I. feladatsor

(1) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{9x^2+1}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{16x^2+25}$ (d) $f(x) = \dfrac{2}{5x^2+3}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+5}$ (f) $f(x) = \dfrac{3}{x^2-6x+13}$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ (h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6x-9x^2}}$

(i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-4x^2-12x-8}}$ (j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{12x-9x^2-3}}$

(2) Milyen típusú racionális törtek összegére bontaná az alábbbi törteket:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+4)}$ (b) $f(x) = \dfrac{x+1}{9x^2+x}$

(c) $f(x) = \dfrac{5x+2}{x^2(x-1)}$ (d) $f(x) = \dfrac{2x^2-7x}{x(5x^2+3)^2}$

(e) $f(x) = \dfrac{3x^3-7x+2}{x(x-1)^2(x^2+1)}$ (f) $f(x) = \dfrac{3x^4-x-1}{(x-1)^3(2x^2+7)^3(x+2)}$

(3) Bontsa fel az alábbi racionális törteket elemi törtek összegére:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x}$ (b) $f(x) = \dfrac{6}{x(x+3)}$

(c) $f(x) = \dfrac{50}{x(x^2-25)}$ (d) $f(x) = \dfrac{8x+4}{x^3+2x^2}$

(e) $f(x) = \dfrac{6x+9}{x^3+6x^2+9x}$ (f) $f(x) = \dfrac{6x^3+9x^2+72x+85}{(x^2+25)(x^2+2x-15)}$

(g) $f(x) = \dfrac{3x^4+6x^2+x^3+8x+1}{x^5+2x^3+x}$ (h) $f(x) = \dfrac{3+7x^2+x+29x^3+16x^4-4x^6+30x^5+8x^7}{(2x^2+1)^3(x^2+4x+4)}$

(4) Határozza meg az alábbi integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+2x-3}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{3x^3-3x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x^2+11x+16}{x^3+4x^2+8x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+6x+2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{6+2x^2-3x}{(x^2+2)(x+3)}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{12x^2+50x+49}{9x^3+42x^2+49x}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3+2x^2+1}{x^5+x^3}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{2x^3+x^2+18x-9}{x^4-81}\,dx$

(5) Határozza meg az alábbi integrálokat!

(a) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int x\sin(\sqrt{x})\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx$

(g) $\displaystyle\int e^x\sin(e^x)\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\cos(\sqrt[3]{x})\,dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx$ (j) $\displaystyle\int \frac{5}{e^{2x}+1}\,dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$ (l) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+x\sqrt[3]{x}}\,dx$ (n) $\displaystyle\int \sin(\sqrt{x-3})\,dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{2e^{2x}+3e^{x}}{e^{2x}+1}\,dx$ (p) $\displaystyle\int \frac{5e^{2x}-8e^{x}}{2e^{2x}+9e^{x}-5}\,dx$

(q) $\displaystyle\int \frac{3x-4}{\sqrt{4x+2}}\,dx$ (r) $\displaystyle\int \frac{5x+1}{\sqrt{2-3x}}\,dx$

(s) $\displaystyle\int (2x-3)\sqrt{5x+2}\,dx$ (t) $\displaystyle\int (2-5x)\sqrt{2+3x}\,dx$

(u) $\displaystyle\int \sin(\sqrt{2x+5})\,dx$ (v) $\displaystyle\int e^{\sqrt{4-2x}}\,dx$

(6) Határozza meg az alábbi improprius integrálokat!

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} e^{-2x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-2x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-10} x^2e^{4x+3}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{4x^2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_5^{\infty} \frac{3}{7x^3}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$ (i) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx$ (k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{2x}\,dx$

(7) Határozza meg az alábbi improprius integrálokat!

(a) $\displaystyle\int_0^{1} \ln x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-3}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-3}^{0} \frac{1}{(x+3)^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{1}{\sqrt[5]{(5-x)^3}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{4/3}^{5} \frac{1}{\sqrt{3x-4}}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_{-5}^{5} \frac{1}{\sqrt[5]{(x+2)^3}}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_{0}^{5} \frac{1}{\sqrt[5]{(x-4)^4}}\,dx$

II. feladatsor

(1) Legyen $\mathbf{a}(-3;2;5)$, $\mathbf{b}(1;4;0)$, $\mathbf{c}(2;-2;7)$ és $\mathbf{d}(11;6;-3)$. Határozd meg az alábbiakat:

(a) $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}-\mathbf{c}$	(b) $\mathbf{a}-\mathbf{b}+2\mathbf{d}$	(c) $2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+4\mathbf{c}-\mathbf{d}$
(d) $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$	(e) $\langle\mathbf{d},\mathbf{c}\rangle$	(f) $\langle\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c},2\mathbf{c}-\mathbf{d}\rangle$
(g) $\langle\mathbf{b}-2\mathbf{d},\mathbf{a}+3\mathbf{b}\rangle$	(h) $\langle\mathbf{b}-2\mathbf{a},-4\mathbf{d}\rangle$	(i) $\langle\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle$
(j) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	(k) $\mathbf{c}\times\mathbf{d}$	(l) $(\mathbf{a}+2\mathbf{b})\times\mathbf{d}$
(m) $(\mathbf{b}-2\mathbf{a})\times\mathbf{c}$	(n) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})$	(o) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathbf{c}$
(p) $\mathbf{abc}$	(q) $\mathbf{cba}$	(r) $\mathbf{bca}$
(s) $\mathbf{abd}$	(t) $\mathbf{cbd}$	(u) $\mathbf{dbb}$

(2) A fenti vektorokat használva válaszold meg az alábbiakat! Legyen továbbá $\mathbf{e}(1;-2;x)$!
- (a) Mekkora szöget zár be **a** és **b**?
- (b) Mekkora szöget zár be **a** és **d**?
- (c) Mekkora az **a** és **d** vektorok által közrezárt szög koszinusza?
- (d) Bontsd fel a **d** vektort **a**-val párhuzamos és merőleges összetevőkre!
- (e) Bontsd fel a **d** vektort **b**-vel párhuzamos és merőleges összetevőkre!
- (f) Bontsd fel a **d** vektort **c**-vel párhuzamos és merőleges összetevőkre!
- (g) Milyen x érték esetén lesz **e** merőleges **a**, **b**, **c** és **d** vektorokra? (külön-külön!)
- (h) Milyen x értékek esetén fog **e** és **a** tompaszöget bezárni?
- (i) Milyen x értékek esetén fog **e** és **b** tompaszöget bezárni?
- (j) Milyen x értékek esetén fog **e** és **c** hegyesszöget bezárni?
- (k) Milyen x értékek esetén fog **e** és **d** hegyesszöget bezárni?
- (l) Határozd meg az **a**, **b**, **c** és **d** vektorok irányába mutató egységvektorokat!

(3) Van-e olyan vektor, mely az x, y, z koordinátatengelyek pozitív irányával rendre 45°, 60°, 120° szöget zár be?

(4) Egy szabályos hatszög középpontja $K(4;1;4)$, két szomszédos csúcsa $A(3;1;5)$ és $B(3;2;4)$. Adjuk meg a többi négy csúcs koordinátáját! Igazoljuk, hogy a hatszög szabályos!

(5) Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{a}(-2;3;6)$, $\mathbf{b}(6;-2;3)$ és $\mathbf{c}(3;6;-2)$ vektorok kockát feszítenek ki!

(6) Az ABC háromszög csúcsai $A(2;3;1)$, $B(-2;1;2)$ és $C(-1;0;3)$. Mekkora a háromszög kerülete, területe és az C csúcshoz tartozó magassága?

(7) Az ABCD tetraéder térfogata 5 egység. Mik a D csúcs koordinátái, ha a D csúcs az y tengelyen van, és a többi csúcs koordinátái: $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;1;3)$?

(8) Mekkorák az $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$ csúcsú háromszög magasságvonalainak háromszögbe eső részeinek hossza?

(9) Egy tetraéder csúcsai: $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Mekkora a D-hez tartozó magasság?

(10) Paralelepipedon egy csúcsából kiinduló élvektorok: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Fejezzük ki ezek segítségével a lapátlóvektorokat és a testátlóvektorokat!

(11) Legyen $ABCD$ egy paralelogramma, O egy tetszőleges pont. Bizonyítsd be, hogy ekkor: $OA + OC = OB + OD$.

(12) Legyen az ABC szabályos háromszög oldala 2 egység hosszú. Mennyi $\langle AB, AC\rangle$?

(13) Egy kockát kifeszítő 3 vektor közül kettő $\mathbf{a}(6;2;-3)$ és $\mathbf{b}(-3;6;-2)$. Határozzuk meg a harmadik vektort!

(14) Mekkor az $\mathbf{a}(-9;0;9)$ és $\mathbf{b}(7;2;-5)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe?

III. feladatsor

(1) Legyen $A(1,2,-1)$, $B(2,4,5)$, továbbá legyen $e: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3}$, $z=-1$ egyenes, és

$$f: \begin{cases} x = 6+t \\ y = 7+t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg az A-n és B átmenő egyenes mindkét(!) egyenletét!
(b) Határozzuk meg az A-n átmenő $v(1,0,1)$ irányvektorú egyenest!
(c) Rajta van-e A vagy B e-n vagy f-en?
(d) Határozzuk meg e paraméteres és f paraméter nélküli egyenletét, egy-egy pontját, és irányvektorá!
(e) Határozzuk meg az A-n átmenő e-re és f-re merőleg egyenset!
(f) Határozzuk meg a B-n átmenő e-vel párhuzamos egyenset!
(g) Van-e közös pontja e-nek és f-nek?

(2) Legyen továbbá $C(-1,2,0)$, $S_1: 2x+y-4z=1$.
(a) Határozzuk meg az A-n atmenő $n(-2,1,0)$ normálvektorú sík egyenletét!
(b) Határozzuk meg az A, B, C pontokat tartalmazó síkot! Legyen ez S_2!
(c) Határozzuk meg az A-t, B-t és e-t tartalmó síkot!
(d) Határozzuk meg az A-n átmenő e-vel és f-el párhuzamos síkot!
(e) Hol döfi e az S_1 síkot?

(3) Mi S_1 és $S_2: x+z=1$ metszésvonala?
(4) Mi S_2 és az YZ sík metszésvonala?
(5) Milyen messze van A e-től?
(6) Milyen messze van B e-től?
(7) Milyen messze van C f-től?
(8) Milyen messze van A S_1-től?
(9) Milyen messze van B S_1-től?
(10) Milyen messze van e S_1-től?
(11) Milyen messze van e f-től?
(12) Milyen messze van az XY síktól az f?
(13) Milyen messze van $6x+3y-12z=9$ S_1-től?
(14) Milyen messze van az XY sík és $z=4$-től?
(15) Milyen messze van az XY síktól és $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 5+6t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4 \end{cases}$ egyenes?
(16) Milyen messze van S_1-től $\begin{cases} x = 5+2t \\ y = 9 \qquad\quad t \in \mathbb{R}? \\ z = 6+t \end{cases}$
(17) Milyen messze van f-től $\begin{cases} x = 4-2t \\ y = 7-2t \quad t \in \mathbb{R}? \\ z = 3-2t \end{cases}$
(18) Mekkora szöget zár be f és $\begin{cases} x = 6+2t \\ y = 7+3t \quad t \in \mathbb{R}? \\ z = 5t \end{cases}$
(19) Mekkora szöget zár be e és $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \qquad t \in \mathbb{R}? \\ z = -1+3t \end{cases}$
(20) Mekkora szöget zár be e és S_1?
(21) Mekkora szöget zár be az XY sík és S_1?
(22) Mekkora szöget zár be $x+y-z=3$ és YZ?

IV. feladatsor

(1) Tekintsük at alábbi mátrixokat!

$$A=\begin{bmatrix}-1&2&3\\0&11&1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2&3&-1\\-2&4&0\\2&-3&1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&7\\0&2\\-2&1\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}2&3\\4&-2\end{bmatrix}$$

Végezze el a lehetséges műveleteket:

$$A+B, 2A, A^T, 2A+3C^T, 4D-2D^T, AB, BA, CC^T, D^3, BC, DC, BD$$

(2) Számoljuk ki az alábbi determinánsokat:

$$\det(A), \det(BB^T), \det(C), \det(CC^T), \det(CD)$$

(3) Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait:

$$A, AA^T, D, D^2, AC, CA, B, B^2$$

(4) Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét:

$$A, AA^T, D, D^2, B$$

(5) Adja meg az alábbi mátrix inverzét!

$$A=\begin{bmatrix}-1&3&2\\0&1&1\\2&-4&-1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&0&2\\-1&2&-8\end{bmatrix}$$

(6) Legyen $v_1=(1,2,4)$, $v_2=(4,2,1)$, $v_3=(-2,2,7)$. Lineárisan függetlenek-e?

(7) Legyen $v_1=(1,-2,1)$, $v_2=(3,1,1)$, $v_3=(-2,2,7)$. Lineárisan függetlenek-e?

(8) Számold ki a sajátértékeket és a sajátvektorokat!

$$A=\begin{bmatrix}7&-3\\9&-5\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&4&-2\\0&1&7\end{bmatrix}$$

(9) Számold ki a sajátértékeket és a sajátvektorokat és az inverzet!

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\5&-2\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}-1&3\\2&-2\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}-5&6&-2\\-5&5&-1\\-3&0&2\end{bmatrix}$$

(10) Oldd meg Gauss eliminációval:

(a)

$$\begin{aligned}x+y+2z&=4\\3x-4y+5z&=17\\y-3z&=-7\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x+2y+3z&=1\\4x+5y+6z&=2\\6x+9y+12z&=4\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}x+y+z&=4\\2x+4y+8z&=-4\\2x-4z&=-6\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} x+y+z+w&=2\\ x+3y+z+4w&=10\\ -x+y+2z+w&=1\\ y+w&=3 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} x+y-z&=3\\ 3x+y+z&=3\\ 4x-y&=3 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} x-7y+5z&=2\\ -7y+6z&=4\\ -9y+8z&=6 \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} x-7y+5z&=2\\ 2x-7y+6z&=4\\ 3x-14y+11z&=6 \end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned} x-7y+5z&=2\\ 2x-7y+6z&=4\\ x+z&=6 \end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=4\\ x-2y+3z&=8\\ 2x+3z&=6 \end{aligned}$$

(j)

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=5\\ -x+4y+5z&=1\\ 3y+4z&=3 \end{aligned}$$

(k)

$$\begin{aligned} x+4y-2z&=4\\ x+3y+5z&=-4\\ 4x+13y+13z&=-6 \end{aligned}$$

(11) Számold ki a determinánst és az inverz mátrixot! Ellenőrizz!

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

V. feladatsor

(1) Határozzuk meg, és ábrázoljuk az alábbi függvények értelmezési tartományát!

$f(x,y)=\sqrt{3x+5y-2}$ $\quad$ $f(x,y)=\ln(x+y-2)$

$f(x,y)=\sqrt{(3x+y+2)y}$ $\quad$ $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-10)$

$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{100-x^2-y^2}}$ $\quad$ $f(x,y)=\dfrac{1}{\ln(x^2+(y-3)^2-121)}$

$f(x,y)=\sqrt{x+2+y}+\dfrac{1}{\ln 3x+y-1}$ $\quad$ $f(x,y)=\dfrac{\ln(x^2+y^2-5)}{\sqrt{3x+2y+1}}$

(2) Határozzuk meg az alábbi függvények szintvonalait!

$f(x,y)=x^2+y$ $\quad$ $f(x,y)=xy+y$

$f(x,y)=3x+y-3$ $\quad$ $f(x,y)=(x-2)^2+(y-4)^2$

(3) Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények összes lehetséges elsőrendű és másodrendű parciális deriváltfüggvényét!

$$\text{(a)}\quad f(x,y)=x^2 \qquad \text{(b)}\quad f(x,y)=y^3 \qquad \text{(c)}\quad f(x,y)=x^2+y^3$$

$$\text{(d)}\quad f(x,y)=x^2y^4 \qquad \text{(e)}\quad f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)} \qquad \text{(f)}\quad f(x,y)=\frac{x^2y^2}{e^y}$$

(4) Mutassuk meg, hogy ha $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, illetve $u(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, akkor

$$\Delta u := \partial_1^2 u(x,y)+\partial_2^2 u(x,y)=0.$$

(5) Írjuk fel az $f(x,y)=x+x^2y+y$ függvény $(-1,1)$-beli érintősíkjának egyenletét!

(6) Alkalmas linearizáltat használva számoljuk ki közelítően $\ln(1.01)+\sqrt[3]{8.01}$ értékét!

(7) Határozzuk meg $\partial f(x,y)$-t, ha:
 (a) $f(x,y)=x^3+\ln(y^3)\sqrt{xy}$
 (b) $f(x,y)=\operatorname{tg}x^3+y^2+y^4x$

(8) Határozzuk meg $\partial_v f(x,y)$-t, ha:
 (a) $f(x,y)=x^3\ln(y)+\sqrt{xy}$, $v=(12,5)$
 (b) $f(x,y)=x^5\sin(x)y+y^4x$, $v=(2,3)$

(9) Határozzuk meg $\partial_\alpha f(x,y)$-t, ha:
 (a) $f(x,y)=x^3\ln(y)+\sqrt{xy}$, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$
 (b) $f(x,y)=x^5\sin(x)y+y^4x$, $\alpha=\frac{\pi}{6}$

(10) Határozzuk meg $\partial f(2,3)$-et, ha $f(x,y)=\sqrt{x^2y+xy^2}$.

(11) Határozzuk meg $\partial_v f(1,-1)$-et, ha $f(x,y)=x^6+xy^2+y^2$, $v=(-2,-3)$.

(12) Határozzuk meg $\partial_\alpha f(1,-1)$-et, ha $f(x,y)=xy+x^2e^y$, $\alpha=\frac{4\pi}{3}$.

(13) Keressük meg az alábbi $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvények lokális szélsőértékeit!
 (a) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$;
 (b) $f(x,y)=(x^2+1)(y+\frac{1}{y})$;
 (c) $f(x,y)=x^4-4xy+y^4$;
 (d) $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2y^2$;
 (e) $f(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$;
 (f) $f(x,y)=x^2-2xy+y^2$.

(14) Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat!

(a) $\displaystyle\int_D \frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol $D = [1,2]\times[0,1]$;

(b) $\displaystyle\int_D \sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol $D = [0,1]\times[-1,1]$;

(c) $\displaystyle\int_D (\sqrt{x}+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol $D = [0,1]\times[0,1]$;

(d) $\displaystyle\int_D \cos x\cos y\cos z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, ahol $D = [0,\pi/2]\times[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$;

(e) $\displaystyle\int_D \cos(x+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, ahol $D = [0,\pi/2]\times[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$.

(15) Számítsuk ki $\int_{N_x} f$ értékét, ha

(a) $f(x,y)=1$, $N_x := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[0,1],\ 0\le y\le 1-x^2\}$;

(b) $f(x,y)=xy^2$, $N_x := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\}$;

(c) $f(x,y)=\sqrt{y}$, $N_x := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[-1,1],\ 0\le y\le (1-x)^2\}$.

(16) Számítsuk ki az $f(x,y)=xy$ függvény integrálját az $y=x^2-1$ és az $y=x+1$ görbék grafikonjai által határolt tartományon.