INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

ISMÉTLÉS

1. $\int \operatorname{ch}(6x-2)\,dx$ $\left[\frac{1}{6}\cdot \operatorname{sh}(6x-2)+c\right]$

2. $\int 3\mathrm{e}^{(8x-5)}\,dx$ $\left[\frac{3}{8}\cdot \mathrm{e}^{(8x-5)}+c\right]$

3. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2(9x+7)}\,dx$ $\left[\frac{1}{9}\cdot \operatorname{th}(9x+7)+c\right]$

4. $\int 5x^2\cdot(2x^3+4)^6\,dx$ $\left[5\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{(2x^3+4)^7}{7}+c=\frac{5}{42}\cdot(2x^3+4)^7+c\right]$

5. $\int \frac{7}{\sqrt[8]{11x+3}}\,dx$ $\left[7\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{(11x+3)^{\frac{7}{8}}}{\frac{7}{8}}+c=\frac{8}{11}\cdot\sqrt[8]{(11x+3)^7}+c\right]$

6. $\int \frac{-3}{\sin^2(4x+2)}\,dx$ $\left[-3\cdot\frac{1}{4}\cdot(-\operatorname{ctg}(4x+2))+c=\frac{3}{4}\cdot\operatorname{ctg}(4x+2)+c\right]$

7. $\int \cos^5 x\cdot\sin x\,dx$ $\left[-\frac{(\cos x)^6}{6}+c=-\frac{1}{6}\cdot\cos^6 x+c\right]$

8. $\int 7x^5\cdot\sqrt[3]{(2x^6+9)^4}\,dx$ $\left[7\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{(2x^6+9)^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}+c=\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{(2x^6+9)^7}+c\right]$

9. $\int \frac{11x^3}{5x^4+17}\,dx$ $\left[11\cdot\frac{1}{20}\cdot\ln|5x^4+17|+c=\frac{11}{20}\cdot\ln(5x^4+17)+c\right]$

10. $\int \frac{\operatorname{ch}(8x)}{3+2\operatorname{sh}(8x)}\,dx$ $\left[\frac{1}{16}\cdot\ln|3+2\operatorname{sh}(8x)|+c\right]$

11. $\int \operatorname{sh}(\mathrm{e}^{4x}+5)\cdot\mathrm{e}^{4x}\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\cdot\operatorname{ch}(\mathrm{e}^{4x}+5)+c\right]$

12. $\int \frac{3\sin x}{2+7\cos x}\,dx$ $\left[3\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\ln|2+7\cos x|+c=-\frac{3}{7}\cdot\ln|2+7\cos x|+c\right]$

13. $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$ $\left[\frac{(\ln x)^4}{4}+c=\frac{1}{4}\cdot\ln^4 x+c\right]$

14. $\int \frac{8}{x\cdot\ln^5 x}\,dx$ $\left[8\cdot\frac{(\ln x)^{-4}}{-4}+c=-2\cdot\frac{1}{\ln^4 x}+c\right]$

15. $\int \frac{5}{9x^2+1}\,dx$ $\left[5\cdot\frac{1}{3}\cdot\operatorname{atctg}(3x)+c=\frac{5}{3}\cdot\operatorname{atctg}(3x)+c\right]$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$ $\displaystyle\left[\frac{1}{4}\cdot 2\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}x\right)+c=\frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}x\right)+c\right]$

17. $\displaystyle\int \frac{-2}{16x^2+25}\,dx$ $\displaystyle\left[-2\cdot\frac{1}{25}\cdot\frac{5}{4}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{5}x\right)+c=-\frac{1}{10}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{5}x\right)+c\right]$

18. $\displaystyle\int \frac{7}{5x^2+3}\,dx$ $\displaystyle\left[7\cdot\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x\right)+c=\frac{7\sqrt{15}}{15}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{3}x\right)+c\right]$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$ $\displaystyle\left[\frac{1}{4}\cdot 2\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)+c=\frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)+c\right]$

20. $\displaystyle\int \frac{3}{x^2-6x+34}\,dx$ $\displaystyle\left[3\cdot\frac{1}{25}\cdot 5\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}x-\frac{3}{5}\right)+c=\frac{3}{5}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}x-\frac{3}{5}\right)+c\right]$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ $\displaystyle\left[\arcsin\left(\frac{1}{2}x\right)+c\right]$

22. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$ $[\arcsin(x-1)+c]$

23. $\displaystyle\int \frac{8}{\sqrt{6x-9x^2}}\,dx$ $\displaystyle\left[8\cdot\frac{1}{3}\cdot\arcsin(3x-1)+c=\frac{8}{3}\cdot\arcsin(3x-1)+c\right]$

24. $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{-4x^2-12x-8}}\,dx$ $\displaystyle\left[5\cdot\frac{1}{2}\cdot\arcsin(2x+3)+c=\frac{5}{2}\cdot\arcsin(2x+3)+c\right]$

25. $\displaystyle\int \frac{11}{\sqrt{12x-9x^2-3}}\,dx$ $\displaystyle\left[11\cdot\frac{1}{3}\cdot\arcsin(3x-2)+c=\frac{11}{3}\cdot\arcsin(3x-2)+c\right]$

26. $\displaystyle\int (3x+2)\cdot \operatorname{sh}(4x)\,dx$ $\displaystyle\left[\frac{1}{4}\cdot\operatorname{ch}(4x)\cdot(3x+2)-\frac{3}{16}\cdot\operatorname{sh}(4x)+c\right]$

27. $\displaystyle\int (4-7x)\cdot\cos(2x+1)\,dx$ $\displaystyle\left[\frac{1}{2}\cdot\sin(2x+1)\cdot(4-7x)-\frac{7}{4}\cdot\cos(2x+1)+c\right]$

28. $\displaystyle\int (8x^2+10)\cdot\ln(5x)\,dx$ $\displaystyle\left[\left(\frac{8}{3}x^3+10x\right)\cdot\ln(5x)-\frac{8}{9}x^3-10x+c\right]$

29. $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(3x)\,dx$ $\displaystyle\left[x\cdot\operatorname{arctg}(3x)-\frac{1}{6}\ln|1+9x^2|+c=x\cdot\operatorname{arctg}(3x)-\frac{1}{6}\ln(1+9x^2)+c\right]$

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

30. B $\displaystyle\int \frac{8}{3x-7}\,dx$ $\quad\left[\frac{8}{3}\cdot\ln|3x-7|+c\right]$

31. B $\displaystyle\int \frac{2}{5-9x}\,dx$ $\quad\left[-\frac{2}{9}\cdot\ln|5-9x|+c\right]$

32. B $\displaystyle\int \frac{5}{(2x+4)^6}\,dx$ $\quad\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2x+4)^5}+c\right]$

33. B $\displaystyle\int \frac{13}{(2-11x)^7}\,dx$ $\quad\left[\frac{13}{66}\cdot\frac{1}{(2-11x)^6}+c\right]$

34. B $\displaystyle\int \frac{x}{(3x+2)^4}\,dx$ $\quad\left[-\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{(3x+2)^2}+\frac{2}{27}\cdot\frac{1}{(3x+2)^3}+c\right]$

35. B $\displaystyle\int \frac{7x}{(3x-4)^6}\,dx$ $\quad\left[-\frac{7}{36}\cdot\frac{1}{(3x-4)^4}-\frac{28}{45}\cdot\frac{1}{(3x-4)^5}+c\right]$

36. B $\displaystyle\int \frac{6x}{(5x-2)^2}\,dx$ $\quad\left[-\frac{12}{25}\cdot\frac{1}{(5x-2)}+\frac{6}{25}\cdot\ln|5x-2|+c\right]$

37. B $\displaystyle\int \frac{3x+1}{(2x-3)^5}\,dx$ $\quad\left[-\frac{11}{16}\cdot\frac{1}{(2x-3)^4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(2x-3)^3}+c\right]$

38. B $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+4x+5}\,dx$ $\quad[2\cdot\operatorname{arctg}(x+2)+c]$

39. B $\displaystyle\int \frac{17}{x^2+6x+20}\,dx$
$$\left[\frac{17\sqrt{11}}{11}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{11}}x+\frac{3}{\sqrt{11}}\right)+c=\frac{17}{\sqrt{11}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{11}}x+\frac{3}{\sqrt{11}}\right)+c\right]$$

40. B $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+64}\,dx$ $\quad\left[\frac{1}{2}\cdot\ln|x^2+64|+c=\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+64)+c\right]$

41. B $\displaystyle\int \frac{7x}{x^2+15}\,dx$ $\quad\left[\frac{7}{2}\cdot\ln|x^2+15|+c=\frac{7}{2}\cdot\ln(x^2+15)+c\right]$

42. B $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx$
$$\left[\frac{1}{2}\cdot\ln|x^2+4x+5|-2\cdot\operatorname{arctg}(x+2)+c=\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+4x+5)-2\cdot\operatorname{arctg}(x+2)+c\right]$$

43. B $\displaystyle\int \frac{5x}{x^2-8x+25}\,dx$
$$\left[\frac{5}{2}\cdot\ln|x^2-8x+25|+\frac{20}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}\right)+c=\frac{5}{2}\cdot\ln(x^2-8x+25)+\frac{20}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}\right)+c\right]$$

44. B $\displaystyle\int \frac{7x+1}{x^2+16}\,dx$
$\left[\frac{7}{2}\cdot\ln|x^2+16|+\frac{1}{4}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}x\right)+c=\frac{7}{2}\cdot\ln(x^2+16)+\frac{1}{4}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}x\right)+c\right]$

45. B $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+6x+13}\,dx$
$\left[\frac{3}{2}\cdot\ln|x^2+6x+13|-2\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)+c=\frac{3}{2}\cdot\ln(x^2+6x+13)-2\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)+c\right]$

46. B $\displaystyle\int\left(\frac{2}{(x+5)^3}+\frac{3}{4x+1}\right)dx$ $\left[\frac{1}{(x+5)^2}+\frac{3}{4}\cdot\ln|4x+1|+c\right]$

47. B $\displaystyle\int\left(\frac{8}{(2x+3)^4}-\frac{6}{5x-2}\right)dx$ $\left[-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(2x+3)^3}-\frac{6}{5}\cdot\ln|5x-2|+c\right]$

48. Milen típusú racionális törtek összegére bontaná az alábbi törteket?

(a) B $f(x)=\dfrac{3}{x^2+4x}$ $\left[\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}\right]$

(b) B $f(x)=\dfrac{x+1}{9x^3+7x^2}$ $\left[\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{9x+7}\right]$

(c) B $f(x)=\dfrac{8x-x^2+3}{x^4-x^3}$ $\left[\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}\right]$

(d) B $f(x)=\dfrac{5x-6}{x(8x^2+5)}$ $\left[\frac{A}{x}+\frac{Bx+c}{8x^2+5}\right]$

(e) B $f(x)=\dfrac{2}{x(x^2+x-6)}$ $\left[\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}\right]$

(f) B $f(x)=\dfrac{6x}{x(x^2+8x+16)}$ $\left[\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{(x+4)^2}\right]$

(g) B $f(x)=\dfrac{x^2}{4x^3+12x^2+9x}$ $\left[\frac{A}{x}+\frac{B}{2x+3}+\frac{C}{(2x+3)^2}\right]$

(h) B $f(x)=\dfrac{2x^2-7x}{(x+8)(5x^2+3)^3}$ $\left[\frac{A}{x+8}+\frac{Bx+C}{5x^2+3}+\frac{Dx+E}{(5x^2+3)^2}+\frac{Fx+G}{(5x^2+3)^3}\right]$

(i) B $f(x)=\dfrac{3x^3-2x^2+1}{x(x-1)^2(x^2+1)}$ $\left[\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)}\right]$

(j) B $f(x)=\dfrac{8x^2+7x^4-9x}{(x+5)^3(2x^2+9)^2(11x-6)}$
$\left[\frac{A}{x+5}+\frac{B}{(x+5)^2}+\frac{C}{(x+5)^3}+\frac{Dx+E}{2x^2+9}+\frac{Fx+G}{(2x^2+9)^2}+\frac{H}{11x-6}\right]$

49. B $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+2x-3}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\cdot\ln|x-1|-\frac{1}{2}\cdot\ln|x+3|+c\right]$

50. B $\displaystyle\int \frac{3x-5}{5x^2+14x-3}\,dx$
$\left[5x^2+14x-3=5(x-\frac{1}{5})(x+3)=(5x-1)(x+3);-\frac{11}{40}\cdot\ln|5x-1|+\frac{7}{8}\cdot\ln|x+3|+c\right]$

51. B $\displaystyle\int \frac{5x+3}{(x-1)(x^2-6x+9)}\,dx$ $\left[2\cdot\ln|x-1|-2\cdot\ln|x-3|-9\cdot\frac{1}{x-3}+c\right]$

52. B $\displaystyle\int \frac{5x-48}{x^3+16x}\,dx$ $\left[-3\cdot\ln|x|+\frac{3}{2}\cdot\ln(x^2+16)+\frac{5}{4}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}x\right)+c\right]$

53. B $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{3x^3-3x}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\cdot(\ln|x-1|-\ln|x|+\ln|x+1|)+c\right]$

54. B $\displaystyle\int \frac{2x^2+11x+16}{x^3+4x^2+8x}\,dx$ $\left[2\cdot\ln|x|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}x+1\right)+c\right]$

55. B $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+6x+2}\,dx$
$\left[4x^2+6x+2=4(x+\frac{1}{2})(x+1)=(4x+2)(x+1);-\frac{1}{2}\cdot\ln|x+1|+\frac{1}{2}\cdot\ln|4x+2|+c\right]$

56. B $\displaystyle\int \frac{6+2x^2-3x}{(x^2+2)(x+3)}\,dx$ $\left[-\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+2)+3\cdot\ln|x+3|+c\right]$

57. $\displaystyle\int \frac{3x^2+7}{(x^2+9)(x-8)}\,dx$ $\left[\frac{199}{73}\cdot\ln|x-8|+\frac{10}{73}\cdot\ln(x^2+9)+\frac{160}{219}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}x\right)+c\right]$

58. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3+2x^2+1}{x^5+x^3}\,dx$ $\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\ln|x|+3\cdot\operatorname{arctg}x+c\right]$

59. $\displaystyle\int \frac{27x^3+29x^2+13x+1}{x(3x+1)^3}\,dx$ $\left[\ln|x|-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3x+1}-\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{(3x+1)^2}+c\right]$

60. $\displaystyle\int \frac{5x^3+11x^2+63}{2x^4+9x^2}\,dx$ $\left[\frac{5}{4}\cdot\ln(2x^2+9)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)-7\cdot\frac{1}{x}+c\right]$

61. $\displaystyle\int \frac{2x^3+x^2+18x-9}{x^4-81}\,dx$ $\left[\ln|x-3|+\ln|x+3|+\frac{1}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}x\right)+c\right]$

62. $\displaystyle\int \frac{6x^3+9x^2+72x+85}{(x^2+25)(x^2+2x-15)}\,dx$
$\left[\ln(x^2+25)+\frac{1}{5}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}x\right)+2\cdot\ln|x-3|+2\cdot\ln|x+5|+c\right]$

63. B $\displaystyle\int \frac{2x}{x+1}\,dx$ $[2x-2\ln|x+1|+c]$

64. B $\int \frac{5x}{3x-4}\,dx$ $\left[\frac{5}{3}x + \frac{20}{9} \cdot \ln|3x-4| + c\right]$

65. B $\int \frac{x^2}{x+2}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 \cdot \ln|x+2| + c\right]$

66. B $\int \frac{8x^2}{4x-5}\,dx$ $\left[x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{8} \cdot \ln|4x-5| + c\right]$

67. $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{3x^2+x-2}\,dx$
$\left[3x^2+x-2 = 3(x+1)(x-\frac{2}{3}) = (x+1)(3x-2);\ \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{92}{135} \cdot \ln|3x-2| - \frac{1}{5} \cdot \ln|x+1| + c\right]$

68. $\int \frac{5x^5+2x^4-4x^3+3x^2-3x+3}{x^4+x^2}\,dx$
$\left[\frac{5}{2}x^2 + 2x - 3 \cdot \ln|x| - 3 \cdot \frac{1}{x} - 3 \cdot \ln(x^2+1) - 2 \cdot \mathrm{arctg}x + c\right]$

69. $\int \frac{2x^4+15x^3+33x^2+22x-6}{x^2+6x+8}\,dx$ $\left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x - 3 \cdot \ln|x+2| + 7 \cdot \ln|x+4| + c\right]$

INTEGRÁLÁS HELYETTESÍTÉSSEL

70. B $\int \mathrm{e}^x \cdot \sin(\mathrm{e}^x)\,dx$ $[-\cos(\mathrm{e}^x) + c; t = \mathrm{e}^x]$

71. B $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \cos(\sqrt[3]{x})\,dx$ $[3 \cdot \sin(\sqrt[3]{x}) + c; t = \sqrt[3]{x}]$

72. B $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + x\sqrt[3]{x}}\,dx$ $[3 \cdot \mathrm{arctg}(\sqrt[3]{x}) + c; t = \sqrt[3]{x}]$

73. B $\int \frac{\mathrm{e}^x}{\cos^2(\mathrm{e}^x)}\,dx$ $[\mathrm{tg}(\mathrm{e}^x) + c; t = \mathrm{e}^x]$

74. B $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx$ $\left[2 \cdot \sqrt{x} \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x}} - 2 \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x}} + c; t = \sqrt{x}\right]$

75. $\int \frac{2}{4+\sqrt{x}}\,dx$ $[4 \cdot \sqrt{x} - 16 \cdot \ln|4+\sqrt{x}| + c; t = \sqrt{x}]$

76. B $\int \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sin^2(\sqrt{x})}\,dx$ $[-2 \cdot \mathrm{ctg}(\sqrt{x}) + c; t = \sqrt{x}]$

77. B $\int \frac{\cos(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ $[3 \cdot \sin(\sqrt[3]{x}) + c; t = \sqrt[3]{x}]$

78. B $\displaystyle\int \frac{3}{x+\sqrt{x}}\,dx$ $\quad [6\cdot\ln|\sqrt{x}+1|+c; t=\sqrt{x}]$

79. B $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$ $\quad [\arcsin(e^x)+c; t=e^x]$

80. B $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x+2)^3}\,dx$ $\quad \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(e^x+2)^2}+c; t=e^x\right]$

81. $\displaystyle\int \sqrt{x}\cdot\sin(\sqrt{x})\,dx$ $\quad [-2\cdot x\cdot\cos(\sqrt{x})+4\cdot\cos(\sqrt{x})+4\cdot\sqrt{x}\cdot\sin(\sqrt{x})+c; t=\sqrt{x}]$

82. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$ $\quad [e^x-\ln(1+e^x)+c; t=e^x]$

83. $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx$ $\quad \left[-\frac{1}{2}\cdot x\cdot\cos(\ln(x))+\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sin(\ln(x))+c; t=\ln x\right]$

84. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{2}\cdot e^{2x}-2\cdot e^x+4\cdot\ln(e^x+2)+c; t=e^x\right]$

85. $\displaystyle\int \frac{5}{e^{2x}+1}\,dx$ $\quad \left[5\cdot\ln(e^x)-\frac{5}{2}\ln(e^{2x}+1)+c; t=e^x\right]$

86. B $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(\sqrt{x})\,dx$ $\quad [x\cdot\operatorname{arctg}(\sqrt{x})-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}(\sqrt{x})+c; t=\sqrt{x}]$

87. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$ $\quad \left[x+1+4\cdot\sqrt{x+1}+4\cdot\ln|\sqrt{x+1}-1|+c; t=\sqrt{x+1}\right]$

88. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\,dx$ $\quad [-x-4\sqrt{x}-8\cdot\ln|2-\sqrt{x}|+c; t=\sqrt{x}]$

89. B $\displaystyle\int \cos(\sqrt{x-3})\,dx$ $\quad \left[2\cdot\cos(\sqrt{x-3})+2\cdot\sqrt{x-3}\cdot\sin(\sqrt{x-3})+c; t=\sqrt{x-3}\right]$

90. $\displaystyle\int \frac{2e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ $\quad \left[\ln(e^{2x}+1)+3\cdot\operatorname{arctg}(e^x)+c; t=e^x\right]$

91. $\displaystyle\int \frac{5e^{2x}-8e^x}{2e^{2x}+9e^x-5}\,dx$ $\quad \left[3\cdot\ln(e^x+5)-\frac{1}{2}\cdot\ln|2e^x-1|+c; t=e^x\right]$

92. B $\displaystyle\int \frac{3x-4}{\sqrt{6x-7}}\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{18}\cdot\sqrt{(6x-7)^3}-\frac{1}{6}\cdot\sqrt{6x-7}+c; t=\sqrt{6x-7}\right]$

93. B $\displaystyle\int \frac{5x+1}{\sqrt{2-3x}}\,dx$ $\quad \left[\frac{10}{27}\cdot\sqrt{(2-3x)^3}-\frac{26}{9}\cdot\sqrt{2-3x}+c; t=\sqrt{2-3x}\right]$

94. B $\displaystyle\int (2x-3)\sqrt{7x+2}\,dx$ $\quad \left[\frac{4}{245}\cdot\sqrt{(7x+2)^5}-\frac{50}{147}\cdot\sqrt{(7x+2)^3}+c; t=\sqrt{7x+2}\right]$

95. B $\displaystyle\int (4-5x)\sqrt{2+9x}\,dx$ $\quad \left[-\frac{2}{81}\cdot\sqrt{(2+9x)^5}+\frac{92}{243}\cdot\sqrt{(2+9x)^3}+c; t=\sqrt{2+9x}\right]$

96. B $\int (4x+1)\sqrt[4]{3x+2}\,dx$ $\left[\frac{16}{81}\cdot\sqrt[4]{(3x+2)^9}-\frac{4}{9}\cdot\sqrt[4]{(3x+2)^5}+c; t=\sqrt[4]{3x+2}\right]$

97. B $\int \sin(\sqrt{2x+5})\,dx$ $\left[\sin(\sqrt{2x+5})-\sqrt{2x+5}\cos(\sqrt{2x+5})+c; t=\sqrt{2x+5}\right]$

98. $\int \frac{7\sqrt{x}+17}{x\sqrt{x}+4x+3\sqrt{x}}\,dx$ $[10\cdot\ln|\sqrt{x}+1|+4\cdot\ln|\sqrt{x}+3|+c; t=\sqrt{x}]$

99. $\int \mathrm{e}^{\sqrt{4-2x}}\,dx$ $\left[-\sqrt{4-2x}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{4-2x}}+\mathrm{e}^{\sqrt{4-2x}}+c; t=\sqrt{4-2x}\right]$

100. $\int \frac{5\sqrt[3]{x}-11}{x\sqrt[3]{x}-3x-10\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ $[9\cdot\ln|\sqrt[3]{x}+2|+6\cdot\ln|\sqrt[3]{x}-5|+c; t=\sqrt[3]{x}]$

101. $\int \frac{9\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}-1}{(2\sqrt[3]{x}-1)(9\sqrt[3]{x^2}+1)5\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ $\left[\frac{3}{10}\cdot\ln|2\sqrt[3]{x}-1|+\frac{2}{5}\mathrm{arctg}(3\sqrt[3]{x})+c; t=\sqrt[3]{x}\right]$

102. $\int \frac{\mathrm{e}^x-8}{\mathrm{e}^x+4}\,dx$ $[3\cdot\ln(\mathrm{e}^x+4)-2\cdot\ln(\mathrm{e}^x)+c; t=\mathrm{e}^x]$

103. $\int \frac{5\mathrm{e}^{2x}-23\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^x-5}\,dx$ $[8\cdot\ln(\mathrm{e}^x+5)-3\cdot\ln|\mathrm{e}^x-1|+c; t=\mathrm{e}^x]$

104. $\int \frac{7-\sqrt[3]{x}}{(2\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+6)3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ $\left[-\ln|\sqrt[3]{x}+6|+\frac{1}{2}\cdot\ln|2\sqrt[3]{x}-1|+c; t=\sqrt[3]{x}\right]$

105. $\int \frac{14}{6\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ $\left[7\cdot\sqrt{6}\cdot\mathrm{arctg}(\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{x})+c; t=\sqrt[3]{x}\right]$

106. $\int \frac{(6\mathrm{e}^{2x}+30+7\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+4)(3\mathrm{e}^{2x}+1)}\,dx$ $\left[2\cdot\ln(\mathrm{e}^x+4)+\frac{7}{\sqrt{3}}\cdot\mathrm{arctg}(\sqrt{3}\cdot\mathrm{e}^x)+c; t=\mathrm{e}^x\right]$

107. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+21\sqrt[3]{x}-32}{(\sqrt[3]{x}+7)(\sqrt[3]{x^2}+16)3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$
$\left[-2\ln|\sqrt[3]{x}+7|+\frac{3}{2}\cdot\ln|\sqrt[3]{x^2}+16|+c=-2\ln|\sqrt[3]{x}+7|+\frac{3}{2}\cdot\ln(\sqrt[3]{x^2}+16)+c; t=\sqrt[3]{x}\right]$

108. $\int_0^{13}(5x-7)\sqrt[3]{2x+1}\,dx$ $\left[886,07; D=R; t=\sqrt[3]{2x+1}\right]$

109. $\int_0^{3}\frac{\sqrt{x+1}}{x+5}\,dx$ $\left[0,71; D=[-1;\infty); t=\sqrt{x+1}\right]$

110. $\int_0^{\pi}\sin(\sqrt[3]{x})\,dx$ $[2,69; D=R; t=\sqrt[3]{x}]$

111. $\int_{-2}^{1}\mathrm{e}^{\sqrt{2-x}}\,dx$ $\left[\left[-2\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{2-x}}\cdot\sqrt{2-x}+2\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{2-x}}\right]_{-2}^{1}=2\mathrm{e}^2; D=(-\infty;2]; t=\sqrt{2-x}\right]$

112. $\displaystyle\int_1^8 \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ $\left[3e^2-3e=14,01; D=R-\{0\}; t=\sqrt[3]{x}\right]$

113. $\displaystyle\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\,dx$ $\left[4; D=\left(-\frac{1}{3};\infty\right); t=\sqrt{3x+1}\right]$

114. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{3}{e^x+1}\,dx$ $[1,86; D=R; t=e^x]$

115. $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{e^x+2}\,dx$ $[1,09; D=R; t=e^x]$

IMPROPRIUS INTEGRÁL

116. B $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}; D=R-\{0\}\right]$

117. B $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{5}{x^3}\,dx$ $\left[\frac{5}{18}; D=R-\{0\}\right]$

118. B $\displaystyle\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{4x^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{12}; D=R-\{0\}\right]$

119. B $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2}{(x+1)^5}\,dx$ $\left[\frac{1}{32}; D=R-\{-1\}\right]$

120. B $\displaystyle\int_5^{\infty} \frac{3}{7x^3}\,dx$ $\left[\frac{3}{350}; D=R-\{0\}\right]$

121. B $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ $[\infty; D=R-\{0\}]$

122. B $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{4}{x}\,dx$ $[-\infty; D=R-\{0\}]$

123. B $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx$ $[\infty; D=(0;1)\cup(1;\infty)]$

124. B $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x\cdot\ln^2 x}\,dx$ $[1; D=(0;1)\cup(1;\infty)]$

125. B $\displaystyle\int_6^{\infty} \frac{2}{(x-3)^4}\,dx$ $\left[\frac{2}{81}; D=R-\{3\}\right]$

126. B $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}; D=R\right]$

127. B $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} e^{-4x+3}\,dx$ $[\infty; D=R]$

128. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ $[-\infty; D=R]$

129. B $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{4-3x}}\,dx$ $\left[\infty; D=R-\left\{\frac{4}{3}\right\}\right]$

130. B $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+9x^2}\,dx$ $[0,11; D=R]$

131. B $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{6}{5\sqrt[3]{x}}\,dx$ $[\infty; D=R-\{0\}]$

132. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-4} \frac{4}{x^2-4}\,dx$ $[\ln(3); D=R-\{-2;2\}]$

133. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{2}{3+x^2}\,dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\pi; D=R\right]$

134. $\displaystyle\int_{3}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$ $[\infty; D=(-1;\infty)]$

135. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx$ $[2\pi; D=R]$

136. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{1+x^2}\,dx$ $[4\pi; D=R]$

137. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{3x}\,dx$ $[\infty; D=R]$

138. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{5}{x^2-2x+2}\,dx$ $[5\pi; D=R]$

139. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{x^2+2x+2}\,dx$ $[3\pi; D=R]$

140. B $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ $\left[2\sqrt{3}; D=(0;+\infty)\right]$

141. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x}{\sqrt{2-x}}\,dx$ $\left[\frac{8\sqrt{2}}{3}; D=(-\infty;2)\right]$

142. B $\displaystyle\int_{-3}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}\,dx$ $\left[3\sqrt[3]{3}; D=R-\{-3\}\right]$

143. B $\displaystyle\int_{-3}^{0} \frac{1}{(x+3)^2}\,dx$ $[\infty; D=R-\{-3\}]$

144. B $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{7}{(x+2)^3}\,dx$ $[\infty; D=R-\{-2\}]$

145. $\int_0^2 \frac{3}{(4-2x)^4}\,dx$ $[\infty; D = R - \{2\}]$

146. $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt[5]{(5-x)^3}}\,dx$ $\left[\frac{5}{2} \cdot \sqrt[5]{16}; D = R - \{5\}\right]$

147. $\int_{\frac{4}{3}}^5 \frac{1}{\sqrt{3x-4}}\,dx$ $\left[\frac{2\sqrt{11}}{3}; D = \left(\frac{4}{3}; \infty\right)\right]$

148. $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{2}; D = (-1; 1)\right]$

149. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{2}; D = (-2; 2)\right]$

150. $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\pi; D = (-5; 5)\right]$

151. B $\int_{-1}^0 \frac{3}{(1+x^2)\cdot \operatorname{arctg}^2 x}\,dx$ $[\infty; D = R - \{0\}]$

152. B $\int_0^1 \frac{7}{(1+x^2)\cdot \operatorname{arctg}^3 x}\,dx$ $[\infty; D = R - \{0\}]$

153. B $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,dx$ $[\infty; D = R - \{0\}]$

154. $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x \cdot \sqrt{\ln x}}\,dx$ $[2; D = (1; \infty)]$

155. $\int_0^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \frac{1}{x \cdot \ln^3 x}\,dx$ $\left[-\frac{1}{2}; D = (0; 1) \cup (1; \infty)\right]$

156. $\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{3}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{2}; D = \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)\right]$

157. $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $[0; D = (-1; 1)]$

158. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3x-x^2}}\,dx$ $[\pi; D = (0; 3)]$

159. $\int_0^6 \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$ $[\pi; D = (0; 6)]$

160. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ $[\infty; D = R - \{k \cdot \pi\}; k \in Z]$

161. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ $[2; D = (0 + k \cdot 2\pi; \pi + k \cdot 2\pi); k \in Z]$

162. $\displaystyle\int_3^6 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-6}} + \frac{1}{(x-6)^2}\right) dx$ $[\infty; D = R - \{6\}]$

163. $\displaystyle\int_1^3 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x-9}} + \frac{1}{(3x-9)^2}\right) dx$

164. $\displaystyle\int_{-5}^5 \frac{1}{\sqrt[5]{(x+2)^3}}\, dx$ $[1,57; D = R - \{-2\}]$

165. $\displaystyle\int_1^{10} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\, dx$ $[9; D = R - \{2\}]$

166. $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{\sqrt[5]{(x-4)^4}}\, dx$ $[11,60; D = R - \{4\}]$

VEKTOROK

1. B Legyen $\underline{a}(-3;2;4), \underline{b}(-2;1;-2), \underline{c}(3;-4;5), \underline{d}(8;-5;7)$.
   (a) $2\underline{a}-4\underline{c}+6\underline{d}$ $[(30;-10;30)]$
   (b) $\underline{c}+3\underline{b}-7\underline{a}$ $[(18;-15;-29)]$
   (c) $\|2\underline{d}-3\underline{c}+\underline{b}\|$ $[\|(5;3;-3)\|=6,56]$
   (d) $\|4\underline{a}+8\underline{b}-7\underline{c}\|$ $[\|(-49;44;35)\|=74,58]$
2. B Legyen $\underline{a}(1,7;2,3;-4,4), \underline{b}(3,1;-1,7;5), \underline{c}(-2,2;4;-3,5), \underline{d}(8,1;-2,8;-1,7)$.
   (a) $-3\underline{b}+5\underline{c}-\underline{a}$ $[(-22;22,8;-28,1)]$
   (b) $6\underline{c}+3\underline{d}-2\underline{b}$ $[(4,9;19;-36,1)]$
   (c) $\|\underline{d}+2\underline{a}-5\underline{b}\|$ $[\|(-4;10,3;-35,5)\|=37,18]$
   (d) $\|2\underline{b}-\underline{c}-3\underline{a}\|$ $[\|(3,3;-14,3;26,7)\|=30,47]$
3. B Legyen $\underline{a}(2;5;-8), \underline{b}(-2;4;2), \underline{c}(3;-4;5), \underline{d}(4;2;-1)$.
   (a) Határozza meg a $\underline{b}$ vektor irányába mutató egységvektort! $\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right]$
   (b) Határozza meg a $2\underline{a}-\underline{d}$ vektor irányába mutató egységvektort! $\left[\left(0;\frac{8}{17};-\frac{15}{17}\right)\right]$
   (c) Határozza meg a $\underline{c}$ vektorral ellentétes irányú egységvektort! $\left[\left(-\frac{3}{5\sqrt{2}};\frac{4}{5\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$
   (d) Határozza meg a $3\underline{d}+2\underline{b}$ vektorral ellentétes irányú egységvektort! $\left[\left(-\frac{8}{3\sqrt{29}};-\frac{14}{3\sqrt{29}};-\frac{1}{3\sqrt{29}}\right)\right]$
4. B Legyen $\underline{a}(5;6;-8), \underline{b}(-2;3;-1), \underline{c}(-3;4;-2), \underline{d}(1;2;-2)$.
   (a) $\langle\underline{a},\underline{d}\rangle$ $[33]$
   (b) $\langle\underline{b},4\underline{c}\rangle$ $[80]$
   (c) $\langle 3\underline{a},\underline{d}+\underline{b}\rangle$ $[147]$
   (d) $\langle 2\underline{d}-\underline{c}+\underline{a},2\underline{a}+4\underline{b}\rangle$ $[364]$
5. B Legyen $\underline{a}(1;2;3), \underline{b}(-2;-2;-2), \underline{c}(4;2;-3), \underline{d}(5;4;-7)$.
   (a) Mekkora szöget zárnak be az $\underline{a}$ és $\underline{d}$ vektorok? $[103,03°]$
   (b) Mekkora szöget zárnak be a $\underline{b}+\underline{a}$ és $\underline{c}$ vektorok? $[156,79°]$
   (c) Mekkora szöget zárnak be az $2\underline{a}-\underline{c}$ és $-\underline{b}$ vektorok? $[56,58°]$
   (d) Mekkora szöget zárnak be a $2\underline{a}-3\underline{d}$ és $-\underline{c}+3\underline{b}$ vektorok? $[84,64°]$

6. B Legyen $\underline{a}(2;-4;3), \underline{b}(2;1;-2), \underline{c}(3;-3;2), \underline{d}(-1;-4;x), \underline{e}(2;x;-3)$.

   (a) Milyen x érték esetén lesz a $\underline{d}$ vektor merőleges az $\underline{a}$ vektorra? $\left[x=-\frac{14}{3}\right]$

   (b) Milyen x érték esetén lesz az $\underline{e}$ vektor merőleges az $-2\underline{b}+\underline{c}$ vektorra? $[x=-4]$

   (c) Milyen x értékek esetén fognak a $\underline{d}$ és $\underline{b}$ vektorok hegyesszöget bezárni? $[x<-3]$

   (d) Milyen x értékek esetén fognak az $\underline{e}$ és $3\underline{a}-\underline{b}$ vektorok hegyesszöget bezárni? $\left[x<-\frac{25}{13}\right]$

   (e) Milyen x értékek esetén fognak az $\underline{e}$ és $\underline{c}$ vektorok tompaszöget bezárni? $[x>0]$

   (f) Milyen x értékek esetén fognak a $\underline{d}$ és $2\underline{b}+3\underline{c}$ vektorok tompaszöget bezárni? $\left[x<-\frac{15}{2}\right]$

7. B Legyen $\underline{a}(-3;0;4), \underline{b}(5;-4;7), \underline{c}(-2;-4;4), \underline{d}(6;-2;-1)$.

   (a) Bontsa fel az $\underline{a}$ vektort a $\underline{c}$ vektorral párhuzamos és merőleges összetevőkre!
   $\left[\underline{a}_p\left(-\frac{11}{9};-\frac{22}{9};\frac{22}{9}\right), \underline{a}_m\left(-\frac{16}{9};\frac{22}{9};\frac{14}{9}\right)\right]$

   (b) Bontsa fel a $\underline{b}$ vektort a $\underline{d}$ vektorral párhuzamos és merőleges összetevőkre!
   $\left[\underline{b}_p\left(\frac{186}{41};-\frac{62}{41};-\frac{31}{41}\right), \underline{b}_m\left(\frac{19}{41};-\frac{102}{41};\frac{318}{41}\right)\right]$

   (c) Bontsa fel a $\underline{c}$ vektort az $\underline{a}$ vektorral párhuzamos és merőleges összetevőkre!
   $\left[\underline{c}_p\left(-\frac{66}{25};0;\frac{88}{25}\right), \underline{c}_m\left(\frac{16}{25};-4;\frac{12}{25}\right)\right]$

   (d) Bontsa fel a $\underline{d}$ vektort a $\underline{c}$ vektorral párhuzamos és merőleges összetevőkre!
   $\left[\underline{d}_p\left(\frac{4}{9};\frac{8}{9};-\frac{8}{9}\right), \underline{d}_m\left(\frac{50}{9};-\frac{26}{9};-\frac{1}{9}\right)\right]$

8. B Az $ABCD$ paralelogramma két csúcsa $A(3;-1;4)$ és $B(-2;2;1)$. Az átlók metszéspontja $K(2;1;3)$. Határozza meg a másik két csúcs koordinátáit! $[C(1;3;2), D(6;0;5)]$

9. B Az $ABCD$ paralelogramma két csúcsa $B(2;-1;5)$ és $C(8;3;-4)$. Az átlók metszéspontja $K(5;2;2)$. Határozza meg a másik két csúcs koordinátáit! $[A(2;1;8), D(8;5;-1)]$

10. B Az $ABCD$ paralelogramma három csúcsa $A(4;5;4)$,$B(6;4;5)$ és $C(7;-2;7)$. Határozza meg az átlók metszéspontját és a negyedik csúcs koordinátáit! $[K(5,5;1,5;5,5), D(5;-1;6)]$

11. B Az $ABCD$ paralelogramma három csúcsa $B(-3;3;-4)$,$C(-6;-3;1)$ és $D(5;-5;-8)$. Határozza meg az átlók metszéspontját és a negyedik csúcs koordinátáit!
    $[K(1;-1;-6), A(8;1;-13)]$

12. B Az ABC háromszög egyik csúcsa $A(5;-2;3)$. Az AB oldal felezőpontja $F(1;4;1)$. Az AC oldal felezőpontja $G(7;1;4)$. Határozza meg a másik két csúcs koordinátáit!
    $[B(-3;10;-1), C(9;4;5)]$

13. B A KLM háromszög egyik csúcsa $M(5;-2;3)$. A KL oldal felezőpontja $X(2;3;-2)$. Az LM oldal felezőpontja $Y(6;4;5)$. Határozza meg a másik két csúcs koordinátáit!
    $[L(7;10;7), K(-3;-4;-11)]$

14. B Határozza meg az $A(-7;2;8)$ pont $B(6;4;5)$ pontra vonatkozó tükörképének koordinátáit és az AB szakasz felezőpontjának koordinátáit! $[A'(19;6;2), F(-0,5;3;6,5)]$

15. B Határozza meg az $X(5;-2;6)$ pont $Y(-2;6;3)$ pontra vonatkozó tükörképének koordinátáit és az XY szakasz felezőpontjának koordinátáit! $[X'(-9;14;0), F(1,5;2;4,5)]$

16. Egy szabályos hatszög középpontja $K(2;-3;5)$, két szomszédos csúcsa $A(1;-3;6)$,$B(1;-2;5)$. Határozza meg másik négy csúcs koordinátáit!
$[D(3;-3;4), E(3;-4;5), C(2;-2;4), F(2;-4;6)]$

17. B Az ABC szabályos háromszög oldala 2 egység hosszú. Mennyi $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle$? $[2]$

18. B Az EFG szabályos háromszög oldala 5 egység hosszú. Mennyi $\langle\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}\rangle$? $[12,5]$

19. Adott az ABC háromszög három csúcsa $A(1;0;-1)$,$B(1;-1;3)$ és $C(-7;2;1)$. Határozza meg a háromszög kerületét és a B csúcsnál lévő szöget! $[k = 21,38; 72,3°]$

20. Adott az EFG háromszög három csúcsa $E(2;3;4)$,$F(-2;3;1)$ és $G(3;-4;2)$. Határozza meg a háromszög kerületét és a E csúcsnál lévő szöget! $[k = 21,01; 86,88°]$

21. Döntse el, hogy az $\underline{a}(-2;3;6)$, $\underline{b}(6;-2;3)$ és $\underline{c}(3;6;-2)$ vektorok kockát feszítenek-e ki! Válaszát indokolja! $[igen]$

22. Döntse el, hogy az $\underline{a}(-8;2;4)$, $\underline{b}(2;-4;8)$ és $\underline{c}(-4;8;-2)$ vektorok kockát feszítenek-e ki! Válaszát indokolja! $[nem]$

23. B Határozza meg az AB szakasz A ponthoz közelebbi harmadolópontját! $A(2;-1;4)$,$B(2;2;10)$ $[(2;0;6)]$

24. B Határozza meg az BC szakasz C ponthoz közelebbi harmadolópontját! $B(7;2;-5)$,$C(-4;3;-2)$ $\left[\left(-\frac{1}{3};\frac{8}{3};-3\right)\right]$

25. B Határozza meg annak a X pontnak a koordinátáit, amely az AB szakaszt $AX : XB = 3 : 2$ arányban osztja! $A(-3;1;-6)$,$B(4;2;6)$ $\left[\left(\frac{6}{5};\frac{8}{5};\frac{6}{5}\right)\right]$

26. B Legyen $\underline{a}(-2;7;-8), \underline{b}(2;-3;5), \underline{c}(-3;5;-4), \underline{d}(1;7;-9)$.

    (a) $\underline{a} \times \underline{d}$ $[(-7;-26;-21)]$

    (b) $(\underline{b} - 3\underline{c}) \times \underline{a}$ $[(25;54;41)]$

    (c) $(2\underline{d} + \underline{a}) \times (\underline{c} - 3\underline{b})$ $[(-35;234;189)]$

    (d) $\underline{abc}$ $[-31]$

    (e) $\underline{bda}$ $[41]$

    (f) $\underline{dcc}$ $[0]$

27. B Igazolja, hogy az $\underline{a}(-1;-4;3), \underline{b}(-2;3;6)$ vektorok paralelogrammát feszítenek ki és számítsa ki a paralelogramma területét! $[T = 34,79]$

28. B Igazolja, hogy az $\underline{c}(-2;6;3), \underline{d}(4;-3;-1)$ vektorok paralelogrammát feszítenek ki és számítsa ki a paralelogramma területét! $[T = 20,8]$

29. B Igazolja, hogy az $A(5;-3;-4), B(5;7;-9), C(3;-7;2)$ pontok háromszöget alkotnak és számítsa ki a háromszög területét! $[T = 22,91]$

30. B Igazolja, hogy az $E(-2;3;3), F(-7;6;-4), G(6;-5;-4)$ pontok háromszöget alkotnak és számítsa ki a háromszög területét! $[T = 60,14]$

31. Vegyük az $A(-3;3;-4), B(-2;3;-4), C(1;-7;8)$ pontokat. Legyen G az AC oldal felezőpontja. Számítsa ki az ABG háromszög területét és kerületét! $[T = 3,91; k = 16,93]$

32. Vegyük az $A(-2;5;1), B(-2;-1;-4), C(1;-4;5)$ pontokat. Legyen X pont az AB szakasz A ponthoz közelebbi harmadolópontja. Számítsa ki az AXC háromszög területét és kerületét! $[T = 12,15; k = 22,39]$

33. Igazolja, hogy az $A(2;-3;4), B(5;3;-4), C(6;-7;2)$ pontok háromszöget alkotnak. Számítsa ki a háromszög területét, a B csúcshoz tartozó magasságot és a C csúcsnál lévő szöget! $[T = 31,26; m_b = 10,42; 62,89°]$

34. Igazolja, hogy az $K(2;-3;-4), L(1;3;-4), M(6;-5;-2)$ pontok háromszöget alkotnak. Számítsa ki a háromszög területét, a K csúcshoz tartozó magasságot és a L csúcsnál lévő szöget! $[T = 12,57; m_k = 2,61; 25,38°]$

35. B Egysíkuak-e az $\underline{a}(-1;3;-2), \underline{b}(3;4;-3), \underline{c}(-2;1;3)$ vektorok? $[nem]$

36. B Egysíkuak-e az $\underline{a}(1;2;-3), \underline{b}(-3;2;4), \underline{c}(-3;10;-1)$ vektorok? $[igen]$

37. B Igazolja, hogy az $\underline{a}(-2;-3;4), \underline{b}(-5;-3;2), \underline{c}(4;-6;-2)$ vektorok paralelepipedont feszítenek ki és számítsa ki a paralelepipedon térfogatát! $[V = 138]$

38. B Igazolja, hogy az $\underline{a}(2;-6;8), \underline{b}(-2;-1;-4), \underline{c}(2;-5;3)$ vektorok paralelepipedont feszítenek ki és számítsa ki a paralelepipedon térfogatát! $[V = 62]$

39. B Vegyük az $A(-3;5;4), B(2;-3;-4), C(1;-7;5), D(6;-4;3)$ pontokat. Igazolja, hogy ezek a pontok tetraédert határoznak meg és számítsa ki a tetraéder térfogatát! $[V = 95,83]$

40. B Vegyük az $A(6;5;4), B(-5;4;3), C(1;4;-2), D(6;-4;2)$ pontokat. Igazolja, hogy ezek a pontok tetraédert határoznak meg és számítsa ki a tetraéder térfogatát! $[V = 89,5]$

41. Vegyük az $A(-3;-4;4), B(5;-6;3), C(1;-7;-2), D(7;8;-1)$ pontokat. Igazolja, hogy ezek a pontok tetraédert határoznak meg, számítsa ki a tetraéder térfogatát és a D csúcshoz tartozó magasság hosszát! $[V = 116,33; m = 14,64]$

42. Egy tetraéder csúcsai $A(-2;6;5), B(3;-3;2), C(3;-6;2), D(-1;2;-3)$. Számítsa ki a tetraéder térfogatát és a D csúcshoz tartozó magasság hosszát! $[V = 18,5; m = 6,35]$

43. Az $ABCD$ tetraéder térfogata 5 egység. Adottak az $A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;1;3)$ csúcsok. Határozza meg a D csúcs koordinátáit, ha tudjuk, hogy az y tengelyen található! $\left[(0;\frac{21}{2};0), (0;-\frac{9}{2};0)\right]$

44. Egy kockát kifeszítő három vektor közül kettő $\underline{a}(6;2;-3), \underline{b}(-3;6;-2)$. Határozza meg a harmadik vektort! $[\underline{c}(2;3;6), -\underline{c}(-2;-3;-6)]$

45. Adott: $A(2;-5;3), B(9;-4;8), C(4;-1;-1)e : x = 1+4t, y = 2-3t, z = 6+t, t \in R$,
$f : \dfrac{3x+6}{9} = \dfrac{-y+2}{2} = z+2.$

(a) B Írja fel az A és B pontok által meghatározott egyenes paraméteres és paraméter nélküli egyenletrendszerét!
$[A$ pontra felírva:$x = 2+7t, y = -5+t, z = 3+5t, t \in R; \frac{x-2}{7} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-3}{5}]$

(b) B Döntse el, hogy az A és B pontok illeszkednek-e az e egyenesre! $[A - nem, B - igen]$

(c) B Írja fel az A pontra illeszkedő f egyenessel párhuzamos egyenes paraméteres és paraméter nélküli egyenletrendszerét!
$\left[x = 2+3t, y = -5-2t, z = 3+t, t \in R; \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-3}{1}\right]$

(d) Írja fel a C pontra illeszkedő e és f egyenesre merőleges egyenes paraméteres egyenletrendszerét!
$[x = 4-t, y = -1-t, z = -1+t, t \in R]$

(e) Írja fel az ABC háromszög síkjára merőlegess B ponton áthaladó egyenes paraméteres egyenletrendszerét! $[x = 9-24t, y = -4+38t, z = 8+26t, t \in R]$

(f) B Írja fel az A pontra illeszkedő e egyenesre merőleges sík egyenletét! $[4x-3y+z-26 = 0]$

(g) B Írja fel az A, B és C pontok által meghatározott sík egyenletét!$[-24x+38y+26z+160 = 0]$

(h) B Határozza meg az e és f egyenesek helyzetét a térben! Ha van metszéspont, adja meg a koordinátáit! [kitérőek]

46. Írja fel az $A(3;-1;2), B(4;1;-7), C(8;-1;5)$ csúcspontú háromszög A csúcsából induló súlyvonalának paraméter nélküli egyenletrendszerét!
$[A$ pontra felírva $: \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-3}]$

47. B Írja fel az $A(4;5;-4)$ pontra illeszkedő x tengellyel párhuzamos egyenes paraméteres egyenletrendszerét!
$[x = 4+t, y = 5, z = -4, t \in R$ (x tengely irányvektora (1;0;0))]

48. B Írja fel az $A(2;5;-4)$ pontra illeszkedő xy síkra merőleges egyenes paraméteres egyenletrendszerét!
$[x = 2, y = 5, z = -4+t, t \in R$ (xy sík egyenlete z=0, normálvektora (0;0;1))]

49. B Írja fel az CD szakasz felezőpontján átmenő z tengellyel párhuzamos egyenes paraméteres egyenletrendszerét, ha $C(2;-8;4), D(-6;-4;2)$!
$[x = -2, y = -6, z = 3+t, t \in R$ (z tengely irányvektora (0;0;1))]

50. Adott: $A(3;-4;-2), B(4;5;-7), C(-2;2;1), e : x = -2+3t, y = 1-2t, z = 2+t, t \in R$,
$S : x-3z = -4y+4$.

(a) Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az origón, párhuzamos az e egyenessel és merőleges az S síkra! $[2x+10y+14z = 0]$

(b) Határozza meg az A pont és az e egyenes síkjának egyenletét! $[13x + 17y - 5z + 19 = 0]$

(c) B Határozza meg az e egyenes és az xz sík metszéspontját!
$[(-0,5; 0; 2,5)$ (xz sík egyenlete: y=0)]

(d) B Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a B pontra és merőleges az e egyenesre! $[3x - 2y + z + 5 = 0]$

(e) B Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az C ponton és párhuzamos az x és y tengellyel! $[z - 1 = 0]$

(f) B Határozza meg annak az egyenesnek a paraméteres egyenletét, amely átmegy a B ponton és merőleges az y és z tengelyekre! $[x = 4 + t, y = 5, z = -7, t \in R]$

(g) B Határozza meg annak a A pontra illeszkedő síknak az egyenletét, amely merőleges az y tengelyre!
$[y + 4 = 0$ (y tengely irányvektora (0;1;0))]

51. Adja meg annak az S síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2; 3; 5)$ ponton és illeszkedik az y tengelyre! [S: -5x+2z=0 (y tengely irányvektora (0;1;0))]

52. B Írja fel az $B(2; -2; 1)$ pontra illeszkedő zy síkra merőleges egyenes paraméteres egyenletrendszerét!
$[x = 2 + t, y = -2, z = 1, t \in R$ (yz sík egyenlete x=0, normálvektora (1;0;0))]

53. Adja meg annak az S síknak az egyenletét, amely átmegy a $C(0; 4; -7)$ ponton és merőleges az $S_1 : 2x - y - z = 1$ és $S_2 : 4x - y + z = 12$ síkokra! $[S : x + 3y - z = 19]$

54. Az ABC háromszög csúcsai $A(4; -1; 6), B(2; -4; 3), C(2; -1; -3)$.

(a) B Határozza meg az ABC háromszög síkjának egyenletét! $[27x - 12y - 6z - 84 = 0]$

(b) B Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a C pontra és merőleges az AB oldalra! $[-2x - 3y - 3z - 8 = 0]$

(c) B Írja fel a A pontra illeszkedő BC oldallal párhuzamos egyenes paraméter nélküli egyenletét!
$\left[\frac{y+1}{3} = \frac{z-6}{-6}, x = 4\right]$

55. Adott: $D(-4; -2; 3), E(2; -5; 1), F(3; 2; -5), m : x = 3 - 2t, y = 4, z = -1 + 3t, t \in R,$
$n : \frac{x+5}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+1}{5}, S_1 : x + 5y = z + 3, S_2 : 4x - 3y + z + 5 = 0.$

(a) B Döntse el, hogy az E pont illeszkedik-e az S_1 síkra! $[nem]$

(b) B Írja fel a E pontra illeszkedő m egyenessel párhuzamos egyenes paraméteres és paraméter nélküli egyenletrendszerét! $\left[x = 2 - 2t, y = -5, z = 1 + 3t, t \in R; \frac{x-2}{-2} = \frac{z-1}{3}, y = -5\right]$

(c) B Írja fel az D pontra illeszkedő S_1 síkkal párhuzamos sík egyenletét! $[x + 5y - z + 17 = 0]$

(d) B Írja fel az F pontra illeszkedő yz síkkal párhuzamos sík egyenletét!
$[x - 3 = 0$,(az yz sík egyenlete: x=0, normálvektora (1;0;0))]

(e) B Írja fel az DEF háromszög síkjának az egyenletét! $[32x + 34y + 45z + 61 = 0]$

(f) Írja fel az F pont és az n egyenes síkjának az egyenletét! $[-x - 26y + 11z + 110 = 0]$

(g) B Határozza meg az n egyenes és az S_1 sík helyzetét a térben! Ha van döféspont, adja meg a koordinátáit! [az egyenes döfi a síkot, döféspont $(-\frac{79}{8}; \frac{3}{4}; -\frac{73}{8})$]

(h) B Határozza meg az m egyenes és az S_2 sík helyzetét a térben! Ha van döféspont, adja meg a koordinátáit! [az egyenes döfi a síkot, döféspont $(\frac{7}{5}; 4; \frac{7}{5})$]

(i) Határozza meg az S_1 és S_2 síkok metszésvonalát!
$[x = -\frac{2}{5} + 2t, y = -5t, z = -\frac{17}{5} - 23t, t \in R$, ahol $(-\frac{2}{5}; 0; -\frac{17}{5})$ a metszésvonal tetszőleges pontja]

56. B Határozza meg az alábbi egyenesek $e : x = 3 + 2t, y = 1 + t, z = 2 - t, t \in R$ és $f : x = -1 + t, y = 2 + 2t, z = 1 - 2t, t \in R$ helyzetét a térben! Ha van metszéspont, adja meg a koordinátáit! [az egyenesek metszik egymást, metszéspont (-3;-2;5)]

57. B Határozza meg az alábbi egyenesek $a : x = 6 + 2t, y = -3 + t, z = 9 + 5t, t \in R$ és $f : \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{2y+8}{4} = \dfrac{-y+3}{-6}$ helyzetét a térben! Ha van metszéspont, adja meg a koordinátáit!
[az egyenesek kitérőek]

58. B Határozza meg az $m : x = 8 + 3t, y = -3 - 2t, z = 10 + 5t, t \in R$ egyenes és az $S : 4x - 3y + z = 5$ sík helyzetét a térben! Ha van döféspont, adja meg a koordinátáit!
[az egyenes döfi a síkot, döféspont (2;1;0)]

59. B Határozza meg az $f : x = -5 + 2t, y = -2 + 2t, z = -3t, t \in R$ egyenes és az xy sík helyzetét a térben! Ha van döféspont, adja meg a koordinátáit!
[az egyenes döfi a síkot, döféspont (-5;-2;0)]

60. B Határozza meg az $n : x = 1-3t, y = 5+t, z = 3+3t, t \in R$ egyenes és $S : 2x-3y+3z = 5$ sík helyzetét a térben! Ha van döféspont, adja meg a koordinátáit!
[az egyenes párhuzamos a síkkal]

61. Határozza meg az $S_1 : x + 3y = -z + 7$ és $S_2 : 2x + y - 3z = 4$ síkok kölcsönös helyzetét! Ha a síkok nem párhuzamosak, határozza meg a két sík metszésvonalát! $[x = 1 - 2t, y = 2 + t, z = -t, t \in R]$

62. Határozza meg az $S_1 : 2x + 3z = y + 6$ és xz síkok kölcsönös helyzetét! Ha a síkok nem párhuzamosak, határozza meg a két sík metszésvonalát! [xz sík egyenlete:$y = 0; t \in R$]

63. B Határozza meg az $A(4; -2, 1)$ pont és az $f : x = 3 - 2t, y = 4 + t, y = 6, t \in R$ egyenes távolságát! $[7,01]$

64. B Milyen messze van a $D(-3; 2, 5)$ pont az $S : 2x - y = -z - 6$ síktól? $[1,22]$

65. Az $ABCD$ csúcspontú tetraéderben határozza meg az AB és CD oldalegyenesek távolságát!
$A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C(1; 2; 0), D(0; 1; 2)$ $[1,79]$

66. B Határozza meg az $e : x = 3 + 2t, y = 1 - 4t, z = 5t, t \in R$ és az $f : \frac{8-2x}{6} = \frac{y+2}{4} = z - 3$ egyenesek hajlásszögét! $[60,20°]$

67. Határozza meg mekkora szöget zár be az $ABCD$ tetraéderben az AD oldal egyenese az ABC oldallap síkjával! $A(2; -2; 2), B(5; -2; -1), C(5; 2; -1), D(5; -2; 2)$ $[45°]$

68. B Határozza meg az $S_1 : x - 7y = 2$ és $S_2 : -3y = -4x + 5z + 6$ síkok hajlásszögét! $[60°]$

69. Határozza meg az $ABCD$ paralelegramma az AB oldalához tartozó magasságát!
$A(1; 3; 7), B(3; 6; 1), C(4; -2; -9), D(2; -5; -3)$ $[11,64]$

70. Adott: $A(4; -2; 1), B(1; -2; 1), e : x = 3 - 2t, y = 4 + t, z = 4 - t, t \in R$,
$f : \frac{x-4}{-2} = \frac{2-2y}{-2} = \frac{-1+z}{-1}$, $S_1 : x + 3z = y - 5$, $S_2 : -2x + 2y = 6z + 18$.

(a) B Határozza meg az A és B pontok távolságát! $[3]$

(b) B Határozza meg az A pont és az e egyenes távolságát! $[6,46]$

(c) B Határozza meg a B pont és az f egyenes távolságát! $[4,06]$

(d) B Határozza meg az e pont és f egyenesek távolságát! $[4,28]$

(e) B Határozza meg a B pont távolságát az S_1 síktól! $[3,32]$

(f) B Határozza meg az A pont távolságát az S_2 síktól! $[5,43]$

(g) B Határozza meg az S_1 és S_2 síkok kölcsönös helyzetét! Ha a síkok párhuzamosak, határozza meg a távolságát! $[1,21]$

71. B Határozza meg az $S_1 : x + 3z = y - 5$ sík és az $m : x = -1 + t, y = 2 - 2t, z = -t, t \in R$ egyenes távolságát! $[0,6]$

72. Határozza meg az $a : x = 1+t, y = -t, z = 2, t \in R$ és $b : x = 4-2u, y = 1+u, z = 3-u, u \in R$ egyenesek távolságát! $\left[\sqrt{3}\right]$

73. Határozza meg az $e : x = 2 + t, y = 5 - t, z = 2 + 3t, t \in R$ és $f : x = 7 - 2u, y = 2 + u$, $z = 1 + 2u, u \in R$ egyenesek távolságát! [az egyenesek metszik egymást]

74. B Határozza meg az $e : x = 4, y = 4t - 1, z = 3 + 2t, t \in R$ és az y tengely hajlásszögét! $[26,56°]$

75. Határozza meg a paralelogramma átlóinak hajlásszögét!
$A(2; 3; -1), B(5; 4; 3), C(2; -1; 6), D(-1; -3; 2)$ $[73,69°]$

76. B Határozza meg az $S : z = 5x + 4y$ és az xz sík hajlásszögét! $[51,88°]$

77. B Határozza meg az $S : x + y + z = 1$ sík és az $p : x = -y = \frac{z}{2}$ egyenes hajlásszögét! $[28,12°]$

78. Az $ABCD$ tetraéderben határozza meg az ABC és a BCD oldallapok által bezárt szöget!
$A(4; 7; 6), B(0; 1; -2), C(-1; 5; 3), D(4; -5; 2)$ $[58,52°]$

79. Adott az $ABCD$ tetraéder:$A(4;6;2), B(0;-1;-2), C(-1;6;3), D(5;-4;3)$.

(a) Írja fel az B pontra illeszkedő ACD síkkal párhuzamos sík egyenletét! $[5x+3y+25z+50=0]$

(b) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos a CD egyenessel és áthalad az AB oldal felezőpontján! $[x=2+6t, y=2,5-10t, z=0, t \in R]$

(c) Határozza meg az BC és AD oldalegyenesek távolságát! $[4,91]$

(d) Határozza meg a C pont távolságát az ABD síktól! $[4,24]$

(e) Határozza meg AC oldal egyenese az ABD oldallap síkjának hajlásszögét! $[56,32°]$

(f) Határozza meg az ACD és a BCD oldallapok által bezárt szöget! $[74,37°]$

MÁTRIXOK

1. Legyen $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & -8 & 7 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & -4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ -2 & 12 & -9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

   (a) B $3B - 2C^T$ $\left[\begin{pmatrix} 2 & -17 \\ 29 & -36 \\ -9 & 36 \end{pmatrix}\right]$

   (b) B $4A - 6B$ [nem lehet]

   (c) B AB $\left[\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -55 & 88 \\ 33 & -51 \end{pmatrix}\right]$

   (d) B BC $\left[\begin{pmatrix} 34 & -112 & 75 \\ 33 & -83 & 51 \\ -17 & 79 & -57 \end{pmatrix}\right]$

   (e) B A^2 $\left[\begin{pmatrix} 13 & 15 & -9 \\ 17 & 101 & -88 \\ -11 & -61 & 53 \end{pmatrix}\right]$

   (f) B AC [nem lehet]

   (g) B $D^2 - D$ $\left[\begin{pmatrix} 26 & -24 \\ -30 & 32 \end{pmatrix}\right]$

   (h) B $2B^T - 3C$ $\left[\begin{pmatrix} -7 & 31 & -11 \\ -8 & -44 & 39 \end{pmatrix}\right]$

   (i) B $(D + D^T)^2$ $\left[\begin{pmatrix} 97 & -90 \\ -90 & 117 \end{pmatrix}\right]$

   (i) B $det(D)$ $[-14]$

   (j) B $det(A)$ $[-12]$

2. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$,
   $E = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

   (a) B CD $\left[\begin{pmatrix} -8 & 32 & -12 \\ 10 & -40 & 15 \\ -14 & 56 & -21 \end{pmatrix}\right]$

   (b) B DC $\left[\begin{pmatrix} -69 \end{pmatrix}\right]$

(c) $(2A-3B^T)^T$ $\left[\begin{pmatrix} -11 & 8 & -3 \\ -11 & 8 & 10 \\ -22 & -13 & 15 \end{pmatrix}\right]$

(d) B A^TC $\left[\begin{pmatrix} 39 \\ 23 \\ 23 \end{pmatrix}\right]$

(e) B $(A+B)D$ [nem lehet]

(f) B $(2A-B)D^T$ $\left[\begin{pmatrix} -39 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}\right]$

(g) B E^2-4F^T $\left[\begin{pmatrix} 32 & -20 \\ -6 & -24 \end{pmatrix}\right]$

(h) B $(E^T-F)^2$ $\left[\begin{pmatrix} 87 & -10 \\ -15 & 22 \end{pmatrix}\right]$

(i) B^2D^T+C $\left[\begin{pmatrix} -36 \\ 176 \\ -292 \end{pmatrix}\right]$

(j) B $det(E^T+2F)$ $[-42]$

(k) $det(2E-F^2)$ $[439]$

(l) $det(A^T+2B)$ $[-5715]$

3. B Legyen $G=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$. Határozza meg azt az X mátrixot, amelyre $2G+X=5H$! $\left[\begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 35 & -18 \\ 39 & 1 \end{pmatrix}\right]$

4. B Legyen $M=\begin{pmatrix} -4 & 14 & -8 \\ 11 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix} -9 & 33 & 7 \\ 24 & -1 & -6 \end{pmatrix}$. Határozza meg azt az X mátrixot, amelyre $3N+X=-2M$! $\left[\begin{pmatrix} 35 & -127 & -5 \\ -94 & 7 & 8 \end{pmatrix}\right]$

5. B Oldja meg a $\begin{vmatrix} x & 2 \\ -3 & x \end{vmatrix}=10$ egyenletet! $[-2;2]$

6. B Oldja meg a $\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{vmatrix}=3x-2$ egyenletet! $[-4;1]$

7. B Hogy kell megválasztani az x számot, hogy a $\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ -2 & 4 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ determináns értéke 0 legyen?
$\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$

8. B Hogy kell megválasztani az x számot, hogy a $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 3 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix}$ determináns értéke 0 legyen? $[2; 6]$

9. B Oldja meg a $\begin{vmatrix} x & 3 & x \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2x$ egyenletet! $[6]$

10. B Oldja meg a $\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ -2 & 4 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3x$ egyenletet! $[-1; 3]$

11. Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsát!

 (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 & 7 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ [655]

 (b) $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ [748]

12. B Bizonyítsa be, hogy a $c_1(1; -2)$ és $c_2(4; 3)$ vektorok lineárisan függetlenek!
[csak az $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ triviális megoldás létezik, tehát lineárisan függetlenek]

13. B Vizsgálja meg, hogy az $x^2 + 3x^3 - 1; 2x^2 + 6; x$ függvények lineárisan függetlenek-e?
[csak az $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ triviális megoldás létezik, tehát lineárisan függetlenek]

14. B Döntse el, hogy a $v_1(1; 2; -3), v_2(-2; 2; 5)$ és $v_3(8; -2; -21)$ vektorok lineárisan függetlenek-e!
[$\alpha_1 = -2t, \alpha_2 = 3t, \alpha_3 = t$, tehát a vektorok lineárisan összefüggőek]

15. B Döntse el, hogy a $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ és $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek-e!
[csak az $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ triviális megoldás létezik, tehát lineárisan függetlenek]

16. B Előállítható-e a c vektor az x, y vektorok lineáris kombinációjaként?
$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -9 \\ 23 \end{pmatrix}$ $[-2x + 3y = c]$

17. B Előállítható-e az $x(-7;5)$ vektor az $c(3;-2), d(6;-4)$ vektorok lineáris kombinációjaként? $[nem]$

18. Előállítható-e a d vektor az a, b, c vektorok lineáris kombinációjaként?
$a = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ $[2a - b - 5c = d]$

19. Előállítható-e a d vektor az a, b, c vektorok lineáris kombinációjaként?
$a = (1;2;-3), b = (-4;2;5), c = (1;-1;7), d = (-7;15;-23).$ $[4a + 2b - 3c = d]$

20. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x - y + z &= 2 \\ -x - y + z &= 1 \end{aligned}$$
$[x = 1, y = 1, z = 1]$

21. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} x - y - z &= -1 \\ 3x + y - z &= 3 \\ x + 3y + z &= 5 \end{aligned}$$
$\left[x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t, z = t, t \in R\right]$

22. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 7 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$
$[x = 2, y = 1, z = 0]$

23. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} 7x - 2y + 3z &= 8 \\ x - y + z &= 1 \\ 4x + 6y - 4z &= 3 \end{aligned}$$
[az egyenletrendszernek nincs megoldása]

24. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 4 \\ -3x + 2y - z &= 6 \\ -6x + 5y + 5z &= 36 \end{aligned}$$
$[x = 14 - 5t, y = 24 - 7t, z = t, t \in R]$

25. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 2x + y &= 3 \\ -x + y + 2z &= 4 \end{aligned}$$
$\left[x = \frac{7}{9}, y = \frac{13}{9}, z = \frac{5}{3}\right]$

26. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} x + y - 2z + 4v &= 4 \\ -x - 4y + z + 2v &= -2 \\ 2x - 3y + z - v &= -1 \\ 4x - y + z + v &= 5 \end{aligned}$$
$[x = 1, y = 1, z = 1, v = 1]$

27. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x - y - 3z + 4v &= 2 \\ 2x + y + z - 5v &= -7 \\ x + y + z + 2v &= 6 \\ 3x - 4y - 2z + v &= 7 \end{aligned}$$

$[x = 1, y = -2, z = 3, v = 2]$

28. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 - 11x_4 &= 1 \end{aligned}$$

[az egyenletrendszernek nincs megoldása]

29. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -20 \\ 2x_1 - 2x_3 + 3x_4 &= -2 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= -11 \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= 13 \end{aligned}$$

$[x_1 = 0,5; x_2 = 3; x_3 = -2,5; x_4 = -2]$

30. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 4 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 &= -2 \end{aligned}$$

$[x_1 = -3 + 15t,5; x_2 = -7t; x_3 = -5 + 13t; x_4 = t; t \in R]$

31. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 19 \\ -2x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 &= 9,5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 21 \\ 2x_1 - 4x_3 + 3x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$[x_1 = 0,5; x_2 = 3; x_3 = -2,5; x_4 = -2]$

32. Döntse el, hogy létezik-e inverze az alábbi mátrixoknak!

(a) B $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ [$det(A) = -2 \neq 0$, létezik a mátrix inverze]

(b) B $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 8 & 0 & 5 \\ 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ [$det(B) = 0$, nem létezik a mátrix inverze]

33. B Miyen x értékek esetén nincs inverze az $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixnak? $\left[x = \frac{7}{8}\right]$

34. B Miyen x értékek esetén van inverze az $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & x \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 20 \end{pmatrix}$ mátrixnak? $[x \neq 5]$

35. Igazolja, hogy a mátrixnak létezik inverze és határozza meg az inverz mátrixot!

(a) B $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ [$det(A) = 1 \neq 0$, létezik a mátrix inverze; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$]

(b) B $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ [$det(A) = 3 \neq 0$, létezik a mátrix inverze; $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$]

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ [$det(C) = 1 \neq 0$, létezik a mátrix inverze; $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$]

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ [$det(D) = -6 \neq 0$,létezik a mátrix inverze; $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$]

(e) $E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 6 & -8 & 15 \\ 10 & -15 & 34 \end{pmatrix}$ [$det(E) = 2 \neq 0$,létezik az inverz; $E^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{47}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ -27 & 1 & -6 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$]

(f) $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ [$det(F) = 2 \neq 0$, létezik a mátrix inverze; $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$]

(g) $G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

[$det(G) = -36 \neq 0$, létezik a mátrix inverze; $G^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$]

36. Határozza meg a mátrix sajátértékeit!

(a) B $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ [$\lambda_1 = 3; \lambda_2 = 11$]

(b) B $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ [$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$]

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ [$\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -1$]

37. Határozza meg a mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\left[\lambda_1 = -1, s = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0; \lambda_2 = 4, s = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0\right]$

(b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$\left[\lambda_1 = 2, s = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0; \lambda_2 = -1, s = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0\right]$

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\left[\lambda_1 = 4, s = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0; \lambda_2 = -1, s = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0\right]$

(d) $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$\left[\lambda_1 = 2, s = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0; \lambda_2 = -1, s = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0\right]$

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\left[\lambda_1 = \lambda_2 = 0, s = \begin{pmatrix} -2t+3u \\ u \\ t \end{pmatrix}, t, u \in R, t, u \neq 0; \lambda_3 = 8, s = \begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0\right]$

38. Határozza meg az $B^2 - 3B^T$ mátrix sajátértékeit és determinánsát!

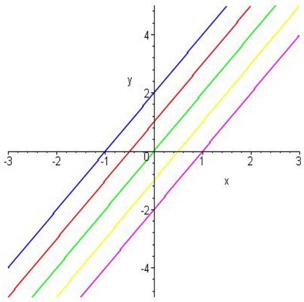
$B = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 92; det(B^2 - 3B^T) = 184\right]$

39. Határozza meg az $(A^T - 2B)^2$ mátrix sajátértékeit és determinánsát!

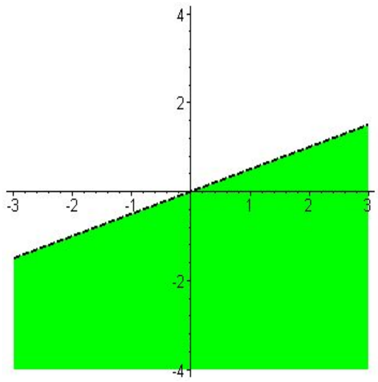
$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\lambda_1 = 62,77; \lambda_2 = 24,23; det((A^T - 2B)^2) = 1521\right]$

Többváltozós függvények

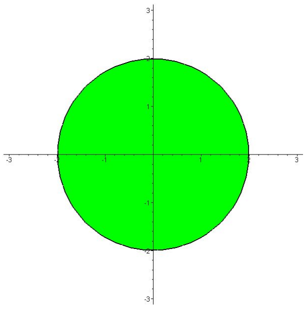
1. Ábrázolja az $f(x,y) = 2x - y, D(f) = R^2$ függvény $c = -2; -1; 0; 1; 2$ magasságokhoz tartozó szintvonalait!
   c=-2, c=-1,c=0,c=1,c=2



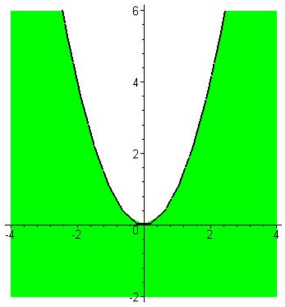
2. Határozza meg az $f(x,y) = \ln(x - 2y)$ függvény értelmezési tartományát!
   $[y < \frac{1}{2}x]$



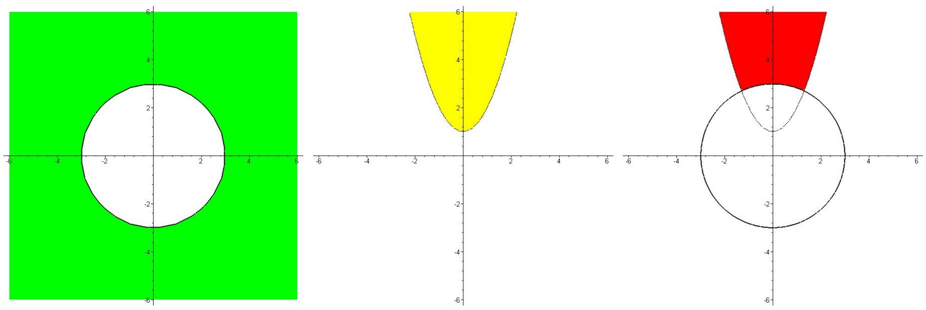
3. Határozza meg az $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \mathrm{e}^{x-y}$ függvény értelmezési tartományát!
   $[x^2 + y^2 \leq 4]$



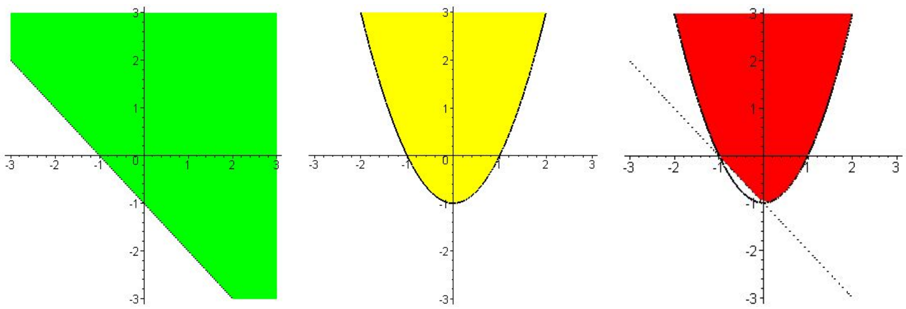
4. Határozza meg az $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt[5]{x - y^3}$ függvény értelmezési tartományát!
   $[y \geq x^2]$



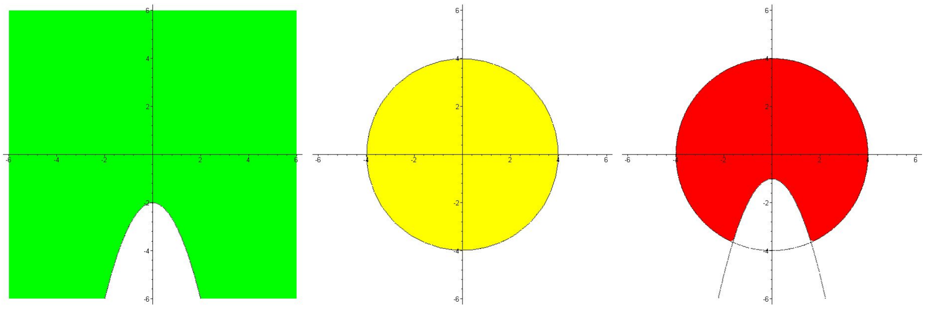
5. Határozza meg az $f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2 - 9} - \ln(y - x^2 - 1)$ függvény értelmezési tartományát!
   $[x^2 + y^2 \geq 9; y > x^2 + 1;$ értelmezési tartomány$]$



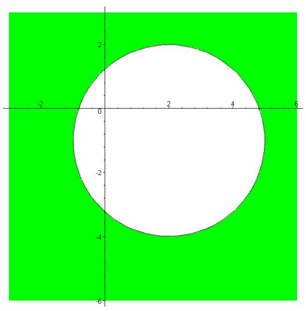
6. Határozza meg az $f(x, y) = \ln(x + y + 1) + \sqrt{y - x^2 + 1}$ függvény értelmezési tartományát!
   $[y > -x - 1; y \geq x^2 - 1;$ értelmezési tartomány$]$



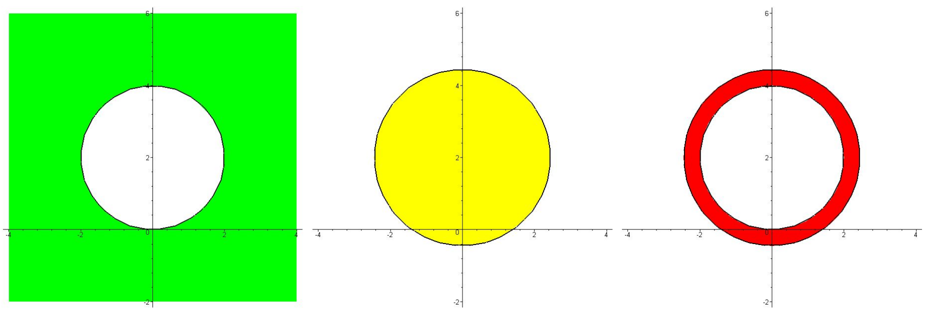
7. Határozza meg az $f(x,y) = \frac{\ln(y+x^2+2)}{\sqrt{-x^2-y^2+16}}$ függvény értelmezési tartományát!
[$y > -x^2 - 2; x^2 + y^2 < 16$; értelmezési tartomány]



8. Határozza meg az $f(x,y) = \ln(x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4)$ függvény értelmezési tartományát!
[$(x-2)^2 + (y+1)^2 > 9$;kör:középpont$(2;-1)$, sugár $r = 3$]



9. Határozza meg az $f(x,y) = \arccos(x^2 + y^2 - 4y - 1)$ függvény értelmezési tartományát!
[$x^2 + (y-2)^2 \geq 4; x^2 + (y-2)^2 \leq 6$; értelmezési tartomány]



10. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 \sin(y)$ függvény parciális derivált függvényeit!
$\left[f_x(x,y) = sin(y) \cdot 2x; f_y(x,y) = x^2 \cdot cos(y)\right]$

11. Határozza meg az $f(x,y) = x^2y - xy^3$ függvény parciális derivált függvényeit!
$\left[f_x(x,y) = y \cdot 2x - y^3 \cdot 1 = 2xy - y^3; f_y(x,y) = x^2 \cdot 1 - x \cdot y^3 = x^2 - 3xy^2\right]$

12. Határozza meg az $f(x,y)=x^2\mathrm{e}^{2y}$ függvény parciális derivált függvényeit!
$\left[f_x(x,y)=\mathrm{e}^{2y}\cdot 2x=2x\mathrm{e}^{2y}; f_y(x,y)=x^2\cdot\mathrm{e}^{2y}\cdot 2=2x^2\mathrm{e}^{2y}\right]$

13. Határozza meg az $f(x,y)=(2xy-y^4)^3$ függvény parciális derivált függvényeit!
$[f_x(x,y)=3(2xy-y^4)^2\cdot(2y\cdot 1-0)=6y(2xy-y^4)^2;$
$f_y(x,y)=3(2xy-y^4)^2\cdot(2x\cdot 1-4y^3)=3(2xy-y^4)^2(2x-4y^3)]$

14. Határozza meg az $f(x,y)=\sqrt{x^2y^2+x^7}$ függvény parciális derivált függvényeit!
$[f_x(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2y^2+x^7}}\cdot(y^2\cdot 2x+7x^6)=\dfrac{2xy^2+7x^6}{2\sqrt{x^2y^2+x^7}};$
$f_y(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2y^2+x^7}}\cdot(x^2\cdot 2y+0)=\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2y^2+x^7}}]$

15. Határozza meg az $f(x,y,z)=xy^2z+3x^5-2y+6z$ függvény parciális derivált függvényeit!
$[f_x(x,y,z)=y^2z\cdot 1+3\cdot 5x^4-0+0=y^2z+15x^4; f_y(x,y,z)=xz\cdot 2y+0-2\cdot 1+0=2xyz-2; f_z(x,y,z)=xy^2\cdot 1+0-0+6\cdot 1=xy^2+6]$

16. Határozza meg az $f(x,y)=x^y$ függvény parciális derivált függvényeit!
$[f_x(x,y)=yx^{y-1},(\text{"}x^3\text{"}); f_y(x,y)=x^y ln(y),(\text{"}3^y\text{"})]$

17. Határozza meg az $f(x,y)=\ln(2x^2+xy^5)$ függvény parciális derivált függvényeit!
$[f_x(x,y)=\dfrac{1}{2x^2+xy^5}\cdot(2\cdot 2x+y^5\cdot 1)=\dfrac{4x+y^5}{2x^2+xy^5};$
$f_y(x,y)=\dfrac{1}{2x^2+xy^5}\cdot(0+x\cdot 5y^4)=\dfrac{5xy^4}{2x^2+xy^5}]$

18. Határozza meg az $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{2x-3y^2}}{x^2y^4+2}$ függvény parciális derivált függvényeit!
$[f_x(x,y)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{2x-3y^2}}\cdot(2\cdot 1-0)\cdot(x^2y^4+2)-\sqrt{2x-3y^2}\cdot(y^4\cdot 2x+0)}{(x^2y^4+2)^2}=$
$\dfrac{\frac{x^2y^4+2}{\sqrt{2x-3y^2}}-2xy^4\sqrt{2x-3y^2}}{(x^2y^4+2)^2};$
$f_y(x,y)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{2x-3y^2}}\cdot(0-3\cdot 2y)\cdot(x^2y^4+2)-\sqrt{2x-3y^2}\cdot(x^2\cdot 4y^3+0)}{(x^2y^4+2)^2}=$
$\dfrac{\frac{-3y(x^2y^4+2)}{\sqrt{2x-3y^2}}-4x^2y^3\sqrt{2x-3y^2}}{(x^2y^4+2)^2}]$

19. Írja fel az $f:R^2\to R: f(x,y)=x^2-xy+2y^2$ függvény érintőjének egyenletét az $(1;-1)$ pontban!
$[f_x(x,y)=2x-y; f_y(x,y)=-x+4y;$érintősík egyenlete:$3x-5y-z-4=0]$

20. Írja fel az $f:R^2\to R: f(x,y)=\sqrt{36-x^2-y^2}$ függvény érintőjének egyenletét az $(2;4)$ pontban!

$[f_x(x,y) = -\dfrac{x}{\sqrt{36-x^2-y^2}}; f_y(x,y) = -\dfrac{y}{\sqrt{36-x^2-y^2}}$;érintősík egyenlete: $-\frac{1}{2}x - y - z + 9 = 0]$

21. Írja fel az $f : R^2 \to R : f(x,y) = 2\ln(\dfrac{y}{x} + x^2)$ függvény érintőjének egyenletét az $(1;1)$ pontban! $[x + y - z + 2\ln(2) - 2 = 0; x + y - z + 2\ln(\frac{2}{\mathrm{e}}) = 0]$

22. Írja fel az $f : R^2 \to R : f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ függvény érintőjének egyenletét az $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$ pontban! $[f_x(x,y) = -2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}; f_x(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}) = -2\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}}; f_y(x,y) = -2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2};$ $f_y(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}) = -2\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}}$;érintősík egyenlete:$-\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}}x - \frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}}y - z + \frac{3}{\mathrm{e}} = 0; -\mathrm{e}-$vel szorozva: $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \mathrm{e}z - 3 = 0]$

23. Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = 2xy^2 - y$ függvény $\underline{u}(1;2)$ irányú iránymenti deriváltját a $(1;-1)$ pontban! $[f_{\underline{u}}(1;-1) = -\frac{8}{\sqrt{5}}]$

24. Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = x\mathrm{e}^y - y\mathrm{e}^x$ függvény $\underline{u}(-5;2)$ irányú iránymenti deriváltját a $(0;0)$ pontban! $[f_x(x,y) = \mathrm{e}^y - y\mathrm{e}^x; f_y(x,y) = x\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x; f_{\underline{u}}(-5;2) = -\frac{7}{\sqrt{29}}]$

25. Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = (x+2y)^3$ függvény $\underline{u}(2;1)$ irányú iránymenti deriváltját a $P(1;1)$ pontban! $[f_{\underline{u}}(1;1) = \frac{108}{\sqrt{5}}]$

26. Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = x\ln(x+y)$ függvény gradiensét a $(3;-2)$ pontban! $[grad_f(3;-2) = \bigtriangledown f(3;-2) = (3,3)]$

27. Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ függvény gradiensét a $(3;4)$ pontban! $[f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2); f_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}; f_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}; grad_f(3;4) = \bigtriangledown f(3;4) = (\frac{3}{25}, \frac{4}{25})]$

28. Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = \sqrt{\mathrm{e}^{3x}} \cdot \sin(3y)$ függvény másodrendű parciális deriváltjait! $[f_x(x,y) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} \cdot \sin(3y); f_y(x,y) = 3\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} \cdot \cos(3y); f_{x,x}(x,y) = \frac{9}{4}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} \cdot \sin(3y); f_{x,y}(x,y) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} \cdot \cos(3y); f_{y,x}(x,y) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} \cdot \cos(3y); f_{y,y}(x,y) = -9\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} \cdot \sin(3y)]$

29. Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = x^2\mathrm{e}^{xy^2}$ függvény másodrendű parciális deriváltjait! $[f_x(x,y) = 2x\mathrm{e}^{xy^2} + x^2y^2\mathrm{e}^{xy^2} = (2x + x^2y^2) \cdot \mathrm{e}^{xy^2}; f_y(x,y) = 2x^3y \cdot \mathrm{e}^{xy^2}; f_{xx}(x,y) = (2 + 2xy^2)\mathrm{e}^{xy^2} + (2x + x^2y^2)\mathrm{e}^{xy^2}y^2; f_{xy}(x,y) = (2x^2y)\mathrm{e}^{xy^2} + (2x + x^2y^2)\mathrm{e}^{xy^2}2xy; f_{yx}(x,y) = 6x^2y\mathrm{e}^{xy^2} + 2x^3y^3\mathrm{e}^{xy^2}; f_{yy}(x,y) = 2x^3\mathrm{e}^{xy^2} + 4x^4y^2\mathrm{e}^{xy^2}]$

30. Legyen $f : R^2 \to R : f(x,y) = x^3y^2 + xy^3 - 8x + y^2$. Számítsa ki $f_{xxy}(x,y)$ parciális deriváltat! $[f_x(x,y) = 3x^2y^2 + y^3 - 8; f_{xx}(x,y) = 6xy^2; f_{xxy}(x,y) = 12xy]$

31. Legyen $f : R^3 \to R : f(x,y,z) = x\mathrm{e}^y + yz^3 + xyz$. Számítsa ki $f_{zxy}(x,y,z)$ parciális deriváltat! $[f_z(x,y,z) = 3yz^2 + xy; f_{zx}(x,y,z) = y; f_{zxy}(x,y,z) = 1]$

32. Legyen $f : R^3 \to R : f(x,y,z) = \sin(x^2+y^2-z^2)$. Számítsa ki $f_{xxz}(x,y,z)$ parciális deriváltat!
$[f_x(x,y,z) = 2x \cdot \cos(x^2+y^2-z^2); f_{xx}(x,y,z) = 2\cos(x^2+y^2-z^2) - 4x^2 \cdot \sin(x^2+y^2-z^2); f_{xxz}(x,y,z) = 4z\sin(x^2+y^2-z^2) + 8x^2 z\cos(x^2+y^2-z^2)]$

33. Legyen $f : R^3 \to R : f(x,y,z) = \operatorname{arctg}(3x^6 - y^2) + x^3\sin(z^2) - x^4y^2z^5 + \cos^8(z)$. Számítsa ki $f_{zyx}(x,y,z)$ parciális deriváltat!
$[f_z(x,y,z) = 2x^3 z\cos(z^2) - 5x^4y^2z^4 - 8(cos(z))^7 sin(z); f_{zy}(x,y,z) = -10x^4yz^4; f_{zyx}(x,y,z) = -40x^3yz^4]$

34. Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = 2x^2+4y^2+2xy+6$ kétváltozós függvénynek!
$[D(f) = R^2$
$f_x(x,y) = 4x+2y; f_y(x,y) = 2x+8y$
stacionárius pontok:$(0;0)$
$f_{xx}(x,y) = 4; f_{xy}(x,y) = 2; f_{yx}(x,y) = 2; f_{yy}(x,y) = 8$
$(0;0)$-lokális minimumhely; $f(0;0) = 6]$

35. Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = xy - x^3 - y^2$ kétváltozós függvénynek!
$[D(f) = R^2$
$f_x(x,y) = y - 3x^2; f_y(x,y) = x - 2y$
stacionárius pontok:$(0;0), \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right)$
$f_{xx}(x,y) = -6x; f_{xy}(x,y) = 1; f_{yx}(x,y) = 1; f_{yy}(x,y) = -2$
$(0;0)$- nem szélsőérték hely
$\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right)$-lokális maximumhely;$f\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{432}]$

36. Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = x^3 - 3xy - y^3$ kétváltozós függvénynek!
$[D(f) = R^2$
$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y; f_y(x,y) = -3x - 3y^2$
stacionárius pontok:$(0;0), (-1;1)$
$f_{xx}(x,y) = 6x; f_{xy}(x,y) = -3; f_{yx}(x,y) = -3; f_{yy}(x,y) = -6y$
$(0;0)$- nem szélsőérték hely
$(-1;1)$-lokális maximumhely;$f(-1;1) = 1]$

37. Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = x^2+y^2+\dfrac{2}{xy}$ kétváltozós függvénynek!
[A függvény értelmezési tartománya az egész sík, kivéve a koordinátatengelyek pontjait, hiszen a nevező miatt sem x, sem y nem lehet nulla.
$f(x,y) = x^2+y^2+\dfrac{2}{xy} = x^2+y^2+2x^{-1}y^{-1}$
$f_x(x,y) = 2x - \frac{2}{x^2y}; f_y(x,y) = 2y - \frac{2}{xy^2}$
stacionárius pontok:$(-1;-1), (1;1)$
$f_{xx}(x,y) = 2 + \frac{4}{x^3y}; f_{xy}(x,y) = \frac{2}{x^2y^2}; f_{yx}(x,y) = \frac{2}{x^2y^2}; f_{yy}(x,y) = 2 + \frac{4}{xy^3}$
$(-1;-1)$-lokális minimumhely;$f(-1;-1) = 4$
$(1;1)$-lokális minimumhely;$f(1;1) = 4]$

38. Határozza meg az $f(x,y) = xy(x^2y^2-1)$ függvény kétszeres integrálját a $\{(x,y) \in R^2 : 1 \le x \le 3; 0 \le y \le 2\}$ tartományon!
Megoldás:
$$\int_0^2 \left(\int_1^3 (x^3y^3 - xy)\,dx \right) dy = \int_1^3 \left(\int_0^2 (x^3y^3 - xy)\,dy \right) dx$$
$$\int_0^2 (x^3y^3 - xy)\,dy = \left[x^3 \cdot \frac{y^4}{4} - x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \left[\frac{1}{4}x^3y^4 - \frac{1}{2}xy^2 \right]_0^2 = 4x^3 - 2x$$
$$\int_1^3 \left(\int_0^2 (x^3y^3 - xy)\,dy \right) dx = \int_1^3 (4x^3 - 2x)\,dx = \left[x^4 - x^2 \right]_1^3 = 72$$

39. Határozza meg az $f(x,y) = 2xy$ függvény kettősintegrálját a $\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1; x \le y \le \sqrt{x}\}$ tartományon!
Megoldás:
$$\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} (2xy)\,dy \right) dx$$
$$\int_x^{\sqrt{x}} (2xy)\,dy = \left[2x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_x^{\sqrt{x}} = \left[xy^2 \right]_x^{\sqrt{x}} = x^2 - x^3$$
$$\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} (2xy)\,dy \right) dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

40. Határozza meg az $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^4}$ függvény kettősintegrálját a $\{(x,y) \in R^2 : 3 \le x \le 7; -2 \le y \le -1\}$ tartományon!
Megoldás:
$$\int_3^7 \left(\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+y)^4}\,dy \right) dx = \int_{-2}^{-1} \left(\int_3^7 \frac{1}{(x+y)^4}\,dx \right) dy$$
$$\int_3^7 \frac{1}{(x+y)^4}\,dx = \int_3^7 (x+y)^{-4}\,dx = \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+y)^3} \right]_3^7 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(7+y)^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3+y)^3}$$
$$\int_{-2}^{-1} \left(\int_3^7 \frac{1}{(x+y)^4}\,dx \right) dy = \int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(7+y)^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3+y)^3} \right) dy =$$
$$\int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{3} \cdot (7+y)^{-3} + \frac{1}{3} \cdot (3+y)^{-3} \right) dy = \left[\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(7+y)^2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(3+y)^2} \right]_{-2}^{-1} = \frac{83}{675}$$

41. Határozza meg az $f(x,y) = 10x^2 + 8xy$ függvény kettősintegrálját a $\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1; -x \le y \le \sqrt{x}\}$ tartományon!
Megoldás:
$$\int_0^1 \left(\int_{-x}^{\sqrt{x}} (10x^2 + 8xy)\,dy \right) dx$$
$$\int_{-x}^{\sqrt{x}} (10x^2 + 8xy)\,dy = \left[10x^2 \cdot y + 8x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{-x}^{\sqrt{x}} = \left[10x^2y + 4xy^2 \right]_{-x}^{\sqrt{x}} = 10x^{\frac{5}{2}} + 4x^2 + 6x^3$$
$$\int_0^1 \left(\int_{-x}^{\sqrt{x}} (10x^2 + 8xy)\,dy \right) dx = \int_0^1 (10x^{\frac{5}{2}} + 4x^2 + 6x^3)\,dx = \left[\frac{20}{7} \cdot x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{3} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^4 \right]_0^1 =$$

$\frac{239}{42}$

42. Határozza meg az $f(x,y) = yx^2+4$ függvény kettősintegrálját a $\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1; x \le y \le x^2+2\}$ tartományon!
Megoldás:
$\int_0^1 \left(\int_x^{x^2+2} (yx^2+4)\, dy \right) dx$
$\int_x^{x^2+2} (yx^2+4)\, dy = \left[x^2 \cdot \frac{y^2}{2} + 4 \cdot y \right]_x^{x^2+2} = \left[\frac{1}{2}x^2y^2 + 4y \right]_x^{x^2+2} = \frac{1}{2}x^6 + \frac{3}{2}x^4 + 6x^2 - 4x + 8$
$\int_0^1 \left(\int_x^{x^2+2} (yx^2+4)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^6 + \frac{3}{2}x^4 + 6x^2 - 4x + 8 \right) dx =$
$\left[\frac{1}{14}x^7 + \frac{3}{10}x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 8x \right]_0^1 = \frac{293}{35}$

43. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 - y$ függvény kétszeres integrálját az $y = 3x - x^2$ és $y = x$ függvények által közrezárt tartományon!
Megoldás:
Tartomány=$\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 2; x \le y \le 3x - x^2\}$
$\int_0^2 \left(\int_x^{3x-x^2} (x^2 - y)\, dy \right) dx$
$\int_x^{3x-x^2} (2xy)\, dy = \left[x^2 \cdot y - \frac{y^2}{2} \right]_x^{3x-x^2} = \left[x^2y - \frac{1}{2}y^2 \right]_x^{3x-x^2} = -\frac{3}{2}x^4 + 5x^3 - 4x^2$
$\int_0^2 \left(\int_x^{3x-x^2} (x^2 - y)\, dy \right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x^4 + 5x^3 - 4x^2 \right) dx = \left[-\frac{3}{10}x^5 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2 =$
$-\frac{4}{15}$

44. Határozza meg az $f(x,y) = 3xy + 4x^2$ függvény kétszeres integrálját az $y = x^2 - 5$ és $y = 4$ függvények által közrezárt tartományon!
Megoldás:
Tartomány=$\{(x,y) \in R^2 : -3 \le x \le 3; x^2 - 5 \le y \le 4\}$
$\int_{-3}^3 \left(\int_{x^2-5}^4 (3xy + 4x^2)\, dy \right) dx$
$\int_{x^2-5}^4 (3xy+4x^2)\, dy = \left[3x \cdot \frac{y^2}{2} + 4x^2 \cdot y \right]_{x^2-5}^4 = \left[\frac{3}{2}xy^2 + 4x^2y \right]_{x^2-5}^4 = -\frac{3}{2}x^5 - 4x^4 + 15x^3 +$
$36x^2 - \frac{27}{2}x$
$\int_{-3}^3 \left(\int_{x^2-5}^4 (3xy + 4x^2)\, dy \right) dx = \int_{-3}^3 \left(-\frac{3}{2}x^5 - 4x^4 + 15x^3 + 36x^2 - \frac{27}{2}x \right) dx =$
$\left[-\frac{1}{4}x^6 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{15}{4}x^4 + 12x^3 - \frac{27}{4}x^2 \right]_{-3}^3 = \frac{1296}{5}$

45. Határozza meg az $f(x,y)=1+\frac{1}{2}x-y$ függvény kétszeres integrálját az $y=x^2-4$ és $y=0$ függvények által közrezárt tartományon!
Megoldás:
Tartomány=$\{(x,y)\in R^2 : -2\le x\le 2; x^2-4\le y\le 0\}$
$\int_{-2}^{2}\left(\int_{x^2-4}^{0}(1+\frac{1}{2}x-y)\,dy\right)\,dx$
$\int_{x^2-4}^{0}(1+\frac{1}{2}x-y)\,dy=\left[y+\frac{1}{2}xy-\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2-4}^{0}=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^3-5x^2+2x+12$
$\int_{-2}^{2}\left(\int_{x^2-4}^{0}(1+\frac{1}{2}x-y)\,dy\right)\,dx=\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^3-5x^2+2x+12\right)\,dx=$
$\left[\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{8}x^4-\frac{5}{3}x^3+x^2+12x\right]_{-2}^{2}=27,733$

46. Határozza meg az $f(x,y)=4-y^2$ függvény kétszeres integrálját az $y=2-x^2$ és $y=x^2-2$ függvények által közrezárt tartományon!
Megoldás:
Tartomány=$\left\{(x,y)\in R^2 : -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}; x^2-2\le y\le 2-x^2\right\}$
$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\int_{x^2-2}^{2-x^2}(4-y^2)\,dy\right)\,dx$
$\int_{x^2-2}^{2-x^2}(4-y^2)\,dy=\left[4y-\frac{1}{3}y^3\right]_{x^2-2}^{2-x^2}=\frac{2}{3}x^6-4x^4+\frac{32}{3}$
$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\int_{x^2-2}^{2-x^2}(4-y^2)\,dy\right)\,dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}x^6-4x^4+\frac{32}{3}\right)\,dx=$
$\left[\frac{2}{21}x^7-\frac{4}{5}x^5+\frac{32}{3}x\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=23,2739$