből?
Ha a háromcsuklós tartó két támasza eltérő magasságban van, meghatározható-e az összes külső és belső erő egyismeretlenes egyenletekből?
Mit tudunk a háromcsuklós tartó terheletlen tartórészén a reakcióerő irányáról?
Mi az egymásrahalmozhatóság (a szuperpozíció) elve háromcsuklós tartó esetén?
Két merev testből álló három rúddal összekapcsolt összetett test belsőleg merev-e és statikailag határozott-e?
Két merev testből álló három rúddal összekapcsolt összetett test belsőleg labilis-e?
Két merev testből álló két rúddal összekapcsolt összetett test belsőleg merev-e?
Két merev testből álló két rúddal összekapcsolt belsőleg labilis összetett test egészében merevvé és statikailag határozottá tehető-e?
Mi a Gerber-tartó fogalma?
Lehet-e egy, függőleges és vízszintes erőkkel is terhelt Gerber tartón több főrész?

Lehet-e egy, függőleges és vízszintes erőkkel is terhelt Gerber-tartón több befüggesztett rész?
Lehet-e egy, csak függőleges erőkkel terhelt Gerber-tartón több főrész?
Lehet-e egy, csak függőleges erőkkel terhelt Gerber-tatrtón több befüggesztett rész?
A Gerber-tartón szükséges-e minden esetben külön vizsgálat a függőleges ill. vízszintes erőkre?
Mi a feszítőműves szerkezet fogalma?
Mi a függesztőműves szerkezet fogalma?
Milyen irányú a szimmetriatengelyben levő, külső teher nélküli belső csuklókban ébredő csuklóerő szimmetrikus terhelésű, szimmetrikus tartó esetén?
Milyen irányú a szimmetriatengelyben levő, külső teher nélküli belső csuklókban ébredő csuklóerő ferdén szimmetrikus terhelésű, szimmetrikus tartó esetén?

7. Rácsostartók

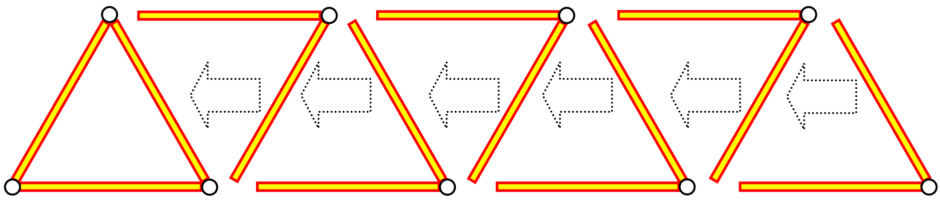
Az összetett tartók vizsgálata során megállapítottuk, hogy a tartóelemek gyártási-szállítási-beépítési méretkorlátja miatt a nagyobb nyílások áthidalása, a nagyobb terek lefedése csak **összetett szerkezetekkel** lehetséges. Az áthidalandó tér növekedésével azonban egyrészt kevésnek bizonyul a két elemből összeállított szerkezet, másrészt a tartó szükséges magasságának növekedése miatt a felső és alsó, legjobban kihasznált tartórészek között nagy lesz az a tartomány, ahol az anyag szilárdságát nem tudjuk kihasználni. Ha valóban csak a tartószerkezet alsó és felső szélén akarjuk a szerkezeti anyagot elhelyezni, akkor valójában egy rúdpárrá egyszerűsítjük a tartót, ahol azonban ezen rúdpár elemeinek relatív geometriai helyzetét, például közbenső merőleges-ferde állású rúdelemekkel biztosítani kell. Az így előálló tartószerkezet nagy nyílások áthidalására is alkalmas, anyagtakarékos, könnyen szerelhető, bár a tömör tartóknál gyártástechnológiájában munkaigényesebb szerkezet.

Ha a rúdhálózat **négyszögelemekből** áll, a hálózatban a csomópontok **hangsúlyozottan befogottak**, és a teherviselésben ezek befogási nyomatékai dominálnak, akkor a szerkezetet **VIERENDEEL**-tartónak nevezzük. Ennek a (belsőleg sokszorosan statikailag határozatlan) szerkezetnek a vizsgálatát most nem tárgyaljuk.

Ha a rúdhálózat **háromszögelemekből** áll, a hálózatban a **csuklós csomópontokban** a befogás csak szerelési szempontok miatt alakul ki, a teherviselésben a **rúdelemek tengelyirányú terhelése dominál**, és a csomópont környéki befogási nyomatékok csak lokális zavarként módosítják a rúdelemek igénybevételi állapotát (a rúd a hálózati hosszhoz viszonyítva kis keresztmetszetű), akkor a szerkezetet **rácsostartónak** nevezzük.

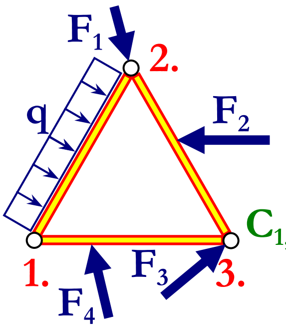
7.1. A rácsostartók belső kapcsolatainak minősítése

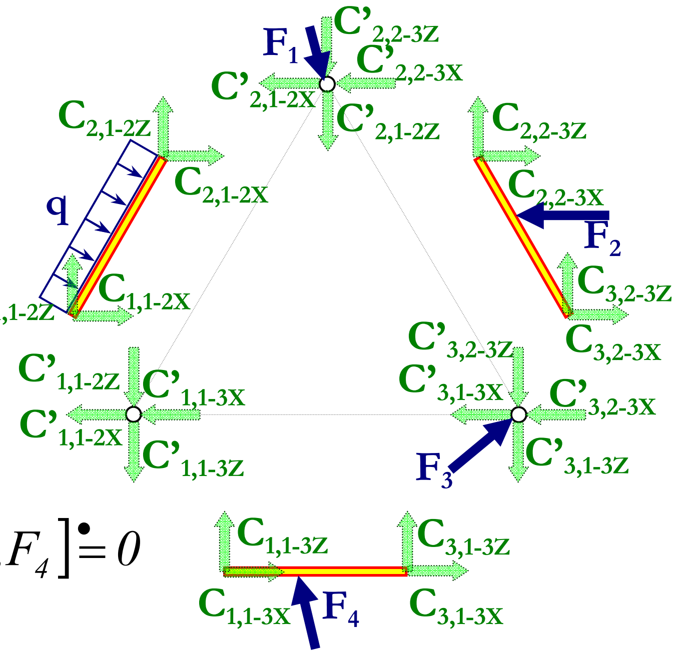
A **rácsostartó** a már megismert összetett tartókból úgy származtatható a legegyszerűbben, hogy két, végükön csuklósan kapcsolt rúdelemet a másik végpontjukba csuklósan csatlakozó rúddal **merev háromszöggé** alakítunk, majd ehhez a háromszöghöz **egy-egy csomópontot** (csuklópontot) **két-két újabb rúddal** kapcsolunk.



A három rúdból és a rúdvégeket összekapcsoló három csuklóból álló háromszög elemei között semmilyen (relatív) elmozdulás nem jöhet létre, tehát a szerkezet (belsőleg) **merev** kapcsolatú.
Általános esetben a csuklópontokban az oda becsatlakozó rúdvégekre egy-egy erő működhet, amelyek két-két ismeretlen erőkomponenst jelentenek. Az összes ismeretlen tehát rúdelemenként **4**, összesen **12 ismeretlen**. A rúdelemekre, mint egy-egy merev testre három-három statikai egyensúlyi egyenlet írható fel, a csuklópontokra pedig (az ott működhető erők közös metszéspontúsága miatt) két-két független statikai egyenlet fogalmazható meg. Az összes **egyenletek száma** tehát **3×3+3×2=15**, ami ismét azt jelenti, hogy az utolsó három egyenlet ellenőrzésre használható fel. (Valójában arról van szó, hogy a harmadik rúdelemre már csak a két csatlakozó csuklóról adódhat erő, azokat viszont a csuklók egyensúlyi egyenletei már meghatározzák.) Végül tehát kimondhatjuk, hogy a három rúdból és a rúdvégeket összekapcsoló három csuklóból álló háromszögszerkezet (belsőleg) **statikailag határozott** kapcsolatú.
Ha egy merev szerkezethez egy (csukló)pontot két rúddal kapcsolunk, a pont a szerkezethez képest nem mozdulhat el, kapcsolása tehát **merev**.
A két új rúdelem (általános teherkombinációt feltételezve) rúdvégenként két-két, összesen **8 új ismeretlen** kapcsolati erőkomponenst jelent, míg az új rúdelemekre egyenként három-három, az új csuklóra két új egyenlet, összesen **8 új statikai egyenlet** írható fel. Az új szerkezettel tehát mind az ismeretlenek, mind a statikai egyenletek száma 8-cal nőtt, tehát a megoldhatóság nem változott, a szerkezet a bővítés után is (belsőleg) **statikailag határozott** kapcsolatú.

A fentiek alapján az új csomópontokkal **lineárisan** fejlesztve a szerkezetet, a belső kapcsolatokra **mind a merevség, mind a statikai határozottság érvényben marad**.
A merev háromszögszerkezetre egyensúlyi erőrendszert működtetve a rudakra működő, pozitívnak feltételezett csuklóerők és a csomópontokra ható ellentettjeik a következőképpen alakulnak:





$$\left[(q), F_1, F_2, F_3, F_4\right] \doteq 0$$

A gyakorlati szerkezetekben a rácsostartókra a másodlagos tartóelemek (a magasépítésben fióktartók, a hídépítésben kereszt- és pályatartók) a csomópontokon támaszkodnak, így a rácsostartók rúdelemei (a saját súlyukon kívül) közvetlen terhelést nem kapnak.

A másodlagos tartóelemek révén a terhek a rácsostartókra csak a csomópontjaikban adódnak át, tehát (kevés kivételtől eltekintve) **a rácsostartók a csomópontjaikban koncentrált erőkkel terhelt szerkezetekként vizsgálhatók és vizsgálandók**.

Közvetlen terhelésű rúdelemekkel kell számolnunk a rácsos szerkezetű darupályatartókon, ahol a darukerék a felső övrudakon bármely pozícióban lehet.

Ha a terhelés csak a csomópontokban működhet, akkor a rácsostartó belső kapcsolatainak minősítése is egyszerűbben végezhető el.
Csak csomóponti terhelés esetén a rudakban csak **tengelyirányú**, úgy is mondhatjuk: **rúdirányú** erők keletkezhetnek. Ezeknek a hatásvonala ismert, tehát ismeretlennek csak a rúderők nagyságát kell tekintenünk. A rácsostartó belső kapcsolataira felírható statikai egyenletekben tehát **a rudak számával megegyező számú ismeretlen** lesz. A szerkezet nyugalmi állapota megkívánja, hogy a szerkezet egészére is, és annak bármilyen részére is egyensúlyi erőrendszer működjön, azaz (egyebek között) minden csomópont is egyensúlyban legyen. A csuklós csomópontokban a külső csomóponti terhek és a rúderők közös metszéspontú erőrendszert alkotnak, amelynek egyensúlyához csomópontonként két-két statikai egyenlet írható fel. A korábbiakban már láttuk, hogy egy összetett szerkezetben az összes elemre minden (matematikailag független) egyensúlyi egyenletet felírva az utolsó három egyenlet már nem tartalmaz új ismeretlent (ha a korábbi elemekre ható erők mind egyensúlyban voltak, az utolsó elemre ható erőkre az egyensúly automatikusan teljesül). A rácsostartó csomópontjaira felírt egyensúlyi egyenletekből **tehát a csuklók számának kétszeresénél hárommal kevesebb egyenlet** lesz az, amelyet ismeretlen (rúd)erők meghatározására felhasználhatunk.
Matematikai megközelítéssel tehát a csomópontokon terhelt rácsostartó belső merevségének és határozottságának **szükséges** (de sajnos, nem elégséges) feltétele, hogy

$$r = 2c - 3$$

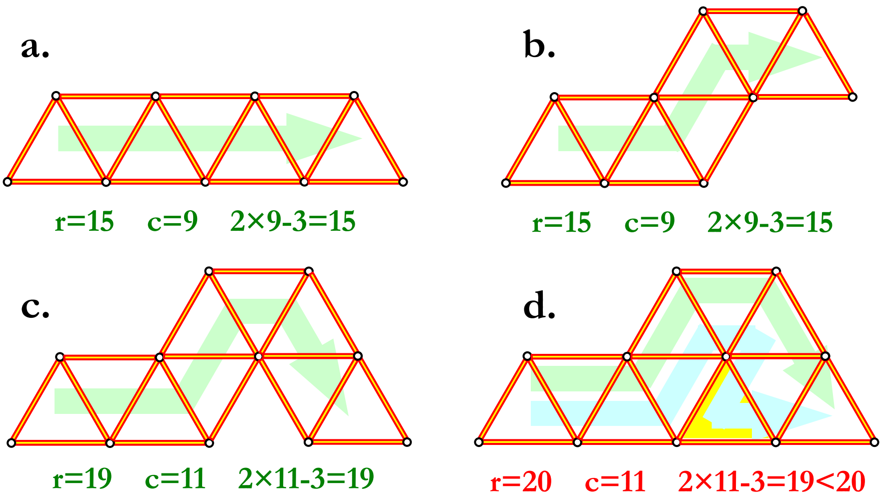
ahol **r** a rudak száma, **c** a csomópontok száma.
Ugyanerre a megállapításra jutunk akkor is, ha a rácsostartó származtatása alapján, mechanikai szemléletet követve vizsgáljuk a csuklók és a rudak számának összefüggését. A kiindulásként megszerkesztett merev háromszögben **három rúd** és **három csomópont** volt. Lineáris fejlesztés esetén **egy új csomópontot két új rúddal** tudtunk a szerkezethez kapcsolni. Az **n** új csomópontot tartalmazó szerkezetben tehát a rudak és a csomópontok száma összesen:

$$r = 3 + 2n \qquad\qquad c = 3 + n$$

Az **n** paramétert kiküszöbölve a rudak és a csomópontok számának összefüggése a következőképpen alakul:

$$r = 3 + 2(c - 3) = 3 + 2c - 6 = 2c - 3$$

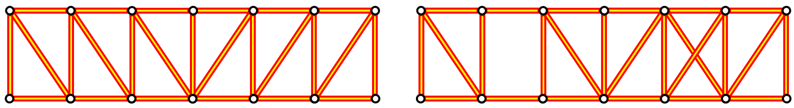
A következőkben vizsgáljuk meg, hogy a fenti kritérium hogyan teljesül különböző rácsostartó-hálózatokra, ill. hogy mit is jelent a lineáris fejlesztés. Az alábbi ábrasorban az **a.** jelű tartó hálózata az, amit a korábbiakban a merev háromszögeket egymás után sorolva előállítottunk. Tört vonalvezetéssel, de még mindig a háromszögelemek sorolásával, pontosabban **egy** új csomópontot **két** új rúddal kapcsolva állítható elő a **b.** és a **c.** jelű tartó hálózata is. A rudak és a csomópontok számára vonatkozó összefüggést mindhárom szerkezetre igaznak találjuk. A **d.** jelű szerkezetet a **c.** jelűből egyetlen új csomópont elhelyezése nélkül, csupán egy rúd beépítésével alakítottuk ki, erre tehát nem teljesül a (belső) statikai határozottsághoz szükséges feltétel. Ha a hálózat fejlesztésének **linearitását** vizsgáljuk meg, azt látjuk, hogy az **a.**, **b.** és **c.** jelű tartók hálózatán végighúzhatunk egy (tört)vonalat úgy, hogy minden háromszögelemet **egyszer és csak egyszer** érintünk. A **d.** jelű szerkezeten ez nem lehetséges, mert vagy ki kell hagynunk egy háromszögelemet, vagy egy elemet kétszer kell érintenünk.



A rudak és a csomópontok számára megállapított szükséges feltétel és a háromszögelemek lineáris sorolásával készült hálózat együttesen már elégséges is ahhoz, hogy a szerkezet belső kapcsolatait **statikailag határozottnak** és **merevnek** minősítsük.

A rudak és a csomópontok számának összefüggésére megállapított szükséges feltétel teljesülése esetén a szerkezet belső kapcsolatai csak olyan esetben nem elégítik ki a statikai határozottság és merevség együttes követelményét, ha a szerkezet bizonyos részeiben **belső merevségi hiány**, más részeiben **ugyanolyan fokszámú belső merevségi többlet** mutatkozik (a szerkezet **egyidejűleg belsőleg labilis ÉS belsőleg határozatlan**).

A rudak és a csomópontok száma az ábrán látható mindkét rácsostartóban kielégíti a belső határozottságra és merevségre megállapított szükséges feltételt, de látható, hogy a jobb oldali szerkezetben az egyik rúdtéglalapban egyáltalán **nincs merevítés** (a csuklós kapcsolatok miatt egy ilyen szerkezet **labilis**!), míg egy másik rúdtéglalapba **két merevítő rúd** is került (ezek között csak statikai egyenletek alapján nem lehet megállapítani az erők eloszlását, azaz ez a tartórész **statikailag határozatlan**!). A bal oldali tartó **merev háromszögelemek lineáris sorozatából áll**, míg a jobb oldali szerkezetről ez nem mondható el: van benne merevítetlen négyszög (emiatt lokálisan labilis), és túlmerevített négyszög (emiatt lokálisan határozatlan).



Látható tehát, hogy a rácsostartókban a **lokális belső labilitás** más helyen alkalmazott **lokális belső többletmerevítéssel nem váltható ki**, és **egyetlen** belső labilitást mutató hely a szerkezet **egészének** labilis viselkedését okozza.

A belső labilitás (pl. egy rúd baleseti tönkremenetele) **külső** többletmerevítéssel, új (ideiglenes) megtámasztással kiváltható!

A rácsostartók belső merevségének és statikai határozottságának elemzése során tehát megállapítottuk, hogy **egy belsőleg merev és statikailag határozott kapcsolatú szerkezetnek háromszögelemek lineáris sorozataként** kell felépülnie.

Itt most a külső megtámasztottság minősítésével nem foglalkoztunk. A **belsőleg merev** szerkezet a külső erők egyensúlyi vizsgálata során **egyetlen merev testként** kezelhető, a megtámasztottság minősítésére az **egyszerű tartókra érvényes megállapítások** alkalmazhatók. A lokális belső merevségi hiányt mutató rácsostartót felfoghatjuk **rácsos szerkezettel kialakított összetett tartóként** is, amikoris a belső merevségi hány pótlására külső többletmegtámasztást (is) alkalmazhatunk. Az ilyen szerkezetek külső kapcsolatainak minősítését az **összetett tartókra érvényes megállapítások** alapján végezhetjük el. Az ily módon előállítható külső és belső kapcsolati erők a szétbontott, rácsos szerkezetű tartóelemekre egyensúlyi erőrendszerként működnek, amelyekből a rúderők meghatározhatók.

7.2. A rácsostartók csomóponti kialakítása

Az összetett tartókhoz hasonlóan a rácsostartók esetében is a kapcsolódó rúdelemeket (belső) csuklókkal kapcsoljuk össze. A rácsostartó számítási modelljében tehát a csomópontokban **ideális** (súrlódásmentes) csuklókat képzelünk el, ugyanakkor a tényleges szerkezetekben azt látjuk, hogy a csomóponti kapcsolatok minden szerkezet- és anyagfajta esetén (legaláb részben) **befogottak**.

A csomópontokat fatartóknál szegezéssel, szeglemezes kapcsolattal, vasbeton rácsostartók esetében (a rácsos szerkezeti kialakítás vasbeton anyagú tartóknál igen ritkán alkalmazott!) a csatlakozó elemvégek monolitikus összevasalásával-összebetonozásával,

acélszerkezetek esetében pedig a rúdvégek – csomólemezek szegecselt-hegesztett kapcsolatával alakítják ki.

A befogás a csomópontban a csatlakozó rúdvégek (relatív) **elfordulásait** is megakadályozza, így a rúdvégekre rúdirányú erő mellett **nyomatékot is** hárít. A nyomatékok azonban **minden rúdvégen egy többletismeretlent** jelentenek, míg a rúdvégekre a csomópontokban csak **egyetlen független egyenlet** írható fel. A csomópontok befogó hatásának figyelembevétele esetén tehát a rácsostartókat belsőleg sokszorosan határozatlan szerkezetekként kell(ene) számítanunk.

A csomópontok csuklós feltételezése tehát elsősorban a szerkezeti modell egyszerűsítésével indokolható. A statikailag határozott csuklós modellben a rúderők egyszerűen, könnyen meghatározhatók, és ha a rudak keresztmetszeti méretei a rúdhosszakhoz képest lényegesen kisebbek, akkor a csomóponti befogásból származó zavarónyomatékok **csak a csomópontok környezetében** módosítják a rudak belső erőit, és így (szükség esetén) lokálisan kezelhetők. Erős rúdszelvények alkalmazásakor a befogási nyomatékok hatása már számottevően módosíthatja a rúdvég erőjátékát, de **első közelítésként** ilyenkor is jól használhatók a csuklós modellen meghatározott rúderők. E tárgy keretében a csomóponti befogási nyomatékok tulajdonságaival, meghatározásával nem foglalkozunk, ezt a problémakört a szaktárgyakban fogják feldolgozni.

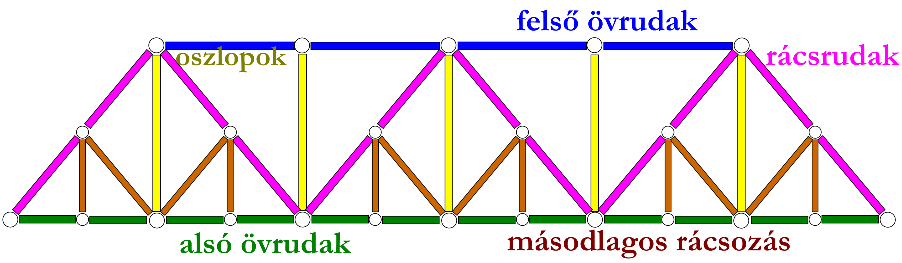
A csuklós kapcsolatú rácsostartó belsőleg merev és statikailag határozott kapcsolatú. Ez a vizsgálataink számára igen előnyös, de nem szabad elfelejtenünk, hogy ez az állapot a merev belső kapcsolatú (például befogott csomópontokkal készült) szerkezetváltozatok közül a szélső érték, a leg”lágyabb” változat, azaz akár csak egyetlen rúd teherbírásának elvesztése esetén a szerkezet labilissá, mozgási mechanizmussá válik, összeomlik. **A csuklós kapcsolatú rácsostartókban tehát szerkezeti tartalék nincs.** Ha viszont a csomóponti kapcsolatok nyomatékbíró kialakításúak, akkor egy rúd sérülése, teherbírásának csökkenése esetén, éppen belső többletmerevsége, statikai határozatlansága révén, (többletdeformációk árán) a szerkezet többi része tud „segíteni” a sérült elemnek, a belső erők átrendeződésével a szerkezet állékony és teherbíró marad(hat). Ennek alapján a tényleges, befogott csomópontokkal készülő szerkezetek mindig nagyobb teherbírással rendelkeznek, mint amit a csuklós modell alapján meghatározhatunk, azaz **a befogott csomópontú rácsostartóban van szerkezeti tartalék**. A csuklós csomóponti kapcsolatok feltételezésével tehát számítási eredményeink a valós értékeket a **biztonság javára** közelítik.

A csuklós csomópontú modell alkalmazását indokolja egy másik megfontolás is: a mérnöki tervezés mindig szerteágazó, leggyakrabban egymásnak ellentmondó feltételek közötti **iteratív, visszacsatolásos kompromisszumkeresés**. Nem érdemes tehát rögtön első lépésben egy bonyolult, munkaigényes szerkezeti – számítási modellt alkalmazni, hiszen a végleges eredmények csak több lépcső után kaphatók (az első lépésben nem tudván a rúderőket, nem tudhatjuk, milyen keresztmetszetű rudakat kell alkalmaznunk, így nem tudjuk felvenni a szerkezet önsúlyát sem). Az első, a tényleges szerkezet viselkedését még csak közelítően leíró modell eredményei alapján már lehet pontosabb kiindulási adatokat felvenni, és ezekre már érdemes egy pontosabb szerkezeti-számítási modellt is kidolgozni.

7.3. A rácsostartók hálózati megoldásai

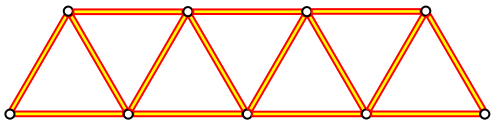
A rácsostartóban a csomópontokat összekötő, a rúdtengelyeket kijelölő vonalhálózatot **a rácsostartó hálózatának** nevezzük.

A hálózati elemek szokásos elnevezése

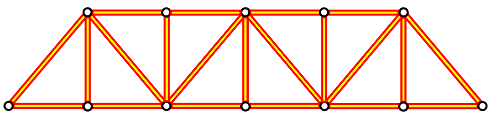


Az alkalmazandó hálózat megválasztása, kialakítása részben a megoldandó feladat, részben az alkalmazandó anyag és technológia függvényében történhet. Az alábbiakban bemutatjuk a legjellemzőbb hálózati megoldások szerkezeti képét, elnevezését és vázlatos rajzát.

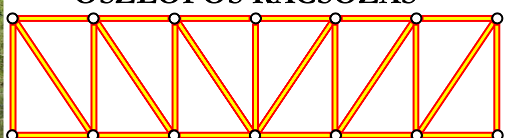
SZIMMETRIKUS RÁCSOZÁS



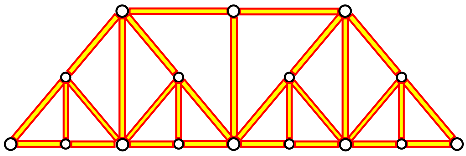
SZIMMETRIKUS RÁCSOZÁS OSZLOPOKKAL



OSZLOPOS RÁCSOZÁS



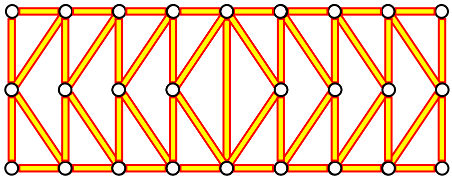
SZIMMETRIKUS RÁCSOZÁS MÁSODLAGOS ELEMEKKEL



(nagy terhelésű alsó öv esetén)

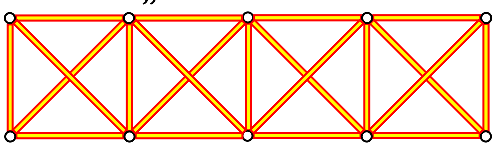
„K" RÁCSOZÁS

(a képen a híd 1,5 K rácsozású)



(ideiglenes hídként)

„X" RÁCSOZÁS



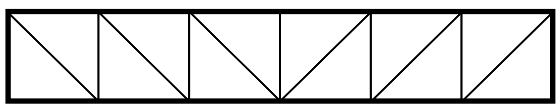
(gyaloghídként vagy nagy szerkezetek vízszintes merevítéseként)

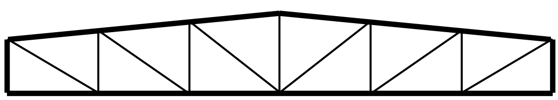
Megjegyezzük, hogy a valódi **X** rácsozás **statikailag sokszorosan határozatlan szerkezet**. Merevítésekben többször úgy számítják, hogy az **X** alakban futó rácsrudak közül mindig csak a **húzott** elem dolgozik, így a nyomott elem stabilitási teherbíráscsökkenése figyelmen kívül hagyható.

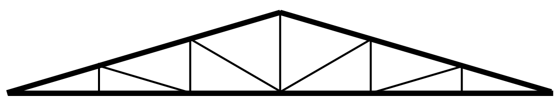
…és végül: ilyen hidat is lehet építeni rácsos szerkezetből!

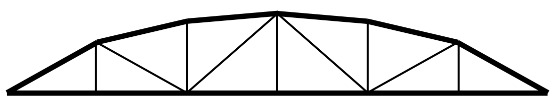
7.4. A rácsostartók alakja

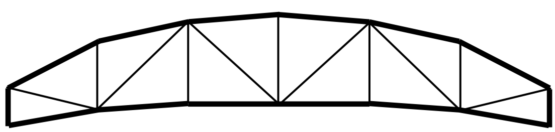
A **rácsostartók alakja** a szerkezet működése, a belső kapcsolati erők meghatározási lehetősége szempontjából indifferens, lényegtelen. Az alak helyes megválasztásával (bizonyos mértékig) befolyásolni lehet a **belső erők**, elsősorban az övrúderők alakulását. Ezen túlmenően a rácsos szerkezetek alakját az alátámasztandó szerkezet **funkcionális követelményei** és **esztétikai szempontok** alapján határozzák meg. Csarnokszerkezetek rácsos főtartóiban a felső öv ferdeségével állítják be a kívánt tetőhajlást, hídszerkezetek esetében az íves vonalvezetéssel az erők biztonságos levezetésének érzetét (is) erősítik.
Bár a rácsostartókban a rúderő-meghatározás **elvi** megoldásai a szerkezet alakjától függetlenek, a gyakorlati számítási munkát jelentősen megkönnyítheti az egyszerűbb alak választása, elsősorban az övrudak egyenes (és méginkább párhuzamos) vonalvezetése.
Az alábbiakban bemutatjuk a leggyakrabban alkalmazott kéttámaszú rácsostartó-alakokat és a hozzájuk kötődő szokásos elnevezéseket.

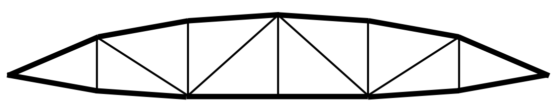

PÁRHUZAMOS ÖVŰ RÁCSOSTARTÓ


KIÉKELT FELSŐ ÖVŰ RÁCSOSTARTÓ


HÁROMSZÖG ALAKÚ RÁCSOSTARTÓ


SZEGMENS ALAKÚ RÁCSOSTARTÓ


(CSONKA) SARLÓ ALAKÚ RÁCSOSTARTÓ


LENCSE ALAKÚ RÁCSOSTARTÓ

7.5. A rácsostartók rúderőmeghatározási módszerei

A belső statikai határozottság érvényessége végett e tárgy keretében a rácsostartókat mindig ideálisan **csuklós csomópontú** szerkezetekként modellezzük. E modellben a statikai egyensúlyi egyenletek elegendőek belső kapcsolati erők, nevezetesen a rúderők értékének meghatározásához.

A rúderők meghatározását kétféle mechanikai megközelítéssel, a rácsostartó, mint összetett tartó kétféle elemre bontásával végezhetjük:

a csomópontok – csuklók egyensúlyi állapotának vizsgálata
(**csomóponti módszer**)

a kétfelé vágott szerkezet tartórészeinek egyensúlyi vizsgálata
(**átmetsző módszer**)

Az elvi alapok, az egyensúlyi állapot megteremtésére kiszemelt tartóelem – tartórész kiválasztása (mint szerkezeti-stratégiai döntés) után többféle számítástechnikai eljárást (mint számítási-taktikai döntést) alkalmazhatunk.

A rúderők meghatározására a következőkben 3,5 eljárást ismertetünk:

szerkesztés

kézi számítás

gépi számítás

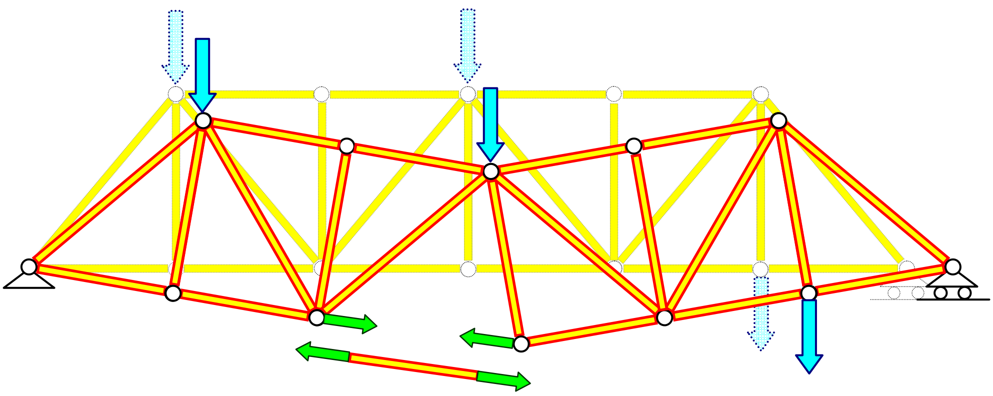
szemlélet (ez csak a rúderő előjelét szolgáltatja, de azt egyszerűen)

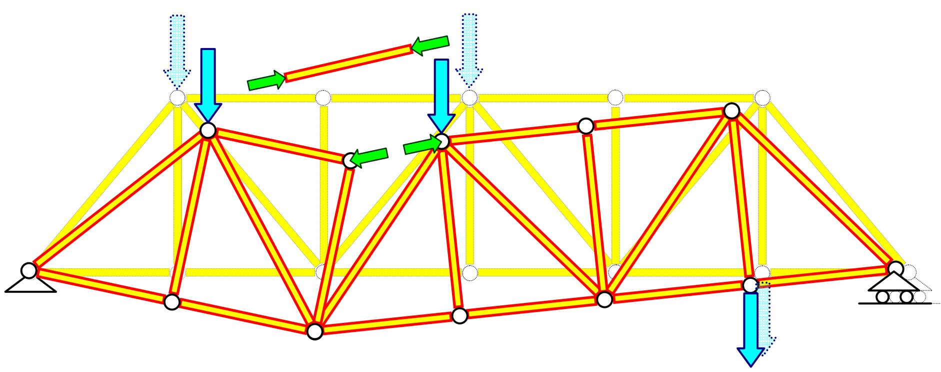
A **szerkesztéses** megoldás mind a csomóponti, mind az átmetsző módszerben alkalmazható, és régebben nagy hídszerkezetek rúderőmeghatározására is használták, de a mai számítástechnikai lehetőségek mellett alkalmazása a szemléleti vizsgálatokra szorult vissza.

A **kézi számítás** szintén mind a csomóponti, mind az átmetsző módszerben alkalmazható, egyszerűbb szerkezeteken végezhetjük, ill. a gépi számítás (szúrópróba-szerű) ellenőrzésére használhatjuk. A kézi számítás során mód nyílik a kiválasztott szerkezetrész egyensúlyi kijelentése alapján felírható egyenletek **fajtájának** (vetületi vagy nyomatéki) és **optimális sorrendjének** (X vagy Z irányra számított) megválasztására, és így a számítás szerkezet- és elemfüggő **egyszerűsítésére**.

A **gépi számítás** a rúderő-meghatározást (a számítógépek gyorsaságát, pontosságát és nagy számítási kapacitását kihasználva) a szerkezet **egészére** végzi el, viszont (a számítógépek kreatív döntéshozó képességének hiányában) az egyszerűsítési lehetőségek felismerésére nem képes (igaz, nincs is rá szüksége). A gépi számításban tehát csak a minden szerkezeti elemre kiterjedő, „gépies” megoldásokat érdemes programozni.

A **szemléleti vizsgálat** nem tekinthető teljes értékűnek, hiszen (számítás híján) a rúderő **értékéről** nem ad információt, és alkalmazása is (jobbára az övrudakra) korlátozott, de a rúderők **előjelét**, azt hogy a rúd húzott vagy nyomott, igen egyszerűen és szemléletesen szolgáltatja.
A szemléleti rúderő-vizsgálat a **teljes szerkezet viselkedést** elemzi, így nem köthető sem a csomópontok, sem a tartórészek egyensúlyi vizsgálatához, használatát ezért itt mutatjuk be.
Ha a megterhelt tartóból **egy rúdelemet** (célszerűen **a vizsgálandó rudat**) kiveszünk, a megmaradó szerkezet labilis szerkezetté, **mozgási mechanizmussá** válik. A terhek hatására ezen kinematikai szerkezeten bekövetkező elmozdulásokat felvázolva látható, hogy az eltávolított rúd csatlakozási pontjai a mozgás nyomán **távolodnak** vagy **közelednek** egymáshoz. Minthogy mi a szerkezetet az eredeti, elmozdulás nélküli állapotában akarjuk használni, a csomópont-pár eredeti relatív pozícióját kell helyreállítanunk, és ehhez a **távolodó** csomópontpár esetén **húzóerőre** (húzott rúdelemre), a **közeledő** csomópontpár esetén **nyomóerőre** (nyomott rúdelemre) lesz szükség.



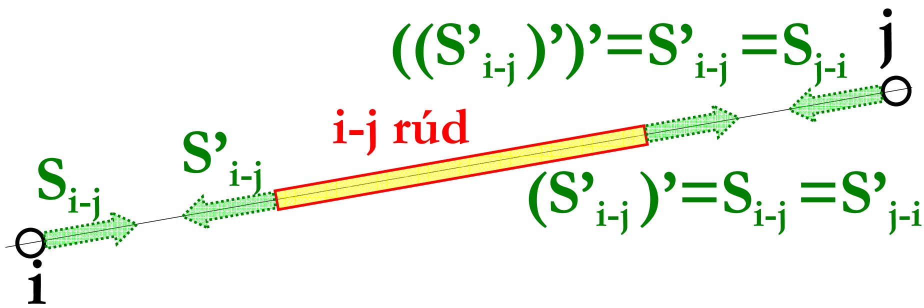


7.5.1. A rúderők jelölése, azonosítása

A rácsostartókban a **csomópontokat arab számokkal** szokás jelölni, mégpedig (a későbbi könnyebb rúdazonosítás érdekében) az egyik öv csomópontjait páros, a másik öv csomópontjait páratlan számokkal. A speciális rácsozású szerkezeteken (másodlagos rácsozás, **K** rácsozás) az övek között elhelyezkedő csomópontokat kis betűkkel (is) jelölhetjük. Szimmetrikus rácsostartók esetében előfordul, hogy a szimmetrikus helyzetű csomópontokat azonos számmal jelölik, csak az egyik oldal csomópontazonosítói megkülönböztetésül egy felső vesszőt kapnak.

A csomópontok azonosítóinak ismeretében **a rudakat a szomszédos csomópontok jelzőszámaival azonosítjuk**: **i-j** rúd, vagy $\mathbf{S}_{i\text{-}j}$. A rúd két végén fellépő rúderők egymás ellentettjei, és a csatlakozó csomópontokra ezek ellentettjei működnek. Minthogy egyensúlyi vizsgálatainkban mindig a **rúd által** (a csatlakozó csomópontra, vagy a szétvágott tartó egyik részére) **kifejtett erők** szerepelnek, célszerűen ezekre választunk egyszerű jelölést.

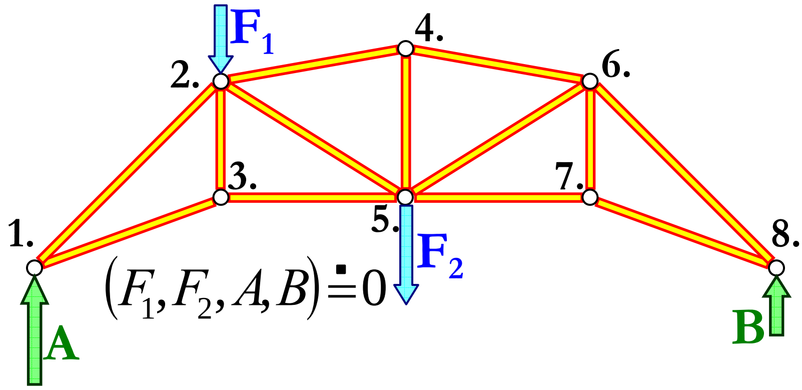
Megjegyezzük, hogy a mérnöki gyakorlatban az ismeretlen rúderőket mindig **húzottnak tételezzük fel**, és ennek megfelelően a **pozitív rúderő** a számítási eredményekben is mindig a **húzóerőt** jelenti.



A műszaki gyakorlatban a rúderők jelölésében az **első index** azt a csomópontot azonosítja, **amelyre a rúd az erőt kifejti**, a **második index** pedig a rúd **másik végéhez csatlakozó csomópont** jele. Természetesen ennek megfelelően a rúd által a két csatlakozó csomópontra kifejtett (azonos hatásvonalú, de egymással ellentett vektorú) erő jele indexcserével kapható.

7.5.2. Csomóponti módszer

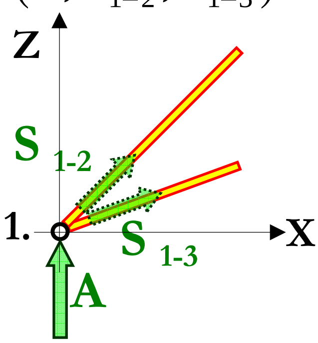
A csomóponti módszer a **csuklópontok nyugalmi állapotából**, a rájuk működő (közös metszéspontú) erők egyensúlyából indul ki. A közös metszéspontú erőkre vonatkozó egyensúlyi kijelentés alapján két (matematikailag független) statikai egyenlet írható fel. Ezek azonban lehetnek akár vetületi, akár nyomatéki egyenletek, sőt esetenként célszerű lehet a csomópontra működő erők vázlatos (egyensúlyi) vektorábrája alapján felírható hasonlósági összefüggések használata is.
A külső terhelő, **aktív erők** és az egyensúlyozó kényszererők, **passzív erők** együttesen egyensúlyi erőrendszert alkotnak.



Az 1. jelű csomópont vizsgálata vetületi egyenletekkel

A csomópontra csak **két ismeretlen rúderő** hat, ezeknek a hatásvonala ismert, csak a nagyságuk keresendő. Az ismeretlen rúderőket húzottnak feltételezve a csomópontra ható erők egyensúlyi kijelentése, és az ennek alapján felírható vetületi egyenletek:

$$\left(A,S_{1-2},S_{1-3}\right)\doteq 0$$



$$\sum_{1.} F_{i,X} = +S_{1-2,X} + S_{1-3,X} = 0$$

$$\sum_{1.} F_{i,Z} = +A + S_{1-2,Z} + S_{1-3,Z} = 0$$

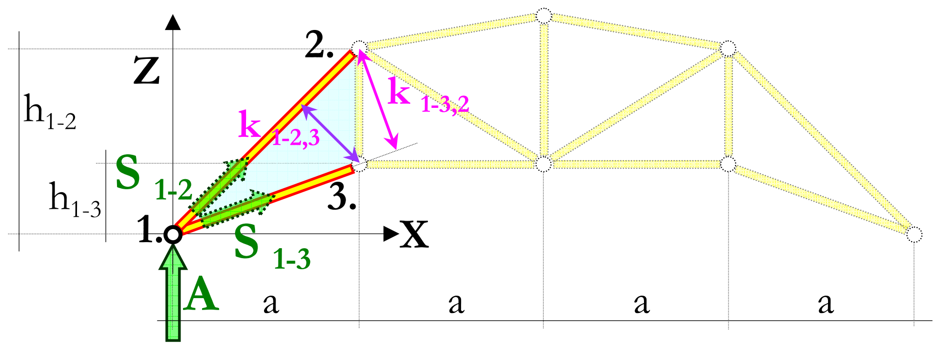
A fenti egyenletrendszerben a rúderők **X** és **Z** irányú összetevői a rudak geometriai helyzete alapján az $\mathbf{S_{1\text{-}2}}$ és $\mathbf{S_{1\text{-}3}}$ rúderők és az állásszög megfelelő trigonometriai függvényével, vagy a vektorábra és a geometriai ábra hasonlóságának felhasználásával felírhatók. A két ismeretlen rúderő meghatározására a két statikai egyenlet elegendő.

Az 1. jelű csomópont vizsgálata nyomatéki egyenletekkel

Egy közös metszéspontú erőrendszer egyensúlya nemcsak vetületi, hanem **nyomatéki egyenletekkel** is igazolható. Ha pedig a nyomatéki egyenletet az **egyik** ismeretlen **(rúd)erő hatásvonalán kiválasztott pontra** írjuk fel, abban **csak a másik (rúd)erő szerepel**, azaz az ismeretlen rúderő értékét **egyismeretlenes** egyenlet megoldásával határozhatjuk meg. Második statikai egyenletként a másik (rúd)erő hatásvonalának egy pontjára írva nyomatéki egyenletet az első ismeretlen rúderő értékét számíthatjuk, ismét csak egyismeretlenes egyenlet felhasználásával.

Valójában az együtthatók „ügyes" megválasztásával a csomópont egyensúlya alapján felírható kétismeretlenes egyenletrendszer két, egyenként egyismeretlenes egyenletre esett szét. Általánosságban is igaz, hogy a **kézi számításokban** a **nyomatéki egyenletek** jobban használhatók, hiszen egy jól megválasztott pontra vonatkozó nyomatéki egyenletből az egyik ismeretlen **teljes egészében**, mindkét (a térben akár mindhárom!) összetevőjével kiejthető, míg a vetületi egyenletekből csak a választott tengelyre merőleges erőkomponensek esnek ki.

A nyomatéki egyenletek felírása során felhasználhatjuk a rácsostartó (most éppen nem használt) geometriai adatait, például az $\mathbf{S}_{1\text{-}2}$ rúderő meghatározásához a nyomatékot a **3.** csomópontra írjuk fel, természetesen az egyensúlyi kijelentésnek megfelelően az **1.** jelű csuklóra működő erőkre.
Az ismeretlen rúderőkhöz tartozó erőkarokat az **1-2-3** háromszög kétszeres területének felhasználásával állíthatjuk elő a legegyszerűbben. A rúdhosszak $\mathbf{s}_{i\text{-}j}$ értékei a hálózat geometriai adataiból (pl. a Pythagoras tétel segítségével) előállíthatók. Az **1-2-3** háromszög kétszeres területét megkaphatjuk az $\mathbf{s}_{2\text{-}3}$ csomóponttávolság (rúdhossz) és az **a** kerettávolság (osztásköz) szorzataként, de az $\mathbf{s}_{1\text{-}2}$ csomóponttávolság (vagy, ha úgy tetszik, rúdhossz) és a $\mathbf{k}_{1\text{-}2,3}$ magasság, valamint az $\mathbf{s}_{1\text{-}3}$ csomóponttávolság (vagy, ha úgy tetszik, rúdhossz) és a $\mathbf{k}_{1\text{-}3,2}$ magasság szorzataként is.

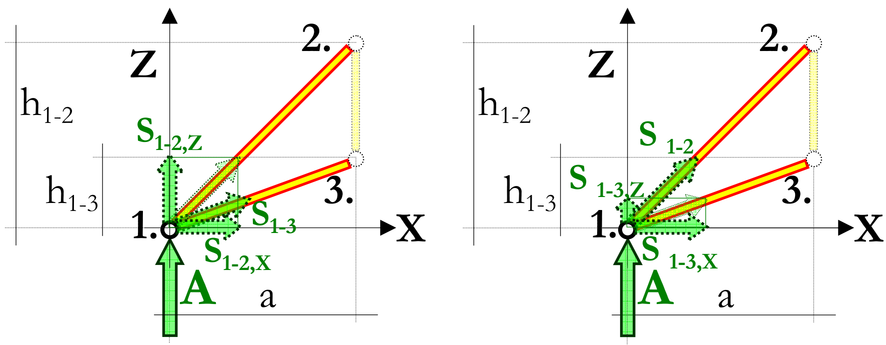


A nyomatéki egyenletek tehát a következőképpen alakulnak:

$$\sum_{1.} M_i^{(3)} = +A\times a + S_{1-2}\times k_{1-2,3} = 0 \text{, ahol } k_{1-2,3} = \frac{a\times s_{2-3}}{s_{1-2}} \rightarrow S_{1-2} \text{ negatív}$$

$$\sum_{1.} M_i^{(2)} = +A\times a - S_{1-3}\times k_{1-3,2} = 0 \text{, ahol } k_{1-3,2} = \frac{a\times s_{2-3}}{s_{1-3}} \rightarrow S_{1-3} \text{ pozitív}$$

Ha nem kívánjuk az ismeretlen rúderők ferde karját számolgatni, azt is megtehetjük, hogy a nyomatékot a keresett rúderő koordinátatengely-irányú komponenseiből határozzuk meg. Ez esetben a komponensekhez tartozó kar a hálózat geometriai adataiból közvetlenül adódik.



A nyomatéki egyenletek az ismeretlen erőkomponensek segítségével:

$$\sum_{1.} M_i^{(3)} = +A\times a - S_{1-2,X}\times h_{1-3} + S_{1-2,Z}\times a = A\times a - S_{1-2}\frac{a}{\sqrt{(a^2+h_{1-2}^2)}}\times h_{1-3} + S_{1-2}\frac{h_{1-2}}{\sqrt{(a^2+h_{1-2}^2)}}\times a = 0$$

$$\sum_{1.} M_i^{(2)} = +A\times a - S_{1-3,X}\times h_{1-2} + S_{1-3,Z}\times a = A\times a - S_{1-3}\frac{a}{\sqrt{(a^2+h_{1-3}^2)}}\times h_{1-2} + S_{1-3}\frac{h_{1-3}}{\sqrt{(a^2+h_{1-3}^2)}}\times a = 0$$

Az egyenletekben az összevonást elvégezve:

$$\sum_{1.} M_i^{(3)} = A\times a - S_{1-2}\frac{a}{\sqrt{(a^2+h_{1-2}^2)}}\times h_{1-3} + S_{1-2}\frac{h_{1-2}}{\sqrt{(a^2+h_{1-2}^2)}}\times a = A\times a + S_{1-2}\times a\frac{h_{1-2}-h_{1-3}}{\sqrt{(a^2+h_{1-2}^2)}} = 0$$

$$\sum_{1.} M_i^{(2)} = A\times a - S_{1-3}\frac{a}{\sqrt{(a^2+h_{1-3}^2)}}\times h_{1-2} + S_{1-3}\frac{h_{1-3}}{\sqrt{(a^2+h_{1-3}^2)}}\times a = A\times a - S_{1-3}\times a\frac{h_{1-2}-h_{1-3}}{\sqrt{(a^2+h_{1-3}^2)}} = 0$$

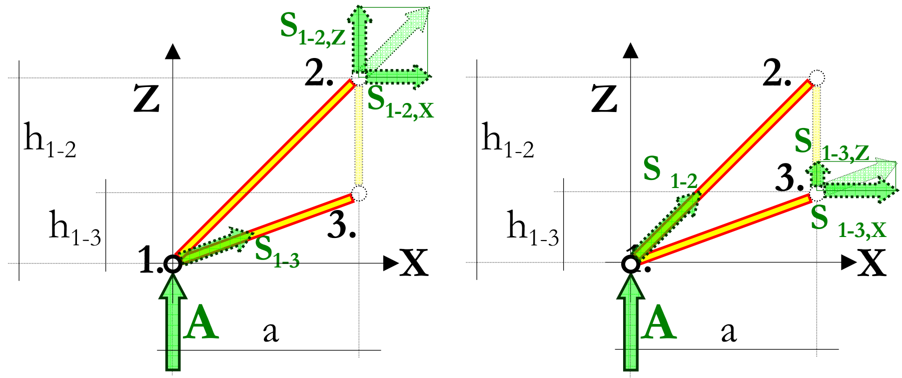
A $\mathbf{h_{1\text{-}2}\text{-}h_{1\text{-}3}}$ helyére az $\mathbf{s_{2\text{-}3}}$, a $\sqrt{(a^2+h_{1-3}^2)}$ helyére az $\mathbf{s_{1\text{-}3}}$, a $\sqrt{(a^2+h_{1-2}^2)}$ helyére az $\mathbf{s_{1\text{-}2}}$ értékét írva a nyomatéki egyenletek a következő alakot öltik:

$$\sum_{1.} M_i^{(3)} = A\times a + S_{1-2}\times a\frac{s_{2-3}}{s_{1-2}} = 0 \text{ ahol } k_{1-2,3} = \frac{a\times s_{2-3}}{s_{1-2}}\text{, azaz } \sum_{1.} M_i^{(3)} = +A\times a + S_{1-2}\times k_{1-2,3} = 0$$

$$\sum_{1.} M_i^{(2)} = A\times a - S_{1-3}\times a\frac{s_{2-3}}{s_{1-3}} = 0 \text{ ahol } k_{1-3,2} = \frac{a\times s_{2-3}}{s_{1-3}}\text{, azaz } \sum_{1.} M_i^{(3)} = +A\times a - S_{1-3}\times k_{1-3,2} = 0$$

Ezek az alakok már teljesen megegyeznek az eredeti hatásvonalú rúderőkre a ferde karokkal felírt nyomatéki egyenletekkel.

További egyszerűsítésre ad lehetőséget, ha kihasználjuk, hogy merev(nek tekinthető) testek esetében az erők a hatásvonaluk mentén eltolhatók. Ha ugyanis a feltételezett irányú vizsgálandó rúderőt a hatásvonal mentén olymértékben mozdítjuk el, hogy az egyik összetevője a választott pontra **ne forgasson**, akkor a nyomatéki egyenletünkből a **másik rúderő** mellett a **vizsgálandó rúderőnek a ponton átmenő összetevője is kiesik**.



A nyomatéki egyenletek az elmozdított erőkomponensek segítségével:

$$\sum_{1.} M_i^{(3)} = +A\times a + S_{1-2,X}\times(h_{1-2}-h_{1-3}) = A\times a + S_{1-2}\frac{a}{\sqrt{(a^2+h_{1-2}^2)}}\times(h_{1-2}-h_{1-3}) = A\times a + S_{1-2}\times a\frac{s_{2-3}}{s_{1-2}} = 0$$

$$\sum_{1.} M_i^{(2)} = +A\times a - S_{1-3,X}\times(h_{1-2}-h_{1-3}) = A\times a - S_{1-3}\frac{a}{\sqrt{(a^2+h_{1-3}^2)}}\times(h_{1-2}-h_{1-3}) = A\times a - S_{1-3}\times a\frac{s_{2-3}}{s_{1-3}} = 0$$

azaz ismét megkaptuk az eredeti nyomatéki egyenleteinket.

Megjegyezzük, hogy az egyenletben a 3. ill. a 2. jelű pontok helyett bármely más, az egyenletből kiejtendő rúderő hatásvonalán lévő pontot is választhattunk volna, a hálózati pontok mellett csak a célszerűség szól: ezeknek a koordinátái a hálózati geometriában adottak.

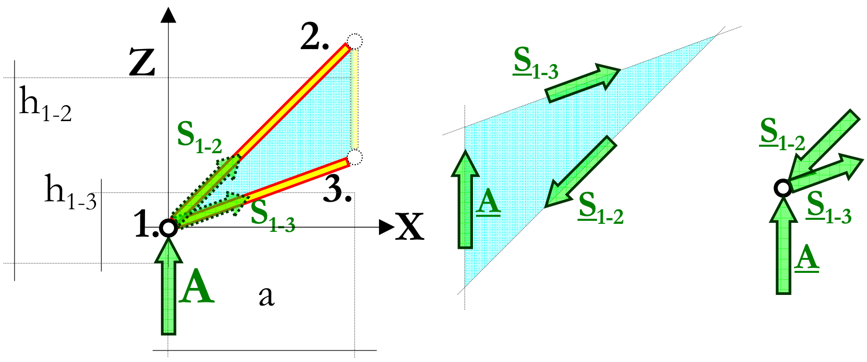
Az 1. jelű csomópont vizsgálata vázlatos szerkesztéssel

A csomópontban az egyensúlyhoz az ott működő (aktív és passzív) erők vektorábrájának zártnak kell lennie. Szerencsés esetben (pl. a szélső csomópontokban) a csomópontban csak **egy aktív erő** és **a két, keresett rúderő** működik. Ezek vázlatosan megrajzolt, zárt vektorháromszögéhez hasonló geometriai háromszöget fellelve a hálózati rajzon, az egy ismert erő alapján a keresett rúderők **nagysága** a háromszögek hasonlósága, azaz aránypárok felhasználásával is előállítható. A rúderők **előjelét**, hogy ti. melyik lesz húzott és melyik nyomott rúd, a vektorábrából kiadódó vektort a csomóponthoz illesztve kapjuk meg: ha a (rúddal megegyező oldalon odaillesztett) vektor húzza a csomópontot, a rúd(erő) húzott lesz.

A kékkel jelölt geometriai háromszögben az oldalhosszak az $\mathbf{s}_{1\text{-}2}$, $\mathbf{s}_{1\text{-}3}$, $\mathbf{s}_{2\text{-}3}$ rúdhosszakkal egyeznek meg. Felhasználva a hasonló háromszögek megfelelő oldalainak arányára vonatkozó összefüggést:

$$\frac{S_{1-2}}{A}=\frac{s_{1-2}}{s_{2-3}} \quad \text{azaz} \quad S_{1-2}=A\times\frac{s_{1-2}}{s_{2-3}} \quad \text{és} \quad \frac{S_{1-3}}{A}=\frac{s_{1-3}}{s_{2-3}} \quad \text{azaz} \quad S_{1-3}=A\times\frac{s_{1-3}}{s_{2-3}}$$

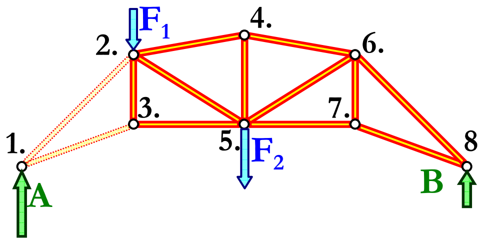
A nyomatéki egyenletekből $\mathbf{S}_{1\text{-}2}$ és $\mathbf{S}_{1\text{-}3}$ értékét kifejezve, ugyanezekre a számértékekre jutunk. A rúderők **előjelét** a csomópontra (a rúddal megegyező oldalon) visszarajzolt eredményvektor mutatja meg: az $\mathbf{S}_{1\text{-}2}$ erő nyomja a csomópontot, tehát a rúd nyomott lesz, az $\mathbf{S}_{1\text{-}3}$ erő húzza a csomópontot, tehát a rúdban húzóerő keletkezik.



Meg kell jegyeznünk, hogy ez a módszer jobbára csak a szélső csomópontokban alkalmazható, mert ha a csomópontban háromnál több erő találkozik, a vektorábrához hasonló geometriai megtalálása, adatainak megállapítása célszerűtlenül bonyolulttá tenné a hasonlósági összefüggés használatát. Akkor sem célszerű ezt a megoldást választani, ha csak három erő működik a csomópontban, de az ismert erő nem koordinátatengely-irányú.

A rúderők előjelének vizsgálata szemlélettel

A vizsgálandó rúd (ideiglenes) eltávolításával kialakuló mozgási mechanizmus elmozdulásainak elemzése itt is lehetőséget nyújt a keresett rúderők előjelének egyszerű meghatározására:



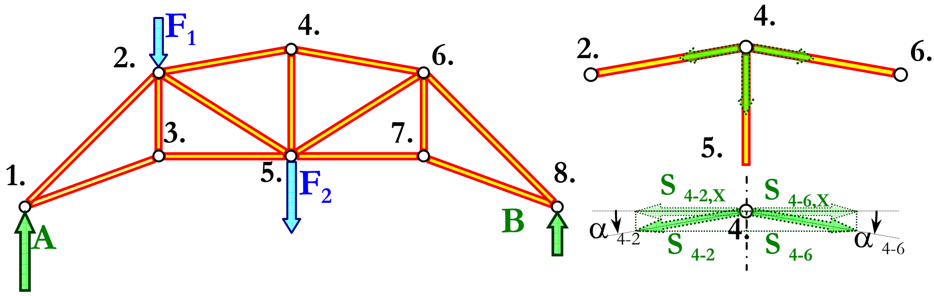
az **1-2** rudat eltávolítva az **1.** és **2.** jelű csomópontok **közeledni** akarnak egymáshoz, ennek megakadályozására az **1-2** rúd **nyomott** lesz; az **1-3** rudat kivéve az **1.** és **3.** pontok **távolodását** a **húzott 1-3** rúd tudja megakadályozni.

A csomóponti módszer alkalmazhatóságának (bármilyen számítástechnikai megoldást választunk is) feltétele, hogy a csomópontban **legfeljebb két ismeretlen erő lehet** (a ferde hatásvonalú rúderők koordinátatengely-irányú összetevői **nem** tekinthetők független ismeretleneknek, hiszen a hatásvonal állásának függvényében a rúderőből kifejezhetők).

A csomóponti módszer alkalmazása tehát **csak a szerkezetvégeken** indulhat, majd a már meghatározott rúderők értékeinek felhasználásával folytatódhat a belső, eredetileg kettőnél több ismeretlen rúderőt tartalmazó csomópontokon. Az eljárás tehát **szigorúan szekvenciális**, sorban kell végigmenni a csomópontokon, még akkor is, ha csak **egy** belső rúderőre vagyunk kíváncsiak. A csomóponti módszer másik problémája szintén a számítások egymásra épüléséből forrásozik: miután egy csomópontban az ismeretlen rúderők értékének meghatározásához fel kell használnunk a korábban érintett csomópontok rúderőit, az azokban esetlegesen elkövetett **hibák** a későbbi rúderők értékeiben **halmozottan jelennek meg**, egy számítási hiba az összes ezt követően számított rúderő értékét hibássá teszi.
Ugyanakkor a csomóponti módszerben **minden csomópontra alkalmazhatjuk ugyanazt az eljárást**, akár ugyanolyan statikai egyenleteket is írhatunk fel, és ezzel (bár a számítási munka nem csökken, de) a számítás végrehajtása egyszerűsödik, az elvi hibák elkövetési valószínűsége csökken, és az eljárás gépesíthető, könnyen programozható.

A szimmetrikus helyzetű csomópont vizsgálata

A **szimmetrikus hálózati pozíciójú** csomópontban az **egyensúlynak is**, és **az erők szimmetriájának** is teljesülnie kell. Ha a csomópontba csak három rúd csatlakozik, az egyik bizonyosan a szimmetriatengelyben, a másik kettő pedig szimmetrikus pozícióban áll, lásd a 4. csomópontot. A **csomópont egyensúlya** megkívánja, hogy e két rúderőnek a szimmetria-tengelyre merőleges összetevője azonos nagyságú és ellentett irányú legyen, a **rudak szimmetrikus elhelyezkedéséből** viszont az következik, hogy magának **a két rúderőnek is azonos értékűnek kell lennie**. (Az ábrán a húzottnak feltételezett rúderőirányokat szerepeltettük, a tényleges terhelésből a felső övben nyomóerők származnak!)



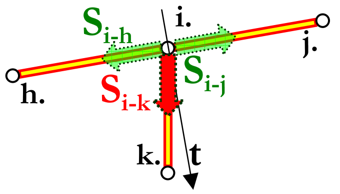
Vegyük észre, hogy a az $S_{4\text{-}2}$ és az $S_{4\text{-}6}$ rúderők azonosságának megállapítása során elegendő a hálózati szimmetriát felhasználnunk, a terhelés lehet aszimmetrikus is (a vizsgált csomópontban viszont csak szimmetrikus terhelő erő lehet!).

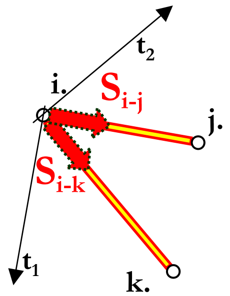
> A szimmetriatengelyen lévő, három (rúd)erővel terhelt csomópontban a ferde rúderők azonossága a teher szimmetriájától **függetlenül** teljesül. A szimmetriatengelyben levő (rúd)erő a két másik erő (azonos értékű) vetületösszegének ellentetje lesz.

A vakrudak

> Azokat a rudakat, amelyekben a csomópont **hálózati** és a **terhelési** paraméterei alapján (többnyire szemléletből, azonnal) megállapítható, hogy a rúderőnek zérusnak kell lennie, **vakrudaknak** nevezzük.

A vakrudakat eredményező tipikus hálózati-terhelési helyzeteket az alábbiakban mutatjuk be (az ábrákban a húzottnak feltételezett rúderő-irányokat szerepeltettük):





$$\sum_i F_{i,t} = S_{i-k,t} = 0 \qquad \sum_i F_{i,t1} = S_{i-k,t1} = 0 \quad \sum_i F_{i,t2} = S_{i-j,t2} = 0$$

minthogy a vizsgált rudak **nem** merőlegesek a választott tengelyre, **a rúderőknek** kell zérus értékűeknek lenni.

$$S_{i-k} = 0$$

Ha egy három rudat összekapcsoló csomópontban **két rúd tengelye egy egyenesbe esik**, **és a csomópont terheletlen**, akkor a közös tengelyvonalra merőlegesen felvett **t** tengelyre felírt vetületi egyenlet csak akkor teljesül, ha a harmadik rúderő értéke zérus, azaz **a harmadik rúd vakrúd**.

Ha a csomóponton a közös tengelyű rudakra merőleges teherkomponens is van, annak felvételére viszont (**t** irányú vetülete révén) csak a harmadik rúd képes, tehát a rúderő egyismeretlenes egyenletből számítható.

$$S_{i-k} = 0, S_{i-j} = 0$$

Ha egy csomópontot csak **két rúd** kapcsol a szerkezet többi részéhez, **és a csomópont terheletlen**, akkor a $\mathbf{t_1}$ és $\mathbf{t_2}$ tengelyekre felírható vetületi egyensúlyi egyenletek **egyidejűleg** csak úgy teljesülhetnek, ha **mindkét** rúdban a rúderő értéke zérus, azaz **mindkét rúd vakrúd**. Ugyanerre a megállapításra jutunk akkor is, ha az **i** csomópontban találkozó $\mathbf{S_{i\text{-}j}}$ és $\mathbf{S_{i\text{-}k}}$ erők egyensúlyát vizsgáljuk: a két erő nem közös hatásvonalú, egyensúly tehát csak akkor lehet, ha mindkét erő értéke külön-külön zérus.

Megjegyezzük, hogy a rudak vakrúd-mivolta **terhelésfüggő**, azaz az **egyik** terheléskombinációra vakrúd-tulajdonságokat mutató rúdban egy **másik** teherkombinációból keletkezhet rúderő. Emellett a hálózati tulajdonságok alapján vakrudaknak minősülő rúdelemek fontos szerepet játszhatnak a szerkezet **stabilitásának** biztosításában. A **vakrudak** tehát csak a számításban hagyhatók figyelmen kívül, **a szerkezetből nem távolíthatók el**!

7.5.3. Átmetsző módszer

A csomóponti módszer a nagyon szigorú szekvencialitásával a legfontosabb, mértékadó rúderők meghatározásában csak hosszú, a keresett érték szempontjából fölösleges munkával szolgáltat eredményt. Az összetett tartók esetében azonban láttuk, hogy a szerkezet belső kapcsolóelemeinek (ideiglenes, gondolati) elvágása után megmaradó szerkezetrészeknek is nyugalomban kell maradniuk, a rájuk működő erőrendszernek is egyensúlyban kell lennie. Ilyen esetekben a megmaradt két „fél”tartóra a **külső aktív és passzív erők** mellett az elvágott, eltávolított szerkezeti kapcsolóelemek kapcsolóképességét helyettesítő, egyelőre **ismeretlen** nagyságú, de (a rácsostartók esetében mindig ismert hatásvonalú) **kapcsolati erők** is működnek. Tekintettel arra, hogy **egy** (síkbeli) szerkezet egyensúlya alapján három független statikai egyenlet írható fel, egyenleteink a külső aktív és passzív erőket ismertnek tekintve három új kapcsolati erőkomponens meghatározására elegendőek. Ha tehát a szerkezet kétfelé vágása során **háromnál nem több** belső kapcsolati fokszámot szüntetünk meg, rácsostartók esetében a szerkezetet **háromnál nem több** rúd átvágásával **két független** darabra tudjuk bontani, a szerkezetdarabok egyensúlya alapján a kapcsolati erők, esetünkben az átmetszett rudakban ébredő rúderők csak a statikai egyenletek felhasználásával meghatározhatók. Síkbeli rácsos szerkezetek esetében tehát az átmetsző módszer **hármas átmetszés**ként alkalmazható.

A két tartórész egyensúlya alapján meghatározott rúderők természetesen egymás ellentettjeiként adódnak, de a **rúd** a vizsgált tartórész helyzetétől függetlenül **azonos igénybevételű**, húzott vagy nyomott lesz.

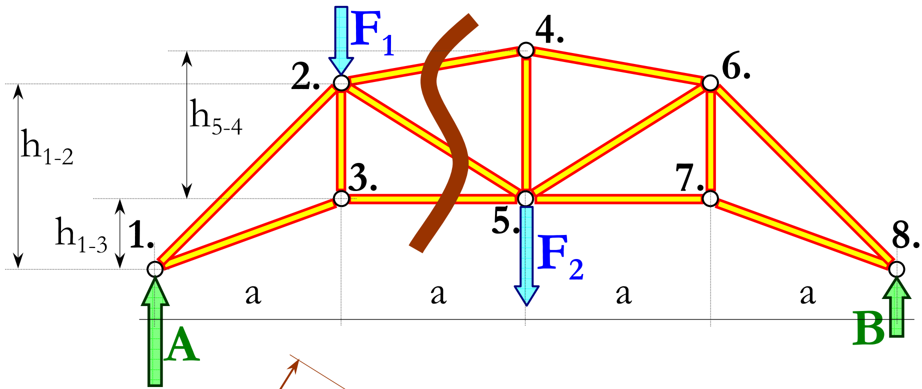
Az egyensúlyi kijelentések alapján tetszőleges (de maximum három független!) statikai egyenlet írható fel egy szerkezetre. Az egyenletek „ügyes” megválasztásával az általános esetben háromismeretlenes egyenletrendszer három, egyismeretlenes egyenletre esik szét, és a keresett rúderők igen egyszerűen határozhatók meg. A rúderőmeghatározást alapvetően a keresett rúd főpontjára (a másik két átmetszett rúd tengelyvonalainak metszéspontjára) felírt nyomatéki egyenletekkel célszerű végezni. Ha (pl. párhuzamos övű tartón) az egyik rúdhoz nem rendelhető főpont, akkor a két másik, párhuzamos rúd tengelyeire merőleges vetületi egyenlet felírásával nyerünk a keresett rúderőt egyedüli ismeretlenként tartalmazó egyenletet. A nyomatéki egyenletekben a ferde rúderőket szerepeltethetjük valós irányukkal, ez esetben a főponti távolságuk meghatározása kíván geometriai megfontolásokat, vagy számíthatjuk nyomatékukat a koordinátatengely-

irányú vetületeikből is, amikoris az ismeretlen rúderők vetületeinek paraméteres értékeit kell előállítanunk.
A hármas átmetszés egyensúlyi kijelentései alapján szerkesztéses megoldás is választható: a három, ismert hatásvonalú erővel történő egyensúlyozás esetére bemutatott CULMANN-féle szerkesztés A gyakorlatban ezt az eljárást rácsostartóknál már nem alkalmazzuk, de az ezen alapuló HASONLÓSÁGI MÓDSZER későbbi tanulmányainkban, a mozgó teher hatására bekövetkező rúderőváltozás vizsgálatában bizonyul majd rendkívül hasznosnak.

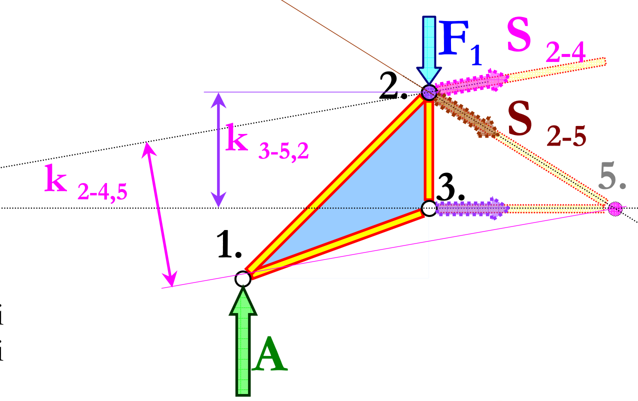
Ezeket a megoldási eljárásokat a csomóponti módszer kapcsán is tárgyaltuk, látható tehát, hogy a **csomóponti módszer** és az **átmetsző módszer nem** a választható rúderőmeghatározási módszer (számítás vagy szerkesztés), és nem is a felírható egyenletek jellege (vetületi vagy nyomatéki) alapján különböztetendő meg, hanem az egyensúlyi vizsgálatba bevont eltérő szerkezeti rész, szerkezeti elem (egy csomópont egyensúlya, ill. egy „fél"tartó egyensúlya) jelenti a két módszer közötti **lényegi eltérést**.

A főponti nyomatéki egyenletek alkalmazása
A rácsostartót (a keresett rudat is tartalmazó) három rúd átvágásával két független darabra bontjuk. A tartórészekre felírt egyensúlyi kijelentésekben a külső erők mellett az átvágott rudak tengelyében működő, húzottnak feltételezett, ismeretlen nagyságú rúderőket is szerepeltetnünk kell. A legegyszerűbb egyenletek felírásához a keresett rúderők **főpontjait** a két másik átvágott rúd tengelyvonalainak metszéspontjaiként kereshetjük meg. Az övrudak főpontjai hálózati csomópontokként találhatók meg, a rácsrudak-oszlopok főpontjainak helyzetét (ha vannak főpontok) a hálózati geometria ismeretében **hasonló háromszögekkel**, **aránypárokkal**, vagy **trigonometriai összefüggésekkel** határozhatjuk meg.
Nyomatéki egyenleteket természetesen nemcsak a főpontokra, hanem bármilyen más pontra is felírhatunk, igaz, ez esetben az egyenletben nemcsak a keresett rúderő fog szerepelni. Ha az egyik (öv)rúderőt már meghatároztuk, és a rácsrúd főpontja nehezen meghatározható, választhatunk nyomatéki pontot a harmadik átvágott rúd tengelyvonalán is, amelyre a keresett rúderő mellett csak a már ismert rúderőnek van nyomatéka.
Megjegyezzük, hogy az átmetsző módszer alkalmazása során a belsőleg merev, rácsos szerkezetű tartóelemeken a külső kapcsolati erőket (támaszerőket) ismertnek tekintjük, azok ugyanis a rúderőktől függetlenül, a tömörtartós modell alapján előállíthatók.

A meghatározni kívánt rudak ismeretében felvehetjük a hármas átmetszést, és felrajzolhatjuk a két „fél"tartóra működő terheket. A két megmaradó tartórészt a továbbiakban **merev test**ként kezelhetjük, tehát az átmetszésben **nem szereplő rudakkal** nem kell, sőt **nem** is **szabad** foglalkoznunk.



$$BAL: (F_1, A, S_{2-4}, S_{2-5}, S_{3-5}) = 0$$

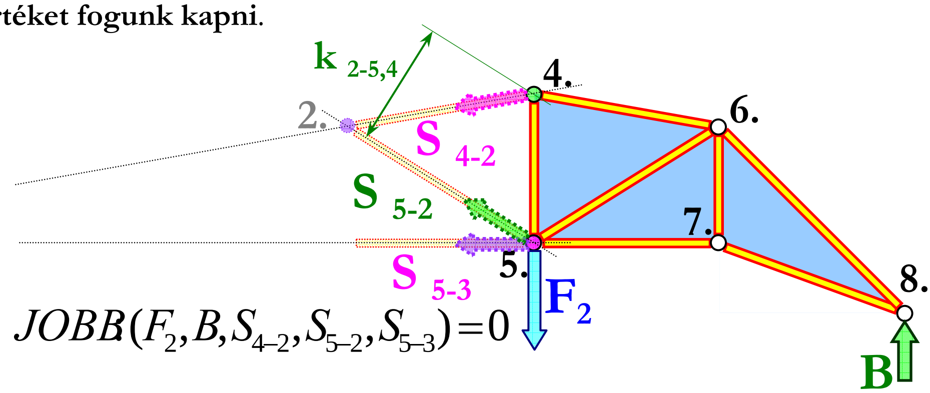


A rúderők a BAL oldali tartórészre felírt főponti nyomatéki egyenletekből:

$$S_{3-5} = \frac{\sum\limits_{BAL} M_{i,külső}^{(2)} \; +}{k_{3-5,2}} (\mathrm{H}) \qquad S_{2-4} = -\frac{\sum\limits_{BAL} M_{i,külső}^{(5)} \; +}{k_{2-4,5}} (\mathrm{Ny}) \qquad S_{2-5} = \frac{\sum\limits_{BAL} M_{i,külső}^{(O_{2-5})} \; \pm}{k_{2-5,O_{2-5}}} \left(\frac{\mathrm{Ny}}{\mathrm{H}}\right)$$

A tényleges erőhatásvonalak és az ezekhez tartozó ferde karok alkalmazása helyett (a csomóponti módszer nyomatékszámításához hasonlóan) itt is számíthatjuk a nyomatékot az erő koordinátatengely-irányú összetevőiből, és az ezekhez tartozó, szintén tengelyirányú kar-vetületekből.

A jobb oldali, szintén merev testnek tekintett tartórészre az átvágott rudak pótlására beiktatott, húzottnak feltételezett rúderők hatásvonalainak metszéspontjai ugyanazokat a főpontokat jelölik ki, mint amelyeket a bal oldali tartórész esetében már meghatároztunk. Természetesen így a keresett erőkhöz tartozó erőkarok is azonosak lesznek, és a főponti nyomatéki egyenletekben csak a figyelembe veendő külső erők csoportja lesz más. Tekintettel arra, hogy a két tartórészre vonatkozó egyensúlyi kijelentésben **minden külső** (aktív és passzív) **erő egyszer és csak egyszer** szerepelhet, és az egész szerkezetre vonatkozóan **az összes külső erő egyensúlyban van**, a két részre működő külső erők hatása egymás **ellentettje** lesz. Figyelembe véve, hogy az átvágott rúd által a két kapcsolt szerkezetre kifejtett erők is **egymás ellentettjei**, a két tartórészre felírt főponti nyomatéki egyenletekből **a rúderőkre előjelre és nagyságra is azonos értéket fogunk kapni**.



Az $\mathbf{S_{4\text{-}2}}$ és az $\mathbf{S_{5\text{-}3}}$ rúderők meghatározására ez esetben is a főponti nyomatéki egyenlet a legcélszerűbb, az $\mathbf{S_{5\text{-}2}}$ rúderő számítását azonban most a 4. pontra felírható nyomatéki egyenlet alapján is bemutatjuk.

$$S_{5-3} = -\frac{\sum_{JOBB} M_{i,külső}^{(2)-}}{k_{3-5,2}}(\mathrm{H}) \quad S_{4-2} = -\frac{\sum_{JOBB} M_{i,külső}^{(5)-}}{k_{2-4,5}}(\mathrm{Ny}) \quad S_{5-2} = \frac{\sum_{JOBB} M_{i,külső}^{(O_{2-5}\pm)}}{k_{2-5,O_{2-5}}}\left(\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{Ny}}\right)$$

(a rúdtengelyvonalak és a főpontok távolságai, azaz a kar-értékek a csomóponti sorrendtől, a vizsgált rúdvégtől, a BAL vagy JOBB oldaltól függetlenek!)

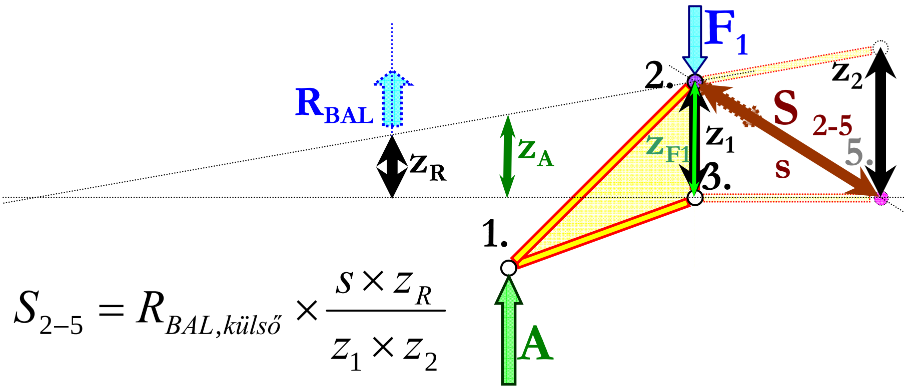
A nyomatéki egyenletet a 4. pontra felírva az $\mathbf{S_{5\text{-}2}}$ rúderő az $\mathbf{S_{5\text{-}3}}$ rúderő felhasználásával, de egyszerű karszámítással állítható elő.

$$S_{5-2} = -\frac{\sum_{JOBB} M_{i,külső}^{(4)-} + S_{5-3}(\mathrm{H}) \times k_{5-3,4}}{k_{2-5,4}}$$

A hasonlósági módszer alkalmazása

Az öveket összekötő rácsrudak és oszlopok rúderő értékének meghatározására előnyösen alkalmazható a HASONLÓSÁGI MÓDSZER. (Megjegyezzük, hogy a geometriai és a vektorábra hasonlóságát sokszor felhasználjuk a kapcsolati erők meghatározása során, de HASONLÓSÁGI MÓDSZERként csak ezt, a CULMANN-féle szerkesztésen alapuló eljárást nevezzük.)

A hasonlósági módszer szerint a három ismert hatásvonalú erővel történő egyensúlyozás esetén a terhelő erőrendszer eredőjéhez közeli állású erő értékét az eredő nagyságából egy geometriai metszékekből álló törttel szorozva kapjuk meg, amelyben a metszékek mindegyike a másik két hatásvonal között olvasandó le, a z jelű metszékek az eredővel párhuzamosak, az s jelű pedig a keresett rúderő hatásvonalában mérendő.



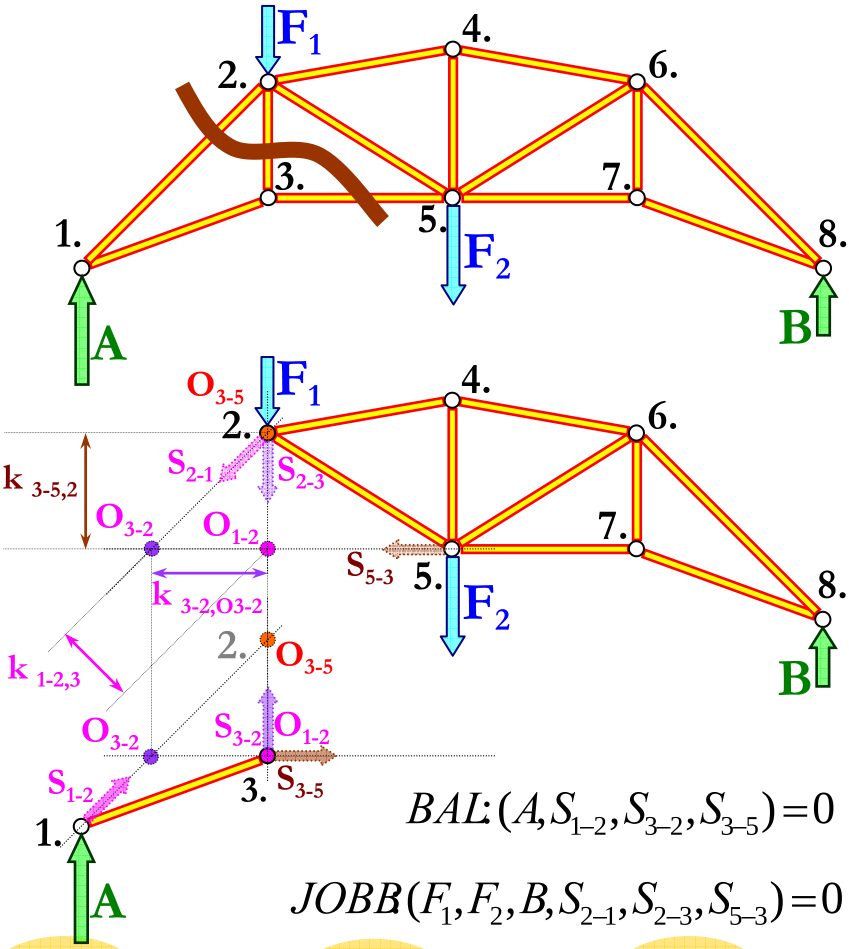
$$S_{2-5} = R_{BAL,külső} \times \frac{s \times z_R}{z_1 \times z_2}$$

Az összefüggés sajnos a rúderő előjelét nem szolgáltatja, azt szemléletből (pl. a főpont becsült pozíciójára vonatkozó nyomatéki egyensúlyból) lehet meghatározni.

Ha az eredő értékét, helyét nem kívánjuk meghatározni, a hasonlósági módszer erőnkénti alkalmazásával egymásrahalmozással is előállíthatjuk $\mathbf{S_{2-5}}$ értékét. Ebben a számításban az **s**, $\mathbf{z_1}$ és $\mathbf{z_2}$ értékek csak a geometriától függenek, tehát minden erőre azonosak lesznek. A $\mathbf{z_A}$ és a $\mathbf{z_{F1}}$ értékek pedig az erők hatásvonalainak ismeretében a hálózati adatokból könnyen leolvashatók. Az **A** támaszerő és az $\mathbf{F_1}$ terhelő erő által az $\mathbf{O_{2-5}}$ főpontra kifejtett nyomaték forgató hatása alapján látható, hogy az **A** erő egyensúlyozásához az $\mathbf{S_{2-5}}$ hatásvonalban **húzóerőre**, az $\mathbf{F_1}$ egyensúlyozásához **nyomóerőre** van szükség, így a hasonlósági módszer képletében már a keresett rúderő összetevőinek helyes előjele szerepel:

$$S_{2-5} = A \times \frac{s \times z_A}{z_1 \times z_2} - F_1 \times \frac{s \times z_{F_1}}{z_1 \times z_2}$$

Újabb rúderők meghatározásához új hármas átmetszést kell felvennünk. A tartórészek egyensúlyi kijelentésének felírása, a főpontok meghatározása, a nyomatéki egyenletek felírása értelemszerűen történik, itt csak a geometriai jellemzőket és az eredményeket mutatjuk be. Érdekesség, hogy ez esetben a bal oldali tartórészt **egyetlen** rúd alkotja.



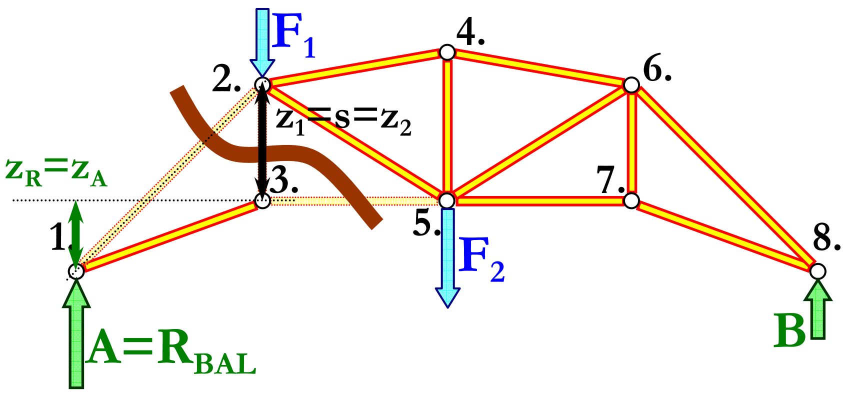
$$BAL:(A,S_{1-2},S_{3-2},S_{3-5})=0$$

$$JOBB(F_1,F_2,B,S_{2-1},S_{2-3},S_{5-3})=0$$

$$S_{3-5}=\frac{M_A^{(2)}}{k_{3-5,2}}(\mathrm{H}) \qquad S_{1-2}=-\frac{M_A^{(3)}}{k_{1-2,3}}(\mathrm{Ny}) \qquad S_{3-2}=\frac{M_A^{(O_{3-2})}}{k_{3-2,O_{3-2}}}(\mathrm{H})$$

$$S_{5-3}=-\frac{\sum\limits_{JOBB} M_{i,\text{külső}}^{(2)}}{k_{3-5,2}}(\mathrm{H}) \quad S_{2-1}=\frac{\sum\limits_{JOBB} M_{i,\text{külső}}^{(3)}}{k_{1-2,3}}(\mathrm{Ny}) \quad S_{2-3}=-\frac{\sum\limits_{JOBB} M_{i,\text{külső}}^{(O_{3-2})}}{k_{3-2,O_{3-2}}}(\mathrm{H})$$

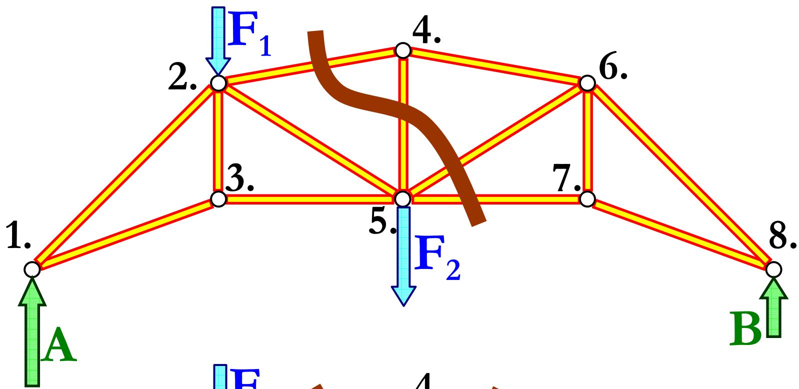
A hasonlósági módszer ez esetben az $\mathbf{S}_{2\text{-}3}$ rúderő meghatározására alkalmas. A rúd párhuzamos a bal oldali (és természetesen a jobb oldali!) eredővel, ezért a $\mathbf{z}_1$ és a $\mathbf{z}_2$, valamint az **s** jelű metszékek értéke megegyezik, a **2-3**. jelű rúdelem hálózati hosszával azonos.

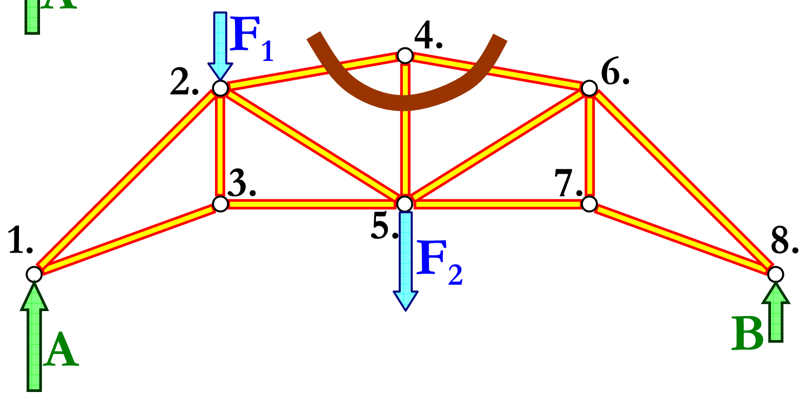


$$S_{2\text{–}3}=A\cdot\frac{s\cdot z_A}{z_1\cdot z_2}$$

A hasonlósági módszer tehát a vizsgált tartórészre működő erők eredőjével párhuzamos geometriai metszékek ismeretén alapul. Ha az eredő hálózati iránnyal párhuzamos, ezek a metszékek egyszerű számításokkal előállíthatók, és a hasonlósági módszer gyors eredményt garantál. Ha viszont a tartórészre működő erők eredője nem hálózati irányú, a ferde metszékek előállítási munkája nagyobb lehet a hasonlósági módszer egyszerűségével megnyerhető számítási munkánál, és ilyen esetben alkalmazása nem célszerű.

Az átmetsző módszer azonban nem használható minden rúderő (közvetlen) meghatározására: előfordulhat, hogy a keresett rudat magába foglaló hármas átmetszés **nem vehető fel**, mert csak **négy** rúd átvágása után válik szét két független részre a szerkezet, vagy pedig a három rúd átvágása után az egyik megmaradó „szerkezet” egyetlen **csomópont** lesz, aminek a vizsgálatát csomóponti módszernek neveztük el.





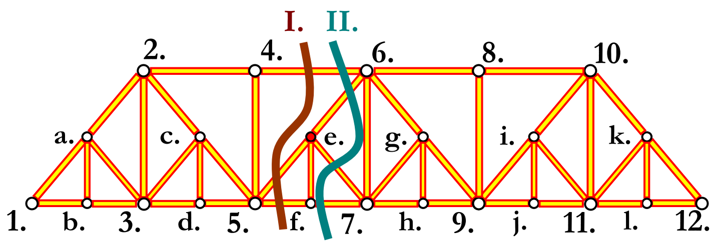
Az $\mathbf{S_{4\text{-}5}}$ rúderő meghatározására **csak a csomóponti módszer** nyújt (közvetlen) lehetőséget (célszerűen a felső, 4. jelű csomópont vizsgálata alapján, hiszen abban csak három erő találkozik), de a hármas átmetszés az előkészítő munkában, a csomópontba befutó övrúderők értékének meghatározásában jól alkalmazható.

7.5.4. Speciális hálózatú rácsostartók rúderői

A másodlagos rácsozású tartók rúderőszámítása

A másodlagos rácsozású tartónak azon rúdhármasai, amelyeken keresztül hármas átmetszés felvehető, az átmetszés (I.) alapján, (főponti) nyomatéki ill. (merőleges) vetületi egyenletekkel számíthatók.

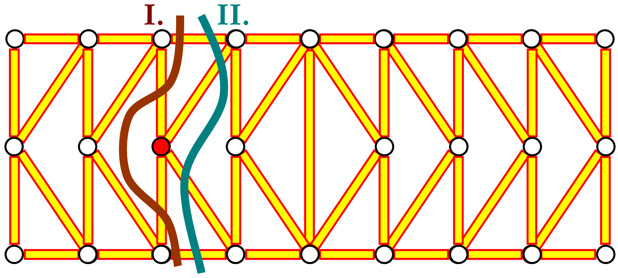
A másodlagos oszlopok alsó végein az f csomópont vízszintes egyensúlyából következően a két vízszintes rúdelemben a rúderő megegyezik, függőleges vetületi egyensúlyából a másodlagos oszloperő számítható. Ennek alapján az itt felvehető **négyes átmetszés**ben (II.) **mindkét övrúderő ismert**, és az átmetszés egyik oldalán megmaradó tartórészre felírható statikai egyenletek a megmaradt **két ismeretlen rácsrúderő** meghatározásához elegendőek. Ezek után a főoszlopok rúderőértéke egy-egy csomóponti egyenletrendszerből számítható.



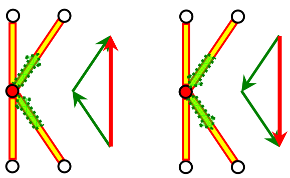
Az **I.** típusú hármas átmetszés rúderőinek meghatározása után a munkát a másodlagos rácsozás **belső** csomópontjának vizsgálatával is folytathatjuk. A másodlagos oszlopokban rúderő csak az alsó csomópontjuk (f) közvetlen terheléséből keletkezhet. Ezzel viszont az **e** belső csomópontban öszszefutó négy rúdból kettő rúdereje ismertté vált, és a maradék két rúderő a csomópont egyensúlya alapján felírható nyomatéki vagy vetületi egyenletekből meghatározható.

A K rácsozású tartók rúderőszámítása

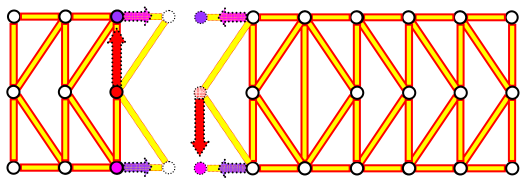
A **K** rácsozású tartónál a szerkezet csak **négyes átmetszésekkel** bontható különálló, független részekre. A belső csomópontok egyensúlyának elemzése viszont azt mutatja, hogy a rácsrúd-párok rúderői között szigorú szabály érvényesül: az egy átmetszésben lévő rácsrúderő-párok vízszintes összetevőinek ki kell egyenlíteniük egymást (másként a közbenső csomópont vízszintes vetületi egyensúlya nem teljesülhet), és ebből, valamint a rudak szimmetrikus állásából következően a **két rácsrúderő egymás ellentettje tartozik lenni**.



A szerkezeten akár az **I.** jelű, akár a **II.** jelű átmetszést vizsgáljuk, a bejelölt belső csomópont vízszintes irányú vetületi egyensúlya csak akkor lehetséges, ha a csomópontba csatlakozó ferde rácsrúderők vízszintes komponensei egymás **ellentettjei** lesznek. Ez esetben viszont a csomópontba befutó rácsrúderő-pár eredőjének nem lehet vízszintes összetevője, azaz a külső terhelés elhelyezkedésétől, nagyságától függetlenül, csupán a hálózati geometriából következően a függőleges átmetszésekben szereplő **rácsrúderő-párok eredője függőleges lesz**. Így a ténylegesen **négyes** átmetszésünk **hármas** átmetszéssé egyszerűsíthető: a két övrúd mellett a rácsrúd-pár függőleges eredője lesz a harmadik ismeretlen az átmetszésben.



A rácsrúderő-párok eredője a közbenső csomópontokban

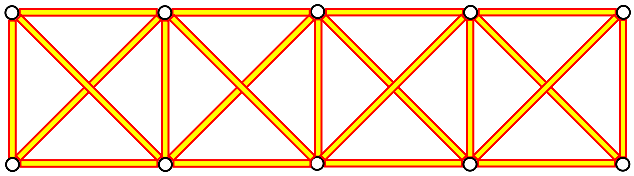


A szétbontott tartórészekre működő (feltételezett irányú) kapcsolati erők

Az átmetszéssel szétvágott tartó bal ill. jobb oldali tartórészének egyensúlya alapján az átmetszésben az átvágott rudak kapcsolati hatásának pótlására felvett erők közül az övrúderők igen egyszerűen, a megfelelő **főponti nyomatéki egyenlet** megoldásával határozhatók meg, a rácsrúderő-pár eredőjét pedig szintén igen egyszerűen egy **függőleges vetületi egyenlet** megoldása szolgáltatja. A rácsrúd-párok szimmetrikus beépítése, azonos állásszöge miatt a vízszintes vetületek azonosságából a függőleges vetületek azonossága is következik, tehát egy rácsrúdban a meghatározott **eredő fél értéke** jelenik meg **függőleges erővetületként**. A rácsrúd állásának ismeretében a függőleges vetületből maga a rácsrúderő is könnyen (hasonló háromszögekkel, aránypárral, trigonometrikus összefüggéssel) előállítható.

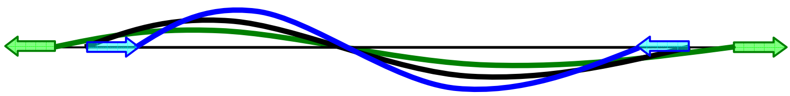
Az X rácsozású tartók rúderőszámítása

Az **X** rácsozású tartókban minden osztásközben a szükséges **egy** merevítőrúd helyett **kettő** van, tehát a szerkezet **sokszorosan statikailag határozatlan**, pontos számítási lehetőségét e tárgy keretében nem tárgyaljuk.



A gyakorlatban ezt a rácsozástípust elsősorban térbeli szerkezetek merevítésére szokták alkalmazni, amikoris a működő (szél)terhek iránya változó, és az X alakban álló merevítő rácsrudak a széliránytól függően kapnak húzó ill. nyomóerőt.

A terhelés hatására a rúdelemeken (kismértékű) deformáció alakul ki, amely hozzáadódik a rúd önsúlyából származó deformációhoz és a rúdelem gyártási-beépítési pontatlanságaiból adódó alakhibákhoz. A terhelésből keletkező deformáció a **húzott** rudakon az alakhibát **csökkentő**, a **nyomott** rudakon az alakhibát **növelő** deformációt okoz (a húzóerő „kiegyenesíti", a nyomóerő „meggörbíti" a rudat).

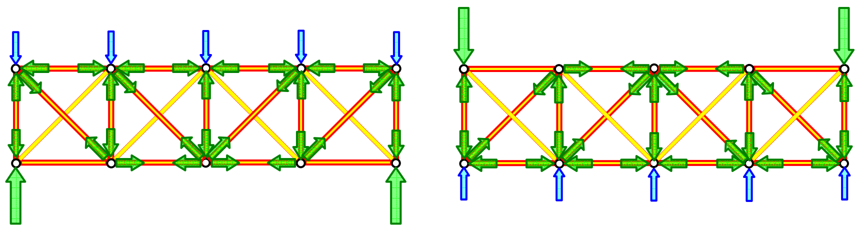


A terhelésből nyomott rudakban a megnövekedett deformáción másodrendű nyomaték képződik, ami a rúdelem további alakváltozásnövekedésével jár, ami újabb többletnyomatékot ébreszt… stb. Jó esetben ennek a végtelen sorozatnak az összege, a határértéke véges, akkor a szerkezet (az elsőrendű elmélettel meghatározható értékekhez képest kicsit nagyobb alakváltozással és belső igénybevettséggel, de) működik. Ha az alakváltozásnövekmények sora **divergens**, nincs véges határértéke, akkor a szerkezet a terhelésre (elvileg) végtelen nagyságú deformációt szenved, elveszíti a stabilitását, azaz **tönkremegy**. Ez az eset **MINDENKÉPPEN ELKERÜLENDŐ**, ezért a nyomott rúdelemek alakváltozása, és az ehhez kapcsolódó valós igénybevettsége csak a másodrendű hatások figyelembevételével határozható meg korrekt módon.

A nyomott elemek tehát a terhelés miatt bekövetkező kedvezőtlen alakváltozások miatt **MINDIG KÜLÖNÖS FIGYELMET ÉRDEMELNEK**, de ennek részletes tárgyalásával is csak a későbbiekben foglalkozunk.

A legegyszerűbb megoldás a nyomott elemekkel kapcsolatos stabilitási problémák megoldására (vagy inkább: megkerülésére), ha a húzásra is, és nyomásra is dolgozó merevítő rúdelemeket szimmetrikusan megkettőzve építjük be, és a szerkezetet (a nyomott elemek figyelmen kívül hagyásával) csak a húzott, stabilitásvesztésre veszélytelen rúdelemekkel számítjuk. (Az aktuálisan nyomott elemek éppen bekövetkezett alakváltozásuk révén tehermentesülnek, kitérnek a terhelés alól, és a terheket a megmaradó húzott rácsrudakkal veszi fel a szerkezet. Az így kialakuló oszlopos rácsozású tartó rúderői a már megismert módszerekkel könnyen meghatározhatók.

Megjegyezzük, hogy a rácsostartóban az öveket összekötő ferde rácsrudak és merőleges oszlopok az egy oldalon támadó terhelésből mindig felváltva kapnak húzó- és nyomóerőt, azaz ha a ferde rácsrudakat tekintjük húzottnak, akkor a merőleges oszlopok nyomottak lesznek. Ezek az elemek, valamint a merevítő X rácsozású tartó övrúdjai azonban általában a fő tartószerkezet elemeiként eleve erősebb kialakítással készülnek, tehát a merevítésből származó többleterőre kis keresztmetszetnöveléssel alkalmassá tehetők, és erősebb kialakításuk révén stabilitásvesztésre kevésbé érzékenyek.

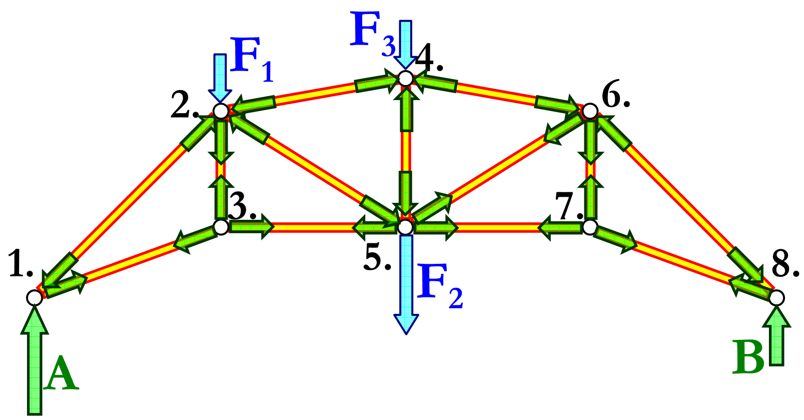


Az X rácsozású tartó rúderői a különböző irányú terhelésekből

7.5.5. A rúderőszámítás eredményeinek megadása

A rácsostartón meghatározott rúderőértékeket **követhető**, **szemléletes** és **könnyen ellenőrizhető** módon kell dokumentálnunk. A klasszikus megoldás a rúderők táblázatos összefoglalása, ahol a rúd azonosító jele mellett a meghatározott rúderő számértékét tüntetjük fel, külön oszlopban a húzó- és külön oszlopban a nyomóerőket. Nagyobb szerkezetek esetében célszerű lehet a rudakat csoportosítani (felső öv, alsó öv, rácsrudak, oszlopok), mert így a gyakorlott a szakértő az azonos terhelési jellegű rúderők összevetése alapján gyorsan kiszűrheti a durva hibákat.
Különösen kisebb szerkezetek esetében lehet igen előnyös, ha a rúderőket (irányukkal és számértékükkel együtt) közvetlenül a rácsostartó (külön erre

a célra felrajzolt!) hálózati rajzába jelöljük be. Így a csomópontok egyensúlyát sértő rúderőirányok azonnal, nagyon szemléletesen „kiugranak” és könnyen javíthatók.



A rúderők táblázata (a példa a fenti tartóra vonatkozik)

RÚDCSOPORT	RÚDJEL	HÚZOTT	NYOMOTT
FELSŐ ÖV	1-2		
	2-4		
	4-6		
	6-8		
ALSÓ ÖV	1-3		
	3-5		
	5-7		
	7-8		
OSZLOPOK	2-3		
	4-5		
	6-7		
RÁCSRUDAK	2-5		
	5-6		

A ma használatos számítógépes szerkezetszámító programok eredményközlése is a fent ismertetett lehetőségeket alkalmazza: a kiszámított rúderők a rúdazonosító függvényében táblázatosan is hozzáférhetők (természetesen akár továbbfeldolgozható formátumban), de a rúderők a hálózatra is felrajzoltathatók (tetszőlegesen változtatható léptékben).

7.5.6. Rudakon terhelt rácsostartók csuklóerői

A **rácsostartók** alapvetően másodlagos tartószerkezetek alátámasztására készülnek, és így **a terheket** csak ezek közvetítésével, a **csomópontjaikon** kapják meg. Valójában a csomópontok között ezek a másodlagos szerkezetek (átviteli tartók) hordják a terheket, és a támaszpontjaikon továbbítják az őket megtámasztó fő tartószerkezetre, a rácsostartóra. Néhány tartószerkezet esetében azonban a teher, vagy annak egy része **közvetlenül** a rácsostartó övrúdjait terheli (daruteher a rácsos szerkezetű darupályatartó felső övén, álmennyezet súlya a csarnok rácsos főtartójának alsó övén és az önsúly minden rácsostartó minden rúdján).

A rúdelemeket érő közvetlen terheléssel csak abban az esetben érdemes közvetlen teherként foglalkozni, ha az, (egy-egy osztásközön összegezve) a csomóponti terhek nagyságrendjébe esik, különben hatását elegendő a csomópontokra redukált teherként figyelembe venni (pl. a rudak önsúlyát mindig csomópontokra redukáljuk).

A közvetlen terhelésű, másodlagos tartóelemeket a tényleges szerkezetekben különböző szerkezeti megoldásokkal kapcsolják a főtartóhoz. A számításokban azonban (legalábbis első közelítésképpen) az „átviteli” tartókat – a rácsostartó szempontjából – mindig **csuklós kapcsolatú kéttámaszú tartóknak** tekintik.

A közvetlenül terhelt (öv)rudak a rácsos tartószerkezetben valójában kettős szerepet töltenek be:

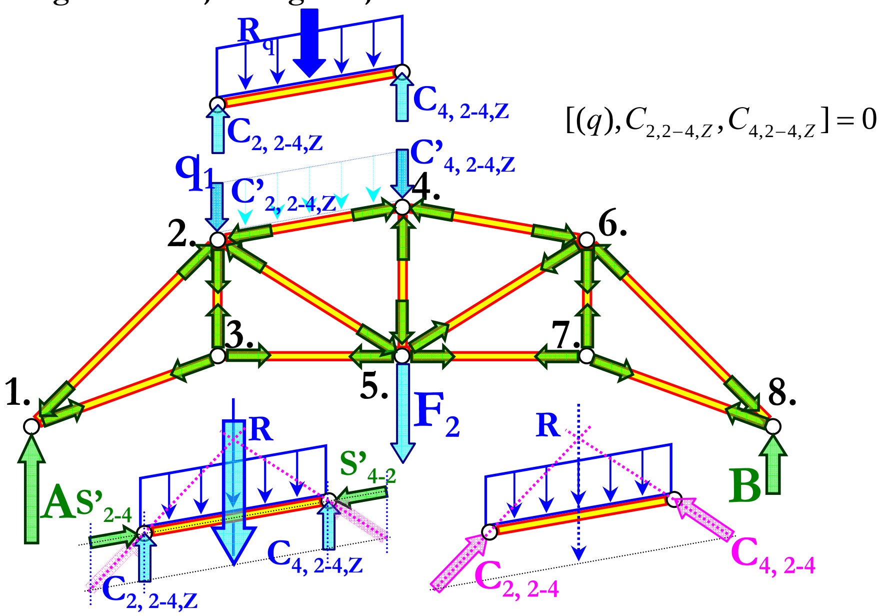
csuklós támasztású kéttámaszú (másodlagos, „átviteli”) tartókként a közvetlen terhelést elosztják, továbbítják az alátámasztó főtartó-csomópontokra;

a rácsostartó csuklós kapcsolatú rúdelemeként részt vállalnak a csomóponti terhek viselésében, továbbításában, a főtartó erőjátékában.

Ha a fenti funkciókat külön-külön vizsgáljuk, akkor a közvetlen terhelésű rúdelem vizsgálata egy (tetszőleges közvetlen terhelésű) **kéttámaszú tartó vizsgálatára** és egy csak tengelyirányú erővel terhelt **rácsrúd vizsgálatára** egyszerűsödik. Ezekre az elemi tartókra már külön-külön megismertük a kapcsolati erők alakulását, tulajdonságait, meghatározásuk módszereit, most csak annyi a tennivalónk, hogy a **két hatást** a végeredmény előállítása során **egyesítsük**.

A közvetlen terhelésű rúdelem kapcsolati erőiben a kéttámaszú hatás és a rácsostartó hatás **egyidejűleg** lesz jelen, így ezeknél a rudaknál a csomópontokról a rúdvégekre átadódó **csuklóerők** meghatározása az elsődleges cél, ezeket tekinthetjük a (rész)számításunk eredményeinek.

A közvetlen teherrel (is) terhelt rácsostartón először a közvetlen terhelésű rúdelemen, mint kéttámaszú tartón, **meghatározzuk** az egyensúlyhoz szükséges (célszerűen függőlegesnek tekintett) **támaszerőket**. Ezen (lokális) támaszerők **ellentettjei** már **csomóponti teherként** közvetítik a terheket a rácsos szerkezetre. Ha több rúdelemen is működik közvetlen teher, mindegyiken meg kell határoznunk az egyensúlyozó erőket, és a rácsostartón az eredetileg is csomópontokon működő terhekhez hozzáadva a kéttámaszúnak tekintett terhelt rúdelemek támaszerőinek ellentettjeit kapjuk meg a rácsostartó **összegzett csomóponti terhét**. A (most már csak csomópontokon terhelt) rácsostartón meghatározva a rúderőket, a közvetlen teher nélküli rudak rúderői ismertek. A közvetlen terhelésű rúdelemeken a **csuklóerőket a kéttámaszú modell reakcióerőinek és a rácsostartón számított rúderőnek a csomópontonként vektoriálisan összegzett eredője szolgáltatja**.



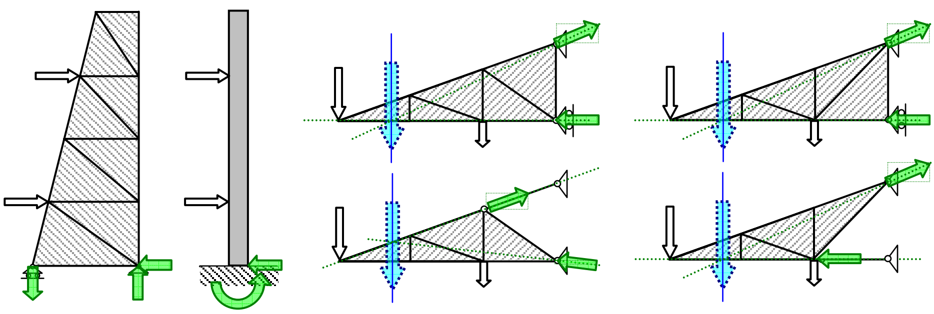
$$[(q), C_{2,2-4,Z}, C_{4,2-4,Z}] = 0$$

$$[(q), C_{2,2-4,Z}, S'_{2-4}, C_{4,2-4,Z}, S'_{4-2}] = 0 \qquad [(q), C_{2,2-4}, C_{4,2-4}] = 0$$

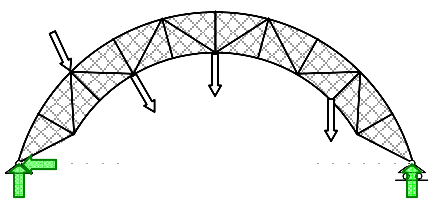
A kiemelt, kéttámaszú, közvetlen terhelésű rúdelemek egyensúlya **bármilyen**, a terhek eredőjének hatásvonalán metsződő reakciópárral biztosítható. Természetesen a csomópontokra ilyen esetben a **ferde** reakcióerő ellentettjét kell működtetnünk, és a rácsostartó rúderőit is ezekre a csomóponti erőkre kell meghatároznunk. A terhelt rúdelemet megtámasztó **csuklóerők azonban nem fognak változni**, hiszen a ferde támaszerő rúdirányú összetevőjét a rúderőben megjelenő differencia kompenzálja.

7.6. Rácsos kialakítású összetett szerkezetek

Rácsostartókat többnyire nagy nyílások áthidalására, **kéttámaszú** szerkezetként építenek. A különböző szerkezettípusok viselkedésének, rúderőszámításának illusztrálására az eddigiekben bemutatott szerkezetek is kéttámaszú kialakításúak voltak. Természetesen rácsos szerkezetként **tetszőleges megtámasztású** és belső kapcsolatú egyszerű vagy összetett szerkezet kialakítható („befogott”, vagyis inkább: csak az egyik végen megtámasztott konzol, keret, háromcsuklós tartó, GERBER-tartó, stb.). Ha a rácsos szerkezet belső struktúrája kielégíti a **belső statikai határozottságra és merevségre** vonatkozó kritériumokat, akkor a szerkezet a (számára) külső kapcsolatok szempontjából **merev** (szilárd) testnek tekinthető, és az eredetivel analóg megtámasztású tömör tartóval modellezhető. A tömörtartós modell külső és belső kapcsolati erőit az egyszerű és az összetett tartók kapcsolatmeghatározási eljárásainak alkalmazásával állíthatjuk elő. A kapcsolati erők ismeretében a rácsos szerkezetű tartóelemekre (a terhelő aktív és az egyensúlyozó passzív erőkből álló) **egyensúlyi** erőrendszer működik. Az egyensúlyi erőrendszerből a rácsostartó rúdjaiban keletkező rúderők meghatározási módszereit pedig több alternatívában e fejezet megelőző részeiben ismertettük részletesen.
A következő ábrán néhány rácsos szerkezetnek a támaszigénybevételek meghatározásához alkalmazható tömörtartós modelljét, az ébredő támaszerők hatásvonalait és vektorát mutatjuk be.

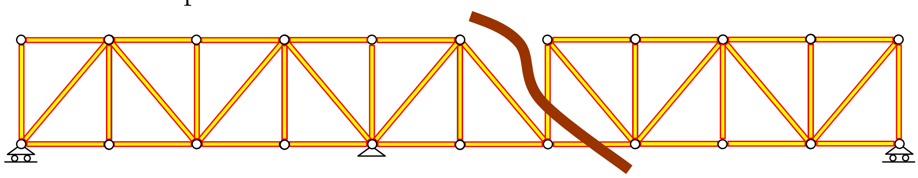


A konzolként működő rácsostartóknál a nyomatékbíró **befogás** helyett erőpárt kifejteni képes **rúdpár – támaszerő-pár** működik, azaz a szerkezet támaszerői kéttámaszú tartón (is) számíthatók.



A fentiekben a rácsos szerkezetet belsőleg merevnek (és statikailag határozottnak) tekintettük. Előfordulhat azonban, hogy egy szerkezet kapcsolatainak, belső megtámasztottsági viszonyainak értékelésében **csak szemléletmód kérdése**, hogy a tartót egy külső többletmegtámasztással megerősített, belsőleg labilis tartóként, vagy egy több tartóelemből összerakott összetett tartóként kezeljük.
Az alábbi rácsos szerkezetet tekinthetjük úgy is, hogy egy felső övrúd eltávolításával belsőleg labilissá vált rácsostartó működőképességét egy külső többletmegtámasztással állítottuk helyre, de úgy is, hogy egy belsőleg merev és határozott kapcsolatú konzolos kéttámaszú rácsostartóra egy másik, szintén merev és határozott kapcsolatú kéttámaszú tartó támaszkodik.

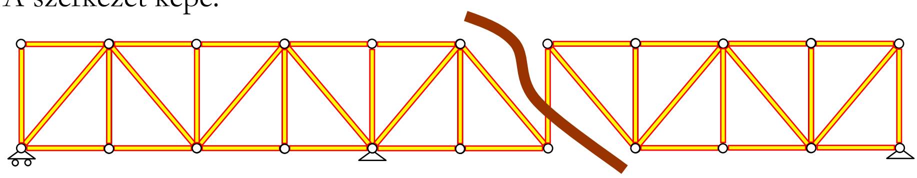
A szerkezet képe:



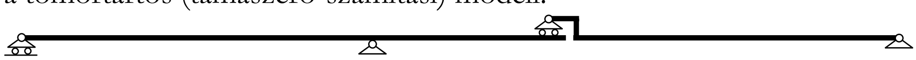
a tömörtartós (támaszerő-számítási) modell:

Ha a szerkezetből még egy (öv)rudat eltávolítunk, a belső merevségi hiány a kérdéses tartószakaszon (ha úgy tetszik: az ott felvehető hármas átmetszésben) már kettővel csökken, és az eredeti, minden lehetséges (síkbeli relatív) elmozdulás megakadályozására képes kapcsolat helyett csak egy (függőleges) rúd kapcsolja össze a két szerkezetet. A szerkezet működőképességének helyreállítása ez esetben két külső többletmegtámasztás beiktatását igényli: ezt pl. egy csuklós megtámasztással érhetjük el.

A szerkezet képe:



a tömörtartós (támaszerő-számítási) modell:



7.7. Ellenőrző kérdések

Hogyan írhatjuk fel a rudak (r) és a csukló (c) számával a rácsostartó belső merevségének és határozottságának szükséges feltételét?
Mik a rácsostartó belső merevségének szükséges és elégséges feltételei?
A rácsostartók csomópontjaiban csuklót vagy befogást feltételezünk-e a számítások során?
Melyek a rácsostartók alapvető megoldási módszerei?
Mikor alkalmazzuk elsősorban a csomóponti módszert?
Mikor alkalmazzuk elsősorban az átmetsző módszert?
Rúderő alatt a rúdra vagy a csomópontra ható erőt értjük-e általában?
A csomóponti módszer esetén a csomópontra hány rúderő hathat?
Mi a csomóponti módszer alkalmazhatóságának feltétele egy konkrét csomópont vizsgálata során?
A csomóponti módszer alkalmazása esetén a csomópontra felírhatók-e csak vetületi egyenletek?
A csomóponti módszer alkalmazása esetén a csomópontra felírhatók-e csak nyomatéki egyenletek?
A csomóponti módszer alkalmazása esetén a csomópontra felírhatók-e vetületi és nyomatéki egyenletek vegyesen?
A csomóponti módszer alkalmazása esetén a csomópontra felírhatók-e hasonlósági összefüggések?
A szimmetrikus hálózatú rácsostartó rúderői egyformák-e?
A szimmetrikus terhelésű rácsostartó rúderői egyformák-e?
Mik a szimmetrikus rácsostartó szimmetrikus rúderő értékének szükséges feltételei?
Lehet-e a szimmetrikus hálózatú, és terhelésű rácsostartónak nem szimmetrikus rúdereje?
Melyek a vakrudak jellegzetes (hálózati) esetei?
Síkbeli rácsostartó esetén az átmetsző módszer alkalmazása során hány rudat vághatnak át, hogy az ismeretlen rúderőket meg tudjuk határozni?
Az átmetsző módszer alkalmazása esetén a bal oldali vagy a jobb oldali tartórésszel kell-e foglalkozni?
Hármas átmetszés esetén alkalmazhatók-e a három ismeretlen hatásvonalú erővel történő egyensúlyozás módszerei?
Milyen módszereket ismer a hármas átmetszésben a rúderők meghatározására?
Ábrázolja és írja fel a hasonlósági módszer összefüggéseit!
Hármas átmetszés esetén az övrúderők meghatározása milyen módon a legcélszerűbb?

Hármas átmetszés esetén a párhuzamos övű rácsostartók ferde rácsrúdjai ill. függőleges oszlopai rúderőinek meghatározása milyen egyenlettel a legcélszerűbb?
Hármas átmetszés esetén a nem párhuzamos övű rácsostartók ferde rácsrúdjai ill. függőleges oszlopai rúderőinek meghatározása milyen egyenlettel a legcélszerűbb?
Az átmetsző módszer alkalmazása esetén minden rúderő meghatározható-e csak átmetszések felvételével?
A másodlagos rácsozású tartók statikailag határozottak-e?
Csak a hármas átmetszés alkalmazásával megoldhatók-e a másodlagos rácsozású tartók?
Van-e olyan rácsostartó típus, amely négyes átmetszéssel is megoldható?
Mit tudunk a K rácsozású tartó rácsrúderőiről?
Hányszorosan határozatlan egy négy osztásközű (keretállású) X rácsozású tartó?
Milyen megfontolással tesszük határozottá az X rácsozású tartókat?
Határozott-e a rudakon is terhelt rácsostartó?
Hogyan oldjuk meg a rudakon is terhelt rácsostartót?
Hogyan kapjuk meg a rácsostartó közvetlen teherrel terhelt rúdjának csuklóerőit?
A rácsos kialakítású összetett szerkezetek támaszerői számíthatók-e tömörtartós modellel?

8. Belső erők – igénybevételek

8.1. Az igénybevétel fogalma

Tartószerkezeteink vizsgálata, az egyensúly biztosítása közben a legfőbb célunk az, hogy szerkezeteink megfelelő anyagból, megfelelő keresztmetszeti méretekkel készüljenek, hogy teherbírásuk pontról pontra, keresztmetszetről keresztmetszetre megfelelő legyen. Ahhoz, hogy ezt elérjük, elsősorban is pontról pontra, keresztmetszetről keresztmetszetre ismernünk kell a szerkezetben működő **belső erőket**, azokat az erőket-nyomatékokat, amelyek felvételére a keresztmetszeteket majd alkalmassá kell tennünk.

Az összetett tartók vizsgálata során már találkoztunk a szerkezet belsejében, a csatlakozó elemvégek megfelelő kapcsolatát biztosító **belső kapcsolati erőkkel**, és megismertük meghatározásuk célszerű módszereit, de ezekkel még csak a belső kapcsolati kényszerekben ébredő erőhatásokat tudtuk előállítani. Amikor azonban a két tartóelem **merev, befogott** belső kapcsolatát elemeztük, valójában egy folytonos szerkezet **keresztmetszeti belső kapcsolati erőit** vizsgáltuk. A rácsostartók rúderőmeghatározása során (ehhez hasonlóan) egy átmetszéssel **tetszőleges helyen** (a tömörtartó modellre gondolva mondhatjuk: tetszőleges keresztmetszetben) **meg tudtuk határozni** a két részre bontott tartó elemei között az egyensúlyhoz szükséges **kapcsolati (rúd)erők előjelét és nagyságát**. A kapcsolati erőknek, valamint a rúdelemek anyagának és keresztmetszetének ismeretében már ellenőrizhetnénk is a szerkezet, pontosabban a vizsgált szerkezeti elem teherbírási megfelelőségét. Ennek alapján definiálhatjuk a belső erők, az **igénybevételek** fogalmát.

Tartószerkezeteinkben **keresztmetszeti belső erő**nek, más kifejezéssel: **igénybevétel**nek nevezzük a szétbontottnak képzelt tartó vágási keresztmetszetében az anyagi kapcsolat pótlására a beiktatott dinámokat, amelyek a tartó elemeinek egyensúlyát biztosítják.

A belső kapcsolati erőket minden keresztmetszetre meghatározhatjuk, így az igénybevételek a tartó tengelyvonalának pontjaihoz kötött **függvényként** is értelmezhetők. Az igénybevételi függvények grafikus ábrázolását **igénybevételi ábrák**nak nevezzük.

8.1.1. Az igénybevétel definíciója

A keresztmetszetekben meghatározható egyensúlyozó belső erők eredője általános esetben tetszőleges állású és nagyságú lehet. A könnyebb kezelhetőség érdekében célszerű ezt az erőt a keresztmetszet súlypontjára, a tartó tengelypontjára redukálni, és a (most már a keresztmetszet súlypontjához illeszkedő) erő-összetevőt tengelyirányú komponenseivel helyettesíteni. E művelet során azonban a tartószerkezet egészének geometriai viszonyait rögzítő globális koordinátarendszer alkalmazása helyett célszerű a keresztmetszethez egy saját, természetes koordinátarendszert definiálni, amely a kapcsolati erő-komponenseket a tartótengely minden pontjában a rúdelem aktuális állása szerint, a szerkezet terheihez igazodóan adja meg. E lokális, mindig a keresztmetszethez kötődő („kísérő" koordinátarendszer első természetes iránya a **keresztmetszet síkjának normálisa**, ezt a továbbiakban kis **x**-szel jelöljük. A síkbeli tartók esetében a másik irány a tartó síkjának és a keresztmetszet síkjának metszésvonala, a normálisra merőlegesen, a tartó síkjában álló tengely, amit kis **z**-vel fogunk jelölni. A síkbeli tartók esetében az általános állású keresztmetszeti belső kapcsolati erő két, koordinátatengely-irányú erőkomponenssel és egy, a tartósíkra merőleges tengely körüli forgatónyomatékkal helyettesíthető. Ezt a harmadik, a tartó síkjára merőlegesen, a keresztmetszet síkjában álló tengelyt kis **y**-nal jelöljük. A továbbiakban a keresztmetszeti belső erőket ebben a lokális **x-y-z** koordinátarendszerben értelmezzük.

Egy tartókeresztmetszetben a **belső kapcsolati erő**nek a **keresztmetszet normálisával párhuzamos** komponensét a keresztmetszet **normáligénybevételének** nevezzük. A normáligénybevétel (bizonyos szakirodalomban: derékerő) jele $\mathbf{N}_{(x)}$, előjelét pedig akkor tekintjük pozitívnak, ha húzza a keresztmetszetet.

Egy tartókeresztmetszetben a **belső kapcsolati erő**nek a **keresztmetszet normálisára merőleges** komponensét a keresztmetszet **nyíróigénybevételének** nevezzük. A nyíróigénybevétel (bizonyos szakirodalomban: tangenciális, csúsztató erő) jele $\mathbf{T}_{(z)}$, előjelét pedig akkor tekintjük pozitívnak, ha iránya a pozitív normálerő pozitív (az óra járásával megegyező) 90°-os elforgatásával kapott tengellyel megegyezik.

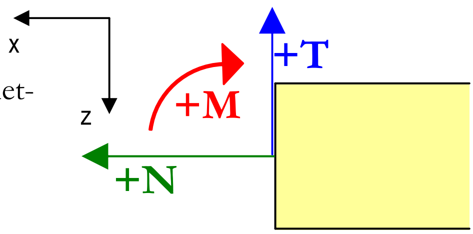
Egy tartókeresztmetszetben a **belső kapcsolati erő**nek a keresztmetszet súlypontjára (pontosabban: a súlypontban a tartósíkra merőlegesen felvett tengelyre) számított **nyomatékát** a keresztmetszet **nyomatéki igénybevételének** (röviden: nyomatékának) nevezzük. A nyomatéki igénybevétel jele $\mathbf{M}_{(v)}$, akkor tekintjük pozitívnak, ha az óra járásával megegyezően forgat.

A síkbeli szerkezetek esetében a keresztmetszeti igénybevételek is a síkban keletkeznek, és az irányok egyértelműsége miatt az indexelés elhagyható.

8.1.2. A nyomatéki igénybevétel előjele

Az erőrendszerek tárgyalása során rögzítettük, hogy a nyomatékot akkor tekintjük pozitívnak, ha az **óra járásával megegyezően forgat**. Alapjában véve a nyomatéki igénybevétel előjelének meghatározása során is ezt fogjuk követni, de látni fogjuk, hogy a nyomatéki igénybevétel helyes ábrázolása további megfontolásokat igényel.

A síkbeli tartó pozitív keresztmetszeti igénybevételei
(haladási irány: balról jobbra)

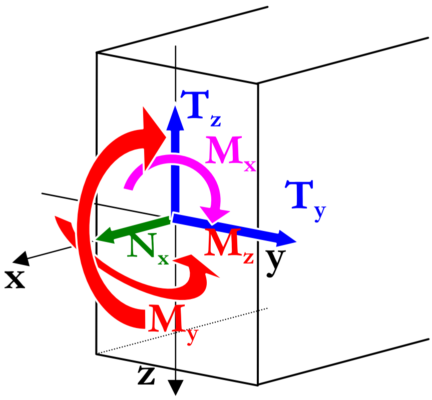


A nem csak egy síkban terhelt rúdkeresztmetszet esetén a keresztmetszeti igénybevételek egy erő- és két nyomatéki komponenssel bővülnek. Ezeket is a megfelelő tengellyel indexelhetjük, elnevezésük pedig a hatásukból következik: a keresztmetszet síkjában ható (érintőleges, csúsztató) erőt mindkét tengely irányában **nyíróerő**nek, a keresztmetszetre merőleges síkban működő, a tartót meggörbíteni akaró nyomatékot mindkét keresztmetszeti tengely által meghatározott síkban **hajlító nyomaték**nak, a keresztmetszet síkjában működő, a tartót a saját tengelye körül elcsavarni akaró nyomatékot pedig **csavaró nyomaték**nak nevezzük.

Megjegyezzük még, hogy míg a síkbeli tartók esetében a tartó (és a terhelés) síkja egyértelműen meghatározza a vizsgálandó keresztmetszeti igénybevételek tengelyeit, elnevezését, a térben már nem biztos, hogy a keresztmetszetben az általunk (akár véletlenszerűen, akár célszerűségi alapon) felvett tengelyek lesznek a természetes kitüntetett irányok. Ezt a kérdést a későbbiekben fogjuk tárgyalni, most elegendő annyit megjegyezni, hogy a leggyakrabban alkalmazott szimmetrikus keresztmetszeti síkidomok esetében a **szimmetriatengely** és a rá merőleges tengely **biztosan kitüntetett irány** lesz.

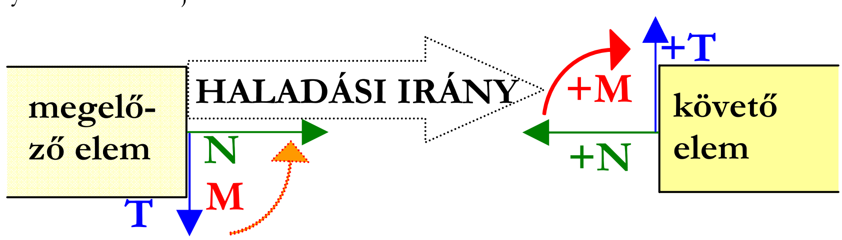
A térbeli rúd pozitív kereszt-metszeti igénybevételei
(haladási irány: balról jobbra)

A síkbeli tartók esetében az igénybevételek irányainak egyértelműsége miatt az indexelés elhagyható, térbeli esetben azonban mindig meg kell adnunk az igénybevétel tengely-indexét is!



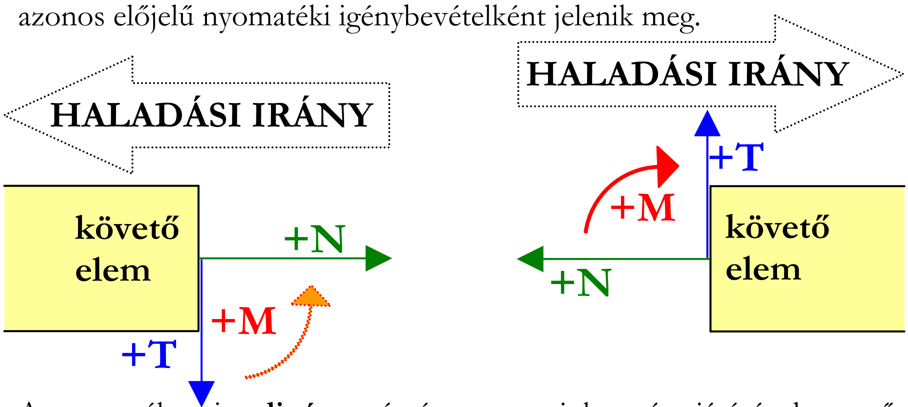
8.1.3. A haladási irány hatása

Az igénybevétel a tartótengely egy pontjában a két tartófél végkeresztmetszeteire ható kapcsolati erő vetületeiből és nyomatékából adódik. A hatás-ellenhatás törvénye alapján a két végkeresztmetszetben keletkező kapcsolati erő egymás **ellentettje** lesz, így az e két keresztmetszeten értelmezett igénybevételeknek is **ellentett irányúnak** kell lenniük. A normáligénybevétel pozitív irányát a vizsgált elem húzóigénybevételeként, a nyíróerő pozitív irányát a normálerőirány függvényeként, mint **relatív**, a keresztmetszet állásától függő irányt definiáltuk, így a keresztmetszetben ébredő belső erő mindkét tartóelemre **azonos előjelű** vetületi igénybevételként jelenik meg. A nyomatéki igénybevétel előjelét azonban a keresztmetszet állásától független, **abszolút** viszonyítással vettük fel (az óra járásával megegyezően) pozitívnak. Ennek megfelelően a keresztmetszetben ébredő nyomatéknak a két tartófélre működő, szükségképpen ellentett irányú hatása nem forgathat azonos irányba, tehát nem is lehet(ne) azonos előjelű, ráadásul ugyanazon teherből származó nyomaték előjele attól függően lenne pozitív vagy negatív, hogy éppen melyik tartódarabon kezdjük a vizsgálatot. Ez mindenképpen elkerülendő. Olyan előjelkonvenciót kell választanunk, hogy a teherből egy keresztmetszetben a haladási- erőösszegzési iránytól **függetlenül** azonos előjelű, azonos hatású nyomatéki igénybevétel adódjék.

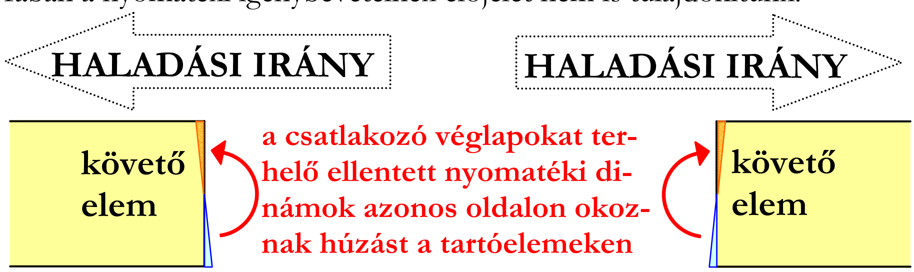


Az ellentmondás feloldása többféleképp lehetséges:

A nyomatéki igénybevétel pozitív iránya csak akkor egyezik meg az óra járásával, ha a haladási irány, az erők összegzési iránya **balról jobbra** mutat. Jobbról balra haladva a haladási irány szerinti követő metszeten a pozitív nyomaték az óra járásával ellentétes lesz. Ez a megoldás biztosítja, hogy ugyanaz a nyomatéki hatás a haladási iránytól függetlenül azonos előjelű nyomatéki igénybevételként jelenik meg.



A nyomaték, mint **dinám** számára megtartjuk az óra járásával egyező **pozitivitást**, de a nyomaték, mint **igénybevétel** ábrázolási jellemzőjét („előjelét”) ettől függetlenül állapítjuk meg. A szilárd anyagú rúdelem egy keresztmetszetében a terhekből keletkező nyomatéki igénybevétel a vizsgált oldaltól-iránytól függetlenül az egyik oldalon az elemi szálak megnyúlásával, a másik oldalon összenyomódásukkal járó kicsiny, infinitezimális (relatív) elfordulást ébreszt. Ennek hatására a tartó egyik (húzott) oldala domború, a másik (nyomott) oldala homorú alakot vesz fel. Minthogy ez az alakváltozás csak a tartó geometriájától és terhelésétől függ, de a vizsgálati iránytól nem, ennek alapján egyértelműen elhelyezhetjük ábrázolásunkban a nyomatéki igénybevételeket. Megállapodás szerint a nyomatéki igénybevételt mindig a tartó **húzott**, a deformáció szerinti **domború** oldalára rajzoljuk, és az igénybevételi ábrában a nyomatéki igénybevételnek előjelet nem is tulajdonítunk.



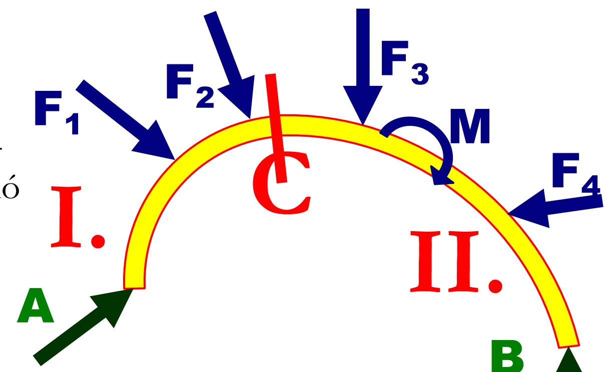
A fenti két megoldás **egyenes tengelyű tartók** esetében teljesen egyenértékű, mindig azonos nyomatéki ábrát eredményez. **Tört tengelyvonalú**, vagy **elágazó tartók** esetében a függőleges vagy közel függőleges állású rúdelemeken a nyomatéki ábra pozitív oldala nem állapítható meg egyértelműen, tehát ilyen esetekben csak a húzott – domború oldalra rajzolt nyomatéki ábra a helyes megoldás.

A mérnöki gyakorlatban a tartószerkezetek legnagyobb része vízszintes állású, egyenes tengelyű gerenda. Ezeken a tartókon a nyomatéki igénybevétel előjele egyszerűen és biztosan megállapítható, és a gyakorlat erősen használja is ezt az előjelkonvenciót. Eszerint a gerenda **alsó szálában** húzást okozó nyomatéki igénybevételt **pozitív nyomatéknak**, a **felső szálat húzó** nyomatéki igénybevételt **negatív nyomatéknak** nevezzük.

8.2. Az igénybevételek meghatározása

Az igénybevételek meghatározása a tartó egy keresztmetszetében elvágott(nak képzelt) tartó két részének nyugalmi állapota, a rájuk működő erők egyensúlya alapján történhet. A tartóelemekre felírt egyensúlyi kijelentésben természetesen a külső terhelő (aktív) és támasztó (passzív) erők mellett szerepeltetni kell az átvágott kapcsolatban felvett belső erőket (síkbeli tartók esetében:) $\mathbf{N_x - T_z - M_y}$ igénybevételeket is. Így az egyensúlyi kijelentés mindkét tartórész esetében két-két ismeretlen erőkomponenst és egy-egy ismeretlen nyomatékot tartalmaz, amelyeket a felírható három-három statikai egyenlet segítségével egyértelműen meghatározhatunk. A két tartórész vizsgálatából kiadódó igénybevételek természetesen egymás ellentettjei lesznek, de a fentiekben részletezett relatív előjelkonvenció miatt a normál- és a nyíróigénybevételek **előjele mindig azonos lesz**.

A tartóra működő egyensúlyi erőrendszer és a vizsgálandó **C** jelű keresztmetszet

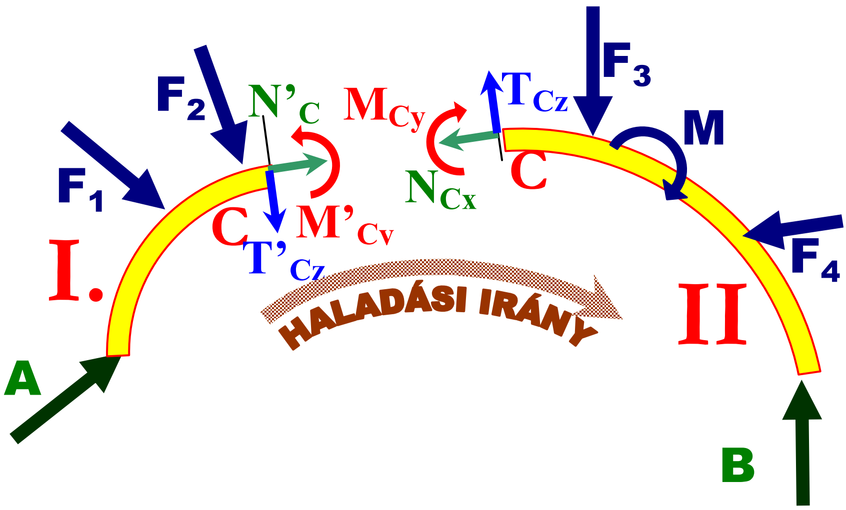


$$\left(F_1, F_2, F_3, F_4, M, A, B\right) = 0$$

A két tartóelemet külön vizsgálva az egyensúlyi kijelentések:

$$\left(F_1, F_2, A, N'_{Cx}, T'_{Cz}, M'_{Cy}\right) = 0 \Rightarrow (F_1, F_2, A) = (N_{Cx}, T_{Cz}, M_{Cy})$$

$$\left(F_3, F_4, M, B, N_{Cx}, T_{Cz}, M_{Cy}\right) = 0 \Rightarrow (F_3, F_4, M, B) = (N'_{Cx}, T'_{Cz}, M'_{Cy})$$



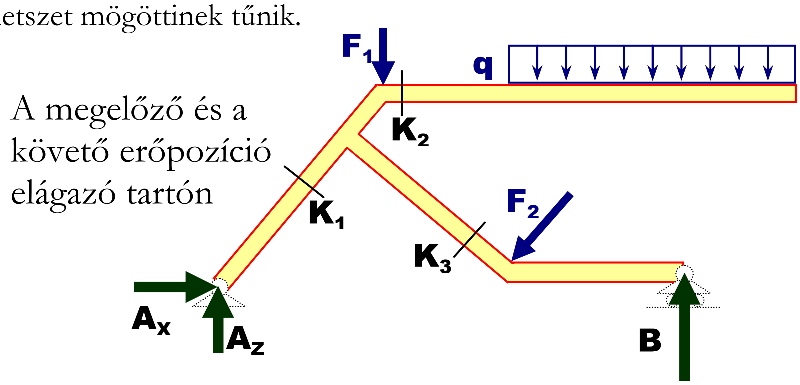
Az egyensúlyi kijelentésekben a keresztmetszeti igénybevételek dinámjainak indexelését is megjelenítettük. A két tartórész egyensúlyi kijelentését átalakítva látható, hogy a haladási irány szerinti követő tartórész csatlakozási véglapján szereplő kapcsolati dinámok a megelőző részen működő erőkkel egyenértékűek, azaz meghatározásuk egyszerű vetületi és nyomatéki egyenletekkel lehetséges. Megállapodás szerint ezeket a dinámokat nevezzük a keresztmetszet igénybevételeinek.

Egy keresztmetszet **normáligénybevételét** a **keresztmetszetet a haladási irány szerint megelőző erők eredőjének a keresztmetszet normálisába eső vetületeként**, vagy másként: a keresztmetszetet **megelőző erők normálirányú vetületösszegeként** határozhatjuk meg.

Egy keresztmetszet **nyíróigénybevételét** a **keresztmetszetet a haladási irány szerint megelőző erők eredőjének a keresztmetszet normálisára merőleges vetületeként**, vagy másként: a keresztmetszetet **megelőző erők nyíróirányú vetületösszegeként** határozhatjuk meg.

Egy keresztmetszet **nyomatéki igénybevételét** a **keresztmetszetet a haladási irány szerint megelőző erők eredőjének a keresztmetszet súlypontjára vett nyomatékaként**, vagy másként: a keresztmetszetet **megelőző erők súlyponti nyomatékösszegeként** határozhatjuk meg.

A megelőző erők közé a megelőző tartóelemre működő valamennyi erőt-nyomatékot bele kell számítani, akkor is, ha geometriailag a vizsgált keresztmetszet mögöttinek tűnik.



KM	ELŐTTE	MÖGÖTTE
K_1	A_X, A_Z	B, F_1, F_2, q
K_2	A_X, A_Z, B, F_1, F_2	q
K_3	A_X, A_Z, F_1, q	B, F_2

Amint a szétbontott tartóelemekre felírt egyensúlyi kijelentésekből látszik, a keresztmetszeti igénybevételek a keresztmetszetet **követő** erőkből is meghatározhatók, csak ez esetben a statikai egyenletekből a megállapodás szerinti keresztmetszeti igénybevételek **ellentettjeit** kapjuk, tehát az előjelhelyes igénybevételekhez a keresztmetszetet követő erőkből számított értékek előjelfordítása után juthatunk.

A **normálerő** és a **nyíróerő** a haladási iránytól és a számításba vett (megelőző vagy követő) erőcsoport helyzetétől függetlenül **az előjelszabály következetes alkalmazásával mindig előjelhelyes eredményt szolgáltat**. A nyomatéki igénybevételek számítása során most is óvatosnak kell lennünk, és meg kell különböztetnünk a haladási irány megfordításának és a keresztmetszet előtti-mögötti erőcsoport alkalmazásának esetét. A **nyomatéki igénybevételek helyes felrajzolásához a tartóelem deformációs vonala**, ill. a vizsgált keresztmetszetre (akár balról, akár jobbról) működő nyomaték által okozott kicsiny elfordulás iránya, a belőle származó **húzott-nyomott oldal nyújt biztos támpontot**.

8.3. Az igénybevételi függvények ábrázolása

A mérnöki gyakorlatban a matematikai függvények grafikus ábrázolásával szoktunk dolgozni. Az igénybevételi függvények megrajzolt-megszerkesztett ábrázolását **igénybevételi ábrák**nak nevezzük. Az igénybevételi ábrákon nagyon szemléletesen jelennek meg a matematikai függvénytulajdonságok, így ezeket ismerve az ábrák megszerkesztése, vagy a már elkészült ábrák ellenőrzése könnyen megoldható.

8.3.1. Az igénybevételi ábrák tengelyvonala

Az igénybevételi függvények a rúdszerkezet minden egyes keresztmetszetére megadják az ott keletkező belső erők nagyságát-irányát-nyomatékát. Ha ezeket a függvényeket ábrázolni akarjuk, olyan ábrázolásmódot kell választanunk, amely biztosítja **a keresztmetszetek és az igénybevételek kölcsönösen egyértelmű kapcsolatát**.

> A tartó tengelypontjainak és az igénybevételi értékeknek kölcsönösen egyértelmű megfeleltetése érdekében az **igénybevételi ábrákat a tartó tengelyvonalával, hálózatával megegyező tengelyvonalra, hálózatra rajzoljuk**.

Egyszerűbb, függőleges elemet nem tartalmazó tartószerkezetek esetében rajzolhatjuk az igénybevételi ábrákat a tengelyvonal vízszintes vetületére is, de arra akkor is ügyelnünk kell, hogy a vetületi tengely egy pontjához a tartótengelyen is egy és csak egy pont tartozzék.

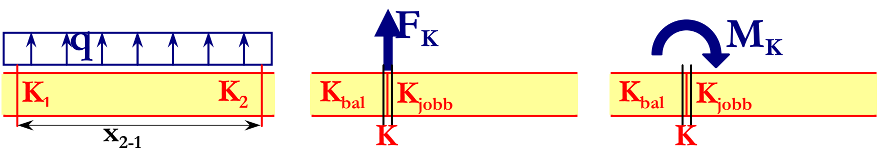
8.3.2. Az igénybevételi ábrák előjel-konvenciója

A(z építő)mérnöki gyakorlatban az igénybevételi ábrákat úgy rajzoljuk meg, hogy a **tengely alá a pozitív, fölé a negatív ordináták** kerüljenek. A nyomatéki ábrákban alapvetően nem az előjel szerint rakjuk fel az értékeket, hanem a már ismertetett gondolatmenet szerint a húzott (domború) oldalra rajzoljuk az ábrákat.
Egyenes tengelyű gerendák esetén, balról jobbra határozva meg az igénybevételeket, az előjelszabály a nyomatéki ábrákra is jól alkalmazható.

Más szakterületek (pl. gépészmérnökök) ettől eltérő előjel-konvenciót is alkalmazhatnak, de ez az igénybevételi függvények előállítását, használhatóságát, matematikai sajátosságait nem érinti.

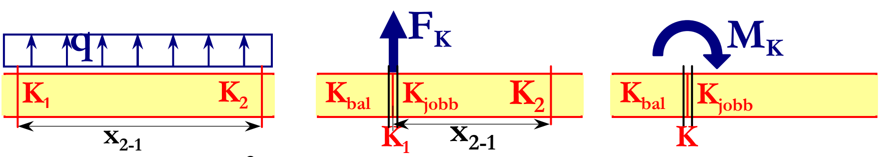
8.3.3. Az igénybevételi függvények matematikai jellegzetességei

A keresztmetszeti igénybevételek meghatározására szolgáló összefüggések segítségével (elvileg) tetszőleges számú pontban meg tudjuk határozni a normálerő, a nyíróerő és a nyomaték értékét, de így csak fáradságos munkával állíthatók elő az igénybevételi függvények ábrái. Ha viszont a tartó **tengelyvonala** és a **terhek** (legalább szakaszosan) **matematikai függvényekkel leírhatók**, akkor az igénybevételek meghatározási algoritmusa segítségével előállítható **az igénybevétel matematikai függvénye**, és a végtelen sok pont helyett elegendő csak a szakaszvégpontokra számítani az igénybevételi értékeket, a közbenső pontokban pedig az ábra a függvénysajátosságok szerint rajzolható.



$T_{K2}=T_{K1}+q\times x_{2-1}$ $\quad$ $T_{K\,jobb}=T_{K\,bal}+F_K$ $\quad$ $T_{K\,jobb}=T_{K\,bal}+0$

$\Delta T_{K2-K1}=q\times x_{2-1}$ $\quad$ $\Delta T_{K\,jobb-bal}=F_K$ $\quad$ $\Delta T_{K\,jobb-bal}=0$



$M_{K2}{}^{q}=M_{K1}+q\times x_{2-1}{}^2/2$ $\quad$ $M_{K1jobb}=M_{K1bal}+0$ $\quad$ $M_{K\,jobb}=M_{K\,bal}+M_K$

$\Delta M_{K2-K1}{}^{q}=q\times x_{2-1}{}^2/2$ $\quad$ $\Delta M_{K2-K1}{}^{F}=F_K\times x_{2-1}$ $\quad$ $\Delta M_{K\,jobb-bal}=M_K$

A fenti ábrák a terhek és az igénybevételek közötti legegyszerűbb matematikai összefüggéseket mutatják be. (A függvénykapcsolatban a terheket az igénybevételi ábrák előjelszabálya alapján **előjelezve** kell szerepeltetni!)

Az ábrák alapján látható, hogy:

a tengelyre merőleges, egyenletesen **megoszló terhelés** a **nyíróigénybevételben lineáris**, a **nyomatéki igénybevételben parabolikus** változást okoz;

a tengelyre merőleges **koncentrált erő** a **nyíróigénybevételben konstans (szakadásos, „ugrást”), a nyomatéki igénybevételben lineáris** változást okoz;

a **koncentrált nyomaték** a **nyíróigénybevételben zérus**, a **nyomatéki igénybevételben konstans (szakadásos, „ugrást”)** változást okoz.

A terhek és az igénybevételek közötti további összefüggések:

Minthogy a normál- és a nyíróigénybevétel a keresztmetszetet megelőző erők megfelelő irányú **vetület**összegeként adódik, ezen igénybevételek értéke csak akkor módosulhat, ha **vagy a vetítendő mennyiség** (a megelőző erőcsoport), **vagy a vetítési irány** (a keresztmetszet állása, normálisa) **megváltozik**. Ha tehát a tartó **egy egyenestengelyű szakaszára** igaz, hogy **a megelőző erők csoportja** minden keresztmetszetre **ugyanaz** (a vizsgálati keresztmetszetünk mozgatása során nem érint sem megoszló, sem koncentrált erőt), akkor ezen a szakaszon mind **a normálerő**, mind **a nyíróerő** függvénye és ábrája **konstans**.
A normál- és a nyíróerő **vetületi** mivoltából fakad az is, hogy a koncentrált nyomatéki teher **közvetlenül** (támadási keresztmetszetében) **nem jelenik meg** ezen igénybevételek függvényében, hiszen az erőpárnak nincs (erő)vetülete. Természetesen a támaszerők megváltoztatása révén a koncentrált nyomatéki teher is befolyásolja a normál- és nyíróigénybevételi ábrák alakulását.
Ugyancsak a **vetületi** származtatásra vezethető vissza, hogy a tört tengelyvonalú tartón, ha a töréspontban nem működik koncentrált erő, a töréspont előtti és az azt követő (határ)keresztmetszetekben a normál- és a nyíróerők **vektoriális összege** azonos lesz.

8.3.4. A differenciális összefüggés a teher- és az igénybevételi függvények között

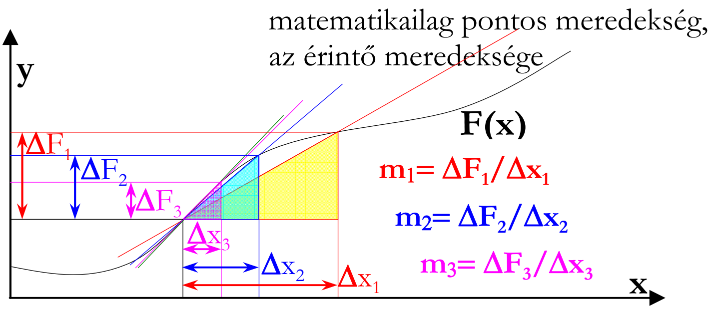
Az előző pontban a teherfüggvény és az igénybevételi függvények elemi matematikai kapcsolatát mutattuk be. Van azonban közöttük egy teljesen általános, felsőbb matematikai eszközökkel kezelhető összefüggés is, ami mind az igénybevételi ábrák (pontosabban: a nyíróerő és a nyomatéki ábra) előállítása, mind pedig ellenőrzése során gyors és megbízható módszerként alkalmazható.

Egy egyenestengelyű, a tengelyre merőleges állású, változó intenzitású megoszló teherrel terhelt tartóból vágjunk ki egy $\mathbf{\Delta x}$ szélességű lamellát. Jelölje a tartó igénybevételi függvényeit rendre $\mathbf{N_x}(x)$ – $\mathbf{T_z}(x)$ – $\mathbf{M_y}(x)$! Az **x** koordinátájú keresztmetszet igénybevételeit a fenti (egyelőre ismeretlen) függvények **x** ponti helyettesítési értékeként kaphatjuk meg. Ennek megfelelően a $\mathbf{\Delta x}$ vastagságú lamellánk **x** koordinátájú metszetén az $\mathbf{N_x}(\mathbf{x})$ – $\mathbf{T_z}(\mathbf{x})$ – $\mathbf{M_y}(\mathbf{x})$ igénybevételi dinámok ellentettjei fognak működni, az $\mathbf{x+\Delta x}$ pozíciójú keresztmetszetben pedig az $\mathbf{N_x}(\mathbf{x+\Delta x})$ – $\mathbf{T_z}(\mathbf{x+\Delta x})$ – $\mathbf{M_y}(\mathbf{x+\Delta x})$ keresztmetszeti igénybevételekkel kell számolnunk, lásd a két oldallal hátrább lévő ábrán. A feladat megfogalmazásában kikötöttük, hogy a teher az egyenes tengelyre **merőleges** legyen, ebből következően a lamellánk vastagságán a **normáligénybevétel nem változhat**, vizsgálatunkban a továbbiakban ezért nem szerepeltetjük. Sajnos, azonban a nyíróerő és nyomatéki igénybevételi függvények ismeretének hiányában sem a helyettesítési értékeikről, sem az azok különbségeként megjelenő igénybevétel-differenciáikról nem tudunk semmit mondani. Tekintettel azonban arra, hogy $\mathbf{\Delta x}$ kicsi, sőt határátmenetet képezve értéke a zérushoz tart, az $\mathbf{x+\Delta x}$ metszetbeli függvényértékek előállítására, a függvényérték-növekmény meghatározására egy egyszerű közelítő eljárást alkalmazhatunk. Ezt az eljárás a matematikában a függvények sorbafejtéseként tárgyalják, nekünk azonban a pontos megoldás helyett elegendő lesz a sorfejtés első (lineáris) tagját figyelembe vennünk.

A sorfejtés azt állítja, hogy ha egy függvény egy **x** pontjában ismerjük a **helyettesítési értéket** és a **meredekséget**, akkor a ponttól (elegendően kicsiny) $\mathbf{\Delta x}$ távolságban lévő pontban a függvényérték közelíthető az **x ponti helyettesítési érték és a meredekségből számítható (lineáris) növekmény összegével azonos**. Ez a közelítés $\mathbf{\Delta x}$ csökkenésével egyre javul, határátmenetben pontos lesz.

Természetesen a függvényérték a sorfejtés magasabb fokszámú tagjainak figyelembevételével pontosabban közelíthető, de akkor a függvénykapcsolat linearitását elveszítenénk, ami pedig az egymásra halmozhatóság miatt igen előnyös.

A nyíróerő és a nyomaték közelítő értékét az $x+\Delta x$ helyen tehát az **x** helyre érvényes **függvényérték**, és az **x** helyre érvényes **meredekség** ismeretében tudjuk előállítani. A függvény egy pontbeli meredekségén a pontban a függvényhez rajzolt érintő meredekségét értjük. Ezt az értéket pedig – amint azt matematikai tanulmányainkból tudjuk – a függvény **deriváltjának** ugyanazon pontbeli értéke hordozza. Ha matematikai ismereteink még hiányosak lennének, az **x** pontbeli (érintő) meredekséget helyettesíthetjük az **x** és az **x+Δx** független változó-értékű pontok közötti **húr** meredekségével, ami **Δx** minden határon túli csökkentésével épp az érintőbe megy át.

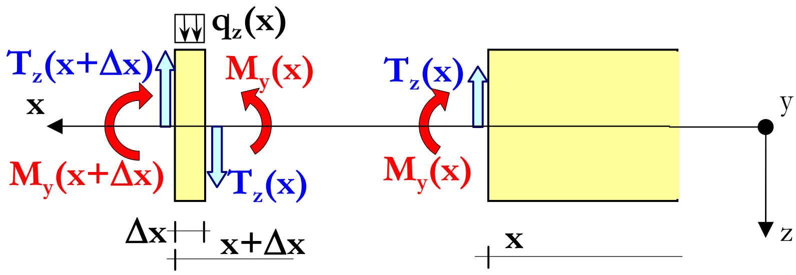


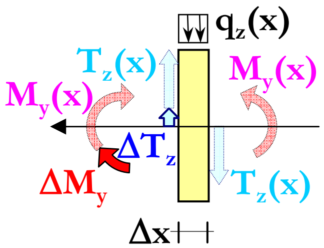
Az **y=F(x)** függvény egy pontbeli **meredeksége** tehát közelíthető a pont környezetében, tőle **Δx** távolságra felvett segédpontokon át húzott húrok meredekségével, azaz a **függvényérték növekményének és a független változó növekményének a hányadosával vehető azonosnak.** (Ezeknek az ún. „differenciahányadosoknak” a határértéke lesz $\Delta x \Rightarrow 0$ esetén a differenciálhányados, és ha egy intervallum minden pontjában létezik ez a differenciálhányados, akkor ezt a független változóhoz rendelve kapjuk meg az eredeti függvény derivált függvényét.)

A függvényérték növekményének közelítő meghatározása irányába tett rövid kitérő után a függvénykapcsolatok elemzéséhez vizsgáljuk meg a **Δx** vastagságú lamella egyensúlyát! A **Δx** értékét kicsinynek választva a teherintenzitás változását a lamellaszélesség mentén elhanyagolhatjuk, és az **x+Δx** helyen a függvényértékek növekményét a sorfejtés lineáris tagjával helyettesíthetjük.

A lamella egyensúlyához (a tengelyirányú erőket most figyelmen kívül hagyva) a nyíróirányú vetületösszegnek és a (tetszőleges pontra vett) nyomatékösszegnek kell zérusnak lennie.

Az x és az **x+Δx** pozíciójú keresztmetszetek igénybevételei
(a lamella jobb oldalán valójában a definíció szerinti igénybevételek ellentettjei jelentkeznek, az ábrában azonban az ellentettséget a vektorok irányának megfordításával már megjelenítettük)





A nyíróerő és a nyomaték a lamella **bal** oldalfelületén a lineáris növekményekkel számolva a következőképpen alakul:

$$T_z(x+\Delta x) \approx T_z(x) + \frac{\Delta T_z}{\Delta x}\Delta x = T_z(x) + \Delta T_z$$

$$M_z(x+\Delta x) \approx M_z(x) + \frac{\Delta M_z}{\Delta x}\Delta x = M_z(x) + \Delta M_z$$

A lamellára felírható egyensúlyi egyenletekben az x koordinátájú metszetre vonatkozó igénybevételi dinámok kiejtik egymást, elegendő csak a növekményekkel számolni.

$$\sum_{lamella} F_{iT_z} = +\Delta T_z - q_z(x)\Delta x = 0 \Rightarrow q_z(x) = \frac{\Delta T_z}{\Delta x} = m_T$$

A tartótengelyre merőleges vetületi egyenletből azt kapjuk, hogy a teherfüggvény értéke a nyíróerőfüggvény (korábbiakban megállapított) meredekségével azonos. A **Δx** értéket minden határon túl csökkentve, határátmenetben ez a megállapítás már nemcsak közelítés, hanem korrekt függvénykapcsolat.

A differenciális összefüggés alapján **a teherfüggvény a nyíróerőfüggvény meredekségfüggvénye**, vagy matematikai szóhasználattal **derivált függvénye**.

A nyomatéki egyenletet a lamella jobb oldali (**x** koordinátájú) lapjának **y**-nal párhuzamos tengelyére írva:

$$\sum_{lamella} M_i^y = +\Delta M_y + T_z \times \Delta x + \boxed{\Delta T_z \times \Delta x - q_z(x)\Delta x \times \Delta x / 2} = 0$$

Tekintettel arra, hogy $\mathbf{\Delta x}$ és $\mathbf{\Delta T_z}$ infinitezimálisan kicsiny, szorzatukat, vagy magasabb hatványaikat tartalmazó tagokat – mint másodrendűen kicsiny mennyiségeket – az összegzésben elhanyagolhatjuk. A megmaradó tagokat átrendezve:

$$\sum_{lamella} M_i^y = +\Delta M_y + T_z \times \Delta x = 0 \Rightarrow T_z = -\frac{\Delta M_y}{\Delta x} = m_M$$

A lamella egyensúlyára felírt nyomatéki egyenletből azt kapjuk, hogy a nyíróerőfüggvény ellentett értéke a nyomatéki függvény (korábbiakban megállapított) meredekségével azonos. A $\mathbf{\Delta x}$ értéket minden határon túl csökkentve, határátmenetben ez a megállapítás már nemcsak közelítés, hanem korrekt függvénykapcsolat.

A differenciális összefüggés alapján **a nyíróerőfüggvény a nyomatéki függvény negatív meredekségfüggvénye**, vagy matematikai szóhasználattal **derivált függvényének ellentettje**.

A lamella egyensúlyára vonatkozó nyomatéki egyenletet más pontra-tengelyre írva **csak a másodrendűen kicsiny mennyiségek változnak**, azaz a nyomatéki és a nyíróerő függvények kapcsolatára vonatkozó megállapításunk mindenképp érvényben marad.

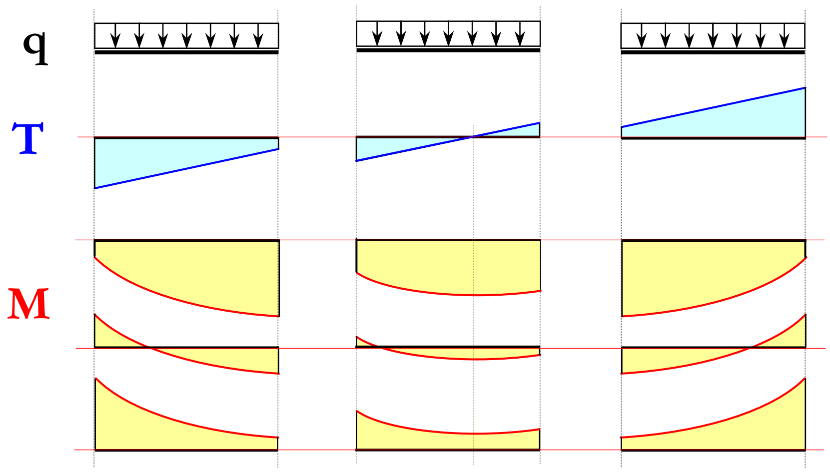
A differenciális összefüggés egyébként jóval tágabb érvényességű, mint amit itt most be tudtunk mutatni: a tartó (tengelyre merőleges) **teherfüggvénye**, az **igénybevételi**, és az **alakváltozási** függvényei közötti matematikai kapcsolatot írja le, és mind a **rúdszerkezetek**, mind a **felületszerkezetek** esetében használható.

A differenciális összefüggés a terheket és az igénybevételeket **folytonos függvényekként** kezeli, ezért szinguláris helyeken nem használható.
A terhek oldaláról szinguláris helynek kell minősítnünk a **koncentrált erők** és a **koncentrált nyomatékok** támadási keresztmetszetét, amelyeknél a differenciális összefüggés csak a **megelőző** ill. a **követő** keresztmetszetekre alkalmazható.

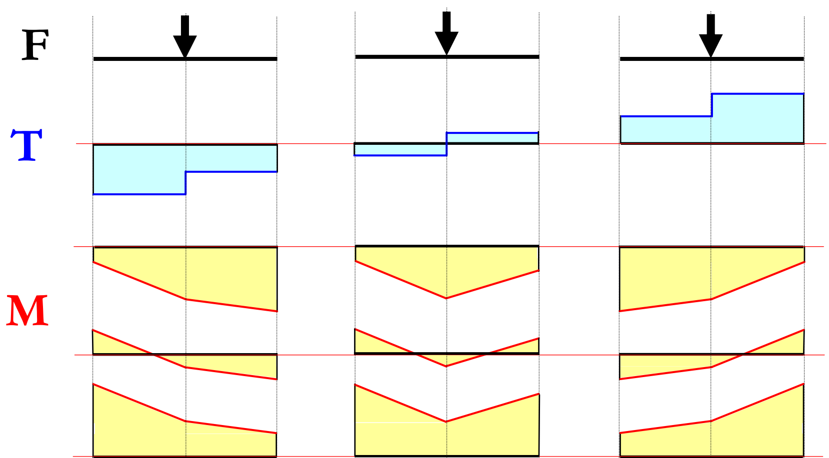
8.3.5. A teher- és az igénybevételi függvények grafikus összefüggései

A teherfüggvény és a síkbeli tartók igénybevételi függvényei között fennálló matematikai kapcsolat grafikusan is megjeleníthető. A leggyakoribb teherfajtákra az összeférhető függvényalakokat az alábbiakban foglaltuk össze.

tengelyre merőleges, egyenletesen megoszló erő

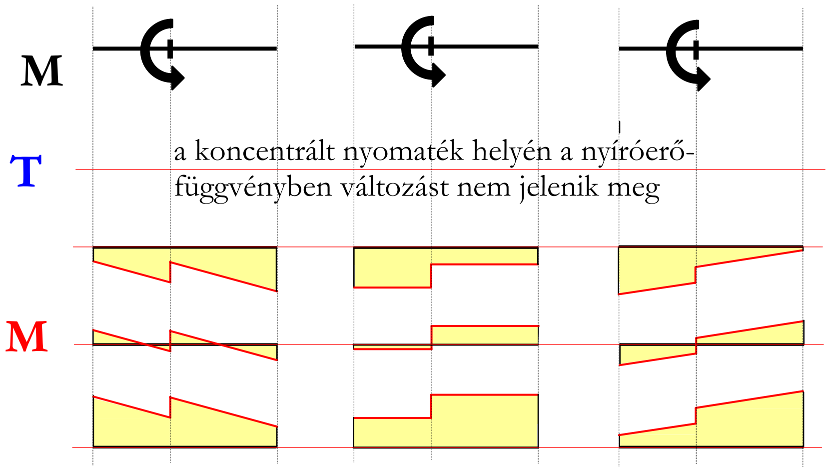


tengelyre merőleges koncentrált erő



A tényleges szerkezeten az igénybevételi ábrák a csatlakozási felületek egyensúlyi feltételei alapján alakulnak ki, itt csak a függvények jellegét mutattuk be.

koncentrált nyomaték

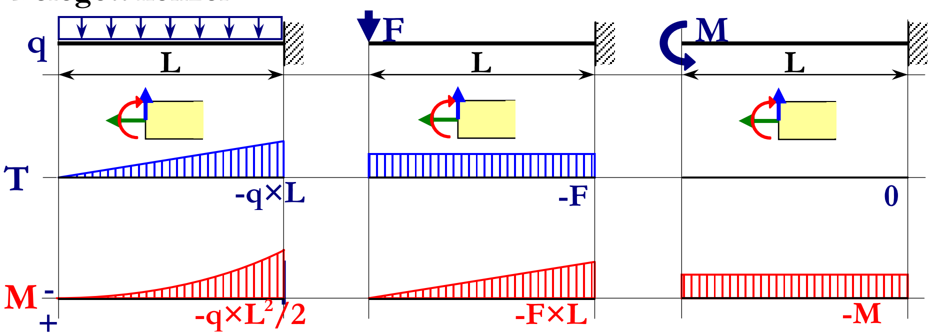


A koncentrált nyomaték a teherfüggvény szinguláris pontja, ezért itt a nyomatéki függvény lokális szélsőértékéhez nem tartozik nyíróerő-előjelváltás!

8.3.6. Az elemi tartók igénybevételei

A (leg)összetett(ebb) tartók igénybevételi függvényei is egyszerű elemekből épülnek fel. Első lépésként célszerű tehát megismernünk (és megjegyeznünk!) a (leg)egyszerű(bb) tartók leggyakoribb terhekre kialakuló igénybevételi ábráinak alakját és jellemző ordinátáit.
Az igénybevételek meghatározása során balról jobbra – az x tengely pozitív ágával ellentétes irányban – haladunk végig (szokásos haladási irány).

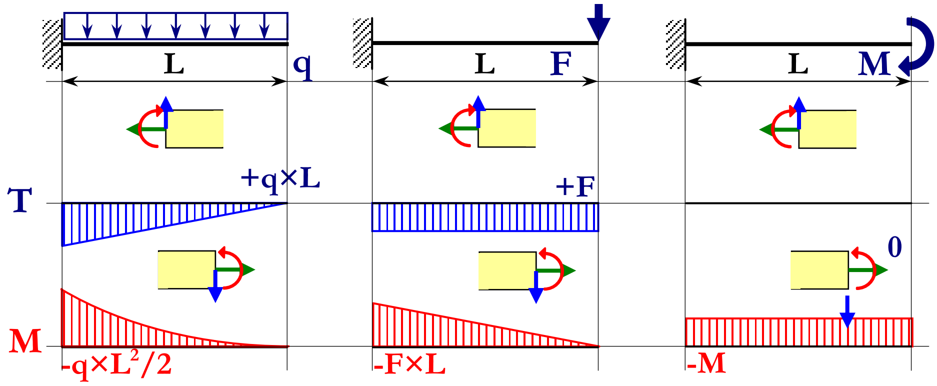
Befogott konzol



A nyomatéki értékek előjele a mérnöki gyakorlatban szokásos előjelezés, ami **balról jobbra** haladva az **előjelszabályból** is kiadódik.

A konzolt a terheléssel együtt a befogási síkra tükrözve a nyíróerők előjele **megváltozik**, de a nyomatékokat **ugyanarra az oldalra** kell rajzolnunk.

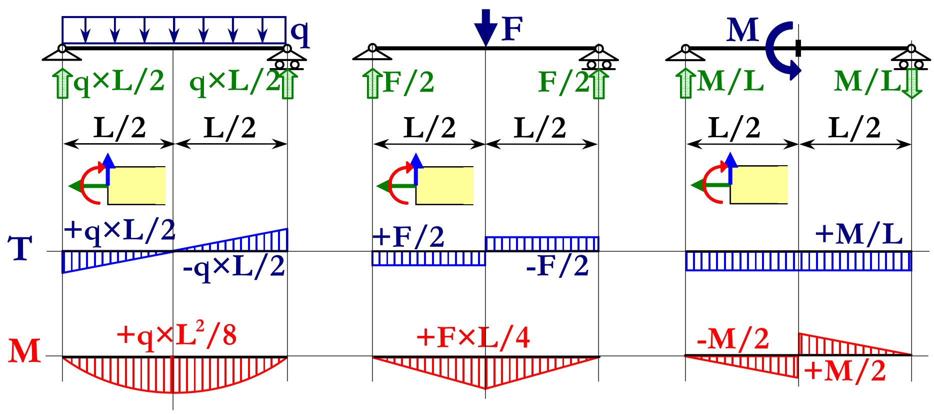
A terheket mindkét befogási változatban úgy vettük fel, hogy a konzolvég lefelé mozduljon, azaz a konzol lefelé görbül, **felső oldala lesz a húzott** (domború) **oldal, így a nyomatéki ábrát biztosan oda kell rajzolnunk**.



A bal végen befogott konzoltartók esetében a balról jobbra történő igénybevétel-meghatározás a befogási reakciódinámok ismeretét és felhasználását igényli. Ennek elkerülésére két lehetőségünk van:

- megtartjuk a haladási irányt **balról jobbra** mutatónak, de a keresztmetszetet **követő erőkből** számítjuk az igénybevételeket
- **megfordítjuk** a haladási irányt (VIGYÁZAT! A nyomatéki igénybevétel ilyen esetben az órával ELLENTÉTES pozitív!), és így már a keresztmetszetet **megelőző erőkből** dolgozhatunk.

A kéttámaszú tartó

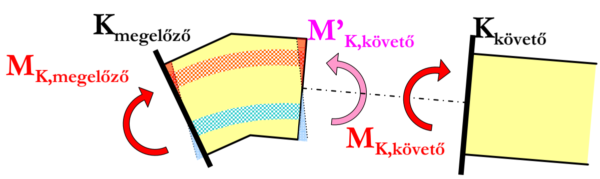


8.3.7. Az igénybevételek alakulása rúdcsomópontokban

Összetett rúdszerkezetekben a rudak csatlakozási pontjaiban, a **csomópontok**ban mind számítástechnikai, mind szerkezeti okokból ismernünk kell az igénybevételek értékét. A csomópontokra vonatkozó megállapításaink – mint ahogyan a szerkezet bármely részének viselkedésére vonatkozó megállapításaink – az elem, esetünkben a csomópont **egyensúlyán** alapulnak. A csomópontra minden csatlakozó rúdelemről kapcsolati erők és nyomatékok adódnak át, amelyek a csomóponti elemnek a haladási irányt megelőző metszetein az ottani **igénybevétellel**, a haladási irányt követő metszetein az ottani igénybevétel **ellentettjével** azonosak. A csomópont egyensúlyának vizsgálatából tehát az igénybevételi függvények csomópontbeli viselkedésére vonatkozó megállapítások is leszűrhetők.

> A csomópontokban az igénybevételek helyes meghatározásához **minden metszetben** (a definíció szerint) **az azt** (bármely irányból) **megelőző** (vagy követő) **erők** hatásainak **összességét** kell számításba vennünk.

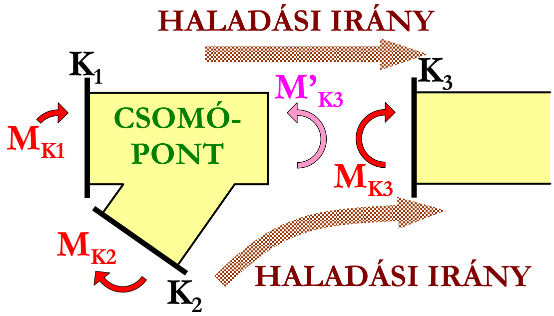
A vizsgálandó keresztmetszetekben a megállapodás szerinti előjelszabály a normál- és a nyíróigénybevételek előjelét **mindig helyesen** adja, a nyomatékok felrajzolásánál pedig a vizsgált elemvég **húzott oldalát** kell figyelembe vennünk.
A csomópont egyensúlyi vizsgálatában a csatlakozó rúdmetszetekben ébredő **normál- és nyíróerőknek** (és a csomópontra ható koncentrált erőknek) két választott tengely mentén kell a **vetületi egyenletet** kielégíteniük.
A **csomópont nyomatéki egyensúlyában** csak a csatlakozó rúdmetszetekben ébredő nyomatéki igénybevételek szerepelnek, ezeknek kell a csomópontra vonatkozó **nyomatéki egyenletet** kielégíteniük.
Két rúdelem csatlakozó csomópontjában (ez valójában a törtvonalú tartó töréspontja) a két nyomaték **értéke azonos**, **forgatóértelme ellentétes** lesz, de a definíció szerinti nyomatéki **igénybevétel** a csomópontot **megelőző** és **követő** keresztmetszetben előjelben és értékben is **azonos** lesz.
A tartóban a **húzott** és a **nyomott** szálak **nem keresztezhetik egymást**, hiszen ott a nyomatékbírás zérus lenne, az a pont belső csuklóként viselkedne!



Két rúdvég találkozási csomópontjában a nyomatéki igénybevétel előjelre és értékre is azonos lesz.

Több rúd csatlakozási csomópontjában a nyomatéki egyenletben is **több tag** fog szerepelni, általánosan tehát csak annyit állapíthatunk meg, hogy a csatlakozó rúdvégekről átadódó nyomatékok **összegének** kell zérusnak lennie.

Az ábrából látható, hogy $\mathbf{M'_{K3}}$ nyomaték az $\mathbf{M_{K1}}$ és $\mathbf{M_{K2}}$ nyomatékokkal tart egyensúlyt, tehát $\mathbf{M_{K3}}$ értéke az $\mathbf{M_{K1}}$ és $\mathbf{M_{K2}}$ nyomatékok **algebrai összegével** lesz azonos.



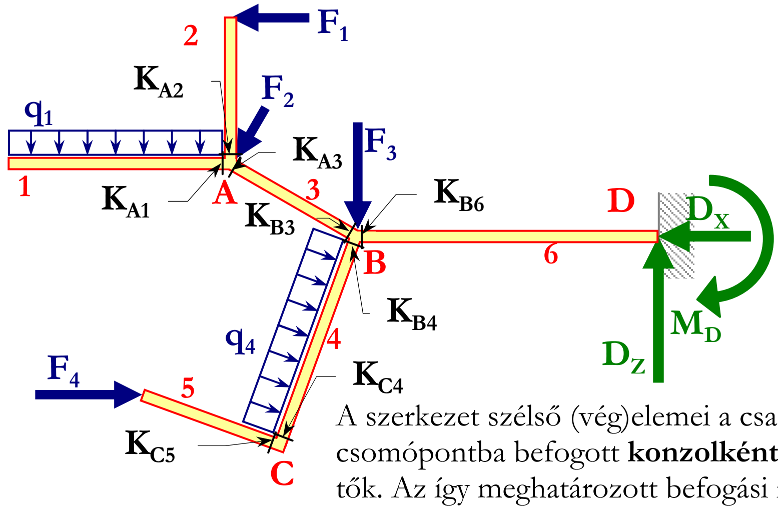
Több rúdvég találkozási csomópontjában **egy kiválasztott rúdvégi keresztmetszet** nyomatéki igénybevétele **a többi rúdvégi keresztmetszet** nyomatéki igénybevételeinek **algebrai** (előjelhelyes) **összegeként adódik**.

Az összetett szerkezet keresztmetszeteiben ébredő **normál- és nyíróigénybevétel** a megelőző erők **vetületösszegeként előjelhelyesen** adódik. A nyomatéki igénybevétel helyes felrajzolásához a vizsgált (a választott haladási irány szerinti követő) rúdcsonkra felrajzoljuk a megelőző erők forgatónyomaték-összegét, a szokásos előjel-értelmezésben (a pozitív nyomaték az órával megegyezően forgat), majd a keresztmetszet várható (kicsiny) elfordulása alapján megállapítjuk, melyik a **húzott oldal**, és arra az oldalra rajzoljuk fel a nyomaték kiszámított értékét.

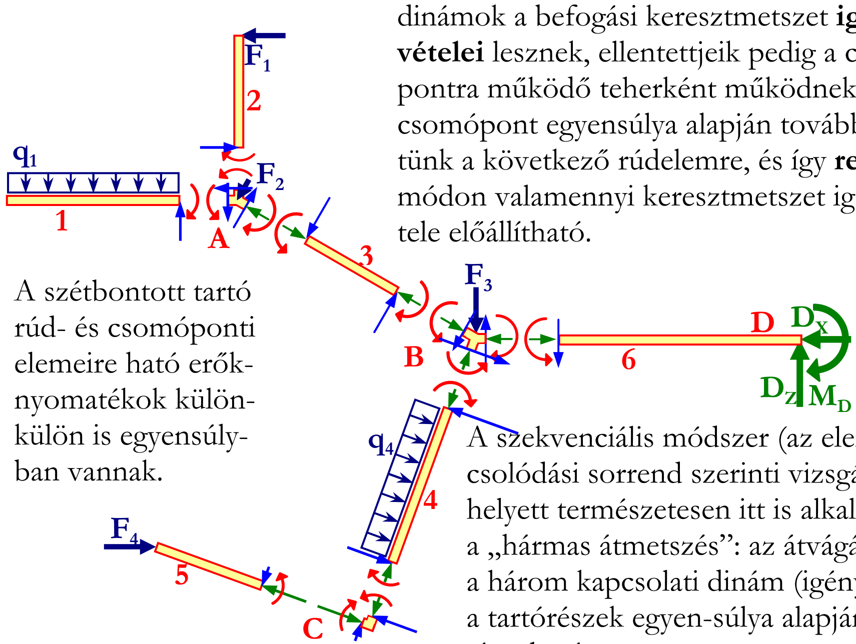
Természetesen a csomópontra átadódó nyomatékok összegének zérusnak kell lennie, ha tehát a csomóponthoz csatlakozó keresztmetszetek nyomatéki igénybevételei **egy kivételével** ismeretesek, **az az egy** bizonyosan a **többi nyomatéki érték összegével** lesz azonos (definíció szerint a keresztmetszeti igénybevétel a **követő** elemre működő kapcsolati dinám, ezért a csomóponti egyensúlyozó nyomaték **ellentettje** lesz a keresztmetszeti igénybevétel).

A következő példán egy összetett szerkezet keresztmetszetiben keletkező igénybevételek meghatározási lehetőségét mutatjuk be.

Az egyértelmű azonosítás érdekében a szerkezet csomópontjait NAGYBETŰKKEL, a rúdelemeket számokkal jelöltük. Ezek felhasználásával a csomópontokhoz csatlakozó rúdvégi keresztmetszetek jelölése is egyértelmű.



A szerkezet szélső (vég)elemei a csatlakozó csomópontba befogott **konzolként** kezelhetők. Az így meghatározott befogási reakciódinámok a befogási keresztmetszet **igénybevételei** lesznek, ellentettjeik pedig a csomópontra működő teherként működnek. A csomópont egyensúlya alapján továbbléphetünk a következő rúdelemre, és így **rekurzív** módon valamennyi keresztmetszet igénybevétele előállítható.



A szétbontott tartó rúd- és csomóponti elemeire ható erők-nyomatékok külön-külön is egyensúlyban vannak.

A szekvenciális módszer (az elemek kapcsolódási sorrend szerinti vizsgálata) helyett természetesen itt is alkalmazható a „hármas átmetszés”: az átvágás helyén a három kapcsolati dinám (igénybevétel) a tartórészek egyen-súlya alapján meghatározható.

8.3.8. Az igénybevételek szimmetria-tulajdonságai

A tartószerkezetek tervezése során gyakran alkalmazzuk a szimmetriát. A geometriai (hálózati vagy keresztmetszeti), a megtámasztási, merevségi, terhelési (tengelyes) szimmetria nemcsak a **számítási munkát egyszerűsíti**, de a szerkezet **viselkedését is stabilabbá, belső feszültségeloszlását egyenletesebbé teszi**. A szimmetrikus szerkezetekben a belső erőknek is szimmetria-tulajdonságot kell mutatniuk, ezt pedig az igénybevételi ábrák meghatározása-ellenőrzése során jól felhasználhatjuk.
Amint már az összetett tartók vizsgálata során megállapítottuk, **szimmetrikus tartó**nak a **hálózati geometriájában**, **keresztmetszeti merevségeiben** és **megtámasztásaiban szimmetrikus** tulajdonságú szerkezeteket tekinthetjük. Ha az ilyen tulajdonságú tartón a **teher is szimmetrikus**, akkor **várható**, hogy a külső és belső kapcsolati erők és az **igénybevételek is szimmetria-tulajdonságot mutassanak**.

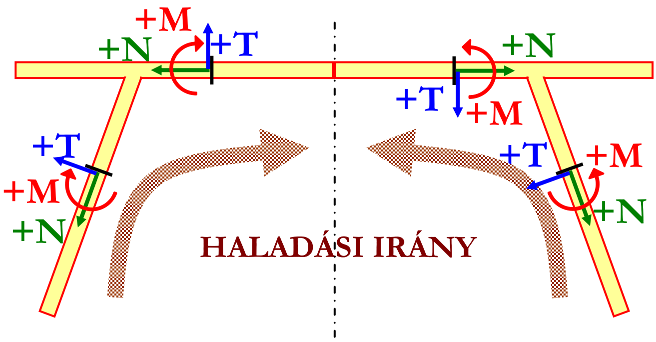
A teherfüggvény és az igénybevételi függvények között érvényes a **differenciális összefüggés**, azaz a **nyomatéki függvény deriváltja** a (negatív) **nyíróerőfüggvényt**, a **nyíróerőfüggvény deriváltja a teherfüggvényt** adja. A **szimmetrikus** teherfüggvény matematikailag **páros függvény** lesz, matematikai tanulmányainkból viszont tudjuk, hogy a **páros** függvény deriváltja **páratlan** függvény, a **páratlan** függvény deriváltja **páros** függvény lesz. A mérnöki gyakorlatban a **függvények párossága tengelyes szimmetriát**, **páratlansága tengelyes ferde szimmetriát** jelent.
Ha tehát a teherfüggvény szimmetrikus (azaz páros), a nyíróerőfüggvénynek páratlannak, a nyomatéki függvénynek ismét páros függvénynek kell lennie.

> **A szimmetrikus tartón szimmetrikus teherből a normálerő és a nyomatéki ábra szimmetrikus, a nyíróerőábra ferdén szimmetrikus lesz.**

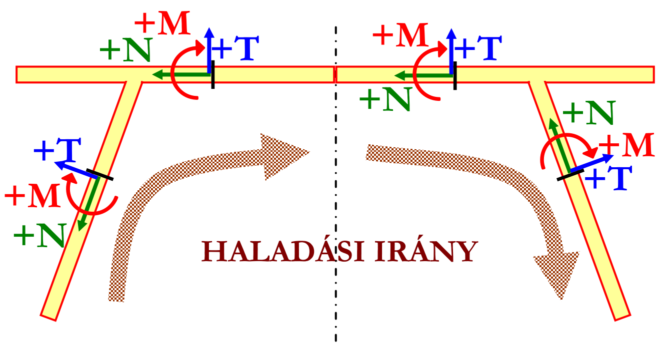
Ha a szimmetrikus tartó teherfüggvénye ferdén szimmetrikus tulajdonságú (azaz páratlan függvény), a differenciális függvénykapcsolat alapján a nyíróerőfügvény lesz páros és a nyomatéki függvény páratlan.

> **A szimmetrikus tartón ferdén szimmetrikus teherből a normálerő és a nyomatéki ábra ferdén szimmetrikus, a nyíróerőábra szimmetrikus lesz.**

Az igénybevételi függvények szimmetriatulajdonságai mechanikai nézőpontból is igazolhatók.
Ha a szimmetrikus tartón a haladási irányt mindkét oldalon a szimmetriatengely felé mutatóan vesszük fel, a két tartófélen az igénybevételek meghatározásához figyelembe vett haladási irány bizonyosan ellentétes lesz. A haladási irány megfordítása nyomán a két tartófélen a **pozitív normálerő-irányok egymás szimmetrikus párjai**, a **pozitív nyíróerő-irányok egymás ferdén szimmetrikus párjai** lesznek. A pozitív nyomatéki irányok meghatározása során nem szabad elfeledkeznünk, hogy a haladási irány megfordításakor a nyomatéki igénybevétel pozitív forgásiránya megváltozik, így pedig már a két tartófélen a **pozitív nyomatéki irányok is egymás szimmetrikus párjai** lesznek.



A szimmetrikus tartón a **teherfüggvény ferde szimmetriáját** a haladási irány ferde szimmetriájával jeleníthetjük meg, ami valójában a folytatólagos haladást jelenti. Az ily módon felvett keresztmetszetekben az igénybevételek pozitív irányai a **nyíróerőre** mutatnak **szimmetrikus**, a n**ormálerőre** és a **nyomatékra ferde szimmetrikus** eloszlást.

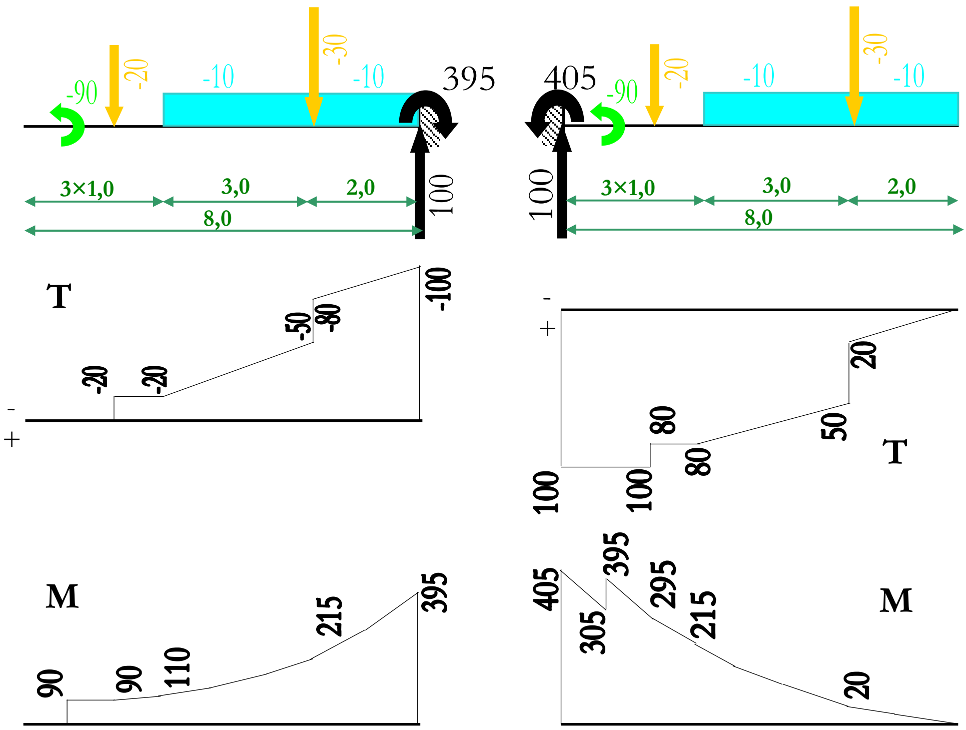


8.4. Egyszerű és összetett tartók igénybevételi ábrái

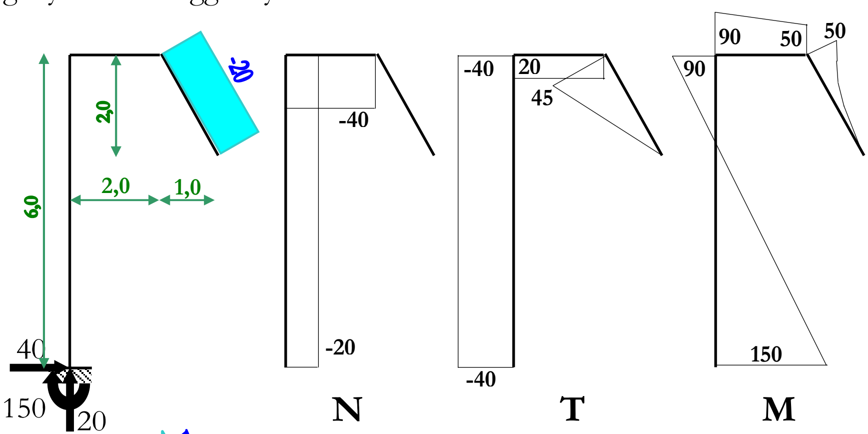
Az alábbi mintapéldákkal az elméletben megismert eljárások, megoldások eredményeit konkrét szerkezetek igénybevételi ábráin mutatjuk be. Az ábrák az AXIS-VM számítógépes szerkezetszámító programmal készültek, és annak előjel- és koordinátakonvencióit használják. A nyomatéki és nyíróerő ábrák a példákban oldalhelyesen jelennek meg, a normál- és a nyíróerő értéke előjelhelyes, de a normálerőábra a megszokottal ellentétes oldalra került. A nyomatékok előjelének (most) nincs jelentősége (ezek a csomóponti vizsgálatokhoz lennének használhatók), az ábrák a húzott oldalon vannak. A méreteket, a terheket és az igénybevételeket kN – m egységekben ábrázoltuk.

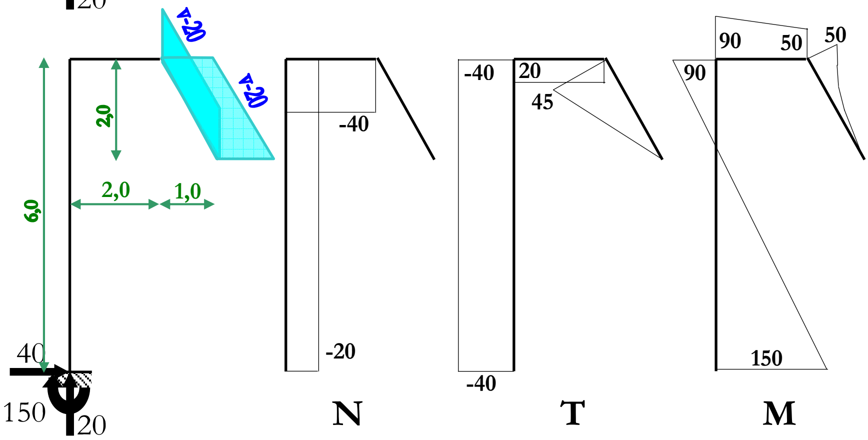
8.4.1. Befogott konzol

Az általános terhelésű konzolon jól érzékelhető az egyes teherfajták és az igénybevételi függvények kapcsolata, és a befogás áthelyezésének hatása.

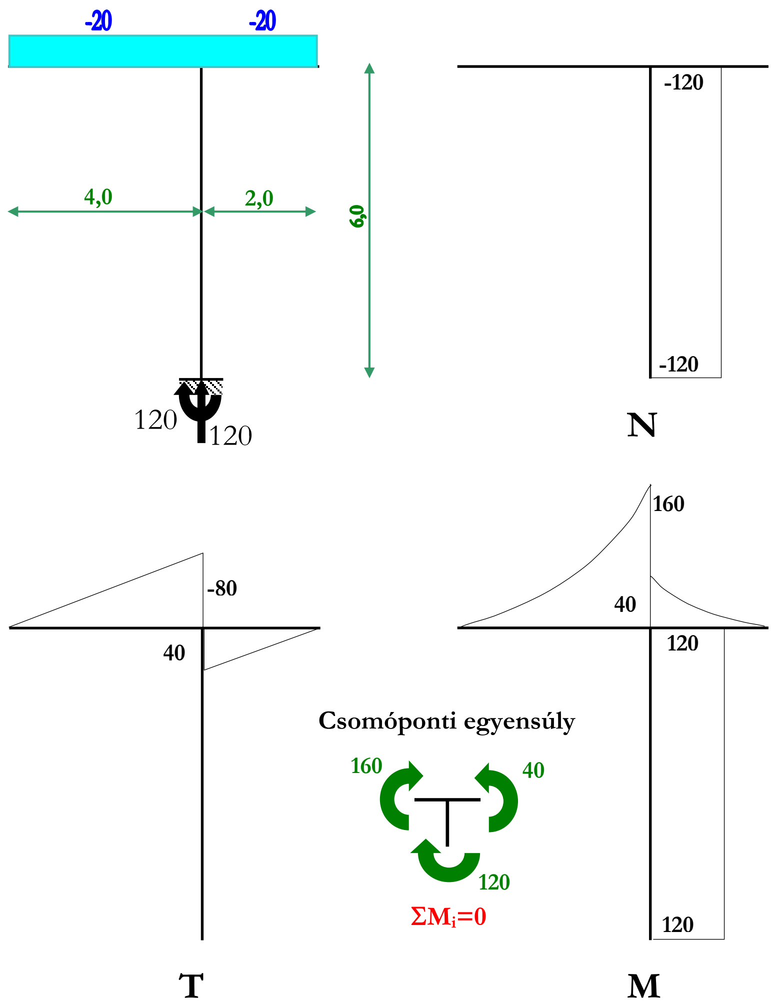


Törtvonalú befogott tartón a töréspontokban a normál- és nyíróigénybevételek **vektoriális eredője** lesz azonos értékű, derékszögű sarokpontban a normál- és nyíróigénybevételek „értéket cserélnek”.
Ha egy keresztmetszet a **megelőző** (ez a haladási irány megválasztásától függően akár balra, akár jobbra lehet a metszettől) **erők eredőjének hatásvonalán** fekszik, akkor ott a **nyomatéki igénybevétel bizonyosan zérus**.
A megoszló terhek tárgyalásánál levezettük, hogy a ferde tengelyen működő megoszló teher helyettesíthető a koordinátatengely-irányú vetületeivel, és hogy e **vetületi teherintenzitások az eredeti, ferde teher intenzitásértékeivel pontról pontra megegyeznek**. Itt a feladat második verziójában az eredeti ferde terhelés helyett egy vízszintes és egy függőleges irányú, azonos intenzitású vetületi megoszló terhelést működtettünk, és az igénybevételi függvények valóban tökéletesen azonosak.



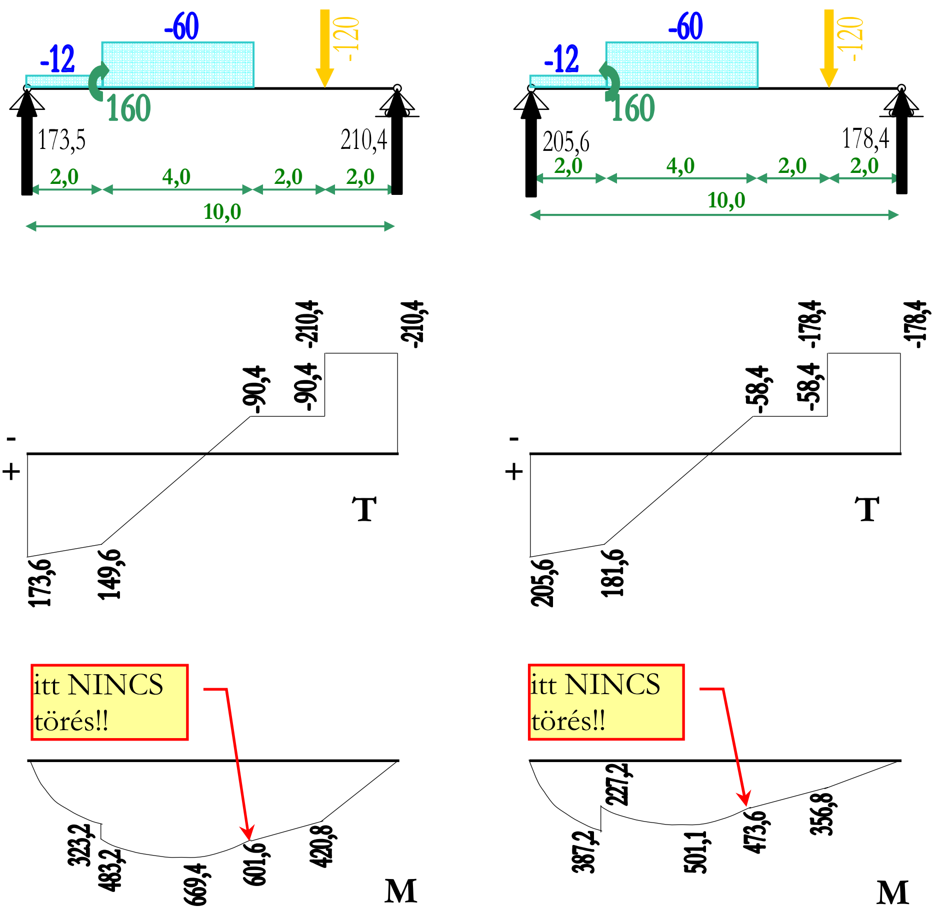


Elágazó tartón a szerkezeten mindig van olyan csomópont, amely **három, vagy több** rúd között létesít kapcsolatot. Ilyen esetben a csatlakozó rúdvégek nyomatéki igénybevételeiről csak azt tudjuk, hogy **forgatási irány szerinti előjellel számított összegük zérus**. Két rúdvégen (még ha egy egyenesbe esnek is) csak akkor lehet azonos a nyomaték, ha a többi rúdvég bizonyosan nyomatékmentes.



8.4.2. Kéttámaszú gerenda

A megoszló teher intenzitásának változása a nyíróerőfüggvény meredekségében (és a nyomatéki parabola eltérő görbületében) jelenik meg.
A koncentrált nyomaték helyén a nyíróerőfüggvényben nincs változás, természetesen a támaszerők módosulása miatt a nyíróerőfüggvények a terhelő nyomaték előjelfordítása után nem lesznek azonosak.
A nyomatéki függvény lokális szélsőértékét a nyíróerőfüggvény előjelváltási helye határozza meg.



8.4.3. Kéttámaszú törtvonalú tartó (lépcsőtartó)

A törtvonalú tartók igénybevételi ábráinak (és támaszerőinek!) helyes meghatározásához elsősorban tisztázni kell a tartó ferde szakaszán működő megoszló teher irányát és megoszlását. A teher iránya a teheradatokból meghatározható, a megoszlás módjának tisztázása azonban némi megfontolást igényel.

hossz mentén megoszló erő

A (ferde) hossz mentén megoszló erő a tartó ferde, valós $\mathbf{L_{ferde}}$ hossza mentén, annak minden hosszegységére a megadott **q** intenzitásnyi terhelő hatást fejti ki, azaz az eredő a teheriránnyal párhuzamos hatásvonalú, és a ferde hosszon integrált intenzitásértékű koncentrált erő lesz: $\mathbf{R= L_{ferde}\times q}$

vetület mentén megoszló erő

A vetületi hossz mentén megoszló erő a tartó ferde méretének koordinátatengely-irányú, vetületi, $\mathbf{L_{vetületi}}$ hossza mentén, annak minden hosszegységére a megadott **q** intenzitásnyi terhelő hatást fejti ki, azaz az eredő a teheriránnyal párhuzamos hatásvonalú, és a vetületi hosszon integrált intenzitásértékű koncentrált erő lesz: $\mathbf{R= L_{vetületi}\times q}$

Az alábbi feladatokban a különböző irányú és megoszlású terheléseknek az igénybevételi függvényekre gyakorolt hatását elemezhetjük.

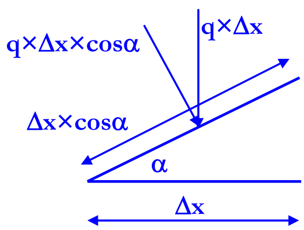
Az ábrákban a vetületi megoszlást **v** betűvel jelöltük.

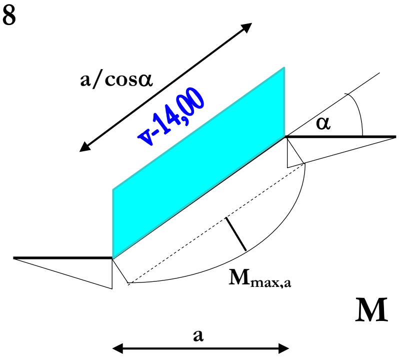
Az ábrákon megjelenített terhelést és a maximális nyomatékok értékét vizsgálva láthatjuk, hogy a végig vetületi függőleges teherrel terhelt tartón a maximális nyomatéki érték a támaszköz középvonalában keletkezik, és értéke **85,75 kNm**, ami az egyenestengelyű gerendán kapható $\mathbf{q\times L^2/8}$= =14 kN/m×(7 m)^2/8 értékkel azonos. A tartó ferde szakaszán tehát a vetületi keresztmetszetekhez tartozó nyomaték (változatlan vetületi hossz mellett) **független** a ferdeség szögétől, csak a teherintenzitás és a vetületi nyílásméret függvénye.

A terhek-hatások egymásrahalmozhatósága okán a nyomatéki ábra a vízszintes és a ferde szakaszok külön-külön vizsgálatával kapott ábrák összegeként is előállítható. A csak a ferde szakaszon működő vetületi megoszlású teherből adódó nyomaték a középvonalban **57,75 kNm**, a szélső vízszintes szakaszok terheléséből adódó érték ugyanott **28 kNm**. A két érték összege a már ismert, 85,75 kNm-es maximumot adja.

Egy-egy tartószakaszon a nyomatéki (növekmények) függvényét úgy is előállíthatjuk, hogy a tartószakaszon a tehernek csak a **tengelyre merőleges** komponenseivel, és a tényleges, **ferde szakaszhosszal** számolunk.

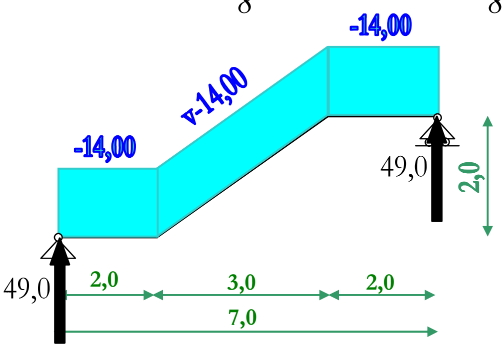
A vízszintessel **α** szöget bezáró tartószakasz esetén a függőlegesen ható megoszló terhelés tengelyre merőleges intenzitását az eredő segítségével állíthatjuk elő. A **Δx** szakaszra jutó megoszló teher-eredő ferde vetületét (q×Δx×cosα) a **Δx** szakasz ferde vetületével (Δx/cosα) osztva a ferde szakaszon ható merőleges teherkomponens intenzitása **$q/\cos^2\alpha$**.
Az **a** vetületi szakaszra érvényes nyomatéki növekmény maximuma így az eredeti intenzitással számolva **$q\times a^2/8$**, a vetületei értékekkel számolva pedig **$q\times\cos^2\alpha\cdot(a/\cos\alpha)^2/8=q\times a^2/8$**

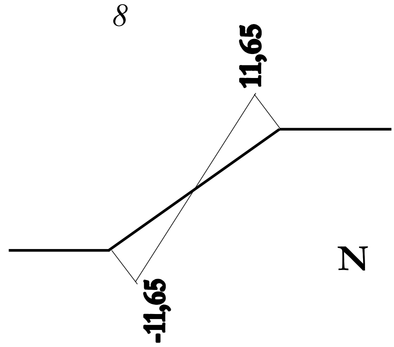


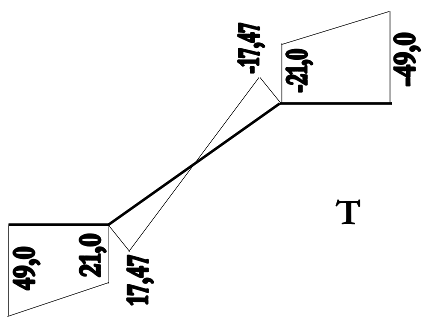


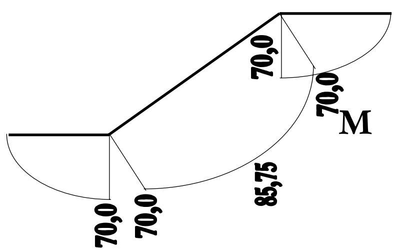
$$q_a=\frac{q\times\Delta x\times\cos\alpha}{\dfrac{\Delta x}{\cos\alpha}}=q\times\cos^2\alpha$$

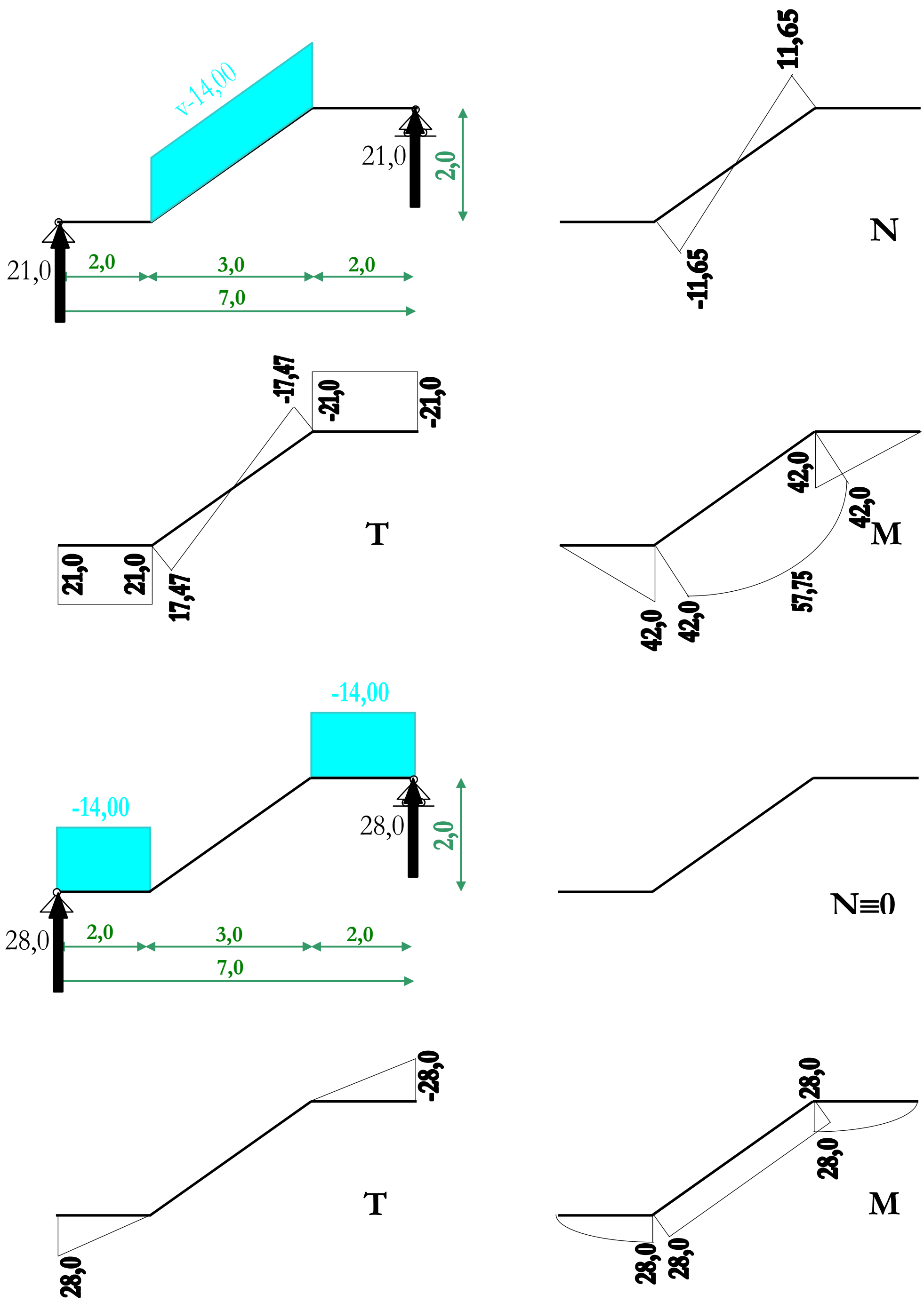
$$M_{max,a}=\frac{q\times(a/\cos\alpha)^2}{8}=\frac{q\times\cos^2\alpha\times(a/\cos\alpha)^2}{8}=\frac{q\times a^2}{8}$$

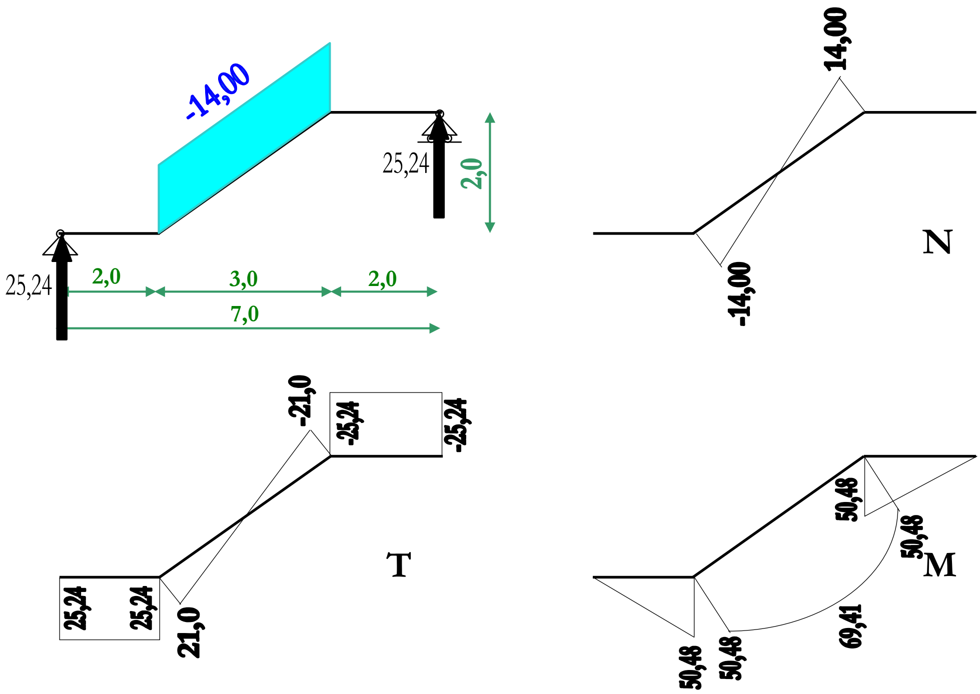


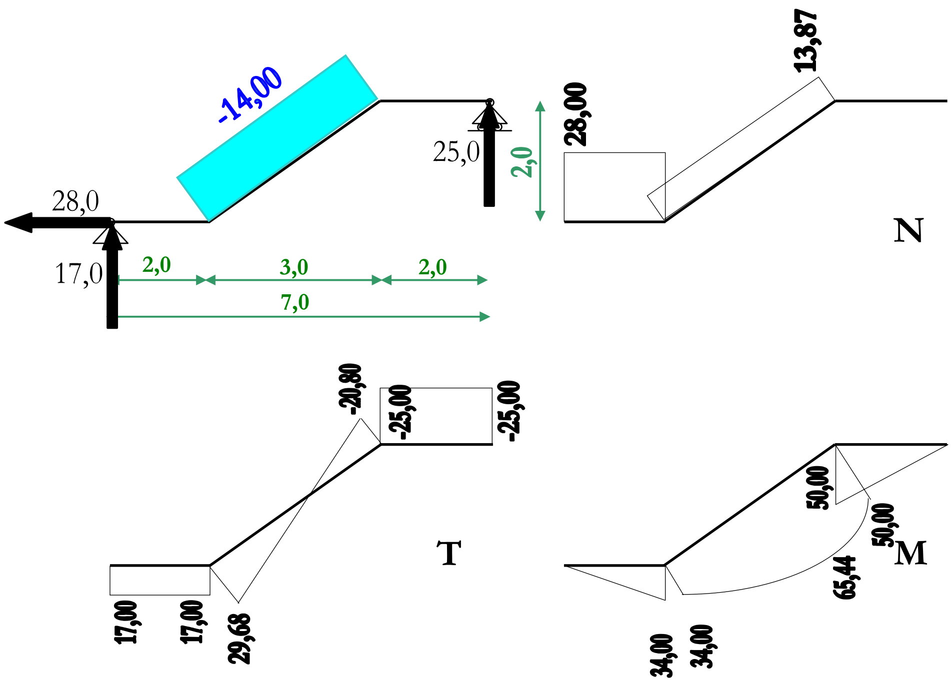




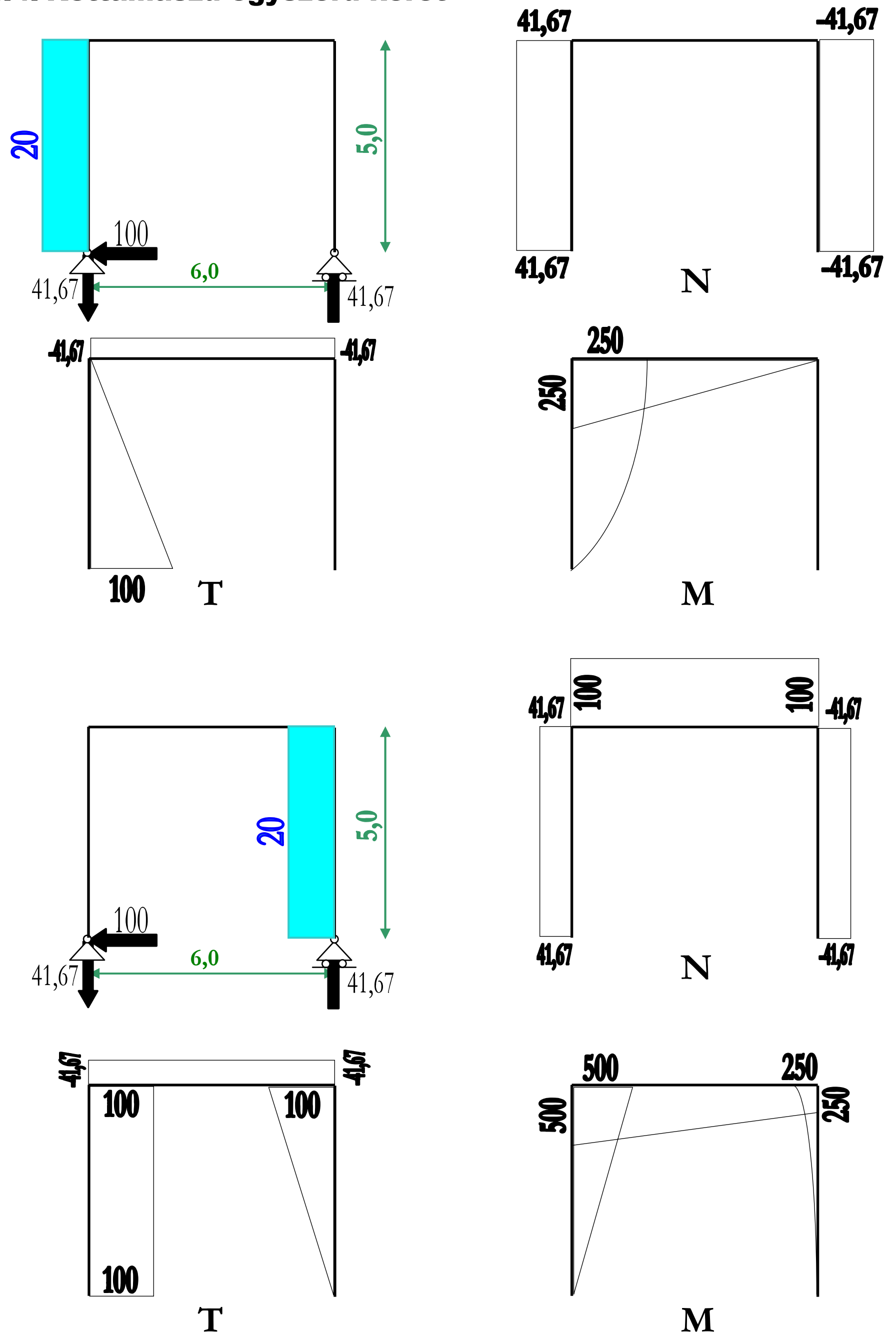


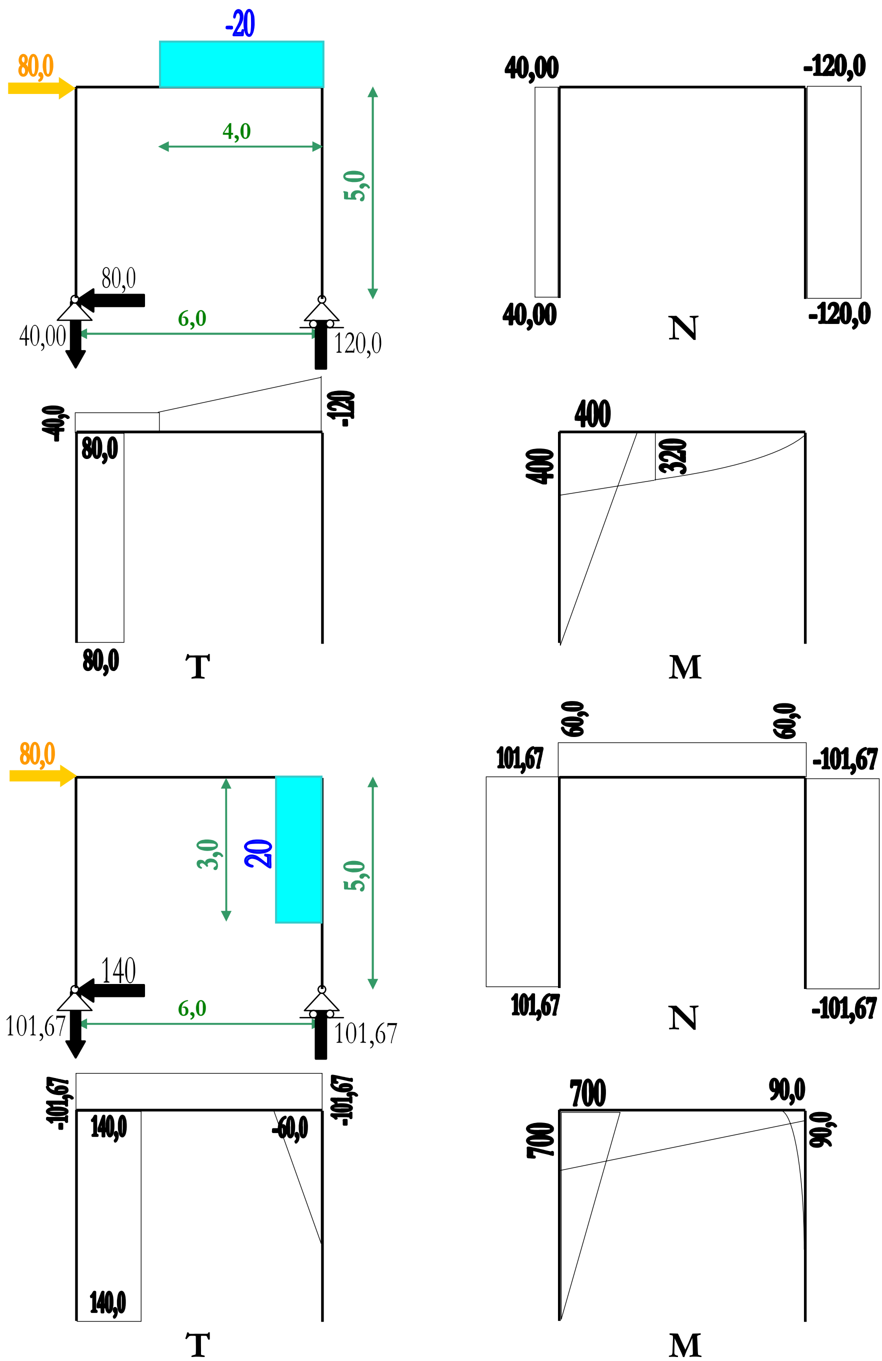

v-14,00
21,0
2,0
21,0
2,0
3,0
2,0
7,0
11,65
-11,65
N
-17,47
-21,0
-21,0
21,0
21,0
17,47
T
42,0
42,0
M
42,0
42,0
57,75
-14,00
-14,00
28,0
2,0
28,0
2,0
3,0
2,0
7,0
N≡0
-28,0
28,0
T
28,0
28,0
M
28,0
28,0

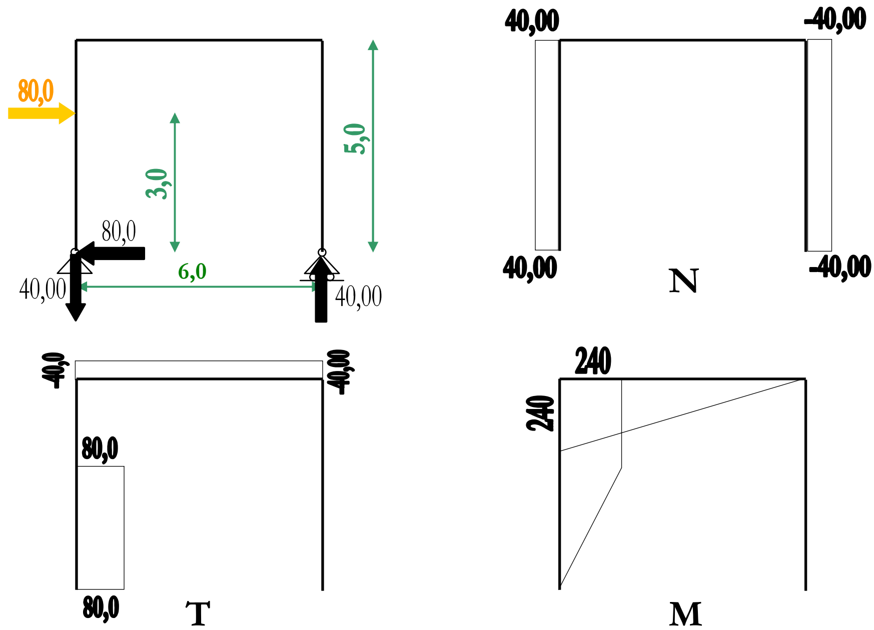

-14,00
25,24
2,0
25,24
2,0
3,0
2,0
7,0
14,00
-14,00
N
-21,0
-25,24
-25,24
T
25,24
25,24
21,0
50,48
50,48
M
69,41
50,48
50,48

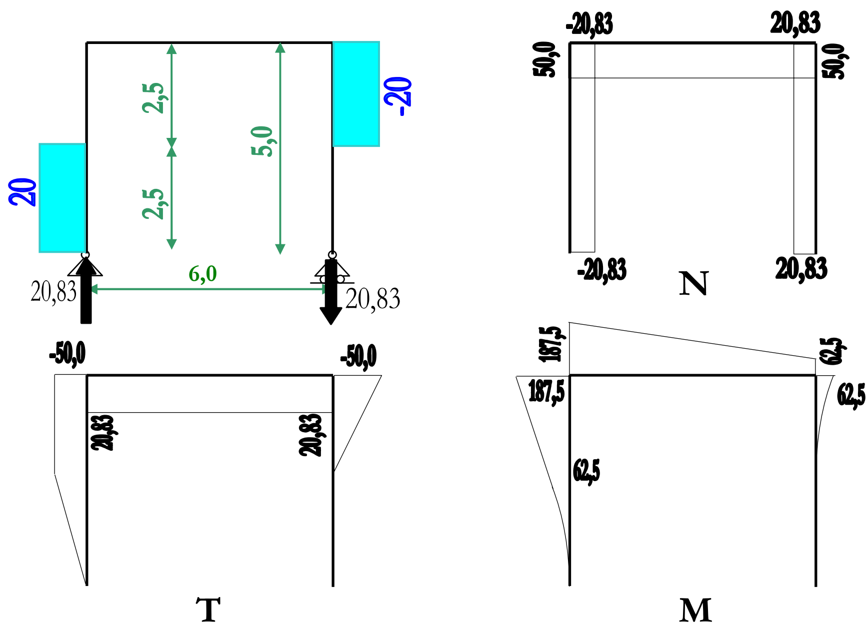

-14,00
25,0
2,0
28,0
17,0
2,0
3,0
2,0
7,0
13,87
28,00
N
-20,80
-25,00
-25,00
T
17,00
17,00
29,68
50,00
50,00
M
65,44
34,00
34,00

8.4.4. Kéttámaszú egyszerű keret

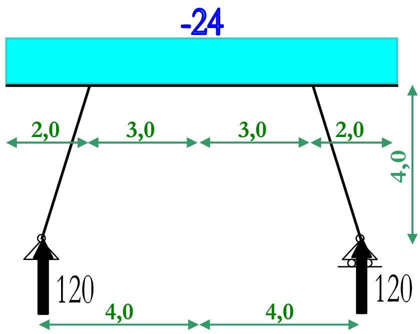


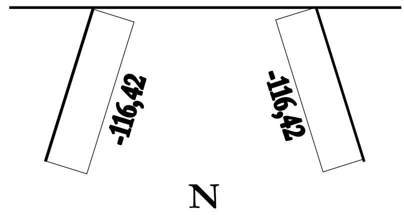

-20
80,0
4,0
5,0
80,0
40,00
6,0
120,0
40,00
-120,0
40,00
-120,0
N
-40,0
-120
80,0
80,0
T
400
400
320
M
80,0
3,0
20
5,0
140
101,67
6,0
101,67
60,0
60,0
101,67
-101,67
101,67
-101,67
N
-101,67
-101,67
140,0
-60,0
140,0
T
700
700
90,0
90,0
M

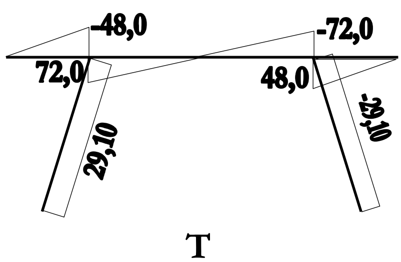

80,0
3,0
5,0
80,0
6,0
40,00
40,00
40,00
-40,00
40,00
-40,00
N
-40,0
-40,00
80,0
80,0
T
240
240
M

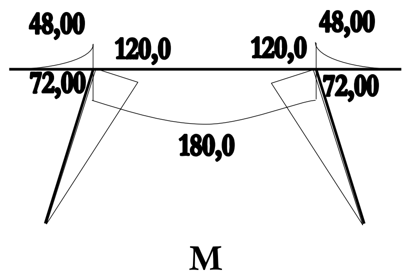

2,5
5,0
-20
20
2,5
6,0
20,83
20,83
-20,83
20,83
50,0
50,0
-20,83
20,83
N
-50,0
-50,0
20,83
20,83
T
187,5
62,5
187,5
62,5
62,5
M

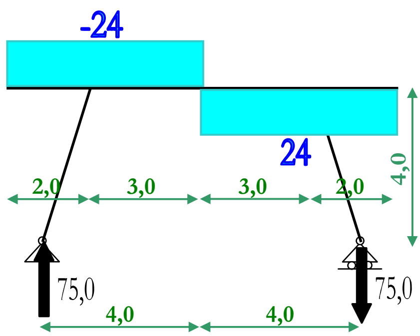
8.4.5. Kéttámaszú ferdelábú keret

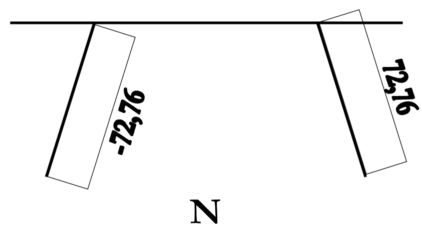


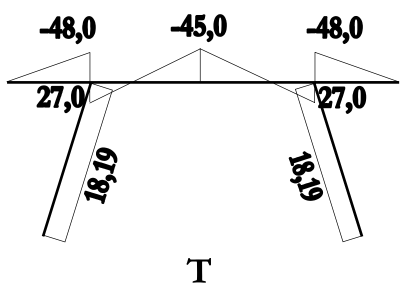


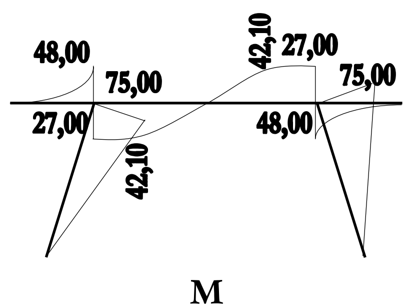


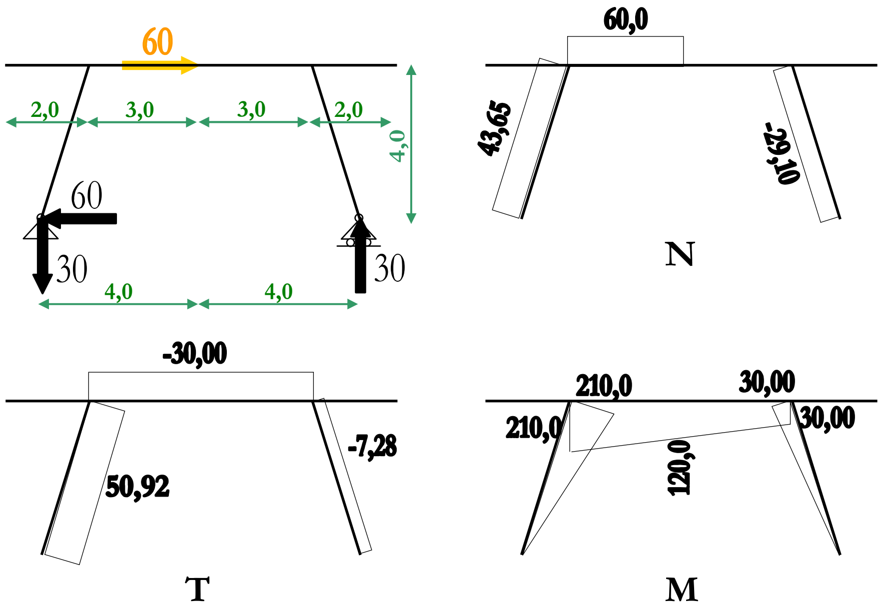


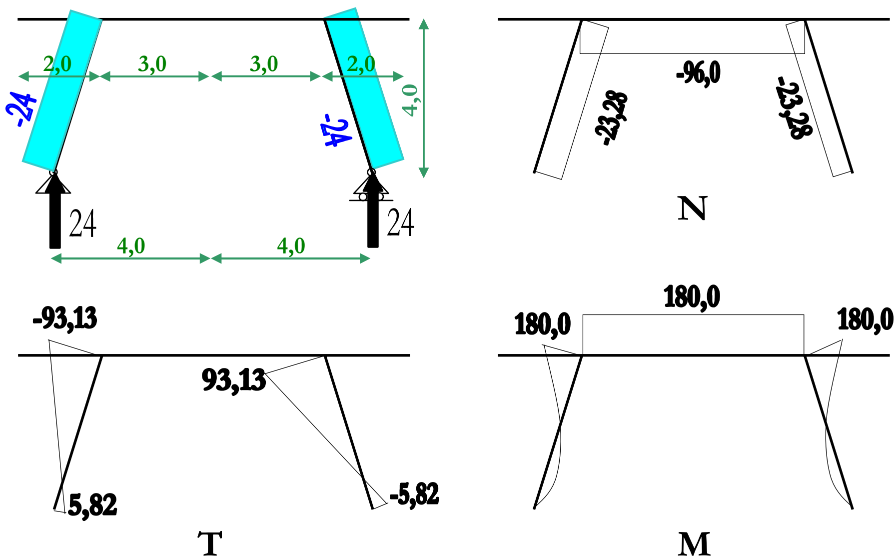


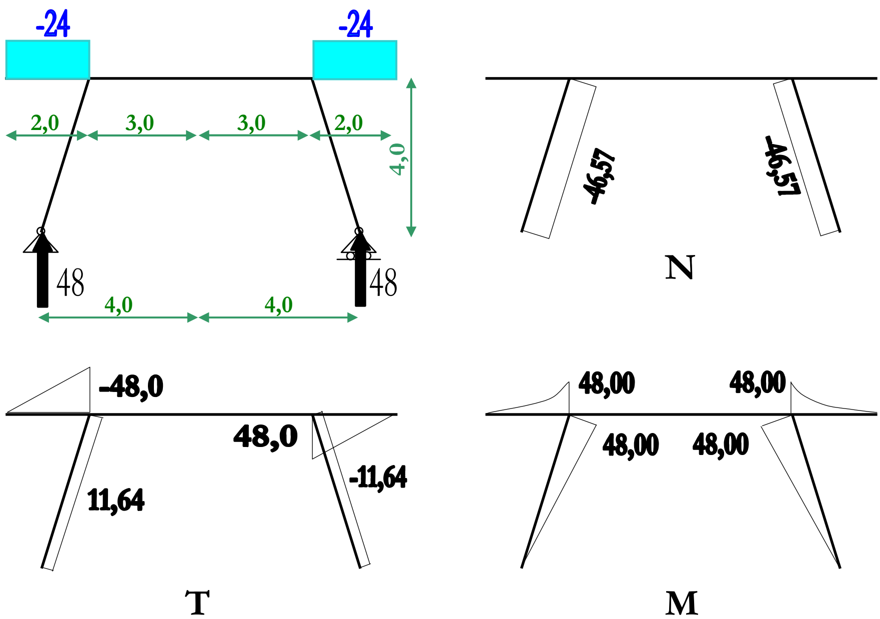


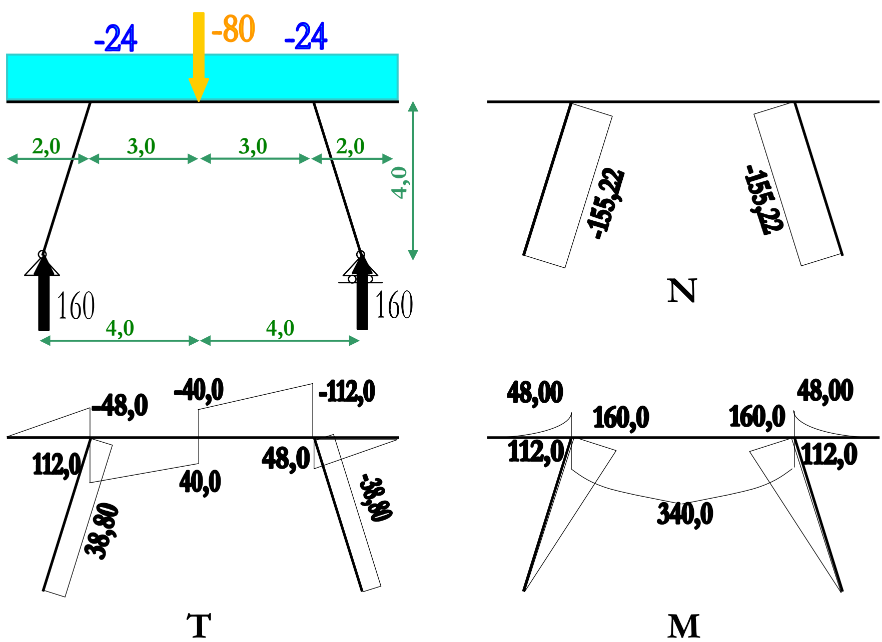




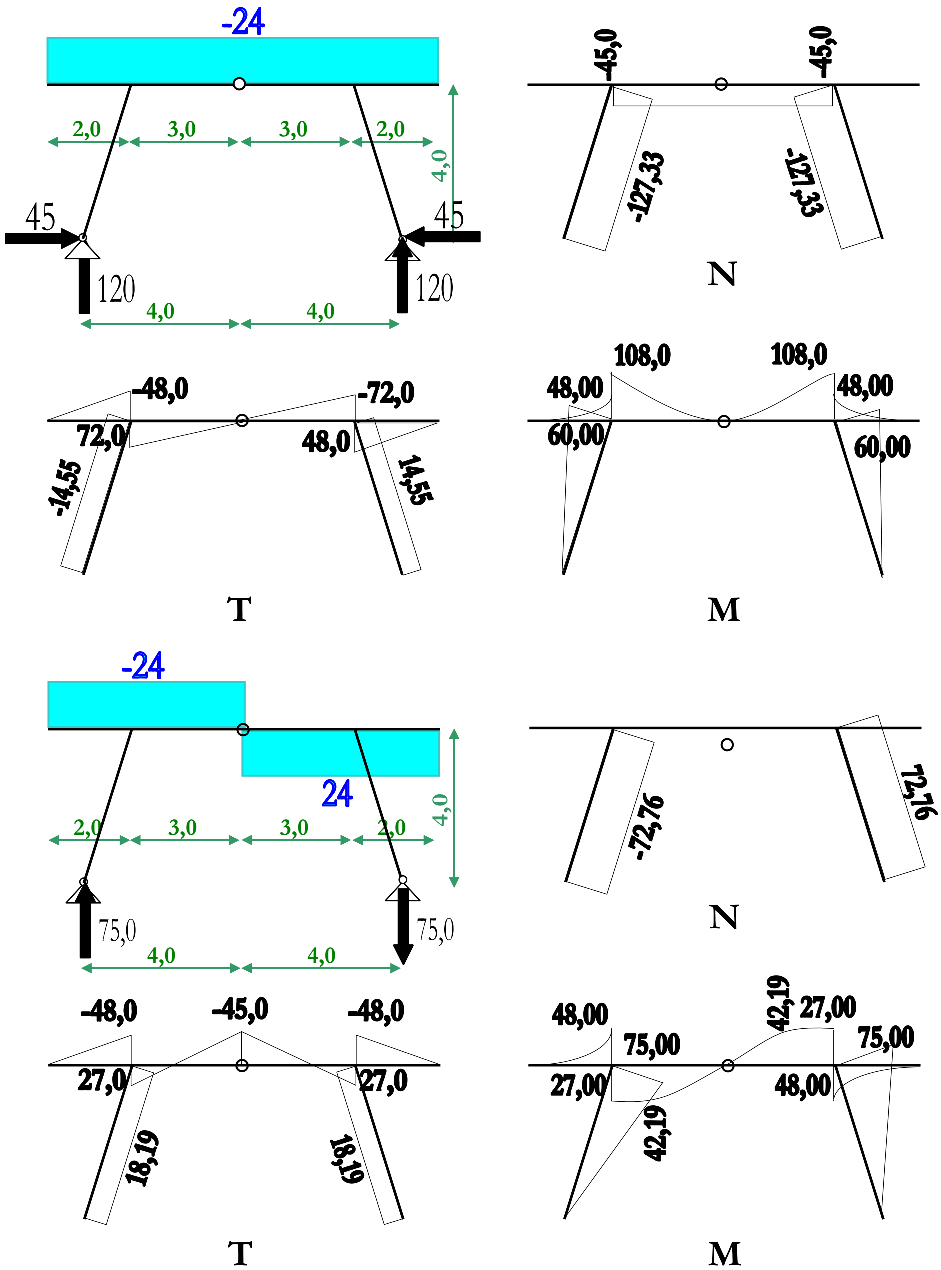

60
2,0
3,0
3,0
2,0
4,0
60
30
30
4,0
4,0
60,0
43,65
-29,10
N
-30,00
-7,28
50,92
T
210,0
30,00
210,0
30,00
120,0
M

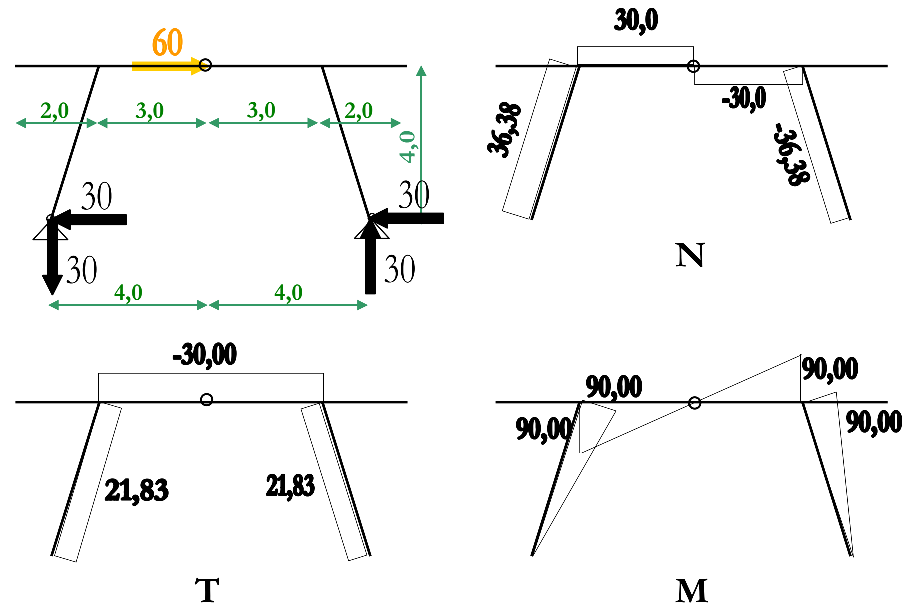

2,0
3,0
3,0
2,0
4,0
-24
-24
24
24
4,0
4,0
-96,0
-23,28
-23,28
N
-93,13
93,13
5,82
-5,82
T
180,0
180,0
180,0
M

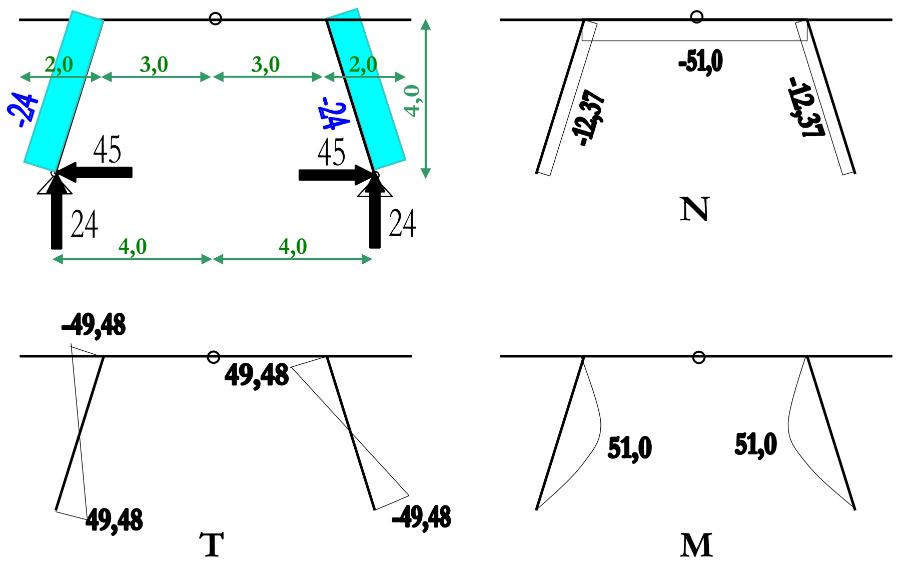

-24
-24
2,0
3,0
3,0
2,0
4,0
48
48
4,0
4,0
-46,57
-46,57
N
-48,0
48,0
11,64
-11,64
T
48,00
48,00
48,00
48,00
M

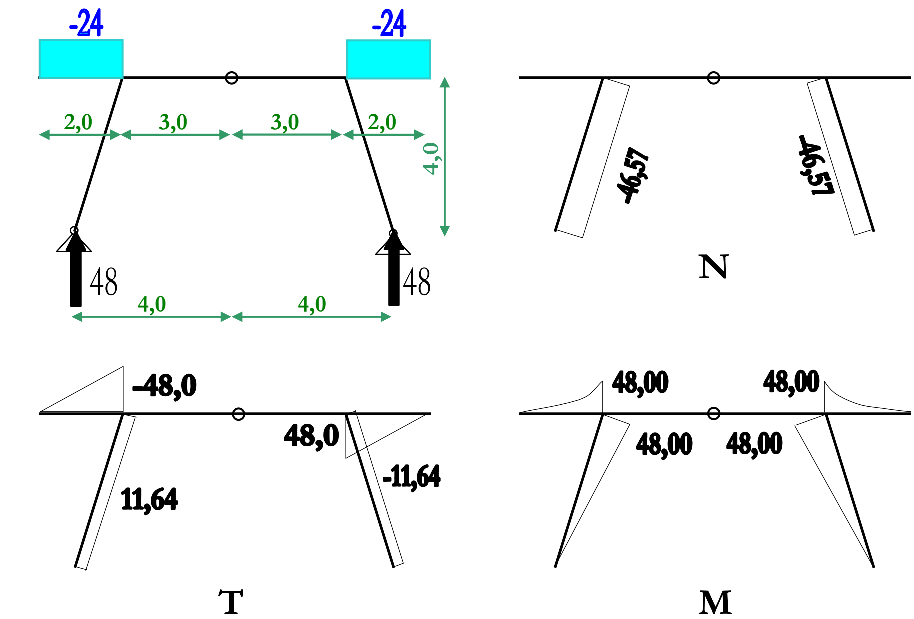

-24
-80
-24
2,0
3,0
3,0
2,0
4,0
160
160
4,0
4,0
-155,22
-155,22
N
-48,0
-40,0
-112,0
112,0
40,0
48,0
38,80
-38,80
T
48,00
160,0
160,0
48,00
112,0
112,0
340,0
M

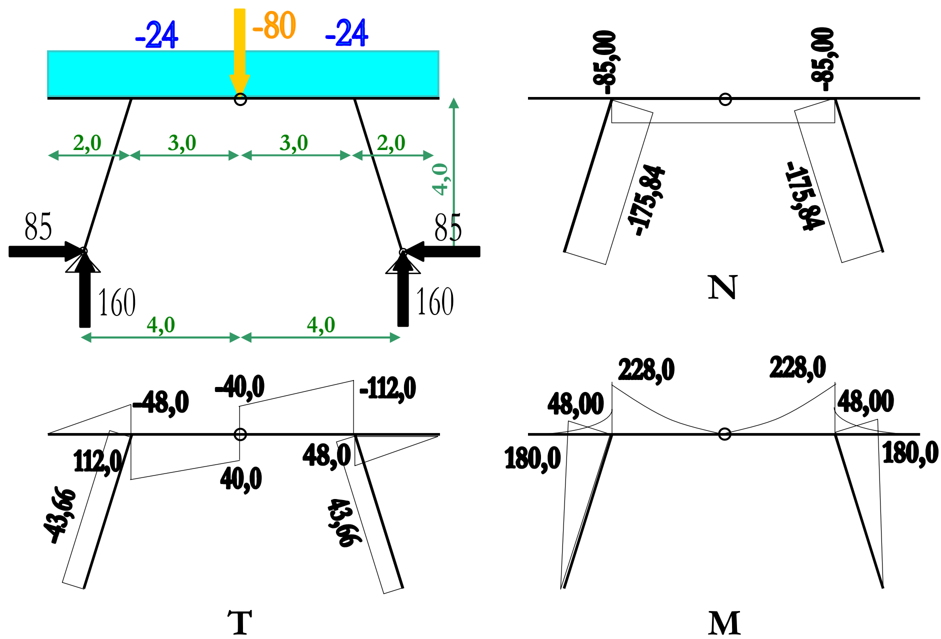
8.4.6. Háromcsuklós (szimmetrikus) keret



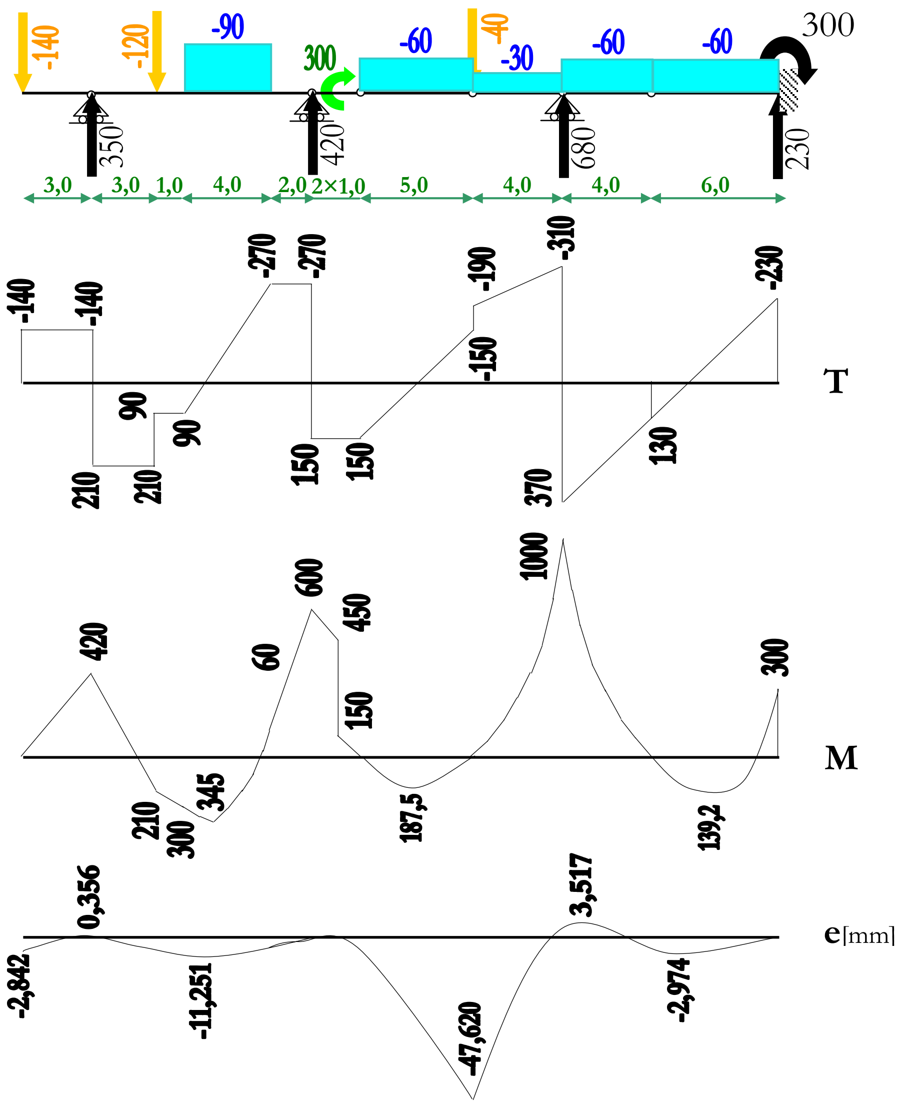

60
2,0
3,0
3,0
2,0
4,0
30
30
30
30
4,0
4,0
30,0
36,38
-30,0
-36,38
N
-30,00
21,83
21,83
T
90,00
90,00
90,00
90,00
M


2,0
3,0
3,0
2,0
4,0
-24
-24
45
45
24
24
4,0
4,0
-51,0
-12,37
-12,37
N
-49,48
49,48
49,48
-49,48
T
51,0
51,0
M


-24
-24
2,0
3,0
3,0
2,0
4,0
48
48
4,0
4,0
-46,57
-46,57
N
-48,0
48,0
11,64
-11,64
T
48,00
48,00
48,00
48,00
M


-24
-80
-24
2,0
3,0
3,0
2,0
4,0
85
85
160
160
4,0
4,0
-85,00
-85,00
-175,84
-175,84
N
-48,0
-40,0
-112,0
112,0
40,0
48,0
-43,66
43,66
T
228,0
228,0
48,00
48,00
180,0
180,0
M

8.4.7. GERBER-tartó



A GERBER-tartók egyenestengelyű gerendaelemekből állnak, igénybevételeik meghatározásához a legegyszerűbb eljárás, hogy (a támaszerőszámítás érdekében amúgy is) **szétbontott szerkezet elemein különkülön állítjuk elő az igénybevételi függvényeket**, és végül ezeket egymás mellé rajzoljuk.
Ha a **külső** kapcsolati erőket ismerjük, akkor már nem is kell a szerkezetet szétbontanunk, mert a tartón **folyamatosan** haladva (a helyes külső kapcsolati erők felhasználásával) **az igénybevételi ábrák is helyesen adódnak** (a csuklós kapcsolatokban például automatikusan kiadódik a zérus nyomaték).
A nyomatéki függvények elemzése során láttuk, hogy a **nyomatéki ábrát** mindig a (szilárd anyagú) tartó **húzott** (deformáció szerinti **domború**) oldalára kell rajzolnunk. A későbbiekben látni fogjuk, hogy az **igénybevételi függvények és a tartó alakváltozásai (e) között egyértelmű matematikai kapcsolat van**, azaz, ha a szerkezet deformált alakját meg tudjuk becsülni, egyszerű eszközökkel (pl. hajlékony vonalzókkal) tudjuk modellezni, akkor a deformált alak alapján a nyomatéki ábra helyességét, a csatlakozási pontokban várható viselkedését is ellenőrizni tudjuk

8.4.8. Az igénybevételszámítás fontossága

Az igénybevételi ábrák a tartó terhelhetősége, alakváltozásai szempontjából **meghatározó fontosságúak**, a **helyes igénybevételi ábrák előállítása** (az egyensúly biztosítása mellett) **statikai tanulmányaik legfontosabb része**. Későbbi tanulmányaikban látni fogják, hogy a tartószerkezetekkel kapcsolatos minden vizsgálat előbb-utóbb az igénybevételi ábrákhoz vezet, azok ismerete nélkül nem használható. Pozitívan megfogalmazva: **ha most sikerül megérteni az igénybevételi függvényeket, ezt a tudást még sokszor tudják kamatoztatni**.

Az igénybevételek előállítására általában több, párhuzamosan alkalmazható lehetőségünk van:

- dolgozhatunk a definíciók alapján
- alkalmazhatjuk a differenciális összefüggés függvénykapcsolatait
- rajzolhatjuk az ábrákat a grafikus ábratulajdonságok felhasználásával
- kihasználhatjuk a szimmetriatulajdonságokat.

Mindig a (számunkra) legegyszerűbb eljárást válasszuk, de **mindig ellenőrizzük a munkánkat valamilyen más szemléletű módszer alapján**!!!

8.5. Ellenőrző kérdések

Mi az igénybevétel (belső erő) fogalma?
Mi az igénybevételi ábra fogalma?
Milyen igénybevételeket ismer?
Definiálja a normál igénybevételt és előjelét?
Definiálja a nyíró igénybevételt és előjelét?
Definiálja a nyomatéki igénybevételt és előjelét?
Igaz-e az állítás: a nyomatéki igénybevételt mindig a tartó húzott oldalára rajzoljuk?
Hogyan határozható meg egy keresztmetszet normál igénybevétele?
Hogyan határozható meg egy keresztmetszet nyíró igénybevétele?
Hogyan határozható meg egy keresztmetszet nyomatéki igénybevétele?
Milyen összefüggés van a teher- és a nyíróerő-függvény között?
Milyen összefüggés van a nyíróerő- és a nyomaték-függvény között?
Milyen függvény a nyíróerő- ill. a nyomatéki-függvény egyenletesen megoszló teherre?
Milyen függvény a nyíróerő- ill. a nyomatéki-függvény lineárisan megoszló teherre?
Milyen függvény a nyíróerő- ill. a nyomatéki-függvény koncentrált erőre?
Milyen függvény a nyíróerő- ill. a nyomatéki-függvény koncentrált nyomatékra?
Milyen függvény a nyíróerő- ill. a nyomatéki-függvény koncentrált erő alatt?
Milyen függvény a nyíróerő- ill. a nyomatéki-függvény koncentrált nyomaték alatt?
Mit mondhatunk a nyomatéki igénybevételről egy rúdcsomópontban?
Mit mondhatunk szimmetrikus tartón szimmetrikus teherből keletkező normálerő ábráról?
Mit mondhatunk szimmetrikus tartón szimmetrikus teherből keletkező nyíróerő ábráról?
Mit mondhatunk szimmetrikus tartón szimmetrikus teherből keletkező nyomatéki ábráról?
Mit mondhatunk szimmetrikus tartón ferdén szimmetrikus teherből keletkező normálerő ábráról?
Mit mondhatunk szimmetrikus tartón ferdén szimmetrikus teherből keletkező nyíróerő ábráról?
Mit mondhatunk szimmetrikus tartón ferdén szimmetrikus teherből keletkező nyomatéki ábráról?

9. Hatásábrák-maximális ábrák

9.1. A hatás és a hatásábra fogalma

Eddigi vizsgálatainkban a tartószerkezetek terheit-teherkombinációját **fix,** legfeljebb elemeiben variálható **terheknek** tekintettük. Ennek megfelelően **az igénybevételi függvényekkel a rögzített terhekből a tartón végigmozgatott keresztmetszetben ébredő belső erőkomponenseket állítottuk elő és ábrázoltuk**. Ez a teherfelfogás tartószerkezeteink terhelésformáira a legtöbbször elegendő, legfeljebb azt kell mérlegelnünk, hogy a teher bizonyos elemeit a tartó egyik vagy másik részén milyen esetekben, milyen kombinációkban szerepeltessük.

Vannak azonban olyan szerkezetek, amelyek tipikusan nem fix, hanem **mozgó terhek** viselésére készültek. A **hídszerkezetek**, a **daruk**, **darupályák** vizsgálata során a teher **mozgása nem hagyható figyelmen kívül**. A mozgó teherből a tartó keresztmetszeteiben a teherpozíció függvényében változó igénybevételek, elmozdulások keletkeznek. A tartó tervezése-ellenőrzése során **a tartón végigmozgó teherből**, **a rögzített keresztmetszetekben keletkező belső erő-függvényeknek** a meghatározására és ábrázolására lesz szükségünk.

A járművek áthaladása során az egy-egy jármű által a szerkezetre átadott tehernek csak a helyzete változik, a nagysága nem, a sokféle tengelyelrendezésű és tengelyterhelésű jármű miatt mégsem határozhatunk meg egy olyan tehercsoportot, amelyre minden szerkezetet vizsgálni kell. Ugyanakkor **amíg** a teher-igénybevétel **függvénykapcsolataink lineárisak**, érvényes az egymásra halmozhatóság, azaz a **tényleges kiosztású és tényleges terhelésű erőcsoport helyett** a tartón **egyetlen, egységnyi nagyságú erőt** elegendő mozgatnunk.

> A tartón (pontosabban: a tartó pályaszintjén) végigvándorló, **egyetlen, egységnyi nagyságú koncentrált erőből** a tartón keletkező bármiféle változást **hatásnak** nevezünk. A teherpozíció függvényében vizsgált, értelmezett hatásokat **hatásfüggvénynek**, ábrázolásukat **hatásábráknak** nevezzük, és η **függvénnyel jelöljük**.

Másként fogalmazva:

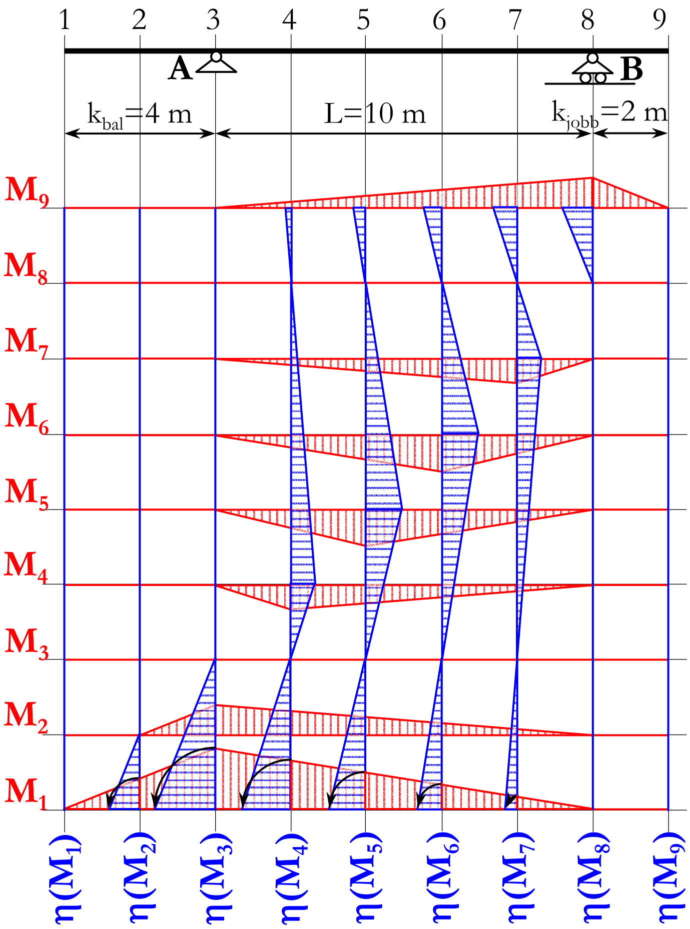
A hatásfüggvények-hatásábrák egy **ordinátája** a pályaszinten az **ordináta fölött álló**, függőleges állású **egységerőből** a tartó egy **rögzített keresztmetszetében** keletkező hatást adja meg.

A fentieknek megfelelően a tartókon értelmezünk támaszerő, belső kapcsolati erő, keresztmetszeti igénybevételi, rúderő és elmozdulási hatásfüggvényeket és hatásábrákat.
A hatásfüggvények részletes taglalása nem tárgya mostani stúdiumunknak, itt csak a hatásábrák legfontosabb tulajdonságaival, előállításuk lehetséges módszereivel és alkalmazási lehetőségeikkel ismerkedünk meg. Vizsgálatainkat a **statikailag határozott szerkezetek támaszerő-** és **igénybevételi** hatásábráira korlátozzuk.

9.2. Az igénybevételi ábrák és az igénybevételi hatásábrák kapcsolata

A definíció szerint az igénybevételi **hatásordináták** az ordináta fölött álló egységerőre megrajzolt igénybevételi **ábráknak** a **kiválasztott keresztmetszetben** érvényes értékei. Az **igénybevételi ábrák** és az **igénybevételi hatásábrák** tehát szoros kapcsolatban állnak egymással. Ezt a kapcsolatot akkor tudjuk a legjobban feltárni, ha mind az igénybevételi ábrák, mind az igénybevételi hatásábrák előállítása során a folytonos függvények helyett megelégszünk a keresztmetszetek és a teher pozíciójának véges számú értékével. Az alábbi ábrán egy kéttámaszú konzolos tartón mutatjuk be a nyomatéki ábrák és a nyomatéki hatásábrák összefüggését, 9 keresztmetszet fölé állítva az egységerőt, és ugyanezen 9 keresztmetszetben meghatározva a nyomaték értékét.

A nyomatéki ábrák és a nyomatéki hatásábrák alakulása egy kéttámaszú konzolos tartón:



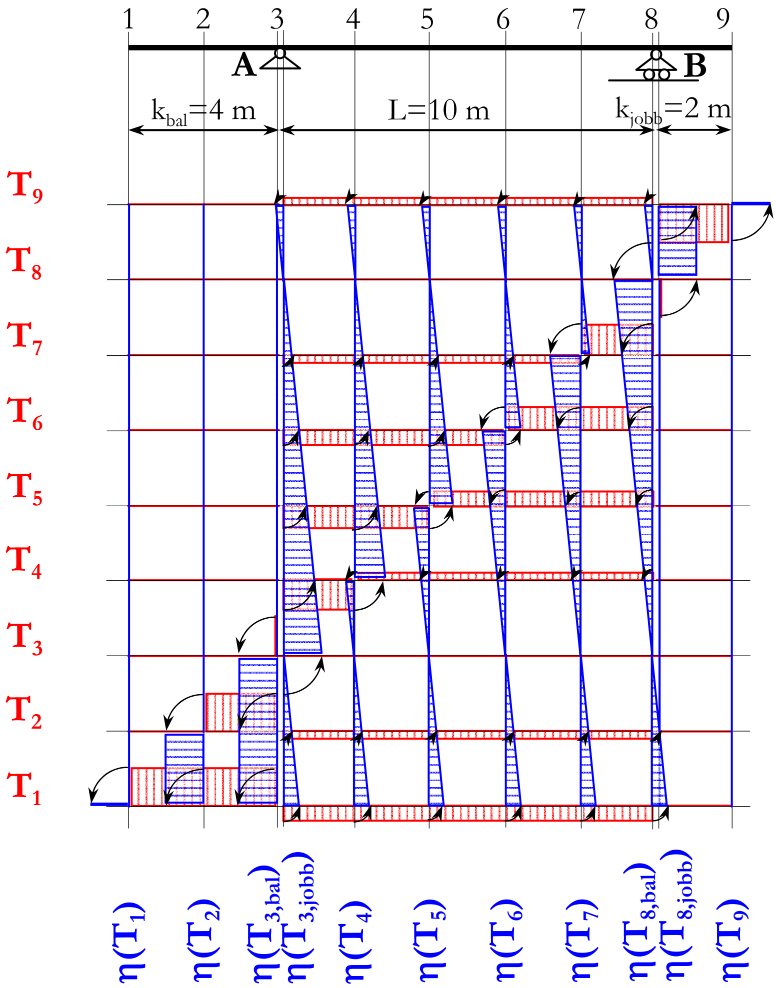
Az alábbi táblázatban számszerűen is összefoglaltuk a grafikusan már bemutatott nyomatéki értékeket.

	A KM. HELYE								
AZ ERŐ HELYE	**1. $\eta(M_1)$**	**2. $\eta(M_2)$**	**3. $\eta(M_3)$**	**4. $\eta(M_4)$**	**5. $\eta(M_5)$**	**6. $\eta(M_6)$**	**7. $\eta(M_7)$**	**8. $\eta(M_8)$**	**9. $\eta(M_9)$**
1. M_1	0	-2	-4	-3,2	-2,4	-1,6	-0,8	0	0
2. M_2	0	0	-2	-1,6	-1,2	-0,8	-0,4	0	0
3. M_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4. M_4	0	0	0	1,6	1,2	0,8	0,4	0	0
5. M_5	0	0	0	1,2	2,4	1,6	0,8	0	0
6. M_6	0	0	0	0,8	1,6	2,4	1,2	0	0
7. M_7	0	0	0	0,4	0,8	1,2	1,6	0	0
8. M_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9. M_9	0	0	0	-0,4	-0,8	-1,2	-1,6	-2	0

Mind a grafikus, mind a táblázatos feldolgozáson jól látható, hogy a nyomatéki ábrákban és a nyomatéki hatásábrákban valójában ugyanazon **keresztmetszeti igénybevételek halmaza** szerepel, csak a rendezés iránya, a metszet kialakítása különbözik.

Egy tartón **véges számú teherpozícióban** álló egységerőből, a **teherpozíciókkal megegyező keresztmetszetekben** meghatározva az igénybevételeket olyan számtáblázathoz (igénybevételi mátrixhoz) jutunk, amelynek **sorai az egyes teherpozícióhoz tartozó igénybevételi ábrákat**, **oszlopai pedig az egyes keresztmetszetekhez rendelhető igénybevételi hatásábrákat** szolgáltatják. Ez az igénybevételi mátrix származtatása okán **kvadratikus** (sorainak és oszlopainak száma azonos).

A fenti állítás az **igénybevételi függvényekre** és a **hatásfüggvényekre** folytonosságuk miatt nem mondható ki, de az igénybevételi ábrák és hatásábrák véges (de tetszőleges!) számú elemére igaz.

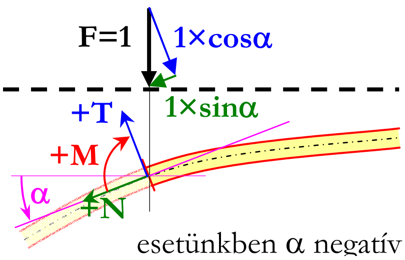

1 2 3 4 5 6 7 8 9
A
B
k_{bal}=4 m
L=10 m
k_{jobb}=2 m
T_9
T_8
T_7
T_6
T_5
T_4
T_3
T_2
T_1
$\eta(T_1)$
$\eta(T_2)$
$\eta(T_{3,bal})$
$\eta(T_{3,jobb})$
$\eta(T_4)$
$\eta(T_5)$
$\eta(T_6)$
$\eta(T_7)$
$\eta(T_{8,bal})$
$\eta(T_{8,jobb})$
$\eta(T_9)$

9.3. Az igénybevételi hatásábrák tulajdonságai

Egy kiválasztott alátámasztásban a keletkező támaszerőt, vagy a tartó egy keresztmetszetében az ott ébredő belső erők értékét a terhek ismeretében meg tudjuk határozni. A **hatásfüggvények ordinátáinak előállítása** tehát a **definíció alapján** (elvileg) **megoldott**: a tartón a keresett ordináta fölé állítjuk az egységerőt, és ebből meghatározzuk a kiválasztott támaszerő nagyságát, vagy a kiválasztott keresztmetszet igénybevételét (elmozdulását). Minthogy a pályaszinten tetszőleges számú teherpozíciót vehetünk fel, ezzel a módszerrel a hatásábrának is tetszőleges számú ordinátáját állíthatjuk elő. Az igénybevételi ábrák sajátosságainak ismerete azonban sejteni engedi, hogy a **hatásfüggvények ordinátái között is léteznek olyan szabályszerűségek**, matematikai formába önthető függvénykapcsolatok, amelyek segítségével a hatásábrák végtelen számú ordináta konkrét kiszámítása nélkül is korrekt és hatékony módon előállíthatók.

A hatásábrák előállítása során a **teher mindig csak egyetlen, függőleges állású, egységnyi nagyságú erő**. Vegyük szemügyre a vizsgálandó keresztmetszetet megelőző és követő határkeresztmetszetek igénybevételeinek alakulását.

Az ábra szerint amikor a pályaszinten mozgó egységerő **átlép** a kiválasztott keresztmetszet függőlegesén, a keresztmetszetet megelőző erők eredőjének vetületei éppen az **egységerő megfelelő irányú komponenseinek értékével** módosulnak.



Ebből következően a keresztmetszetet **megelőző és követő normálerő-ordináták között 1×sinα,** a **megelőző és követő nyíróerő-ordináták között 1×cosα** nagyságú **ugrásnak** kell megjelennie. A **normálerő-változás előjele** a keresztmetszet állásának függvénye: **pozitív α szög esetén negatív érték**, a **nyíróerő-változás** az egységerő függőlegessége (lefelé mutatóan) és a pozitív nyíróerőirány lehetséges állásszöge (felfelé mutatóan) alapján **mindig negatív** lesz.

A **nyomatéki függvényben** a keresztmetszetet megelőző és követő ordináta **értéke azonos** lesz, hiszen a határátmenetben végtelen kicsiny karon az egységerő okozta nyomatékváltozás zérus. A nyomatéki függvénynek a keresztmetszetet megelőző és a keresztmetszetet követő szakaszát meg-vizsgálva viszont azt állapíthatjuk meg, hogy a **keresztmetszetet megelőző szakaszon** az egységerő **nélkül** előállítható **nyomatéki függvényhez** az egységerőből származó, **negatív előjelű, a kiválasztott keresztmetszettől mért vízszintes vetületi távolsággal arányos** nyomatékértékeket kell hozzáadni. Ez grafikailag azt jelenti, hogy **a nyomatéki hatásfüggvényben a vizsgált keresztmetszet pozíciójában** törés, a megelőző szakasz érintőjéhez viszonyítva **pozitív elfordulási szögű törés** alakul ki. A törésszög értéke abból határozható meg, hogy (a fentiek szerint) a keresztmetszetet **c** távolsággal megelőző metszetben az egységerő közvetlen hatásának figyelembevétele nélkül meghatározható nyomatéki függvény **-c** értékkel módosul. A műszaki gyakorlat a törésszög ilyen módon definiálható értékét **egységnyi törésnek** nevezi.

A tartószerkezetek megengedhető alakváltozásai a szerkezetek méreteihez képest **lényegesen** (legalább két nagyságrenddel) **kisebbek**. Ilyen esetekben az elfordulási szög függvényeire a számításainkban megkívánt pontossági határokon belül elfogadható a következő közelítés: $\mathrm{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha_{radián}$, **és** $\cos\alpha \approx 1$. Ezek a közelítések viszont lehetővé teszik, hogy az elfordulások nyomán tényleges körív mentén mozgó pont sugárirányú eltolódását elhanyagoljuk, az érintő irányú eltolódás értékét pedig az $r \times \alpha_{radián}$ értékkel vegyük számításba. Ennek alapján az elfordulási szög az érintő irányú eltolódás és a forgásközépponttól mérhető távolság hányadosaként adódik, ami esetünkben valóban **1**. Az itt ismertetett közelítést a tartószerkezetek alakváltozásvizsgálata során fogjuk felhasználni, a szakirodalomban pedig a **kis elmozdulások közelítései**ként található meg.

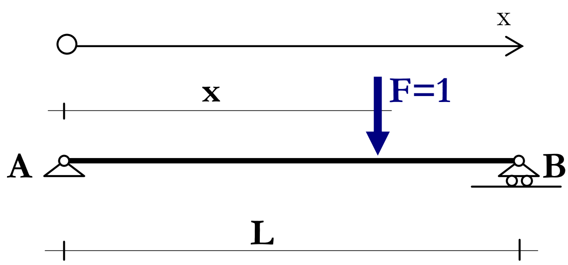
A statikailag határozott megtámasztású szerkezetek nyomatéki hatásfüggvényének jellegét vizsgálva azt állapíthatjuk meg, hogy az egységerő és a támaszerők közötti tartószakaszok terheletlenek, tehát ott a nyomatéki függvény (az igénybevételekre vonatkozó differenciális összefüggés alapján) legfeljebb lineáris lehet. Az előző pontban beláttuk, hogy az igénybevételi hatásordináták az igénybevételi ordinátákból a **hely** (keresztmetszeti pozíció) és az **ok** (a teherpozíció) felcserélésével kaphatók. Ennek megfelelően **a nyomatéki hatásfüggvény** (a keresztmetszet két oldalán) **lineáris lesz**. A nyíróerőábra a keresztmetszet előtt és után konstans függvény, de ennek értékei a keresztmetszet pozíciójának függvényében (a támaszerőkkel párhuzamosan) **lineárisan** változnak. Ennek alapján, felhasználva a hatásordináták értékére felismert hely-ok felcserélést, **a nyíróerő hatásfüggvény** a keresztmetszetet megelőző és követő szakaszon **lineáris** lesz.

9.4. Az igénybevételi hatásábrák előállítása statikai módszerrel

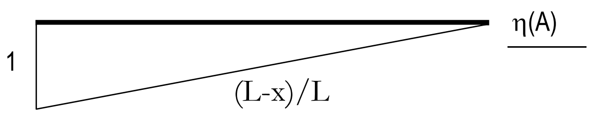
A statikai módszer a szerkezet, ill. annak részei statikai egyensúlyából indul ki, az egyensúlyi egyenletek felhasználásával állítja elő a keresett függvényeket. A szerkezetek igénybevételi függvényeinek meghatározásához (a konzoltartók kivételével) mindig szükségünk van a támaszerők értékének ismeretére. Ha a keresztmetszet igénybevételeit a mozgó teher pozíciójának függvényében akarjuk előállítani, a támaszerőt is a teherpozíció függvényében kell kezelnünk.

9.4.1. A támaszerő-hatásábrák

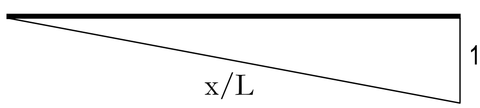
Görgős támaszukkal vízszintes síkra támaszkodó kéttámaszú gerendatartók esetében a támaszokban **csak függőleges** erők keletkeznek, és a támaszerők a teherpozíció **lineáris** függvényei lesznek.



$$\eta(A) = F \times (L - x)/L$$

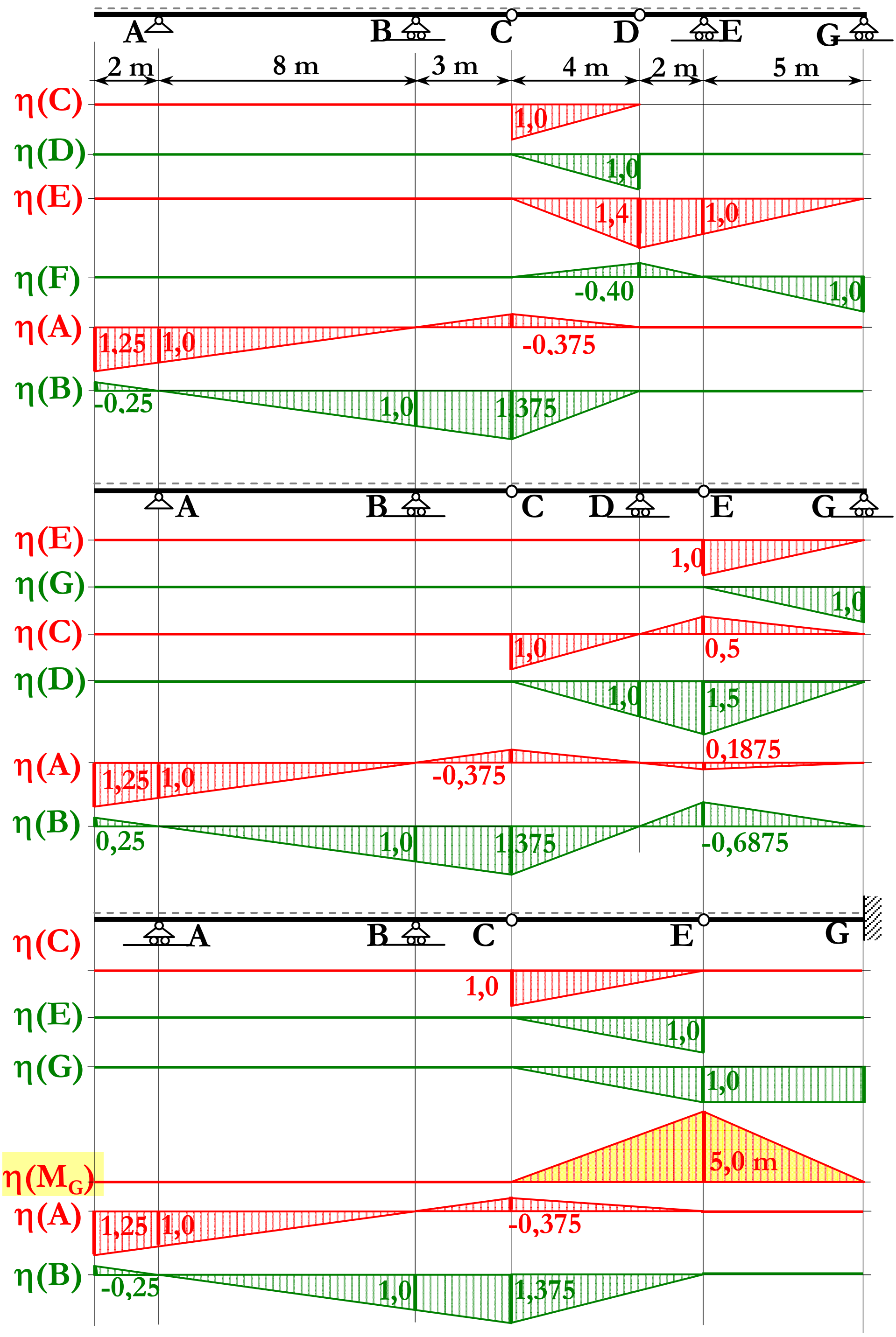


$$\eta(B) = F \times x/L$$



A támaszerők nagyságára vonatkozó összefüggés a tartó **egészére** igaz, tehát a konzolos kéttámaszú tartó teljes hosszán megadja az egységerő helyzetének függvényében a támaszerő nagyságát. Csuklós többtámaszú (GERBER) szerkezetek esetén a befüggesztett kéttámaszú tartók támaszerőinek hatásfüggvénye e fenti kifejezéssel határozható meg (a **fő részen mozgó egységerőből** ilyenkor **a befüggesztett részen nincs hatás**!), a fő rész alátámasztásaiban pedig a befüggesztett részen mozgó egységerőből a befüggesztett rész kapcsolati pontjában keletkező támaszerő **ellentettje** okoz támaszerőt, ami a **befüggesztett rész támaszközén lineárisan lecsökken zérusra**.

Amennyiben a szerkezet, vagy a megtámasztás jellege miatt **vízszintes** támaszerő-komponens is keletkezik (ferde síkra támaszkodó gerenda, keret vagy háromcsuklós tartó), a vízszintes támaszerő-összetevő a függőleges komponens értékéből a támaszerőnek az egyensúlyhoz szükséges állása alapján fejezhető ki (A szerkezeten mindig csak **egy, egységnyi erő** a teher, tehát **kéttámaszú** elemeken a **három erő egyensúlyához szükséges közös metszéspont** lehetővé teszi a támaszerők **hatásvonalainak** előállítását.


A
B
C
D
E
G
2 m
8 m
3 m
4 m
2 m
5 m
η(C)
1,0
η(D)
1,0
η(E)
1,4
1,0
η(F)
-0,40
1,0
η(A)
1,25
1,0
-0,375
η(B)
-0,25
1,0
1,375
A
B
C
D
E
G
η(E)
1,0
η(G)
1,0
η(C)
1,0
0,5
η(D)
1,0
1,5
0,1875
η(A)
1,25
1,0
-0,375
η(B)
0,25
1,0
1,375
-0,6875
A
B
C
E
G
η(C)
1,0
η(E)
1,0
η(G)
1,0
η(M_G)
5,0 m
η(A)
1,25
1,0
-0,375
η(B)
-0,25
1,0
1,375

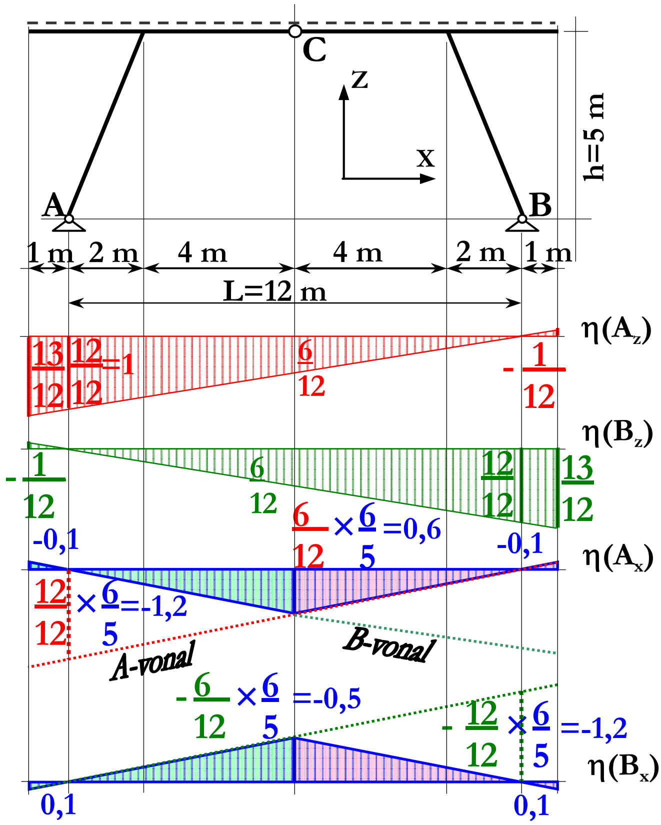
A támaszerő-hatásvonalak ábráin látható, hogy **egy** (merev) **szerkezeti elem hatásordinátái mindig egy egyenesre illeszkednek**. A belső csuklós kapcsolatoknál ezek az egyenesek csatlakozási ordinátái azonosak, de a meredekségük eltér. Vegyük észre az ábrákon azt is, hogy a vizsgált elemhez viszonyítva **fő elemeken mozgó egységerő a befüggesztett részre nem ad át terhet**, így a befüggesztett elem támaszerőinek a fő rész teherpozíciói alatti hatásordinátái azonosan zérusértékűek. A fő rész támaszerői szempontjából a **befüggesztett rész lineáris átmenetként** jelenik meg, ahogyan a teher az egyik főelemről a másik támaszra, vagy a másik főelemre átkerül. A szerkezeten a két főelem (a függőleges terheket önmagában is egyensúlyozni képes tartóelem) között lévő befüggesztett rész „szétkapcsolja" a hatásábrát: a mindkét végén egy-egy főelemhez kapcsolódó befüggesztett tartó az egyik főelemről a másikra nem viszi át a terhet, **az egyik főelemen mozgó egységerőből a másik főelem támaszerőinek** (a teherpozíciók alatti) **hatásordinátái zérusértékűek**.

A konzoltartón a támaszerő-hatásábrák ismerete nem szükséges a keresztmetszetek igénybevételi hatásfüggvényeinek előállításához, de a támaszerő, ill. támasznyomaték hatásfüggvényei értelmezhetők, és (a definíció alapján) igen egyszerűen előállíthatók. Az egyik GERBER-tartón erre is látnak példát.

Az **egyenes tengelyű** gerendákból álló **szerkezeteken a tengelyvonal** egyúttal **a pályaszint is**, a teherpozíció a tartótengely minden pontjához hozzárendelhető, azaz a támaszerő hatásordináták a tartó minden keresztmetszetében egyértelműen meghatározhatók, a hatásfüggvények értelmezési tartománya a teljes tartóhossz.

Tört tengelyvonalú tartóra a hatásábra csak igen nehezen volna értelmezhető, hiszen ne feledjük: az egységerő valamiféle mozgó jármű, vagy daruszerkezet leegyszerűsített modellje, amitől nem várhatjuk, hogy törtvonalú pályán közlekedjen (a hídpályák gyakorlati esésviszonyai a hatásfüggvényeket csak elhanyagolható mértékben módosítanák). A (gyakorlatilag**) vízszintes pályaszinttel rendelkező, törtvonalú,** egyszerű vagy összetett **szerkezeteken** (kéttámaszú vagy háromcsuklós, konzolos, ferdelábú keretek) viszont **a hatásfüggvények a pályaszinten felvett teherpozíciókon értelmezhetők**, és meghatározhatók.

Az ábrán látható szimmetrikus háromcsuklós tartón a támaszerők **függőleges** összetevője a kéttámaszú tartóhoz hasonlóan a (másik) támaszpontra vonatkozó nyomatéki egyenletből határozható meg, amelyben a **vízszintes** támaszerő-összetevő **nem szerepel**. A függőleges támaszerő-komponens hatásordinátái tehát itt is a **támaszpontok között 1 és 0 között lineárisan változnak,** ha van konzol, akkor a pályaszint konzolos szakaszán törésmentesen folytatódnak.

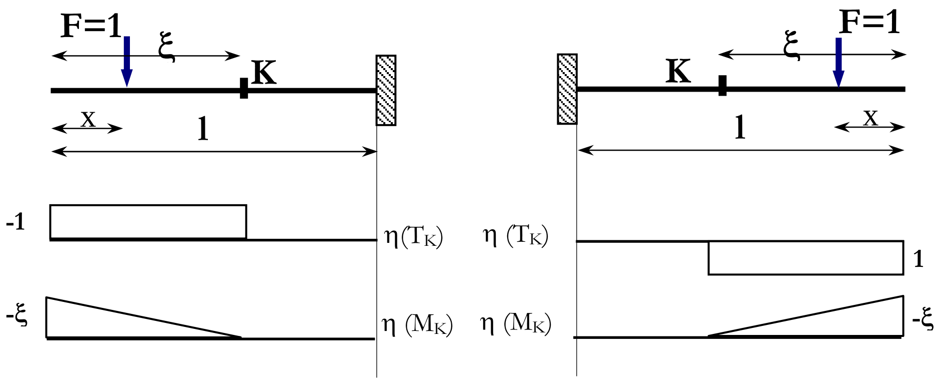


A vízszintes támaszerő-összetevő a szétbontott tartó egyik féldarabján a közbenső **C** jelű csuklópontra felírt nyomatéki egyenletből kapható. Ha az egységerő a jobb oldali tartóelemen jár, akkor a bal oldalon a **C** ponti nyomatéki egyenletben csak az **A** támaszerő két komponense szerepel, innen $\mathbf{A_X} = \mathbf{A_Z} \times (\mathbf{L}/2)/\mathbf{h} = \mathbf{A_Z} \times 6/5$. $\mathbf{A_Z}$ maga is változik, értéke az **A** pontban **1**, a **B** pontban **0**. Ennek alapján az **A** értéke az **A** pontban **1×6/5=1,2**, a **B** pontban **0**, de a (föl nem írt) nyomatéki egyenlet **csak akkor igaz, ha az egységerő a jobb oldali részen** (**C** és a jobb oldali konzolvég között) **mozog,** így az előbbiekben meghatározott függvénynek csak a **C** és a jobb oldali konzolvég közötti szakasza lehet érvényes, az $\eta(A_x)$ ábra lilával jelölt szakasza. A bal oldali tartórész elemzésével kapható meg a C csukló és a bal oldali konzolvég között érvényes összefüggés: $A_x = B_z \times L/2/h = B_z \times 6/5$,. ez $\eta(A_x)$ ábra sötétzölddel jelölt szakasza.

Az $\eta(B_x)$ hatásábra hasonló megfontolásokkal állítható elő, de az F=1 erő függőlegessége miatt B_x mindig az A_x ellentetje lesz.
A **vízszintes** támaszerő-összetevő hatásfüggvénye tehát a vizsgált tartóelemen a **függőleges-vízszintes összetevők arányát meghatározó** (nyomatéki vagy vetületi) **egyenletből** és a **függőleges komponens** (már ismert) **hatásfüggvényéből** állítható elő.

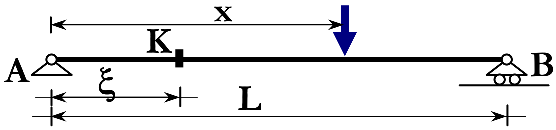
9.4.2. A keresztmetszeti igénybevételi hatásábrák

A hatásábrák szerkesztése során a tartó terhe egyetlen, változó pozíciójú, egységnyi nagyságú koncentrált erő. Konzoltartók esetében a vizsgált keresztmetszetet megelőző (vagy éppen követő) pozícióban csak ez az egyetlen erő lehet, vagy még az sem. A hatásábrák tehát csak a **keresztmetszet és a konzolvég között** tartalmazhatnak **zérustól különböző értéket**, éspedig (egyenestengelyű konzol esetén) a **normálerő** és a **nyíróerő hatásábra konstans**, a **nyomatéki hatásábra** (az egységerő keresztmetszettől mérhető távolság-változásának megfelelően) **lineárisan változó értékeket**. A konzoltartókra tett megállapításaink egyébként a konzolos kéttámaszú tartók túlnyúló konzoljaira is, sőt a bármilyen más szerkezetbe befogással csatlakozó, szabadvégű tartóelemre is igazak.

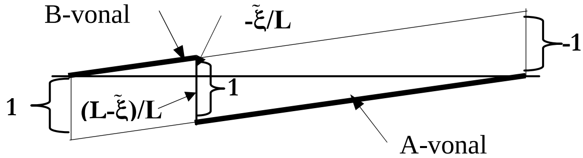


A **konzol individuális szerkezet**, nem ad, és nem fogad el segítséget más tartóelemektől, más szóval: **igénybevételei csak a rajta lévő tehertől függenek**, a csatlakozó, őt megtámasztó szerkezet terhelése ezt sem növelni, sem csökkenteni nem tudja.

Kéttámaszú tartók támaszközében felvett keresztmetszetek hatásábráinak előállítása során a teherpozíció függvényében vagy a keresztmetszet **előtt**, vagy a keresztmetszet **mögött** csak az **egyik** támaszerő áll. Ha tehát meg tudjuk mondani, hogy a támaszerőkből a vizsgált keresztmetszetre milyen értékű hatás keletkezik, ezzel a (konstans, csak a szerkezet geometriájától és a keresztmetszet helyzetétől függő) szorzóval a támaszerők hatásfüggvényét megszorozva a keresett igénybevételi hatásfüggvény értékeit kapjuk.

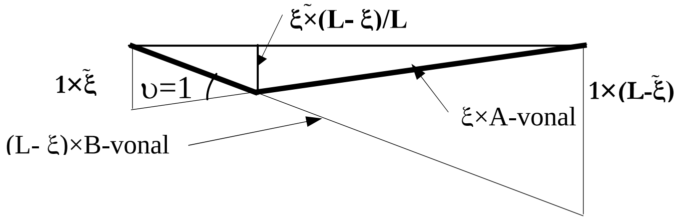


$T_K=+A \Rightarrow \eta(T_K)=\eta(A)$ (ha $x>\xi$) „A-vonal"
$T_K=-B \Rightarrow \eta(T_K)=-\eta(B)$ (ha $x<\xi$) „B-vonal"



$M_K= +A\times\xi \Rightarrow \eta(T_K)= \eta(A)\times\xi$ (ha $x<\xi$) „A-vonal"
$M_K= -(-B\times(L-\xi)) \Rightarrow \eta(T_K)= -(-\eta(B)\times(L-\xi))$ (ha $x<\xi$) „B-vonal"

$$\boxed{\eta(M_K)\Big|^{(\xi)} =+[(L-\xi))/L]\times\xi}$$



A **K** keresztmetszetben a felfelé mutató (megállapodásunk szerint pozitív) **A** jelű támaszerőből **+A** nagyságú nyíróerő és **+A×ξ** nagyságú nyomaték, a **B** jelű támaszerőből **-B** nagyságú nyíróerő és **-(-B×(L-ξ))** nagyságú nyomaték ébred. E függvények érvényességi tartománya természetesen csak azokra a teherpozíciókra terjed ki, amelyekben állva az egységerő a vizsgált támaszerővel ellentétes oldalra kerül. Így a **K** keresztmetszet hatásfüggvényei (külön a keresztmetszetet megelőző, és külön a követő szakaszra) az **A** és **B** jelű támaszerők hatásfüggvényeinek felhasználásával előállíthatók. A keresztmetszeti igénybevételek definíciója és előjelszabálya alapján felírt függvénykapcsolatból látható, hogy

mind a **nyíróerő-hatásábra**, mind a **nyomatéki hatásábra** a (statikailag határozott) tartón **lineáris elemekből** áll.

A vízszintes tengelyű tartó nyíróerő-hatásábráján a keresztmetszetet megelőző és követő szakasz azonos meredekségű, a **K** keresztmetszetben (a haladási irány szerinti) megelőző határkeresztmetszet ordinátájához viszonyítva a követő határkeresztmetszet hatásordinátája **+1**-gyel változik.

Vízszintes tengelyű tartón a **K** keresztmetszet függőlegesében **a nyíróerő hatásábrában** (a haladási irány szerinti) **+1 értékű ugrás jelenik meg**.

A nyomatéki hatásábrának a keresztmetszetet megelőző és a követő intervallumra érvényes szakasza a **K** keresztmetszetben azonos értéket vesz fel, és ez lesz a támaszközben a **K** keresztmetszethez tartozó **maximális hatásordináta**. A **K** keresztmetszetben a két nyomatéki hatásfüggvény-szakasz **töréssel** csatlakozik, és a törés **nagysága** (a már említett kis elmozdulásra érvényes közelítések alapján) $\boldsymbol{\vartheta = 1}$.

Vízszintes tengelyű tartón a **K** keresztmetszet függőlegesében **a nyomatéki hatásábrában -1 értékű alulról konvex törés jelenik meg**. A maximális hatásordináta (a **K** keresztmetszet alatt):

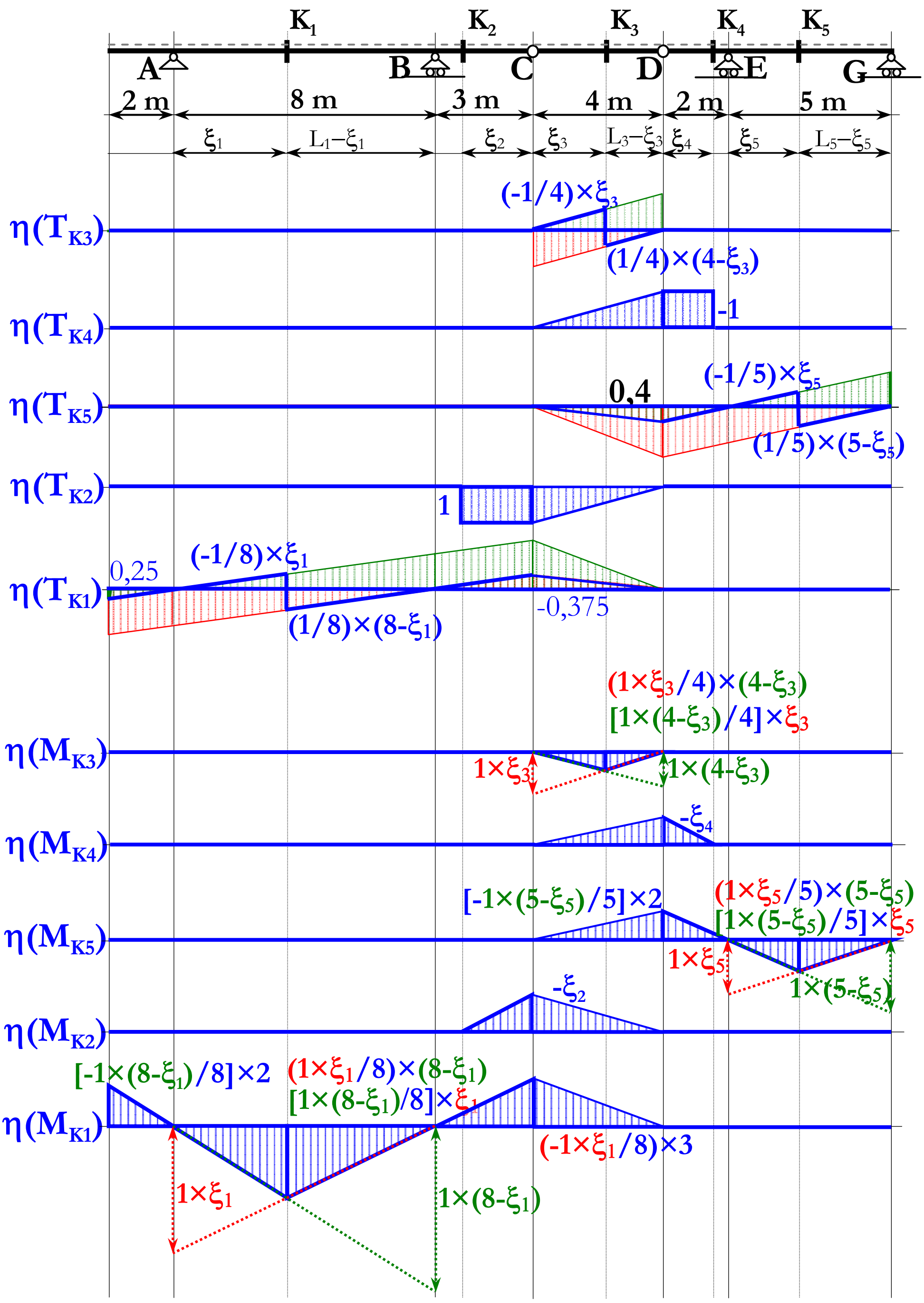
$$\eta\left(M_{K,max}\right)=\frac{\xi\times\left(L-\xi\right)}{L}$$

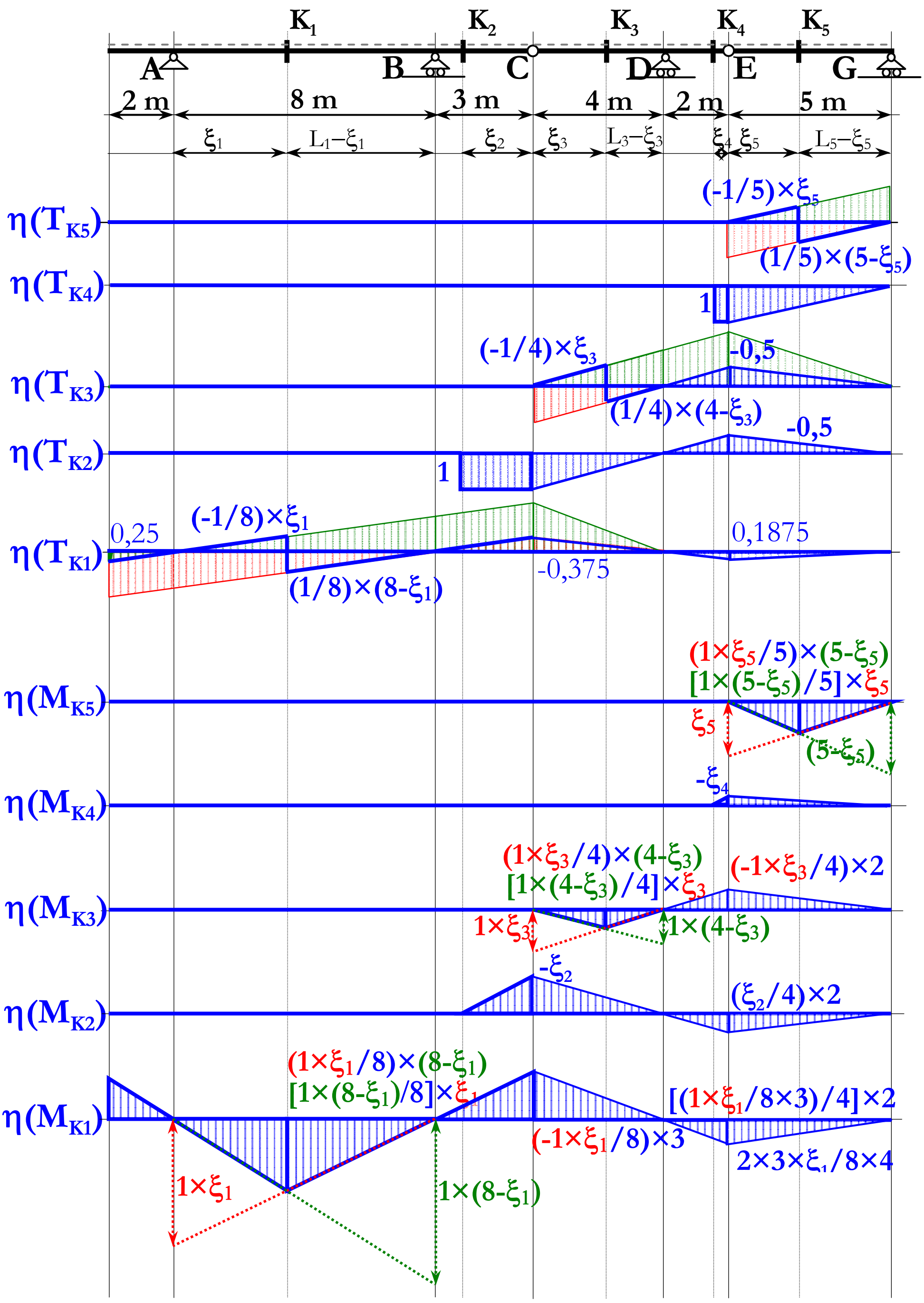
Kéttámaszú tartón a **K keresztmetszet igénybevételi hatásordinátái a támaszok felett mindig zérus értékűek**, azaz a hatásábrák rajzolása a támaszpontokból indulhat. Konzolos kéttámaszú tartókon az igénybevételi hatásábrák **konzolok feletti szakaszai a támaszközben érvényes függvények törés- és ugrásmentes folytatásaiként** rajzolhatók meg (ahogyan a támaszerő-hatásábrák is készültek). GERBER rendszerű tartókon a tartóelemek hierarchiája alapján könnyen belátható, hogy a **fő rész**

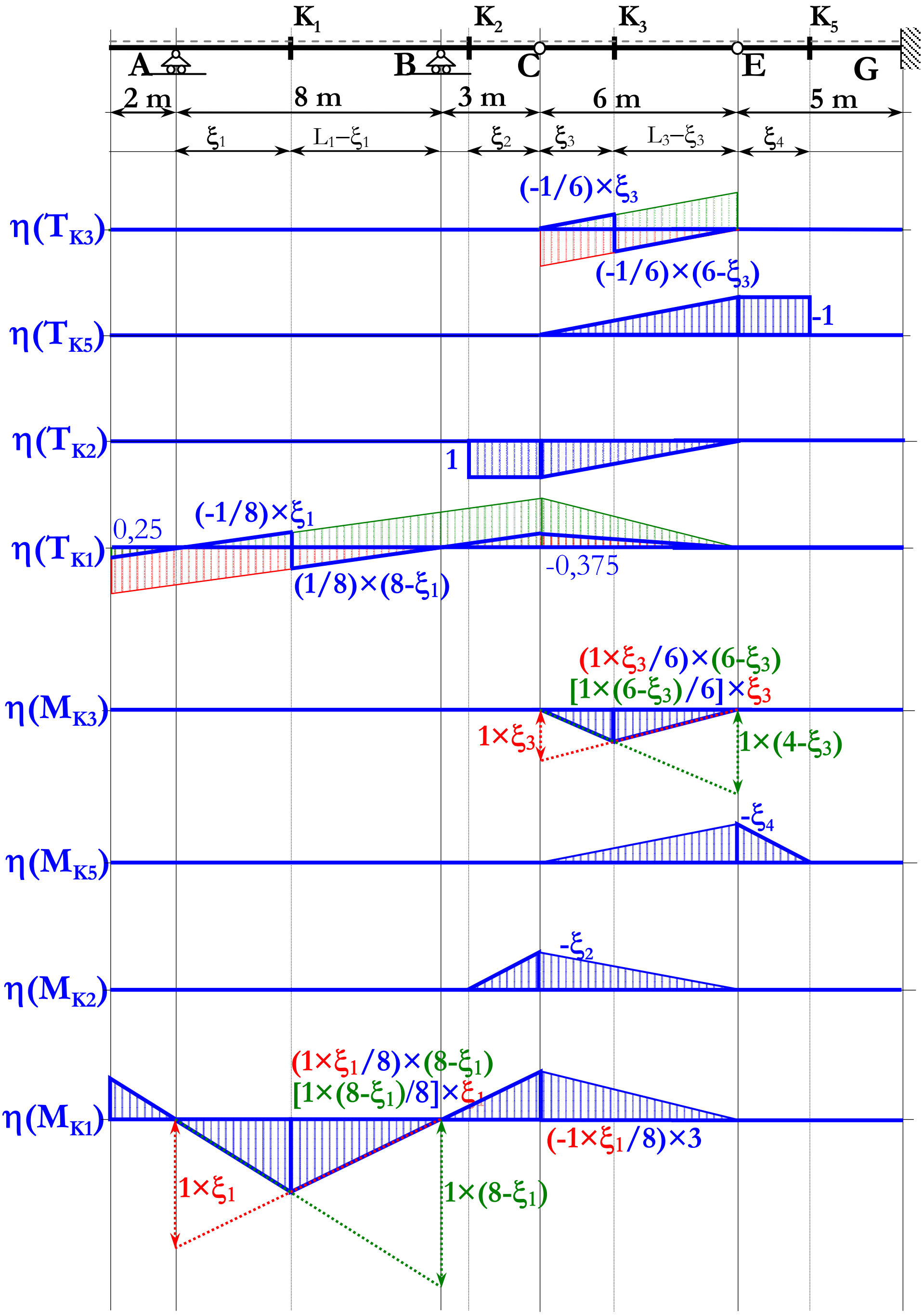
keresztmetszeteire a befüggesztett részen mozgó egységerőből **keletkezik hatás**, fordítva viszont nem: a fő részen mozgó egységerő a **befüggesztett részen** felvett keresztmetszetekben **semmiféle hatást nem okoz**.
A GERBER-tartók esetében az igénybevételi hatásábrák előállítása során (is) a **tartó elemekre bontása** a megoldás első lépése. Azok a tartóelemek, amelyekre **más tartórész nem támaszkodik** (a befüggesztett rész vagy a „legbefüggesztettebb" rész), a többi elemtől **függetlenül** kezelhetők, hatásordinátáik csak a fölöttük járó egységerőből lesznek zérustól különbözők. A GERBER tartó **konzoljai önmagukban konzolként** viselkednek, a hatásábráik is ennek megfelelően szerkeszthetők meg, de a rájuk (esetlegesen) támaszkodó **befüggesztett elemen a hatásfüggvény** a csatlakozási pontban érvényes értékről a befüggesztett elem másik támaszpontjában érvényes zérus értékig **lineárisan változik**. Ha a **befüggesztett elem maga is konzolos**, akkor a hatásfüggvény ennek a konzolján is folytatódik, és ha erre is támaszkodik újabb befüggesztett elem, akkor a csatlakozási ponttól a támaszpontig újabb lineáris szakasszal folytatódik a hatásábra.

> Az igénybevételi hatásábrák **jellegét** alapvetően meghatározza, hogy a felvett keresztmetszet a **támaszközben**, vagy a **konzolos** részen van-e, ezért ezt az elemekre bontás után azonnal meg kell állapítani.

A **ferde síkra támaszkodó tartók**, a **keretek**, a **háromcsuklós tartók** igénybevételi hatásábrái a fentiek szellemében, a támaszerők-komponensekből a keresztmetszetekben ébredő igénybevételek, és a támaszerő-komponensek hatásfüggvényei alapján állíthatók elő, de ezekkel a tartókkal e tárgy keretében **nem foglalkozunk**.
A vízszintes tengelyű gerendatartó igénybevételi hatásábráinak alakulását a támaszerő-hatásábrák kapcsán felvett tartók keresztmetszetein mutatjuk be, az ábrákban megjelenítve a felhasznált támaszerő-hatásábrákat is.


K1
K2
K3
K4
K5
A
B
C
D
E
G
2 m
8 m
3 m
4 m
2 m
5 m
ξ1
L1–ξ1
ξ2
ξ3
L3–ξ3
ξ4
ξ5
L5–ξ5
η(TK3)
(-1/4)×ξ3
(1/4)×(4-ξ3)
η(TK4)
-1
η(TK5)
0,4
(-1/5)×ξ5
(1/5)×(5-ξ5)
η(TK2)
1
η(TK1)
0,25
(-1/8)×ξ1
(1/8)×(8-ξ1)
-0,375
(1×ξ3/4)×(4-ξ3)
[1×(4-ξ3)/4]×ξ3
η(MK3)
1×ξ3
1×(4-ξ3)
η(MK4)
-ξ4
[-1×(5-ξ5)/5]×2
(1×ξ5/5)×(5-ξ5)
[1×(5-ξ5)/5]×ξ5
η(MK5)
1×ξ5
1×(5-ξ5)
η(MK2)
-ξ2
[-1×(8-ξ1)/8]×2
(1×ξ1/8)×(8-ξ1)
[1×(8-ξ1)/8]×ξ1
η(MK1)
(-1×ξ1/8)×3
1×ξ1
1×(8-ξ1)


K1
K2
K3
K4
K5
A
B
C
D
E
G
2 m
8 m
3 m
4 m
2 m
5 m
η(TK5)
η(TK4)
η(TK3)
η(TK2)
η(TK1)
η(MK5)
η(MK4)
η(MK3)
η(MK2)
η(MK1)
0,25
0,1875
-0,375
-0,5
-0,5
1
1


K1
K2
K3
K5
A
B
C
E
G
2 m
8 m
3 m
6 m
5 m
ξ1
L1–ξ1
ξ2
ξ3
L3–ξ3
ξ4
η(TK3)
(-1/6)×ξ3
(-1/6)×(6-ξ3)
η(TK5)
-1
η(TK2)
1
η(TK1)
0,25
(-1/8)×ξ1
(1/8)×(8-ξ1)
-0,375
η(MK3)
(1×ξ3/6)×(6-ξ3)
[1×(6-ξ3)/6]×ξ3
1×ξ3
1×(4-ξ3)
η(MK5)
-ξ4
η(MK2)
-ξ2
η(MK1)
(1×ξ1/8)×(8-ξ1)
[1×(8-ξ1)/8]×ξ1
(-1×ξ1/8)×3
1×ξ1
1×(8-ξ1)

9.5. Az igénybevételi hatásábrák előállításának kinematikai módszere

A statikailag határozott szerkezetek igénybevételi hatásábráinak tulajdonságait elemezve néhány **általános érvényű** megállapítást tehetünk:

- a statikailag határozott szerkezetek támaszerő- és igénybevételi hatásfüggvényei **mindig lineáris szakaszokból** összetehetők
- a nyíróerő hatásfüggvényben a keresztmetszet függőlegesében (a haladási irány szerinti pozitív) **egységnyi ugrás** jelenik meg
- a nyomatéki hatásfüggvényben a keresztmetszet függőlegesében (a haladási iránytól függetlenül alulról konvex) **egységnyi törés** jelenik meg
- A nyíróerő hatásábrában a keresztmetszetet megelőző és a keresztmetszetet követő függvényszakaszok egyenesei **párhuzamosak**
- A nyomatéki hatásábrában a keresztmetszetet megelőző és a keresztmetszetet követő függvényszakaszok keresztmetszet alatti hatásordinátái **azonosak**
- a konzoltartón a **keresztmetszet és a támasz között minden hatásordináta azonosan zérus**
- a konzolos tartórészen lévő keresztmetszetek hatásfüggvényei mindig **„konzol jellegűek”**, függetlenek a konzol megtámasztási viszonyaitól (külső befogás, vagy más szerkezet túlnyúló, konzolos eleme)
- a kéttámaszú tartón a támaszok függőlegesében az igénybevételi **hatásordináták értéke zérus**
- a konzolos kéttámaszú tartón a támaszközben lévő keresztmetszet igénybevételi hatásfüggvényének a keresztmetszetet megelőző ill. követő egyenesei a támaszok fölött **ugrás- és törésmentesen** folytatódnak a konzolvégekig
- a GERBER-tartón a befüggesztett részen lévő keresztmetszeteken a fő részen mozgó egységerőből **nem ébred** (igénybevételi) hatás
- a GERBER-tartón a fő részen lévő keresztmetszetek hatásfüggvényei a csatlakozó konzolvégen érvényes értéktől a befüggesztett rész másik támaszáig **lineárisan zérusra csökkennek**
- a GERBER-tartókon a kapcsoló csuklók függőlegesében az igénybevételi hatásfüggvényekben (értelemszerűen) **törés** alakul ki.

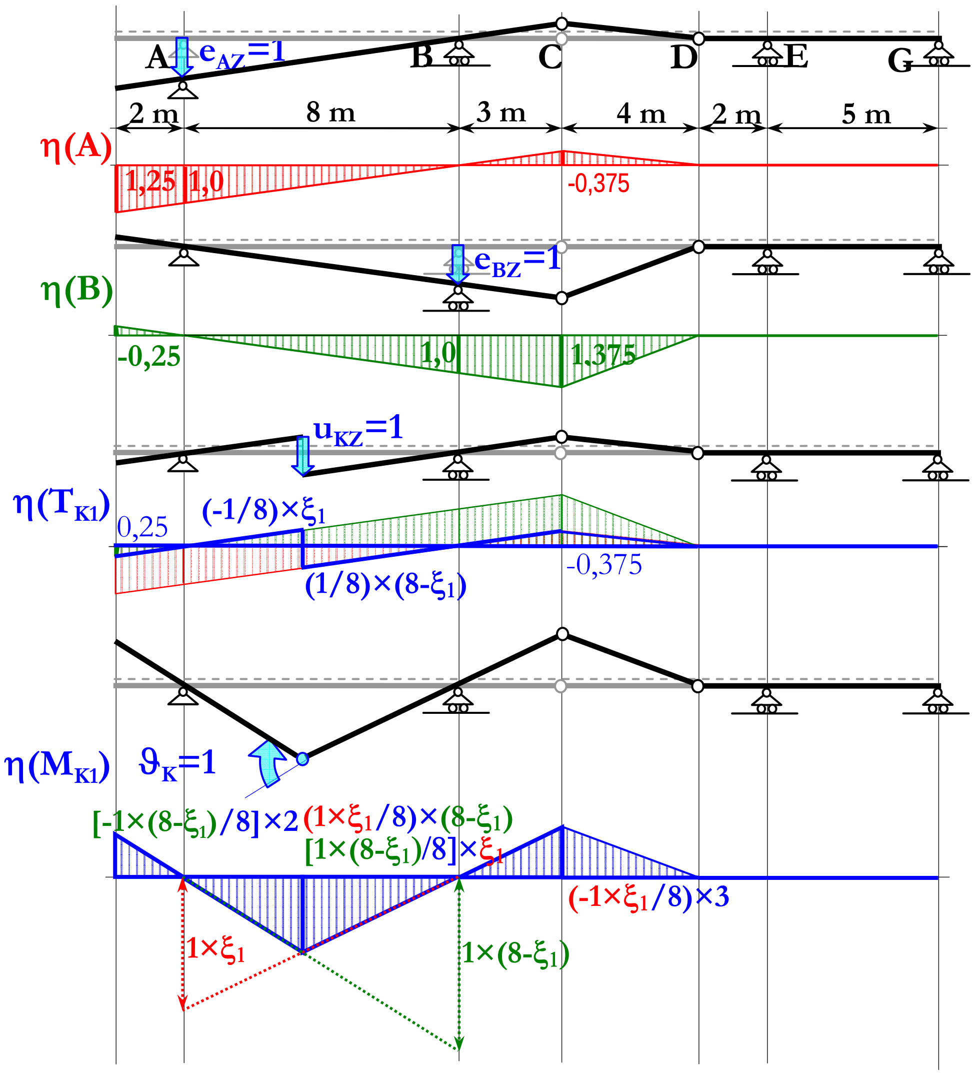
A fenti megállapításokat összegezve azt vehetjük észre, hogy a statikailag határozott tartók igénybevételi hatásfüggvényei egy **merev rúdelemekből** és **relatív elmozdulásra képes kapcsolatokból** összeállított (statikai szempontból labilis) kinematikai szerkezet (láncolat) elmozdulásaiként (pontosabban: **függőleges eltolódásaiként**) (is) megjeleníthetők:

- a **támaszerő-hatásábrákat** a láncolat elmozdult alakja akkor rajzolja ki, ha a **keresett támaszpontot egységnyivel lefelé** elmozdítjuk
- a **nyíróerő hatásábrát** a keresztmetszetben elvágott tartó csatlakozó elemei közé iktatott **egységnyi** (a haladási irány szerint a negatív nyíróerő irányában álló), **a tartótengelyre merőleges relatív eltolódás** nyomán kialakuló elmozdult alak rajzolja ki (ilyenkor az elvágott keresztmetszetben csatlakozó elemek között **relatív elfordulást nem engedünk meg**!)
- a **nyomatéki hatásábrát** a keresztmetszetben elvágott tartó csatlakozó elemei közé iktatott **egységnyi** (a haladási iránytól függetlenül, alulról konvex) **relatív elfordulás** nyomán kialakuló elmozdult alak rajzolja ki (ilyenkor az elvágott keresztmetszetben csatlakozó elemek között **relatív eltolódást nem engedünk meg**!)

A fenti analógia korrekt elvi igazolása mélyebb ismereteket követelne, de ezek tárgyalására csak a következő félévben kerülhet sor. Most meg kell elégednünk a kinematikai szerkezet eltolódásainak és a keresett igénybevételi hatásfüggvény ordinátáinak azonosságát felismerő „sejtés”-sel. Meg kell még jegyeznünk, hogy a vizsgálandó keresztmetszetbe bekényszerített egységnyi relatív elmozdulások hatására kialakuló deformált alak függőleges eltolódásai nemcsak a statikailag határozott, hanem a **határozatlan megtámasztású** szerkezetek megfelelő igénybevételi hatásábráit is előállítják, tehát a **kinematikai hatásábra-szerkesztés** a megtámasztási viszonyoktól független, **általánosan érvényes** eljárás. Természetesen a határozatlan tartók egy átvágással, egy belső merevség megszüntetésével nem alakulnak szabadon, erőhatások nélkül elmozdítható kinematikai szerkezetekké, ezért a kívánt relatív elmozdulások csak alkalmas kapcsolati dinámok, ehhez tartozó igénybevételek révén érhetők el, és ennek megfelelően a tartóalak még szakaszosan sem lesz deformációmentes, egyenes.

A statikailag határozott szerkezetek támaszerő- és igénybevételi hatásábrái **kinematikus úton** is előállíthatók: a vizsgálandó helyen a keresett hatás-ábra jellegének megfelelő **egységnyi relatív elmozdulás** hatására (az átvágás révén kinematikai láncolattá alakult tartón) **kialakuló függőleges eltolódási ábra** rajzolja ki a keresett hatásábrát.

Az alábbiakban néhány hatásábra kinematikus szerkesztését mutatjuk be:



9.6. A hatásábrák leterhelése

A hatásordináták a felettük álló egységerőből a kiválasztott helyen-keresztmetszetben keletkező hatás értékét adják meg. Ha a terhelésünk nem egyetlen, egységnyi nagyságú erő, akkor a vizsgált helyen-keresztmetszetben keletkező eredő hatást (a lineáris függvénykapcsolatok alapján) az **egyes terhelések okozta hatások összegeként** kaphatjuk meg. (A képletben szereplő $\mathbf{Y_K}$ a kiválasztott keresztmetszetben keletkező bármilyen hatást jelölhet, az összefüggés a támaszerőktől az igénybevételeken át az elmozdulásokig általánosan alkalmazható.)

$$Y_K^F = \Sigma F_i \times Y_i$$

A $\mathbf{K_1}$ és $\mathbf{K_2}$ jelű keresztmetszetek között működő **megoszló terhelés** esetén (a teher alatti **dx** infinitezimális hosszúságú szakaszon az intenzitás változásától eltekintve) az összegzett hatást egy **integrálkifejezés** szolgáltatja, ami a koncentrált erőkre vonatkozó összefüggéshez hasonlóan általánosan alkalmazható:

$$Y_K^{q(x)} = \int_{K_1}^{K_2} y(x) \times q(x) dx$$

Ha a megoszló teher **intenzitása** a vizsgált intervallumon **állandó**, akkor a **q** konstans az összegzés elé kiemelhető, a megmaradó integrálkifejezés pedig valójában a $\mathbf{K_1}$ és $\mathbf{K_2}$ jelű keresztmetszetek között a **hatásfüggvény alatti terület értékét** állítja elő. Ennek az összefüggésnek az értelmében, ha a vizsgált szakaszon a hatásfüggvény alatti területet más módon meg tudjuk határozni, akkor az integrálás művelete mellőzhető.

$$Y_K^q = q \times \int_{K_1}^{K_2} y(x) dx = q \times A_y^{K_1 - K_2}$$

Lineáris szakaszokból álló hatásfüggvények esetében a függvényszakaszok alatti terület meghatározása elmei geometriai eszközökkel egyszerűen történhet. Ha a hatásfüggvény görbe vonalú (pl. elmozdulási hatásábra), akkor általában zárt alakban nem tudjuk (vagy nem érdemes) a függvényt előállítani, hanem a tartón kellő sűrűséggel kiválasztott teherpozíciókra numerikusan határozzuk meg a hatásordináták értékeit. Ez esetben a területmeghatározás valamilyen közelítő eljárással (trapéz-szabály, Simpson-szabály, stb.) történhet, amelyek akár egy egyszerű táblázatkezelővel algoritmizálhatók.

9.7. A hatásábrák mértékadó leterhelése

Az előző pontban megállapítottuk, hogy egy tartókeresztmetszetben az igénybevételek-elmozdulások a **hatásábrák segítségével is** előállíthatók. Csakhogy ezeket az értékekhez az **igénybevételi ábrák** (és a későbbiekben megismerendő alakváltozás-számítás) **alapján sokkal egyszerűbben** hozzájuthatunk. Miért érdemes akkor mégis a hatásábrák leterhelésével határozni meg a tartókeresztmetszetek igénybevételeit? Azért, mert a mozgó teherből a legnagyobb számértékű hatást szolgáltató teherpozíciót (a mértékadó teherállást) és az ebből a keresztmetszetben keletkező legnagyobb számértékű igénybevételt (a mértékadó igénybevételt) csak a hatásábra mértékadó leterhelésével tudjuk előállítani. A gyakorlatban a nagy tömegű járművek tengelyterheit koncentrált erőcsoportként, a szokásos, rendszeres járműterheket pedig parciálisan működtethető egyenletesen megoszló teherként vesszük számításba.

Egy tartókeresztmetszet **mértékadó** (maximális-minimális) **igénybevételpárja a keresztmetszet hatásábrájának mértékadó leterhelésével** kapható meg. A leterhelés során az egyenletes megoszlású **állandó** terhet a **tartó teljes hosszán**, az egyenletes megoszlású **esetleges terhet** pedig **külön a pozitív és külön a negatív hatásordináták felett** vesszük számításba. A koncentrált erőkből álló erőcsoport mértékadó elhelyezéséhez **egy koncentrált erőt a hatásábra maximális ordinátája fölé kell állítani**, de – általános esetben – nem dönthető el előre, hogy melyik erő-elrendezés szolgáltatja a legnagyobb számértékű igénybevételt.

Az állandó teher hatásának megállapításához valójában nincs szükség a hatásábrákra, egyszerűen elkészíthetjük az **állandó terhekre az igénybevételi ábrákat**, és ezekre **szuperponálhatjuk** az esetleges terhek mértékadó elhelyezésével kapható **pozitív és negatív maximumok függvényeit**. Megjegyezzük, hogy ez esetben a pozitivitás-negativitás nem jelent feltétlenül pozitív ill. negatív előjelet, csak azt, hogy a vizsgált keresztmetszetben a felvett koncentrált erőcsoportból és parciálisan megoszló esetleges teherből a kiadódott **pozitív maximumnál pozitívabb**, ill. **negatív maximumnál negatívabb igénybevétel nem keletkezhet**. A hatásábrák mértékadó leterhelése tehát a vizsgált keresztmetszetre a felvett teherparaméterekhez tartozó **lehetséges igénybevételi intervallumot** állítja elő.

9.8. Az igénybevételi maximális ábrák

A hatásábrák mértékadó leterhelésével a felvett teherparaméterekhez tartozó igénybevételek **legpozitívabb és legnegatívabb értékpárját** keresztmetszetről keresztmetszetre elő tudjuk állítani. Ezek után nincs akadálya annak, hogy ezeket az értékpárokat a **keresztmetszet pozíciójához** kössük, és így egy igénybevételi maximális függvény-párt definiáljunk.

A tetszőleges pozícióban elhelyezkedhető, de rögzített erőnagyságokkal és távolságokkal felvett **koncentrált erőcsoportból** és a tetszőleges szakaszokon (parciálisan) működtethető, **egyenletes megoszlású esetleges teherből,** valamint az **állandó teherből** a keresztmetszetek **mértékadó leterhelésével** nyerhető **igénybevétel-értékek** a keresztmetszet pozíciójának függvényében értelmezve az **igénybevételi maximális ábrák** függvény-párját – **ábra-párját határozzák meg**.

Az igénybevételi maximális ábrák függvény-párjai minden keresztmetszetre (a felvett teherparaméterek függvényében) az ott előfordulható **legpozitívabb és legnegatívabb igénybevételi értékeket szolgáltatják**, ha tehát a tartószerkezetünk **keresztmetszeti ellenállóképessége** ezeket az értékeket **keresztmetszetről keresztmetszetre felülmúlja**, akkor a szerkezetünk (erőtani szempontból) bizonyosan **megfelel**. Az igénybevételi maximális ábrák tehát a mozgó teherrel terhelt tartószerkezetek erőtani tervezéséhez és ellenőrzéséhez igen jól használhatók.

Az igénybevételi maximális ábrák ordináta-párjainak meghatározása a keresztmetszeti hatásábrák mértékadó leterhelésével (a definíció szerint) megoldott. Már az **igénybevételi ábrák meghatározása**, majd a **hatásábrák előállítása** során is felismertünk azonban olyan egyszerű megfontolásokat, levontunk olyan következtetéseket, amelyek a függvények tulajdonságainak feltárásával a pontonkénti számítás helyett – legalább szakaszonként – **zárt alakban** szolgáltatták a keresett függvényeket. Így van ez az igénybevételi maximális ábrák körében is.

A hatásábrák alakját, a hatásordináták előjeleinek, nagyságának alakulását felhasználva az egyenletesen megoszló parciális **esetleges tehernek a keresztmetszetekre mértékadó teherállása bizonyos tartószakaszokon azonos lesz**, ami annyit jelent, hogy ezen tartószakaszokon az **igénybevételi maximális ábra** az oda meghatározható **igénybevételi ábrával** lesz **azonos**.

9.8.1. Maximális ábrák a konzoltartókon

A konzoltartók nyíróerő hatásordinátái a keresztmetszet és a támasz között zérus, a keresztmetszet és a konzolvég között (mindkét szakasz nyílt intervallum!) a megtámasztási oldaltól függően -1 ill. +1 értéket vesznek fel. A konzolon tehát **jobb oldali befogás esetén pozitív**, **bal oldali befogás esetén negatív nyíróerő-hatásordináta nincs**. (GERBER-tartókon a csatlakozó szerkezeteken előfordulhatnak ellentétes előjelű hatásordináták is!)

A konzoltartók nyomatéki hatásordinátái a keresztmetszet és a támasz között zérus, a keresztmetszet és a konzolvég között (mindkét szakasz zárt intervallum!) a megtámasztási oldaltól függetlenül a keresztmetszettől a konzolvégig lineárisan növekvő negatív értéket vesznek fel. A konzolon tehát **pozitív nyomatéki hatásordináta nincs**. (GERBER-tartókon a csatlakozó szerkezeteken előfordulhatnak ellentétes előjelű hatásordináták is!)

A megoszló esetleges teher mértékadó elhelyezése azt jelenti, hogy a **vizsgálat szerinti előjelű hatásordináták mindegyike** fölé kerüljön teher, és az **ellentétes előjelű hatásordináták fölött sehol se** legyen teher. Megjegyezzük, hogy az esetleges zérus hatásordináták fölött lévő teherből a vizsgált keresztmetszetben hatás nem keletkezik, a teher ezek fölé helyezése nem befolyásolja a keresztmetszeti igénybevételi maximumok értékét.

A **koncentrált erőcsoport** mértékadó elhelyezése csak próbálgatással, több lehetséges teherpozíció maximális hatásainak kiszámításával lehetséges, ezzel a kérdéssel e tárgy keretében **nem foglalkozunk**.

A fentiek alapján egy konzoltartó mértékadó terhe – szigorúan véve – mindig a keresztmetszet és a konzolvég közötti szakaszon van. Minthogy azonban a keresztmetszet és a befogás között a hatásordináták zérusértékűek, akkor is mértékadó igénybevételt kapunk a keresztmetszetben, ha az esetleges megoszló terhelést a konzol **teljes hosszán** működtetjük.

A **konzol** keresztmetszeteire (mind a nyíróerő, mind a nyomatéki igénybevételek szempontjából) **mértékadó leterhe**lést jelent, ha az esetleges (parciálisan) **megoszló terhelést a konzol teljes hosszán** működtetjük.

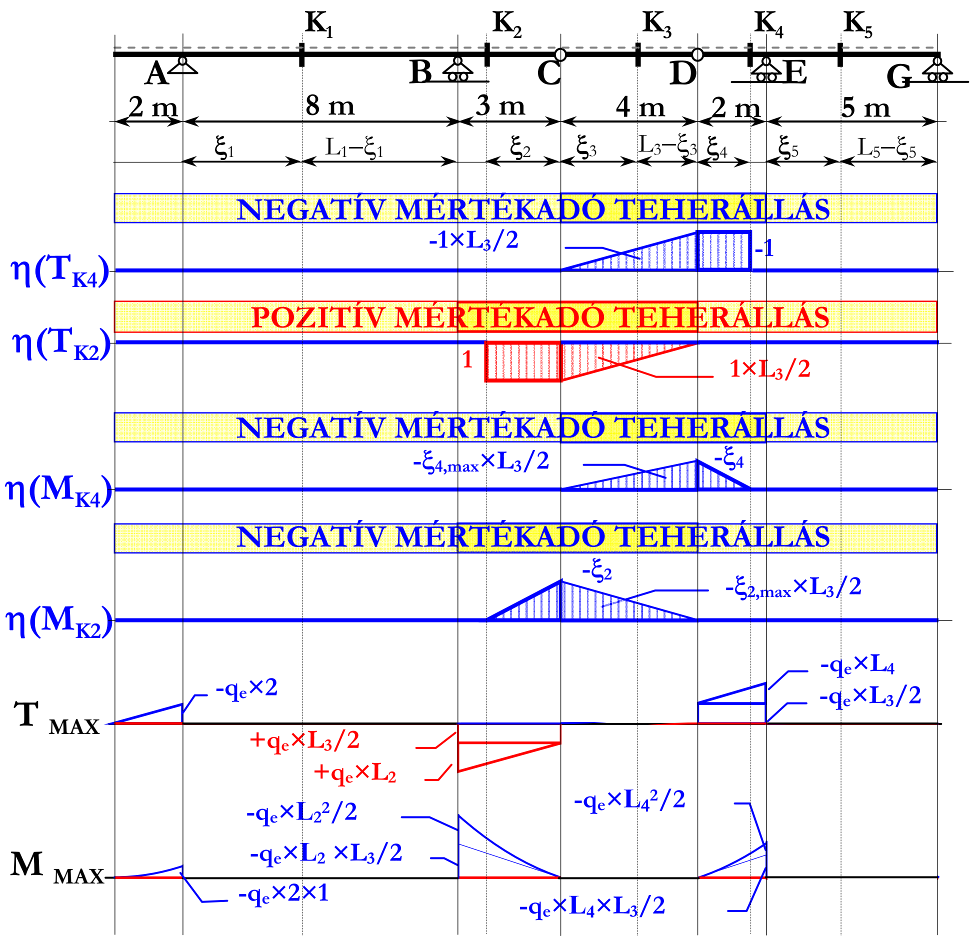
Ez azt jelenti, hogy a konzoltartók **igénybevételi maximális ábrája** valójában a teljes konzolhosszon működtetett esetleges megoszló teherből meghatározott **igénybevételi ábra** lesz.

Nem szabad elfeledkeznünk, hogy az igénybevételi maximális ábrákat egy pozitív és egy negatív maximális értéket meghatározó **függvény-párként** definiáltuk. Ha tehát a konzoltartón állandó teher nincs, akkor a mértékadó leterhelés az egyik igénybevételi szélsőérték-függvényhez a fenti teljes leterhelés, a másikhoz a „nem terhelés", hiszen az ellenkező előjelű hatásordináták fölé nem tehetjük az esetleges terhet. Így az igénybevételi maximális ábra egyik szélsőérték-vonala a tengely lesz. **Ha** a szerkezeten **van állandó teher is**, ennek elhelyezése nem rajtunk múlik, azaz **az erre rajzolható igénybevételi ábrákból kell kiindulnunk**, és az esetleges teherből kapható minimum és maximumfüggvényeket erre kell szuperponálni.

A konzolvéghez csatlakozó befüggesztett elem nyíróerő-hatásordinátája a konzolvégen (értékében) mindig **1**, a nyomatéki hatásordináta mindig **-ξ**, azaz a fix hosszúságú **befüggesztett elemen a nyíróerő hatásábra területe konstans**, a **nyomatéki hatásábra területe** (a konzolon felvett keresztmetszet helyének függvényében) **lineárisan változik**. A befüggesztett rész mértékadó leterheléséhez ezen hatásábra-területek fölé kell állítanunk az esetleges megoszló terhelést.
Ha a konzoltartóhoz kapcsolódó **befüggesztett elem maga is konzolos**, akkor a befüggesztett részen mind pozitív, mind negatív hatásábra-területek lesznek, így a vizsgált **konzoltartón mind a pozitív, mind a negatív maximális hatásfüggvények módosulni fognak**.

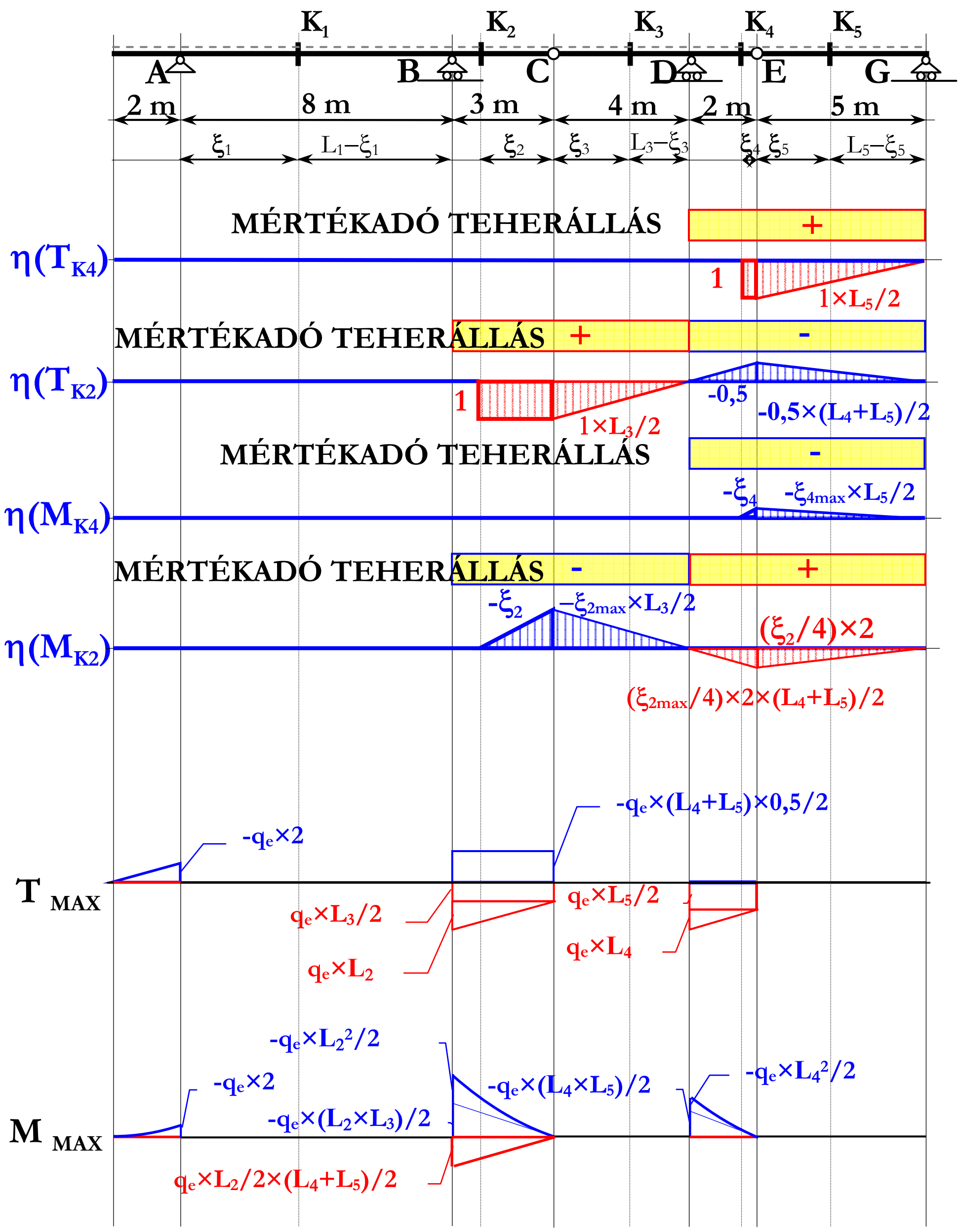
A konzoltartókon az **esetleges megoszló teherre** rajzolható **nyíróerő-maximális ábrák lineárisak**, a **nyomatéki maximális ábrák parabolikusak** lesznek. A konzolhoz csatlakozó **befüggesztett** elemek mértékadó leterhelése a konzolkeresztmetszetek **maximális nyíróerő függvényeit** (a befüggesztett rész geometriájától függő) **konstans értékkel**, **maximális nyomatéki függvényeit** (a befüggesztett rész geometriájától és a vizsgált keresztmetszet pozíciójától függő) **lineárisan változó értékkel** módosítja.

A konzol-szakaszok igénybevételi maximális ábrái (1. statikai váz)



A GERBER-tartó konzolelemeinek keresztmetszeteire a maximális igénybevételeket a mértékadó leterhelésből határozhatjuk meg. Vegyük észre, hogy ez esetben a **befüggesztett elemnek nem lévén konzolja**, a vizsgált konzolkeresztmetszetekhez **csak azonos előjelű hatásordináták tartoznak.** Így a pozitív ill. a negatív hatásábraterületek fölött alkalmazott esetleges megoszló teher helyett a **teljes tartóhosszon** működtetett esetleges megoszló teher **is** mértékadó elrendezésnek tekinthető, azaz (a konzolos szakaszokon) a **nyíróerő- és nyomatéki maximális ábrák** az esetleges megoszló teherrel totálisan terhelt tartó **igénybevételi ábráival azonosak**.

A konzol-szakaszok igénybevételi maximális ábrái (2. statikai váz)

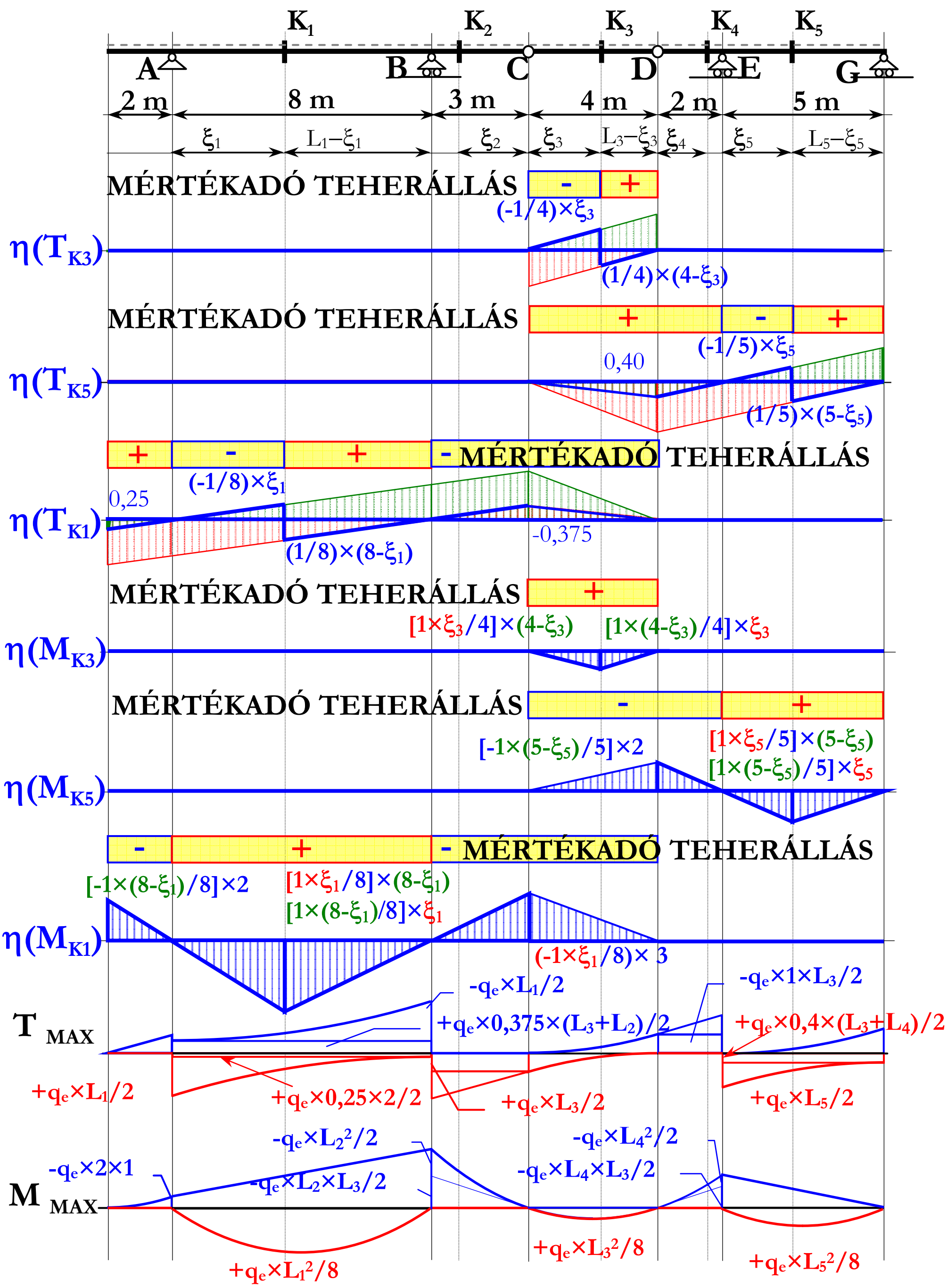


9.8.2. Maximális ábrák a kéttámaszú tartókon

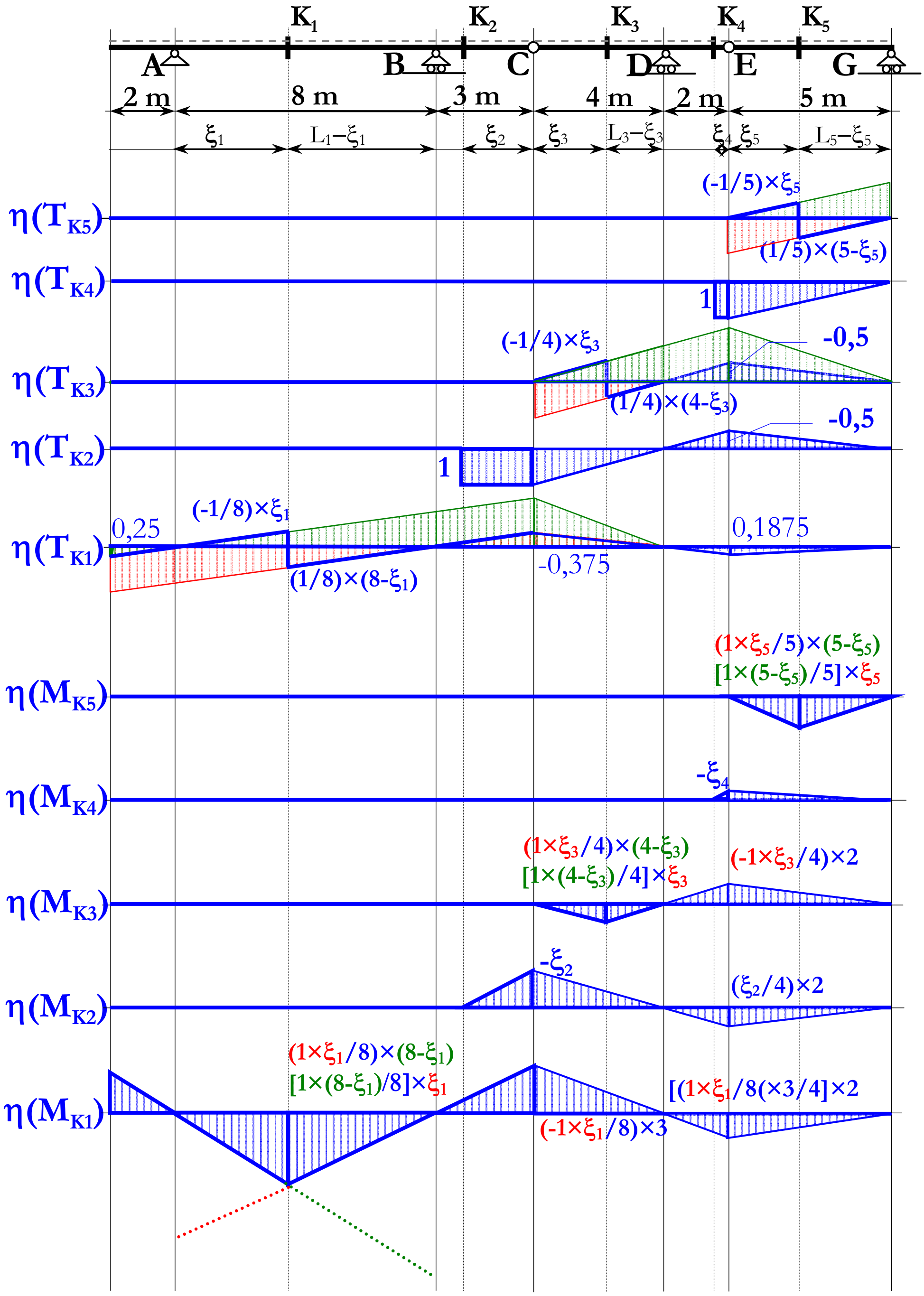
A konzolos kéttámaszú tartók **konzoljain** lévő keresztmetszetek maximális ábrái a konzoltartóknál ismertetett tulajdonságokkal rendelkeznek, előállításuk is a konzoltartók keresztmetszeteire ismertetett eljárással történik. A **támaszközben** lévő keresztmetszetek **nyíróerő**-hatásábrájának ordinátái a keresztmetszetet megelőző szakaszon negatív, a keresztmetszetet követő szakaszon pozitív előjelűek. A keresztmetszet előtti, negatív előjelű és a keresztmetszetet követő, pozitív előjelű, derékszögű háromszög alakú hatásábraterület nagysága a keresztmetszet pozíciójának függvényében **zérustól** a **q_e×L/2** értékig **négyzetesen** változik. A tartó konzolos részén és az esetleges befüggesztett elemeken lévő hatásábraterületek nagysága a (támaszköz-)keresztmetszet helyzetétől **független**, tehát a belőlük számítható igénybevételek csak konstans értékekként adódnak hozzá a támaszköz parabolikus nyíróerő-maximális ábrájának értékeihez.
A **támaszközben** választott keresztmetszetek **nyomatéki** hatásábrái a támaszköz teljes hosszán pozitív előjelűek, a mértékadó leterhelést tehát a teljes támaszközön alkalmazott esetleges megoszló teher jelenti. Ez esetben a **nyomatéki maximális ábra** az esetleges teherre megrajzolt **nyomatéki ábrával lesz azonos**. A tartó **konzolvégén** a nyomatéki hatásordináták értéke a keresztmetszet helyzetének **lineáris függvénye**, így a konzolos részen és az esetleges befüggesztett elemeken lévő hatásábraterületek nagysága a (támaszköz-)keresztmetszet helyzetétől **lineárisan** függ, azaz a belőlük számítható igénybevételek **lineáris** függvényként adódnak hozzá a támaszköz **parabolikus** nyomatéki maximális ábrájának értékeihez. Természetesen ha a konzolhoz befüggesztett elem is csatlakozik, akkor mind pozitív, mind negatív előjelű módosító függvény kiadódhat. Ha mindkét oldalon konzolos a tartó, akkor a két oldalról számított lineáris módosító függvények hatása együttesen, egy trapéz alakú ábraként jelenik meg.

A kéttámaszú tartók támaszközében az **esetleges megoszló teherre** rajzolható **nyíróerő- és nyomatéki maximális ábrák parabolikusak** lesznek. A konzolhoz csatlakozó **befüggesztett** elemek mértékadó leterhelése a támaszköz-keresztmetszetek **maximális nyíróerő- és nyomatéki függvényeit** (a befüggesztett rész geometriájától, és a támaszköz-keresztmetszet pozíciójától függő) **lineárisan változó értékkel** módosítja.

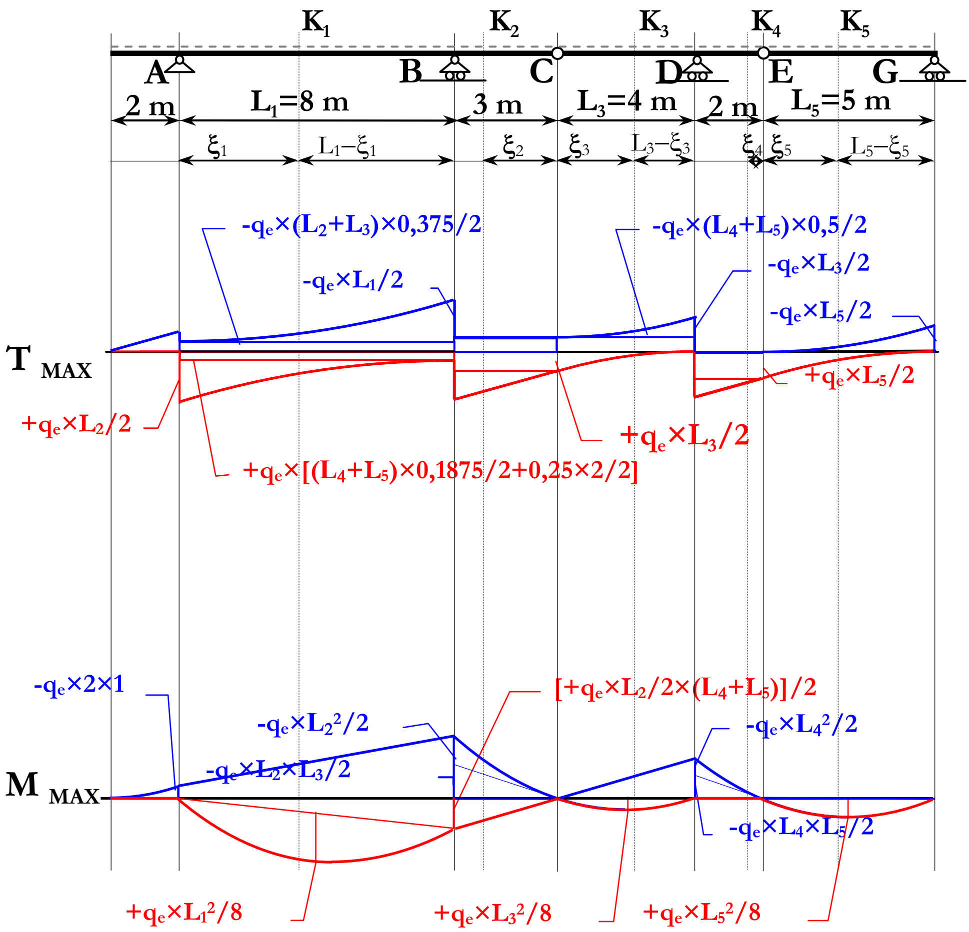
A támaszköz-szakaszok igénybevételi maximális ábrái (1. stat. váz)



A támaszköz-szakaszok igénybevételi hatásábrái (2. stat. váz)



A maximális ábrák és a jellemző ordináták (2. statikai váz)



9.9. Ellenőrző kérdések

Mi a hatás fogalma?
Mi a hatásábra fogalma?
Mit mutat meg a hatásábra egy ordinátája?
Milyen összefüggés van az igénybevételi ábrák és az igénybevételi hatásábrák között?
Mekkora a változás a hatásábrában a keresztmetszetet megelőző és követő normálerő-ordináták között?
Mekkora a változás a hatásábrában a keresztmetszetet megelőző és követő nyíróerő-ordináták között?
Mekkora a változás a hatásábrában a keresztmetszetet megelőző és követő nyomatékfüggvény-érintők között?
Milyen (első, másod, … fokú) függvények a nyíróerő hatásábrák?
Milyen (első, másod, … fokú) függvények a nyomatéki hatásábrák?
Milyen egy kéttámaszú tartó reakcióerő hatásábrája?
Milyen egy konzoltartó reakcióerő hatásábrája?
Milyen egy konzoltartó befogási nyomatéki hatásábrája?
Milyen egy kéttámaszú konzolos tartó reakcióerő hatásábrája?
Milyen egy Gerber-tartó főrészének reakcióerő hatásábrája?
Milyen egy Gerber-tartó befüggesztett részének reakcióerő hatásábrája?
Egy háromcsuklós tartón hány reakcióerő hatásábra rajzolható fel?
Milyen egy konzoltartó nyíróerő hatásábrája?
Milyen egy konzoltartó nyomatéki hatásábrája?
Milyen egy kéttámaszú tartó nyíróerő hatásábrája?
Milyen egy kéttámaszú tartó nyomatéki hatásábrája?
Mekkora egy vízszintes tengelyű kéttámaszú tartón a nyíróerő ábrában a K keresztmetszetben az ugrás?
Mekkora egy vízszintes tengelyű kéttámaszú tartón a nyomatéki ábrában a K keresztmetszetben a törés?
Mi a kéttámaszú tartó nyíróerő hatásábrájában az A- ill. B-vonal?
Mi a kéttámaszú tartó nyomatéki hatásábrájában az A- ill. B-vonal?
Mekkora a kéttámaszú tartó nyíróerő hatásábrájának maximális értéke?
Mekkora a kéttámaszú tartó nyomatéki hatásábrájának maximális értéke?
Milyen egy kéttámaszú konzolos tartó nyíróerő hatásábrája?
Milyen egy Gerber-tartó főrészének nyíróerő hatásábrája?
Milyen egy Gerber-tartó befüggesztett részének nyíróerő hatásábrája?
Milyen egy kéttámaszú konzolos tartó nyomatéki hatásábrája?

Milyen egy Gerber-tartó főrészének nyomatéki hatásábrája?
Milyen egy Gerber-tartó befüggesztett részének nyomatéki hatásábrája?
Hogyan állítható elő a támaszerő hatásábra kinematikai úton?
Hogyan állítható elő a nyíróerő hatásábra kinematikai úton?
Hogyan állítható elő a nyomatéki hatásábra kinematikai úton?
Hogyan kell a hatásábrákat koncentrált erőkkel leterhelni?
Hogyan kell a hatásábrákat megoszló hasznos terhekkel leterhelni?
Hogyan kell a hatásábrákat megoszló állandó terhekkel leterhelni?
Hogyan kell a hatásábrákat koncentrált erőkkel mértékadó módon leterhelni?
Hogyan kell a hatásábrákat megoszló hasznos terhekkel mértékadó módon leterhelni?
Hogyan kell a hatásábrákat megoszló állandó terhekkel mértékadó módon leterhelni?
Mi az igénybevételi maximális ábrák fogalma?
Egyenletesen megoszló teher hatására milyen függvények (első, másod, … fokú) a nyíróerő maximális ábrák a konzoltartón?
Egyenletesen megoszló teher hatására milyen függvények (első, másod, … fokú) a nyíróerő maximális ábrák a kéttámaszú tartón?
Egyenletesen megoszló teher hatására milyen függvények (első, másod, … fokú) a nyomatéki maximális ábrák a konzoltartón?
Egyenletesen megoszló teher hatására milyen függvények (első, másod, … fokú) a nyomatéki maximális ábrák a kéttámaszú tartón?
Mit mondhatunk egy konzolos kéttámaszú tartó nyíróerő hatásábrájáról?
Mit mondhatunk egy konzolos kéttámaszú tartó nyomatéki hatásábrájáról?
Mit mondhatunk egy Gerber-tartó főrészének nyíróerő hatásábrájáról?
Mit mondhatunk egy Gerber-tartó főrészének nyomatéki hatásábrájáról?
Mit mondhatunk egy Gerber-tartó befüggesztett részének nyíróerő hatásábrájáról?
Mit mondhatunk egy Gerber-tartó befüggesztett részének nyomatéki hatásábrájáról?

10. Térbeli erők-szerkezetek

Mérnöki szerkezeteinket a minket körülvevő térben kell megvalósítanunk, a térbeli terhek-hatások felvételére kell alkalmassá tennünk, és térbeli kiterjedésű elemekből kell összeállítanunk. Valójában tehát minden szerkezetünk **térbeli szerkezet**, csak esetenként a figyelembe vett terhek-hatások korlátozása révén, vagy a szerkezet geometriai arányai által megengedhető egyszerűsítés nyomán egy síkba koncentrálhatjuk vizsgálatainkat, elhanyagolva az e síkba nem illeszkedő hatásokat.

A ma használatos szerkezetszámító programok nagyobb része ennek a szemléletnek megfelelően minden problémát a térben kezel, és a síkbeli feladatokat tekinti egyszerűsítésnek, speciális esetnek. A szerkezetek síkbelivé redukálása, a tartószerkezeti síkok különálló vizsgálata korábban elsősorban a számítástechnika korlátozott lehetőségei miatt alakult ki, ma azonban egyszerűbb egy általános érvényű (akár igen nagy erőforrás-igényű) megoldást kialakítani, és az egyszerűbb eseteket az általános megoldás speciális eseteiként vizsgálni.

A síkbeli rendszerről a térbelire áttérve a (ma nagyon jól ismert) felülről kompatibilitás elvét alkalmazzuk: a kibővített, térbeli rendszerre olyan definíciókat és eljárásokat kell kialakítanunk, amelyek a speciális, síkbeli esetekben az eddigi módszerekkel megegyező eredményeket szolgáltatnak.

10.1. Térbeli erők

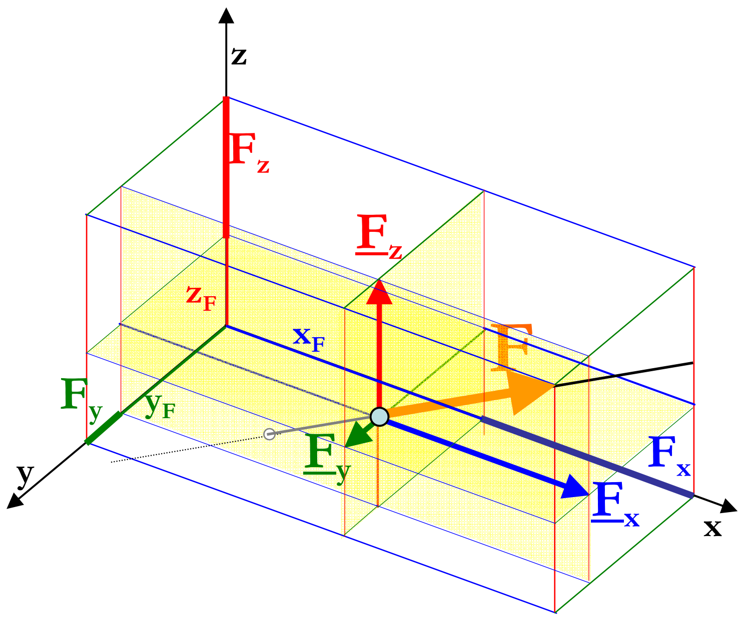
10.1.1. Az erő a térben

Az erő definícióját eleve általánosan fogalmaztuk meg, itt csak annyiban kell kiegészítést tennünk, hogy

az erő vektora a térben a három koordináta-irányú komponensével, az erő helyzete a hatásvonal egy pontjának három koordinátájával határozható meg.

Speciális feladatok esetén célszerű lehet a derékszögű Descartes-féle koordinátarendszer helyett a henger- vagy gömbi koordináták alkalmazása, ezzel azonban a szükséges adatok száma nem csökken, és megfelelő transzformációs összefüggésekkel a speciális koordináták értéke a derékszögű koordinátákból is meghatározható. A térbeli erők körében szerkesztéses megoldásokat nem alkalmazunk.

Előfordul, hogy a térben az erő helyét meghatározó pontot a hatásvonal és az egyik koordinátasík döféspontjában vesszük fel, ilyenkor a pont egyik (a síkra merőleges) koordinátája zérus. Ezt előre tudva úgy tűnhet, hogy az erő helyének azonosítására csak két adatot használtunk fel, de valójában a zérus értékű harmadik adatra is szükségünk volt, csak annak meghatározására nem kellett egyenleteket felírnunk.

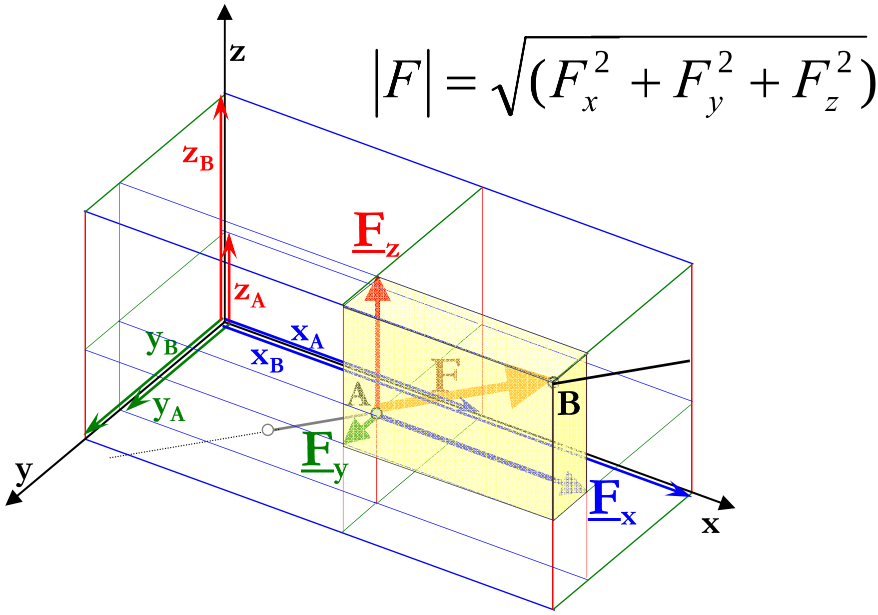


Az **F** erőt a térbeli **x-y-z** (lokális) derékszögű koordinátarendszerben az F_x, F_y, F_z tengelyirányú erővetületek és a hatásvonal egy pontját meghatározó, $\mathbf{x_F}$, $\mathbf{y_F}$ és $\mathbf{z_F}$ koordináták határozzák meg, vagy másként fogalmazva: az **F** erő ezekkel az adatokkal adható meg.
Az **F** erő vektorát az F_x, F_y, F_z skaláris vetületek és az $\underline{\mathbf{i}}$, $\underline{\mathbf{j}}$, $\underline{\mathbf{k}}$ tengelyirányú egységvektorok szorzataként előálló, koordinátatengely-irányú vektorhármas határozza meg. Ha ezeket a vektor-összetevőket a hatásvonalának egy pontjához illesztjük, az **F** erő $\mathbf{F_x}$, $\mathbf{F_y}$, $\mathbf{F_z}$ komponenseihez jutunk.

$$\mathbf{F} \doteq (\mathbf{F_x}, \mathbf{F_y}, \mathbf{F_z})$$

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{x} + \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{y} + \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{z} = F_x \times \underline{\mathbf{i}} + F_y \times \underline{\mathbf{j}} + F_z \times \underline{\mathbf{k}}$$

A vetületek ismeretében az erő **nagyságát**, az erővektor **abszolút értékét** a térbeli Pitagorasz-tétel segítségével, az F_x, F_y, F_z oldalhosszúságú téglatest testátlójaként kaphatjuk meg.



Ez az összefüggés a hasonlóság kihasználásával arra is alkalmas, hogy egy általános állású (erő)vektort koordinátatengely-irányú összetevőkre bontsunk. Ahhoz, hogy az erő hatásvonalát ismertnek mondhassuk, két pontjának helyzetét ismernünk kell. Ezen (a hatásvonalon tetszőlegesen elhelyezkedhető) **A** és **B** pontok **koordinátakülönbségei** egy olyan téglatestet határoznak meg, amelynek testátlója épp a felbontandó erő hatásvonalába esik. A vektor komponensei által meghatározott vektor-téglatest és a koordinátakülönbségek által meghatározott geometriai téglatest (a térátló azonossága miatt) **hasonló**, tehát a két test megfelelő elemeinek aránya azonos. Ezek alapján az **F** vektor összetevői:

$$F_x = F \frac{(x_B - x_A)}{\sqrt{((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2)}}$$

$$F_y = F \frac{(y_B - y_A)}{\sqrt{((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2)}}$$

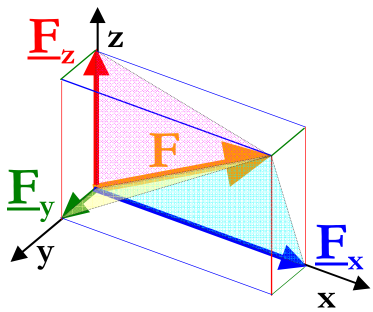
$$F_z = F \frac{(z_B - z_A)}{\sqrt{((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2)}}$$

Előfordul, hogy a térbeli erő (hatásvonalának) állását nem két pontjával, hanem a koordinátatengelyekhez viszonyított **állásszögeivel** (legtöbbször e szögek **cos** függvényértékeivel, az ún. **iránykoszinuszokkal**) adják meg. Az előbbiekben bemutatott téglatest ilyen esetben is felrajzolható, csak a testátló egyik végpontját most az origóba kell helyeznünk. A tengelyekkel bezárt α_x, α_y, α_z szögek ismeretében az F_x, F_y, F_z vetületek egyszerűen kaphatók. Ha a vetületek ismertek, az iránykoszinuszok egy-egy derékszögű háromszögből kaphatók, amelynek egyik befogója a viszonyítási tengellyel párhuzamos összetevő, átfogója a testátló és másik befogója egy lapátló.

$$F_x = F\cos\alpha_x \qquad \cos\alpha_x = \frac{F_x}{F}$$

$$F_y = F\cos\alpha_y \qquad \cos\alpha_y = \frac{F_y}{F}$$

$$F_z = F\cos\alpha_z \qquad \cos\alpha_z = \frac{F_z}{F}$$



A származtatás miatt a szögekre igaz, hogy

$$\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z = 1$$

10.1.2. A nyomaték a térben

A térben az erő elfordító hatása is általános (tengely körüli) lehet, nem köthetjük egyetlen (koordináta)síkhoz. Ahogyan az általános állású erő elmozdító hatását koordinátatengely-irányú összetevőkkel jelenítettük meg, az erő elforgató hatását, nyomatékát is célszerű koordinátatengelyek körüli elforgató hatásként, tengelyekre vett nyomatékként értelmezni. Egy **általános** állású tengely körüli elforgató hatás (nyomaték) mindig helyettesíthető **három**, egymásra kölcsönösen **merőleges** tengelyre vonatkozó forgatás (nyomaték) együttes hatásával, eredőjével.

A térben tehát az erő nyomatékát **tengelyre** (legtöbbször koordinátatengelyre) számítjuk. Ez az értelmezés összhangban van a síkbeli nyomatékértelmezéssel: a térbeli tengelynek a nyomaték síkjával alkotott döféspontja az a pont, amire síkbeli esetben a nyomatékot írjuk.

A nyomaték előjelére vonatkozóan azonban új megállapodásra van szükség, hiszen egy tengely körül ugyanaz a forgásirány a nézőpont állásától függően lehet az óra járásával megegyező is, és ellentétes is. Logikusan azt

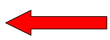
a konvenciót fogadjuk el, hogy **a nyomaték akkor pozitív, ha a tengely pozitív ága felől nézve forgat az órával megegyező irányban**.
A nyomaték értékének meghatározására szolgáló definíció szintén felülről kompatibilis a síkbeli esettel:

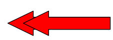
egy **F** erőnek egy **t** tengelyre vonatkozó nyomatéka úgy kapható, hogy az erőnagyságot az erőhatásvonal és a tengely közötti **legrövidebb távolsággal** (általános, kitérő vonalak esetén a **normáltranszverzális hosszával**) szorozzuk.

A forgatási hatás, a nyomaték térbeli erők esetében is egy síkban érvényesül, amelynek normálisa az a tengely, amely körül az erő forgat, amelyre a nyomatékot felírtuk. Az általános állású térbeli erő nyomatéka tehát a nagyságán kívül egy irányhoz, a nyomaték síkjának normálisához, a nyomaték tengelyéhez is kötődik, azaz vektortulajdonságokkal bír.

A térbeli erő nyomatékát **vektorként** értelmezzük, ahol a vektor **nagysága** a forgatónyomaték (szorzat)**értékével**, **hatásvonala** a figyelembe vett **tengellyel** egyezik meg, **irányítása** pedig olyan, hogy az így felvett **vektor nyilával szembenézve a forgatóhatás az órával megegyező** legyen.

Ezek után a nyomatékra is érvényesek a **vektortulajdonságok**: vetíthetők, komponensekre bonthatók, vektoriálisan összegezhetők. Felhívjuk a figyelmet, hogy a nyomatékvektorok ill. azok komponensei **csak nyomatéki vizsgálatokban, nyomatéki egyenletekben** szerepelhetnek, hiszen – mint már jól tudjuk – a **nyomatéknak erővetülete nincs**! A félreértések elkerülése érdekében a nyomatékvektorokat **dupla nyílvégződéssel** ábrázoljuk.


erővektor

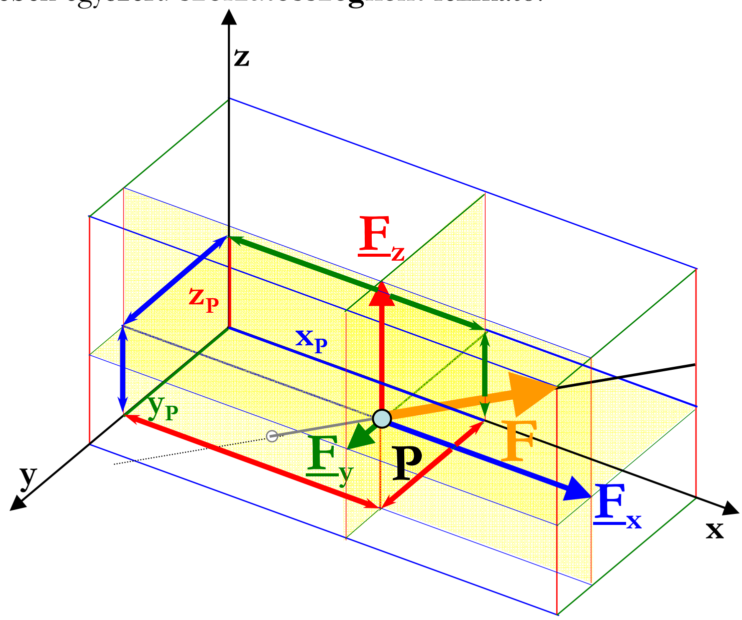

nyomatékvektor

A térbeli erő nyomatékát forgatóhatásként értelmezve könnyen belátható, és megjegyzésre érdemes, hogy

egy **F** erőnek egy **t** tengelyre vonatkozó nyomatéka mindig **zérus**, ha az erő hatásvonala **metszi** a tengelyt vagy **párhuzamos** vele.

Egy általános állású erőnek egy általános állású tengelyre vonatkozó nyomatékához szükséges normáltranszverzális meghatározása koordinátageometriai vagy vektoralgebrai módszerekkel lehetséges, de nem egyszerű feladat. Célszerűbbnek látszik a **t** tengelyre vonatkozó nyomatékot először **komponenseiben**, mégpedig a **koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyekre számított komponenseiben** előállítanunk, és a keresett nyomatékvektort **e komponensek eredőjeként** értelmeznünk.

Első lépésként vizsgáljuk meg, miként lehet felírni egy **P** pontra illeszkedő **F** erőnek az **x-y-z** koordinátatengelyekre vonatkozó nyomatékösszetevőit. Az **F** erőt a **P** pontban koordinátatengely-irányú komponenseivel helyettesítve, az egyes összetevőknek a koordinátatengelyektől mért távolsága azonnal látható: a **P** pont megfelelő **koordinátáival** azonos. A koordinátatengelyekre vonatkozó nyomaték tehát a **hatásvonal egy pontjának koordinátái** és az **erő tengelyekkel párhuzamos összetevői** ismeretében egyszerű **szorzatösszegként** felírható.



$$M_x = F_x \times 0 - F_y \times z_P + F_z \times y_P$$

$$M_y = F_x \times z_P + F_y \times 0 - F_z \times x_P$$

$$M_z = - F_x \times y_P + F_y \times x_P + F_z \times 0$$

A fenti összefüggésben mind a **P** pont koordinátáit, mind az **F** erő komponenseit pozitívra választottuk, így a tengelyekre vonatkozó nyomatéki elemek **előjelhelyesen** képződnek tetszőleges helyzetű pont és tetszőleges állású erő esetén is.
Az **M_x-M_y-M_z** szorzatösszegeket egy eredő nyomatékvektor **x-y-z** tengelyre vonatkozó vetületeinek is tekinthetjük. A vetületi nagyságokat a tengelyek irányában álló **$\underline{i}$-$\underline{j}$-$\underline{k}$** egységvektorokkal szorozva már a nyomatékvektor komponenseihez jutunk. Ez az alak viszont a (matematikából ismert) **vektoriális szorzat** alakja: az **$\underline{i}$-$\underline{j}$-$\underline{k}$** koordinátatengely-irányú egységvektorokból, a **P** pont **x-y-z** koordinátáiból és az **F** erő **F_x, F_y, F_z** vetületeiből összeállított determináns kifejtése (az aldeterminánsok sakktábla-szabály szerinti előjeleinek figyelembevételével) a már ismert formulát adja.

$$\mathbf{M_x = i \times(-F_y \times z_P + F_z \times y_P)}$$
$$\mathbf{M_y = j \times(\ F_x \times z_P - F_z \times x_P)}$$
$$\mathbf{M_z = k \times(-F_x \times y_P + F_y \times x_P)}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M_x} \\ \mathbf{M_y} \\ \mathbf{M_z} \end{bmatrix} = \begin{array}{ccc} + & - & + \\ \hline \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{x_P} & \mathbf{y_P} & \mathbf{z_P} \\ \mathbf{F_x} & \mathbf{F_y} & \mathbf{F_z} \end{array}$$

Egy **P** ponton átmenő **F** térbeli erőnek a koordinátatengelyekre vonatkozó nyomatékai a **P pont helyvektorának** és az **F erő vektorának vektoriális szorzataként** kaphatók.

Ha az így kapott, koordinátatengelyekre számított nyomatékokat egy, a tengelyek metszéspontjához illeszkedő **eredő nyomaték komponenseinek** tekintjük, akkor értelmezhető a térben az erőnek egy **pontra** vonatkozó nyomatéka is, mégpedig a fentiekben bemutatott vektoriális szorzatként.

Egy **P** ponton átmenő **F** térbeli erőnek az origóra vonatkozó nyomatéka a **P pont helyvektorának** és az **F erő vektorának vektoriális szorzataként** kapható.

Az origóra vonatkozó nyomaték a tengelyekre számított nyomatékok eredője.

$$M_F^{(O)} \doteq (M_F^x, M_F^y, M_F^z)$$

$$\underline{M}_F^{(O)} = \underline{M}_F^{(x)} + \underline{M}_F^{(y)} + \underline{M}_F^{(z)}$$

$$\underline{M}_F^{(O)} = \underline{P} \times \underline{F}$$

A térben **egy erőnek egy pontra vonatkozó nyomatéka** a ponton átmenő, ortogonális (egymásra kölcsönösen merőleges) **tengelyekre vett nyomatékai vektoriális összegével azonos**, és megfordítva: egy pontra vonatkozó nyomatéknak a tengelyekre eső vetülete a tengelyekre vonatkozó nyomaték értékét adja.

Egy erő esetén az origóra vett (a tengelyekre számított összetevők eredőjeként adódó) nyomaték mindig benne van az origó és az erő hatásvonala által meghatározott síkban, azaz **vektora merőleges az erő vektorára**.

A fentiek alapján már nemcsak az origóra, hanem egy tetszőleges **S** pontra is fel tudjuk írni az **F** erő nyomatékát. A vektoriális szorzatban az erő vektora mellett a hatásvonal egy pontjának helyvektora, más szóval az origótól mért távolságvektora szerepelt. Ha tehát nem az origóra keressük az **F** erő nyomatékát, hanem az **S** pontra, akkor a hatásvonalon (tetszőlegesen) kiválasztott **P** pontnak az **S** ponttól mért távolságvektorára van szükségünk, ami a **P** pont és az **S** pont **helyvektorainak különbsége**. Általánosságban tehát egy **P** ponton átmenő **F** erőnek egy **S** pontra vonatkozó nyomatéka:

$$\underline{M}_F^{(S)}(x,y,z) = (\underline{P}(x,y,z) - \underline{S}(x,y,z)) \times \underline{F}(x,y,z)$$

vagy tömörebben, a függvénykapcsolatok jelölésének elhagyásával:

$$\underline{M}_F^{(S)} = (\underline{P} - \underline{S}) \times \underline{F}$$

A pontra vonatkozó eredő nyomaték és a tengelyekre számított nyomatékösszetevőkből (az erővetületekhez hasonlóan) a térbeli Pitagorasz-tétel segítségével határozható meg, és az eredő nyomaték állásának megadására is alkalmazható az iránykoszinuszos jelölésmód (természetesen itt a nyomatékvektornak a tengelyekkel bezárt szögeit kell használnunk).

$$|\underline{\mathbf{M}}| = (\mathbf{M_x}^2 + \mathbf{M_y}^2 + \mathbf{M_z}^2)^{½} \qquad \begin{aligned} \alpha_{Mx} &= \arccos(\mathbf{M_x}/|\underline{\mathbf{M}}|) \\ \alpha_{My} &= \arccos(\mathbf{M_y}/|\underline{\mathbf{M}}|) \\ \alpha_{Mz} &= \arccos(\mathbf{M_z}/|\underline{\mathbf{M}}|) \end{aligned}$$

(Technikai okokból a nyomaték tengelyét szoktuk alsó indexben is jelölni.)

10.1.3. A térbeli erőrendszer eredőjének meghatározása

Az eredő vektora

Az eredő mind elmozdítási, mind elfordítási hatásában **egyenértékűen** helyettesíti az erőrendszert, így az eredő tengelyirányú **vetületei** az erőrendszer elemeinek ugyanazon tengelyre vett **vetületösszegeivel** egyeznek meg. (Az eredő komponensei tehát az erők elhelyezkedése, hatásvonalának helye nélkül is előállíthatók!)

$$R_x = \Sigma F_{i,x} \qquad R_y = \Sigma F_{i,y} \qquad R_z = \Sigma F_{i,z}$$

Az összetevők ismeretében az eredő vektorának abszolút értékét a térbeli Pitagorász-tétel segítségével, a tengelyekkel bezárt szögeit pedig a vetületek és az eredő abszolút értékének hányadosából visszaszámolt cos függvényargumentumként állíthatjuk elő.

$$|\underline{\mathbf{R}}| = (\mathbf{R_x}^2 + \mathbf{R_y}^2 + \mathbf{R_z}^2)^{1/2}$$

$$\alpha_{Rx} = \arccos(\mathbf{R_x} / |\underline{\mathbf{R}}|)$$

$$\alpha_{Ry} = \arccos(\mathbf{R_y} / |\underline{\mathbf{R}}|)$$

$$\alpha_{Rz} = \arccos(\mathbf{R_z} / |\underline{\mathbf{R}}|)$$

Az eredő nyomatéka

Az eredő mind elmozdítási, mind elfordítási hatásában **egyenértékűen** helyettesíti az erőrendszert, így az eredő bármely tengelyre vett **nyomatéka** az erőrendszer elemeinek ugyanazon tengelyre vett **nyomatékösszegével** egyezik meg. Az így nyerhető három, koordinátatengely-irányú nyomatékvektor az erőrendszer origóra vett nyomaték(vektor)ának három összetevője.(Az erőrendszer nyomatékának meghatározása során az erőknek mind a nagyságára – összetevők –, mind az elhelyezkedésére szükség van!)

$$M_R^{(x)} = \Sigma M_i^{(x)} \quad M_R^{(y)} = \Sigma M_i^{(y)} \quad M_R^{(z)} = \Sigma M_i^{(z)}$$

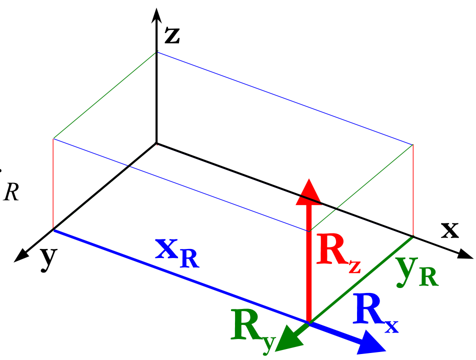
Az erőrendszer elemeinek a koordinátatengelyekre vonatkozó nyomatékait a legegyszerűbben úgy állíthatjuk elő, ha az erőket tengelyirányú összetevőkre bontjuk, és a hatásvonal egy (célszerűen megválasztott) pontjában az erőket komponenseikkel helyettesítjük.

Az eredő helye

Az eredővektor komponenseinek ismeretében a három nyomatéki egyenletből három ismeretlen, például az erőhatásvonal egy (tetszőleges) pontjának koordinátái, egyértelműen meghatározhatók. A hatásvonal egy pontja és az eredő vektora pedig már egyértelműen meghatározza az eredő nagyságát és helyét.

Az eredővektor összetevőinek, azaz az eredő állásának ismeretében a hatásvonal egyetlen pontjának ismerete elegendő az erő helyzetének azonosításához. Ha ezt a pontot „ügyesen" keressük, a háromismeretlenes nyomatéki egyenletrendszer két, egyenként egyismeretlenes egyenletre egyszerűsödik.

Keressük először az eredőnek az **xy** síkkal közös (döfés)pontját! Az eredőt a hatásvonal mentén ebbe a pontba eltolva és ott az eredővektort a három, koordinátatengely-irányú összetevőjével helyettesítve az eredőnek az **x** és **y** tengelyre vonatkozó nyomatékában az $\mathbf{R_x}$ és $\mathbf{R_y}$ nem fog szerepelni, mert az egyik komponens metszi a választott tengelyt, a másik pedig párhuzamos vele. Így a nyomatéki egyenleteinkben csak a döféspont $\mathbf{y_R}$ ill. $\mathbf{x_R}$ koordinátája szerepel ismeretlenként.



$$\Sigma M_i^{(x)} = M_R^{(x)} = R_z \times y_R$$

$$\Sigma M_i^{(y)} = M_R^{(y)} = -R_z \times x_R$$

A döféspont harmadik koordinátáját zérusra választottuk, ennek meghatározásához tehát nem kell felírnunk a harmadik nyomatéki egyenletet.

Ez az eljárás mindig eredményes, ha az eredőnek **van döféspontja az xy síkon**, vagy ami ezzel egyenértékű: **van z irányú összetevője**. Ha $\mathbf{R_z}$ értéke zérus, azaz az eredő párhuzamos az **xy** síkkal, akkor az **xy** síkon nem találhatunk döféspontot, viszont kereshetjük az eredő és az **yz** sík közös pontját. Erre a feladatra az előbbi esethez hasonlóan két nyomatéki egyenletet írhatunk fel, amelyekben **csak a döféspont két koordinátája az ismeretlen**. Ha pedig ezen a síkon sem lelünk döféspontot, azaz az eredő párhuzamos mind az **xy**, mind az **yz** síkkal, vagyis **y** irányban áll, akkor a **zx** síkon kereshetjük hasonló módon a döféspontot. E harmadik próbálkozás pedig csak akkor lehet sikertelen, ha értelmetlen: ha az eredőnek **egyáltalán nincs vektora**, nincsenek erővetületei.

Az eredő lehetséges változatai

Már a síkbeli erőrendszer eredőjének keresése során láttuk, hogy az erőrendszer sajátosságainak függvényében az eredőkeresés több lehetséges kimenetellel zárulhat. Ezt a vizsgálatot a térbeli erők körében is el kell végeznünk.

A síkbeli erőrendszerek vizsgálata során láttuk, hogy az eredő lehet egy **erő**, egy **erőpár** vagy egy **zéruserő** (egyensúly). A síkban egy erő és egy erőpár együttesen nem fordulhatott elő eredőként, mert az egy síkban lévő erőt és nyomatékot (erőpárt) **mindig** helyettesíteni tudtuk egyetlen erővel.

A térbeli erőrendszerek esetében is várható, hogy az eredő egy **erő**, egy **erőpár** vagy **zéruserő** lesz, de itt már az sem zárható ki, hogy egy **erő** és egy **erőpár** együttesen alkotják az „eredőt”, **csak együttesen** képesek az erőrendszer mindenirányú elmozdító hatását helyettesíteni.

Egy erő és egy erőpár eredője

Ha az **F** erő és az **M** erőpár egy síkban van (az **F** erő és az **M** nyomaték vektora **merőleges** egymásra), akkor a feladat síkbelivé egyszerűsödött, **egyetlen erő** lesz az eredő. Ha az **F** erő és az **M** nyomaték vektora **párhuzamos**, azaz az **M** erőpár az **F** erőre **merőleges síkban** működik, akkor hatásaik **nem összegezhetők**: az **F** erő hatásvonal-irányú **eltoló hatása** és az **M** nyomaték ugyanezen hatásvonal, mint tengely körüli **elforgató hatása együttesen** jelentkezik. Ez a közös tengelyű eltoló-elfordító, csavarvonal-szerű hatás **nem helyettesíthető** egyszerűbb mozgásformával, így az erőrendszer eredője sem egyszerűsíthető tovább.

> Az **egy erőből** és egy, vele **párhuzamos vektorú erőpárból** álló, tovább nem egyszerűsíthető együttes dinám neve **erőcsavar**, és általános esetben ez lesz a térbeli erőrendszer eredője.

Ha az **F** erő vektora és az **M** nyomaték vektora sem nem merőleges, sem nem párhuzamos, akkor az erőpár mindig felbontható egy, az **F** erővel **párhuzamos**, és egy, az **F** erőre **merőleges** vektorú nyomatéki összetevőre. Az előbbiek alapján az **F** erő a rá **merőleges** vektorú nyomatékkal egyetlen (rész)eredővé tehető össze, ez után pedig az így kapott részeredő az **M** erőpár megmaradt, az **F** erővel és így a részeredővel is párhuzamos vektorú komponensével **erőcsavart** fog alkotni.

Az **F** erő és **M** erőpár eredőjét keresve először helyettesítsük az **M** nyomatékot **x** és **z** irányú összetevőivel.

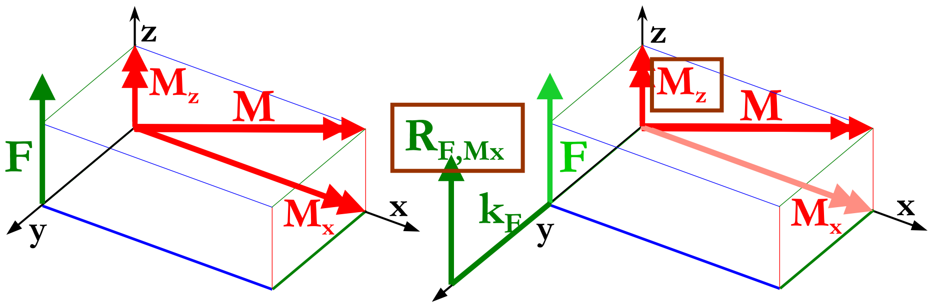
$$\mathbf{M} \doteq (\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_z)$$

Az **F** erőre merőleges vektorú, azaz az **F** erővel párhuzamos síkban működő nyomatéki komponens az **F** erővel egy (rész)eredővé összetehető.

$$\mathbf{R}_{F,Mx} = (\mathbf{F}, \mathbf{M}_x) \qquad \underline{\mathbf{R}}_{F,Mx} = \underline{\mathbf{F}} \qquad k_F = \mathbf{M}_x / \mathbf{F}$$

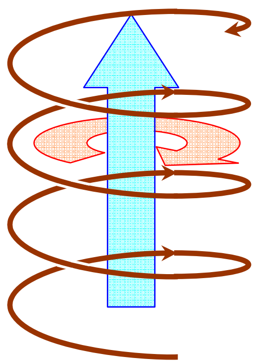
Az $\mathbf{R}_{F,Mx}$ erő és a vele párhuzamos vektorú $\mathbf{M}_z$ nyomatékkomponens már nem egyszerűsíthető, ezek együttesen alkotják az **E** erőcsavart.

$$\mathbf{E} \doteq (\mathbf{R}_{F,Mx}, \mathbf{M}_z) \doteq (\mathbf{F}, \mathbf{M}_x, \mathbf{M}_z) \doteq (\mathbf{F}, \mathbf{M})$$



A fenti feladatban az átláthatóság érdekében **z** koordinátatengely-irányú **F** erőt és **x-z** koordinátasíkkal párhuzamos vektorú **M** nyomatékot alkalmaztunk. Az általános eset ennél komplikáltabb lehet, de a megoldás elvét itt is jól lehet érzékeltetni.

Az erőcsavar tehát egy **erőnek** és egy vele párhuzamos tengelyű **erőpárnak** az együttese. A mellékelt ábrán érzékeltetjük az erőcsavar elemeinek (névadó) együttes hatását. Megjegyezzük, hogy az erőpár forgató hatása a **térben** is állandó, azaz az erőpár (forgató hatásának változása nélkül) **önmagával párhuzamosan** bárhová áthelyezhető, tehát nincs is értelme azonos tengelyekről beszélni, elegendő az **erő és a nyomaték vektorának párhuzamossága**.



A fentiek fényében egy **F** erő és egy **M** erőpár **egyetlen eredő erővel** akkor helyettesíthető, ha vektoraik **merőlegesek** egymásra. A vektorok merőlegessége viszont a matematikában könnyen vizsgálható: két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha **skalárszorzatuk zérus**.

Az eredő esetei – az eredőváltozatok kritériumai

A térbeli erőrendszer eredője általános esetben **erőcsavar**. Az alábbiakban bemutatjuk, milyen feltételek mellett alakulhatnak ki az eredő speciális esetei, és milyen számítási (rész)eredmények birtokában tehetünk biztos megállapításokat az erőrendszert helyettesítő eredő tulajdonságairól.
Az eredő meghatározása során hat egyenlettel dolgozunk: általában a három koordinátatengely-irányú vetületi, és az ugyanezen tengelyekre számított nyomatéki egyenletekkel. (A tényleges számításokban a vetületi egyenletek helyett is alkalmazhatunk további nyomatéki egyenleteket, most, az eredőkeresés diszkussziójában viszont célszerűbb az eredeti 3 vetületi és 3 nyomatéki egyenlettel dolgozni.)
Amint láttuk, a koordinátatengelyekre számított erővetület-összegek az eredő erő vetületeit adják, a koordinátatengelyekre meghatározott nyomaték-értékek pedig az origóra számított nyomatékvektor komponenseinek tekinthetők. Az erőrendszer eredőjének jellegét, tulajdonságait keresve érdemes tehát ezekből a (könnyen meghatározható) adatokból kiindulnunk.

EREDMÉNYEK	AZ EREDŐ
mindhárom vetületösszeg és mindhárom nyomatékösszeg zérus	**EGYENSÚLY**
legalább egy vetületösszeg nem zérus, de mindhárom nyomatékösszeg zérus	origón átmenő erő
mindhárom vetületösszeg zérus, de **legalább egy nyomatékösszeg nem zérus**	erőpár
legalább egy vetületösszeg és legalább egy nyomatékösszeg nem zérus, ÉS a vetületösszegekből és a nyomatékösszegekből képzett **erő és nyomatéki vektorok skalárszorzata zérus**	egyetlen eredő erő
legalább egy vetületösszeg és legalább egy nyomatékösszeg nem zérus, ÉS a vetületösszegekből és a nyomatékösszegekből képzett **erő és nyomatéki vektorok skalárszorzata nem zérus**	**erőcsavar**

A vetületösszegekből, mint az eredő **erő-részének** komponenseiből és a nyomatékösszegekből, mint az eredő **nyomaték-részének** komponensei-

ből álló **erő**- és **nyomatékvektorok** skaláris szorzatának műszaki tartalma nincs, eredményét csak a **merőlegesség** vizsgálatára alkalmazzuk.
Az eredő erő-része a koordinátatengelyekre vett vetületösszegekből, nyomatéki része a koordinátatengelyekre számított nyomatékösszegekből adódik:

$$R_x = \Sigma F_{i,x} \qquad R_y = \Sigma F_{i,y} \qquad R_z = \Sigma F_{i,z}$$

$$M_x = \Sigma M_{i,x} \quad M_y = \Sigma M_{i,y} \quad M_z = \Sigma M_{i,z}$$

Az eredő erő-részének és nyomaték-részének elemeiből álló vektorok merőlegességét skalárszorzatukkal ellenőrizzük:

$$R \doteq (R_x, R_y, R_z) \quad M \doteq (M_x, M_y, M_z)$$

Ha **skalárszorzat zérus**, akkor a két vektor **merőleges**, s ekkor az erőrész és a nyomaték-rész egyetlen eredő erővé tehető össze, **az erőrendszer eredője egy erő.** Ha a **skalárszorzat nem zérus**, az erőrendszer eredője **erőcsavar.**

$$(\underline{R} \times \underline{M}) = (R_x, R_y, R_z) \times (M_x, M_y, M_z) \overset{?}{=} 0$$

10.1.4. Az egyensúly térbeli feltétele

Az eredő lehetséges esetei között az egyensúly is szerepelt, tehát megfogalmazhatjuk, hogy

> **a térbeli erőrendszer egyensúlyának szükséges és elégséges számítási feltétele a koordinátatengelyekre számított három vetületösszeg és három nyomatékösszeg zérus értéke.**

A vetületi tengelyek a koordinátatengelyektől eltérően is felvehetők, de **háromnál több független vetületi egyenlet nem írható fel**.
A nyomatéki tengelyek száma a vetületi vizsgálatok rovására növelhető, de egy térbeli erőrendszerre **maximálisan hat matematikailag független statikai egyenlet írható fel**. Megjegyezzük, hogy a nyomatéki egyenletek tengelyei közül **maximum háromnak lehet közös metszéspontja**, mert

a negyedik, ugyanazon a ponton átmenő tengelyre felírt nyomatéki egyenlet már az előző három egyenlet következmény-egyenlete lesz.

10.2. Térbeli szerkezetek

Szerkezeteink térbelisége leggyakrabban a síkbeli(nek tekinthető) szerkezeti elemek térbeli összekapcsolásával alakul ki. A hagyományos házépítésben a sík falmezőket a sarkoknál összekapcsoljuk, majd az egész falszerkezetre egy ugyancsak sík födémet építünk. De a vázas épületek szerkezete is hasonló: a pillérek a főtartókkal síkbeli keretként dolgoznak együtt, az erre merőlegesen kialakított másodlagos tartók képezik a sík födém tartószerkezetét, a keretek hosszirányú merevségét pedig merevítések, falvázgerendák biztosítják. Különösen szemléletesen látszik a síkbeli eredet a paneles épületek esetében: a vasbeton fal- és födémpanelek csak az élek mentén kapcsolódva alakulnak térbeli szerkezetté. Az ilyen, síkbeli tartókra bontható szerkezetek esetében a tervezés-ellenőrzés legnagyobbrészt síkbeli vizsgálatokkal is megoldható, a térbeliséget elegendő a szerkezet stabilitási-állékonysági problémáinak tárgyalása során figyelembe venni. Tudnunk kell azonban, hogy a szerkezeti kialakításaiban térbeli kapcsolatokkal készülő tartószerkezeteink síkbeli elemekkel történő közelítése a tényleges térbeli együttdolgozás elhanyagolása miatt pontatlanabb eredményeket ad, nagyobb tartalékok beépítésére készteti a tervezőt.
Vannak azonban olyan épületeink-építményeink, amelyek esztétikai vagy szerkezeti okokból kilépnek a sík felületek által alkotott raszterből, hangsúlyozottan a térben működnek, és vizsgálatuk csak a térbeliség figyelembevételével oldható meg. A geometriájában-működésében csak térbeliként vizsgálható szerkezetek nagyobb része felületszerkezet (lemezmű, héj), amelyekkel most nincs módunk foglalkozni, de azért közvetlen vagy távolabbi környezetünkben találhatunk példát térbeli rúdszerkezetekre is.

10.2.1. A kényszerek a térben

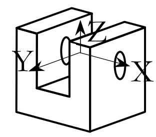
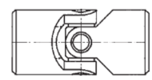
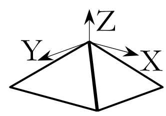
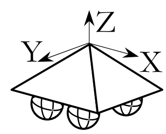
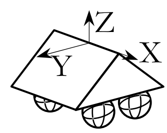
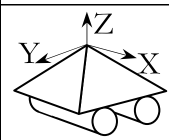
A szerkezeti elemek külső és belső kapcsolódását biztosító kényszerek a térbeli szerkezetekben is a csatlakozó pontok (keresztmetszetek) bizonyos **elmozdulás-összetevőit gátolják**, és ennek megfelelő **jellegű** és **irányú kényszererőkkel-nyomatékokkal helyettesíthetők**. A térben azonban egy pont elmozdulási lehetősége, vagy másként mondva, **elmozdulási szabadságfoka hat** (három irányú eltolódás és három tengely körüli elfordulás). Ennek megfelelően a térbeli kényszerek lehetséges fokszáma 1-6 között változhat. A gyakorlatban a konkrét megtámasztási igények és lehetőségek függvényében sokféle variációjú kényszert alkalmaznak, ezekből néhányat táblázatosan összefoglaltunk.

Természetesen a térbeli kényszerek esetében is beszélhetünk fix (a megtámasztás irányában elmozdulásmentes) és rugalmas (a megtámasztás irányában a támasztóerővel-nyomatékkal arányos elmozdulást mutató) kapcsolatokról. E tárgy keretében csak fix megtámasztású szerkezetekkel foglalkozunk.

A térbeli megtámasztások kinematikai és statikai minősítése is a síkbeli vizsgálatok analógiája alapján történhet. A térben a megtámasztandó egyszerű (egy testből álló) test elmozdulási szabadságfoka 6, azaz az elmozdulásmentesen (mereven) megtámasztott szerkezetben **a támasz-**

kényszerek összfokszámának legalább hatnak kell lennie. A térben az egyensúly feltételeként 6 statikai egyensúlyi egyenletet írhatunk fel, azaz csak statikai egyenletekkel meghatározható statikailag határozott megtámasztású szerkezetben **a támaszkényszerek összfokszámának legfeljebb hatnak szabad lennie**.

Az egyidejűleg **mereven és statikailag határozott módon** megtámasztott általános térbeli szerkezetben **a támaszkényszerek minimálisan szükséges** – de nem feltétlenül elégséges **– összfokszáma 6**.

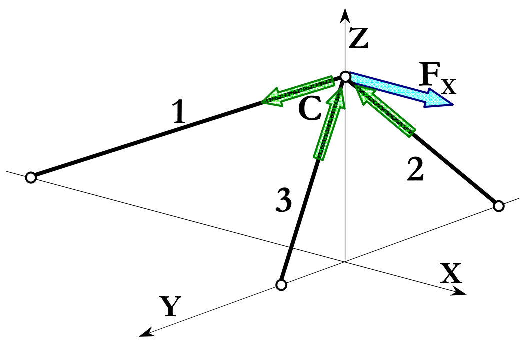
KÉNYSZER	ELMOZDULÁS		KÉNYSZE RDINÁM	ÁBRA
	szabad	gátolt		
Térbeli befogás	nincs	e_X, e_Y, e_Z, ϕ_X, ϕ_Y, ϕ_Z,	A_X, A_Y, A_Z M_{AX} M_{AY} M_{AZ}	
Villás megtámasztás X körül elforduló támasz	ϕ_X	e_X, e_Y, e_Z, ϕ_Y, ϕ_Z,	A_X, A_Y, A_Z M_{AY} M_{AZ}	
Kardáncsukló YZ körül elforduló (gépész) kapcsolat	ϕ_Y, ϕ_Z	e_X, e_Y, e_Z, ϕ_X,	A_X, A_Y, A_Z M_{AX}	
Térbeli csukló XYZ körül elforduló támasz	ϕ_X, ϕ_Y, ϕ_Z	e_X, e_Y, e_Z,	A_X, A_Y, A_Z	
XY irányban gördülő, XYZ körül elforduló támasz	e_X, e_Y, ϕ_X, ϕ_Y, ϕ_Z,	e_Z	A_Z	
XY irányban gördülő, X körül elforduló tá-masz	e_X, e_Y, ϕ_X	e_Z, ϕ_Y, ϕ_Z,	A_Z M_{AY} M_{AZ}	
Y irányban gördülő, XYZ körül elforduló támasz	e_Y, ϕ_X, ϕ_Y, ϕ_Z,	e_X, e_Z	A_X, A_Z	
támasztórúd	rúdirá-nyú elto-lódás kivételé-	rúdirá-nyú elto-lódás		

10.2.2. Egyszerű térbeli szerkezetek

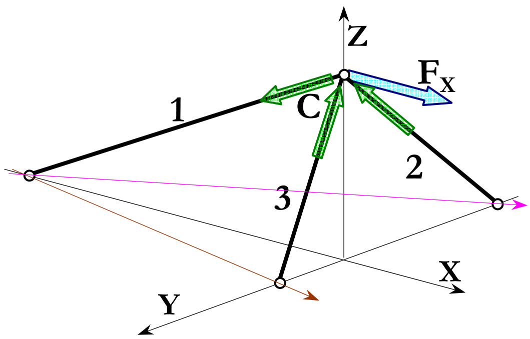
Háromlábú bakállvány (közös metszéspontú térbeli erők)

A térben egy pontot elmozdulásmentesen három kapcsolórúddal rögzíthetünk. Ha a pont a megtámasztandó elem, akkor az elfordulásoknak nincs jelentősége, hiszen a terhelő erő is csak a pontra működhet.
A **talajhoz** és **egymáshoz csuklósan** kapcsolódó három rúdból álló térbeli szerkezetet **háromlábú bakállványnak** nevezzük.
A rudakban a csuklós kapcsolat miatt csak rúdirányú erők keletkezhetnek, így a csomópontra közös metszéspontú térbeli erőrendszer működik. Az erők közös metszéspontja miatt az egyensúlyhoz szükséges 6 statikai egyenletből 3 információtartalma zérus lesz (következmény-egyenletek lesznek), a maradék három egyenlet azonban a három ismeretlen rúderő meghatározásához elegendő, tehát a megtámasztás statikailag **határozott**.

A térbeli bakállvány kapcsolati erőinek meghatározása során általában a vetületi egyenleteket szoktuk használni, de itt is választhatunk a vetületi egyenletek helyett – ugyanazon csomóponti egyensúlyi kijelentés alapján felírt – nyomatéki egyenleteket is. Ha a nyomatéki egyenlethez a tengelyeket a **támasztórudak végpontjait összekötő egyenesekben** vesszük fel, akkor az egyenletekben mindig **csak egy ismeretlen** marad, igaz, általános esetben a terhelő erő(k) nyomatékát kell fáradságosabban előállítani. A számítási egyenletek **jellegének** és **sorrendjének** megválasztása során célszerű kihasználni a bakállvány geometriai hálózatában rejlő egyszerűsítési lehetőségeket (szimmetria, koordinátasíkokban álló rudak, stb.)



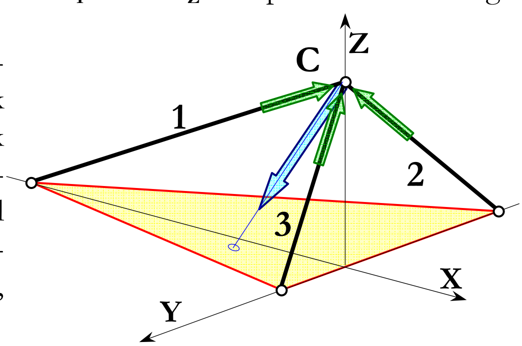
Az **1-2-3** rudakkal megtámasztott **C** jelű pontra az **X** tengellyel párhuzamos $\mathbf{F_X}$ erő működik. Az **1.** jelű rúd a **ZX** síkban, a **2.** és **3.** jelű rudak a **ZY** síkban vannak. A csomópont egyensúlya alapján felírt **X** irányú vetületi egyenletben az $\mathbf{F_X}$ erő mellett csak az $\mathbf{S_1}$ rúderő szerepel. Az **Y** irányú vetületi egyenletből az $\mathbf{S_2}$ és $\mathbf{S_3}$ erők vetületi egyenlősége alapján meghatározható az $\mathbf{S_2}$ és $\mathbf{S_3}$ erők aránya. Ennek ismeretében pedig (felhasználva $\mathbf{S}_1$ már ismert nagyságát a **Z** irányú vetületi egyenlet megoldása szolgáltatja az $\mathbf{S}_2$ és $\mathbf{S}_3$ erők értékét.



Ha a rudak támaszpontjai koordinátatengelyekre illeszkednek, célszerű lehet a nyomatéki egyenletek alkalmazása. Esetünkben az **Y** tengelyre felírt nyomatéki egyenletből az $\mathbf{S}_1$ rúderő egyetlen ismeretlenként határozható meg. A továbbiakban a rúdtámaszpontokat összekötő tengelyek nyomatéki egyenletei ferde állásuk miatt nem használhatók hatékonyan: a hatásvonalak és a tengelyek kitérő állása miatt a nyomatékok meghatározása nehézkes. Itt is előnyös lehet viszont az X tengelyre felírt nyomatéki egyenlet, mert (bár nem szerepel benne ismert erő) az $\mathbf{S}_2$ és $\mathbf{S}_3$ erők arányát egyszerűen szolgáltatja.

Ha az $\mathbf{S}_2$ és $\mathbf{S}_3$ erők állása szimmetrikus, akkor a megoldás még egyszerűbb, hiszen a szerkezet és a teher a **ZX** síkra szimmetrikus, tehát az $\mathbf{S}_2$ és $\mathbf{S}_3$ erők nagysága azonos lesz, így $\mathbf{S}_1$ ismeretében az $\mathbf{S}_2$=$\mathbf{S}_3$ erők egyismeretlenes egyenletből határozhatók meg.

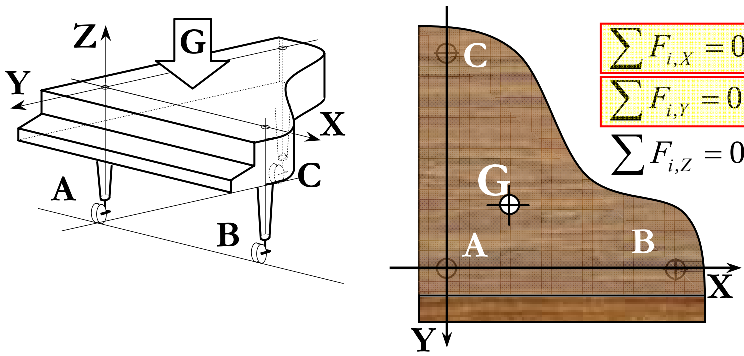
Ha az **F** erő általános állású, a legcélszerűbb koordinátatengely-irányú összetevőivel helyettesíteni, és az Y tengelyre felírt nyomatéki egyenlettel kezdeni a vizsgálatot, mert ebben az $\mathbf{F}_Y$ és az $\mathbf{F}_Z$ komponensek nem fognak szerepelni.



A feladat kapcsán érdemes végiggondolni a rúderők előjelének alakulását a terhelő erő állásának függvényében. Ha az **F** erő állását hatásvonalának az alapsíkkal képezett döféspontjával határozzuk meg, könnyen belátható, hogy a ha a **döféspont** a **rúdtámaszpontokat összekötő szakaszokon** mozog, a terhelő erő és két rúderő egy síkba kerül, és így a **harmadik rúdban nem keletkezhet erő**. Ha a döféspont a támaszpontok által meghatározott háromszög **belsejébe kerül**, a három rúdban **azonos előjelű** rúderő ébred. Ha a döféspont a háromszögön **kívül, egyik oldalvonala mellett van**, a döfésponttal átellenes rúdban és a két másik rúdban **ellentétes előjelű** rúderő keletkezik. Ha a teher az összekötő vonalakon kívül, de a támaszpontok háromszögének valamelyik csúcsán átmenő két oldalvonal által meghatározott területen belül hat, akkor az eredőből az átellenes támaszerők az eredővel megegyező, a csúcs melletti támaszerő pedig az eredővel ellentétes irányú lesz.

Háromlábú asztal (párhuzamos térbeli erők)

A három, közös metszéspontú támaszerő speciális esete az, amikor a hatásvonalak **párhuzamosak**. A három, párhuzamos erővel megtámasztott szerkezet megtámasztásában természetesen **labilis**, csak a támaszerők hatásvonalával **párhuzamos terhek** felvételére képes. Ilyen esetben a megtámasztott test nyugalmi állapotára felírható **hat** statikai egyenletből három „üres”, információtartalom nélküli egyenlet lesz, a maradék három viszont elegendő a három ismeretlen támaszerő nagyságának meghatározásához, azaz a megtámasztás statikailag **határozott**.



$$\boxed{\sum F_{i,X}=0} \quad \sum M_i^{(X)}=0$$
$$\boxed{\sum F_{i,Y}=0} \quad \sum M_i^{(Y)}=0$$
$$\sum F_{i,Z}=0 \quad \boxed{\sum M_i^{(Z)}=0}$$

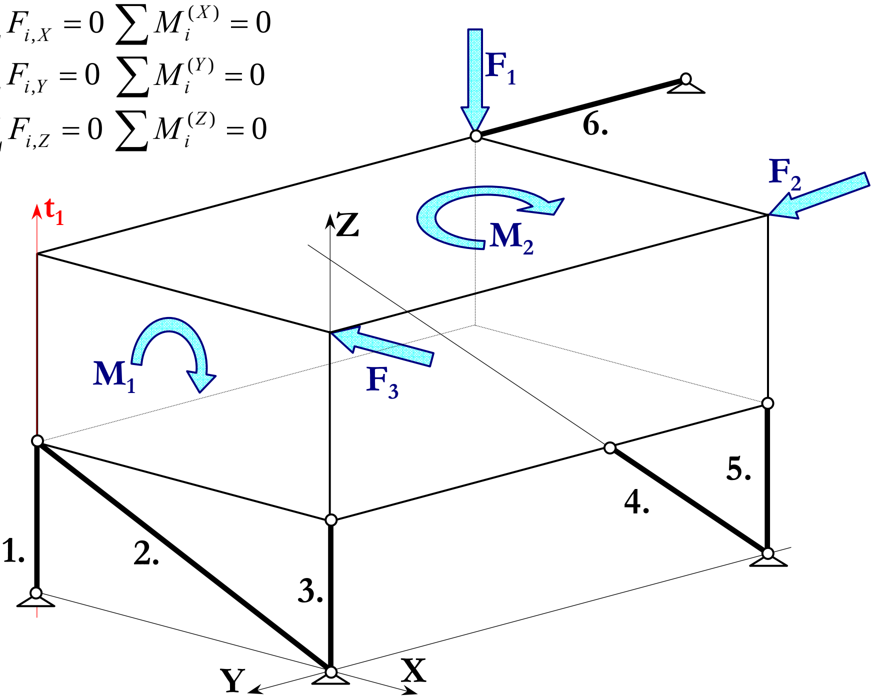
Egy tipikus, három párhuzamos erővel megtámasztott szerkezetet mutat a fenti ábra. A vízszintes tengelyekre felírt vetületi és a függőleges tengelyre felírt nyomatéki egyenlet „üres”; a működő függőleges hatásvonalú erők ezekben az egyenletekben nem szerepelnek. Az **X** és **Y** tengelyekre felírt nyomatéki egyenletekből a **C** és a **B** támaszerő függetlenül meghatározható, ezek ismeretében pedig a **Z** tengelyre vonatkozó vetületi egyenletből az **A** támaszerő számítható.

A háromlábú bakállvány rúderővel kapcsolatos elemzése itt is megállja a helyét: a támaszpontok összekötő vonalában működő eredő teher esetén a harmadik támasz terheletlen lesz; a támaszpontok háromszögén belül támadó eredő esetén mindhárom támaszerő azonos előjelű lesz; és az összekötő vonalakon kívül, az oldalvonal mellett ható eredőből az átellenes támaszerő az eredővel megegyező, a másik két támaszerő pedig az eredővel ellentétes irányú lesz; és az összekötő vonalakon kívül, a csúcs melletti mezőben ható eredőből az átellenes támaszerők az eredővel megegyező, a csúcs melletti rúderő pedig az eredővel ellentétes irányú lesz.

Egyszerű térbeli test (általános, szétszórt térbeli erők)

Általános esetben egy térbeli test merev és statikailag határozott megtámasztásához hat kapcsolórúdra (vagy 6-os fokszám-összegű kényszerekre) van szükség. Ha a megtámasztó erőhatásvonalakra igaz, hogy háromnál több hatásvonal nem metsződik ugyanazon pontban, akkor a hat támasztóerő a merev és egyidejűleg statikailag határozott megtámasztásnak nemcsak a **szükséges**, hanem az **elégséges** feltételét is kielégíti.

$$\sum F_{i,X}=0 \quad \sum M_i^{(X)}=0$$
$$\sum F_{i,Y}=0 \quad \sum M_i^{(Y)}=0$$
$$\sum F_{i,Z}=0 \quad \sum M_i^{(Z)}=0$$



A térbeli test egyensúlyi kijelentése alapján felírható hat statikai egyenlet matematikailag elegendő a hat ismeretlen rúderő értékének meghatározásához, de a kézi számításhoz célszerű a legegyszerűbb, lehetőleg egyismeretlenes egyenleteket megkeresni. Általánosságban megállapíthatjuk, hogy **első egyenletként** célszerű **nyomatéki egyenletet** választani, mert abból mind a választott tengelyt metsző, mind az azzal párhuzamos hatásvonalú ismeretlen erők kihagyhatók. A kézi számítás egyszerűsítése érdekében a cél tehát olyan tengelyek kiválasztása, amelyekre lehetőleg csak egy (új) ismeretlen erőnek van nyomatéka. Esetünkben első egyenletnek a **Z** tengelyre vonatkozó nyomatéki egyenletet érdemes választanunk, mert abban az $\mathbf{S_6}$ rúderőn kívül más ismeretlen nem játszik szerepet ($\mathbf{S_2}$, $\mathbf{S_4}$ hatásvonala metszi, $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_3}$, $\mathbf{S_5}$ hatásvonala párhuzamos). Az **Y** tengelyre vonatkozó nyomatéki egyenlet hasonlóan egyszerű, ebben csak az $\mathbf{S_1}$ rúderő szerepel. Az **X** tengelyre a már ismert $\mathbf{S_6}$ rúderő mellett két új ismeretlen is forgat: az $\mathbf{S_4}$ és az $\mathbf{S_5}$. Ehelyett inkább az **1.** rúd tengelyvonalára (t_1) írjunk nyomatéki egyenletet, mert abból $\mathbf{S_4}$ értéke közvetlenül számítható. Ez után már dolgozhatunk az **X** tengelyre vonatkozó nyomatéki egyenlettel, amelyből (a már ismert $\mathbf{S_4}$ és az $\mathbf{S_6}$ felhasználásával) $\mathbf{S_5}$ értéke számítható. A további rúderők meghatározására már a vetületi egyenletek is alkalmasak.

A vizsgált feladatban a terhelő erők és nyomatékok vektorai mind a koordinátatengelyekkel párhuzamosan álltak. Általános állású erő- és nyomatékvektorok esetén célszerű a tengelyekkel párhuzamos komponensek használata, hogy a tengelyekre számított vetületek és nyomatékok értékeit könnyen tudjuk meghatározni.

A tengelyekre számított nyomatékok előjelének megállapításánál nem szabad figyelmen kívül hagynunk a tengely állását, hiszen a forgatási irány csak ehhez viszonyítva előjelezhető!

10.2.3. Összetett térbeli szerkezetek

A térbeli összetett szerkezetek közül csak a térbeli (statikailag határozott rácsozású) rácsostartóval foglalkozunk.

A távvezetékoszlopok, antennatornyok nagy része, a nagy terek lefedésére szolgáló térrácsok minden fajtája ugyan térbeli rácsos szerkezet, de rácsozásában nem határozott, így vizsgálata meghaladja mostani lehetőségeinket.

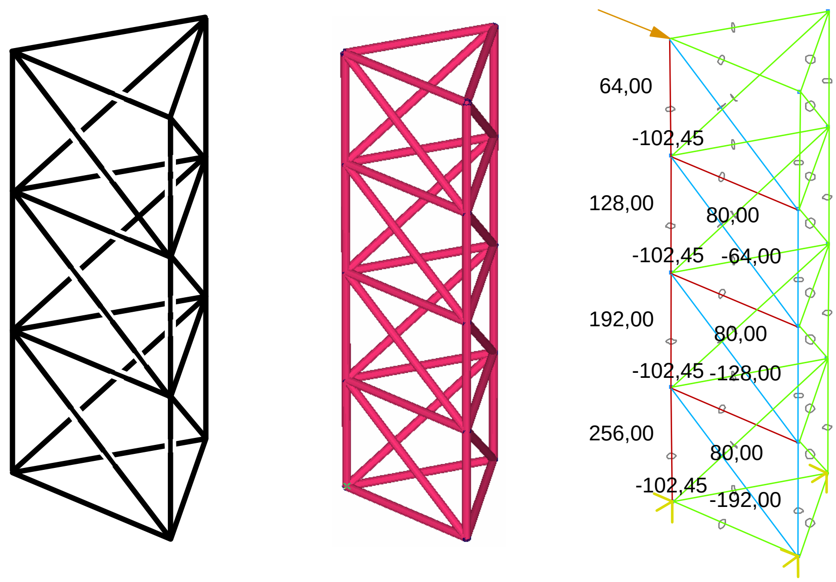
A térbeli rácsostartók belső határozottságának szükséges feltétele, hogy a tartót a tengelyére merőlegesen elvágva az átvágásban szereplő ismeretlen rúderők csak statikai egyenletek felhasználásával meghatározhatók legyenek. Mint tudjuk, egy térbeli test egyensúlyához 6 független statikai egyenlet írható fel, tehát az átvágásban hat rúdnál többet nem metszhetünk el. Ugyanakkor a tartótengelyirányú és a tengelyre merőleges állású rúdelemek által meghatározott négyszögelemeket egy-egy ferde rúd beillesztésével minden síkban merevíteni kell, vagyis a tengelyre merőleges átvágás során minden síkban legalább két rudat kell elmetszenünk. Ebből a gondolatmenetből azonnal adódik, hogy belsőleg statikailag határozott térbeli rácsostartó csak háromszög-alapú hasábként-gúlaként, három, élben illeszkedő rácsozási síkkal alakítható ki.

A háromszögelemek merev mivoltát már a síkbeli rácsostartók körében tisztáztuk, érthető, hogy a térbeli szerkezet is **háromszögelemekre**, **három rácsozási síkra** épül. A mellékelt kép nagyon jól mutatja a háromszögelemek kapcsolatát.

A rúdelemek kapcsolatát a térbeli szerkezetek esetében is az **elmélet** és a **gyakorlat** eltérése jellemzi: a **tényleges szerkezetekben** a rudak csomóponti kapcsolatai (legalább részlegesen) **befogottak**, míg a **számítási modellben** (legalábbis első közelítésben) megelégszünk a **csuklós**, szabadon elforduló kapcsolat feltételezésével.

A hálózati rajzon megfigyelhetjük a három rácsozási síkot, és azt is, hogy egy tartótengelyre merőleges átmetszéssel valóban hat rudat vágunk át, így a tartóelemek egyensúlyi egyenleteiből az átvágott rudakban keletkező rúderők meghatározhatók. A tartótengelyre merőlegesen álló rúdháromszögekben keletkező rúderőket az átmetszésből már kiszámított rúderők felhasználásával, a csomópontok egyensúlyi egyenleteiből lehet meghatározni.

Tájékoztatásul közöljük egy ilyen rendszerű rácsostartó számítógépes modelljét és a csuklós kapcsolatú modellen a szerkezetszámító program által meghatározott rúderőket (a piros szín a húzott rudakat, a kék a nyomott rudakat, a zöld pedig a vakrudakat jelöli)



10.3. Ellenőrző kérdések

Hány adat kell egy térbeli erő megadásához?
Hogyan határozható meg egy térbeli erő nagysága az erő vetületeinek ismeretében?
Hogyan határozható meg egy térbeli erő hatásvonalának állása?
Hogyan határozható meg egy térbeli erő egy tengelyre vett nyomatékának nagysága, iránya (előjele)?
Mennyi egy térbeli F erő nyomatéka egy erővel párhuzamos tengelyre?
Mennyi egy térbeli F erő nyomatéka egy erőt metsző tengelyre?
Mennyi egy térbeli F erő nyomatéka egy erőre merőleges tengelyre?
Hogyan számítható egy térbeli erő egy pontra vonatkozó nyomatéka?
Milyen egyenleteket írhatunk fel egy térbeli erőrendszer eredőjének meghatározására?
Milyen egyenleteket írhatunk fel egy térbeli erőrendszer esetén az eredő helyének meghatározására?
Milyen feltételek esetén van egy térbeli erőrendszer egyensúlyban?
Milyen feltételek esetén egy origón átmenő erő a térbeli erőrendszer eredője?
Milyen feltételek esetén egy erőpár a térbeli erőrendszer eredője?
Milyen feltételek esetén egyetlen erő a térbeli erőrendszer eredője?
Milyen feltételek esetén erőcsavar a térbeli erőrendszer eredője?

Mennyi a támaszkényszerek szükséges fokszáma egy, egy testből álló, egyszerű merev és statikailag határozott módon megtámasztott térbeli szerkezetnek?
Mondjon legalább négy térbeli kényszer!
Milyen célszerű egyenletek írhatók fel a közös metszéspontú térbeli erők esetén?
Milyen célszerű egyenletek írhatók fel a párhuzamos térbeli erők esetén?
Milyen célszerű egyenletek írhatók fel az általános (szétszórt) térbeli erők esetén?