I. feladatsor

(1) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

(a) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$ (b) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{3}\text{arctg}(3x) + C$

(c) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{20}\text{arctg}\left(\frac{4}{5}x\right) + C$ (d) $\int f(x)\,dx = \frac{2}{3}\frac{\text{arctg}\left(\sqrt{5/3}x\right)}{\sqrt{5/3}} + C$

(e) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$ (f) $\int f(x)\,dx = \frac{3}{2}\text{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right) + C$

(g) $\int f(x)\,dx = \arcsin(x-1) + C$ (h) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{3}\arcsin(3x-1) + C$

(i) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\arcsin(2x+3) + C$ (j) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{3}\arcsin(3x-2) + C$

(2) Milyen típusú racionális törtek összegére bontaná az alábbbi törteket:

(a) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+4}$ (b) $\frac{A}{x} + \frac{B}{9x+1}$

(c) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$ (d) $\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{5x^2+3} + \frac{Dx+E}{(5x^2+3)^2}$

(e) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$

(f) $\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{Dx+E}{2x^2+7} + \frac{Fx+G}{(2x^2+7)^2} + \frac{Hx+I}{(2x^2+7)^3} + \frac{J}{x+2}$

(3) Bontsa fel az alábbi racionális törteket elemi törtek összegére:

(a) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ (b) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+3}$

(c) $f(x) = \frac{1}{x-5} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x+5}$ (d) $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x+2}$

(e) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} + \frac{3}{(x+3)^2}$ (f) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+25} + \frac{2}{x+5} + \frac{2}{x-3}$

(g) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{2x+7}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x}$

(h) $f(x) = \frac{1}{2x^2+1} + \frac{x}{(2x^2+1)^2} - \frac{2x}{(2x^2+1)^3} + \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}$

(4) Határozza meg az alábbi integrálokat!

(a) $\frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+3) + C$ (b) $\frac{1}{3}(-\ln x + \ln(x-1) + \ln(x+1)) + C$

(c) $2\ln x + \frac{3}{2}\text{arctg}\left(\frac{x}{2}+1\right) + C$ (d) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x+1}{2x+2}\right| + C$

(e) $3\ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + C$ (f) $\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|3x+7| - \frac{1}{3(3x+7)} + C$

(g) $3\text{arctg}x + \ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C$ (h) $\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + \frac{1}{3}\text{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

(5) Határozza meg az alábbi integrálokat!

(a) $2(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}) + C \quad (t = \sqrt{x})$

(b) $2(\sqrt{x} - \ln|\sqrt{x}+1|) + C \quad (t = \sqrt{x})$

(c) $-2\sqrt{x^3}\cos(\sqrt{x}) + 6x\sin(\sqrt{x}) - 12\sin(\sqrt{x}) + 12\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + C \quad (t = \sqrt{x})$

(d) $-\frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{96(x-1)^{96}} + C \quad (t = x-1)$

(e) $e^x - \ln|e^x+1| + C \quad (t = e^x)$

(f) $\frac{1}{2}x(sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C \quad (t = \ln x)$

(g) $-\cos(e^x) + C \quad (t = e^x)$

(h) $3\sin(\sqrt[3]{x}) + C \quad (t = \sqrt[3]{x})$

(i) $\frac{e^{2x}}{2} - 2(e^x - 2\ln|e^x+2|) + C \quad (t = e^x)$
(j) $5x - \frac{5}{2}\ln|e^{2x}+1| + C \quad (t = e^x)$
(k) $x + 1 + 4\sqrt{x+1} + 4\ln(\sqrt{x+1}-1) + C \quad (t = \sqrt{x+1})$
(l) $-x - 4\sqrt{x} - 8\ln(\sqrt{x}-2) + C \quad (t = \sqrt{x})$
(m) $3\mathrm{arctg}(\sqrt[3]{x}) + C \quad (t = \sqrt[3]{x})$
(n) $2(-\sqrt{x-3}\cos(\sqrt{x-3}) + \sin(\sqrt{x-3})) + C \quad (t = \sqrt{x-3})$
(o) $\ln|e^{2x}+1| + 3\mathrm{arctg}(e^x) + C \quad (t = e^x)$
(p) $-\frac{1}{2}\ln|2e^x - 1| + 3\ln|e^x+5| + C \quad (t = e^x)$
(q) $\frac{1}{2}\left(\frac{(\sqrt{4x+2})^3}{4} - \frac{11}{2}\sqrt{4x+2}\right) + C \quad (t = \sqrt{4x+2})$
(r) $-\frac{2}{3}\left(\frac{13}{3}\sqrt{2-3x} - \frac{5}{9}(\sqrt{2-3x})^3\right) + C \quad (t = \sqrt{2-3x})$
(s) $\frac{2}{5}\left(\frac{2}{25}(\sqrt{5x+2})^5 - \frac{19}{15}(\sqrt{5x+2})^3\right) + C \quad (t = \sqrt{5x+2})$
(t) $\frac{2}{3}\left(\frac{16}{9}(\sqrt{2+3x})^3 - \frac{1}{3}(\sqrt{2+3x})^5\right) + C \quad (t = \sqrt{2+3x})$
(u) $-\sqrt{2x+5}\cos(\sqrt{2x+5}) + \sin(\sqrt{2x+5}) + C \quad (t = \sqrt{2x+5})$
(v) $-\sqrt{4-2x}e^{\sqrt{4-2x}} + e^{\sqrt{4-2x}} + C \quad (t = \sqrt{4-2x})$

(6) Határozza meg az alábbi impropríus integrálokat!

(a) $\frac{1}{2}$ (b) ∞ (c) $\frac{1}{4}$

(d) $\frac{841}{32}e^{-37}$ (e) ∞ (f) $\frac{1}{12}$

(g) $\frac{3}{350}$ (h) $-\infty$ (i) ∞

(j) $\frac{\pi}{2}$ (k) ∞

(7) Határozza meg az alábbi impropríus integrálokat!

(a) -1 (b) $3\sqrt[3]{3}$
(c) ∞ (d) $\frac{5}{2}4^{2/5}$
(e) $\frac{2\sqrt{11}}{3}$ (f) $\frac{\pi}{2}$
(g) ∞ (h) $\frac{5}{2}(-3^{2/5} + 7^{2/5})$
(i) $5 \cdot 4^{1/5} + 5$

V. feladatsor

(1) Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények összes lehetséges elsőrendű parciális deriváltfüggvényét!

$$\text{(a)}\quad f(x,y)=x^2 \qquad \text{(b)}\quad f(x,y)=y^3 \qquad \text{(c)}\quad f(x,y)=x^2+y^3$$

$$\text{(d)}\quad f(x,y)=x^2y^4 \qquad \text{(e)}\quad f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)} \qquad \text{(f)}\quad f(x,y)=\frac{x^2y^2}{e^y}$$

Megoldás. (a) $\partial_1 f(x,y)=2x$, $\partial_2 f(x,y)=0$.
(b) $\partial_1 f(x,y)=0$, $\partial_2 f(x,y)=3y^2$.
(c) $\partial_1 f(x,y)=2x$, $\partial_2 f(x,y)=3y^2$.
(d) $\partial_1 f(x,y)=2xy^4$, $\partial_1 f(x,y)=4x^2y^3$.
(e) $f(x,y)=e^{-x^2}e^{-y^2}$, így $\partial_1 f(x,y)=e^{-y^2}e^{-x^2}(-2x)$, $\partial_2 f(x,y)=e^{-x^2}e^{-y^2}(-2y)$.
(f) $\partial_1 f(x,y)=2\dfrac{xy^2}{e^y}$, $\partial_2 f(x,y)=x^2\left(\dfrac{2ye^y-e^yy^2}{(e^y)^2}\right)=x^2\left(\dfrac{2y-y^2}{e^y}\right)$.

(2) Határozzuk meg a $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_3 f$, $\partial_1^2 f$, $\partial_2^2 f$, $\partial_1\partial_3 f$, $\partial_1\partial_2\partial_3 f$, $\partial_3\partial_2\partial_1 f$ függvényeket az alábbi függvények esetén:
(a) $f(x,y,z)=5z$,
(b) $f(x,y,z)=x+y+z$,
(c) $f(x,y,z)=ze^{x-y}$.

Megoldás. (a) $\partial_1 f(x,y)=0$, $\partial_2 f(x,y)=0$, $\partial_3 f(x,y)=5$. Ebből adódik, hogy minden magasabb rendű parciális deriváltfüggvény 0.

(b) $\partial_1 f(x,y)=1$, $\partial_2 f(x,y)=1$, $\partial_3 f(x,y)=1$. Ebből adódik, hogy minden magasabb rendű parciális deriváltfüggvény 0.

(c) $\partial_1 f(x,y)=ze^{x-y}$, $\partial_2 f(x,y)=-ze^{x-y}$, $\partial_3 f(x,y)=e^{x-y}$. A másodrendű deriváltak: $\partial_1^2 f(x,y)=\partial_1\partial_1 f(x,y)=ze^{x-y}$, $\partial_2^2 f(x,y)=\partial_2\partial_2 f(x,y)=ze^{x-y}$, $\partial_1\partial_3 f(x,y)=e^{x-y}$. A harmadrendű deriváltak: $\partial_1\partial_2\partial_3 f(x,y)=-e^{x-y}$, $\partial_3\partial_2\partial_1 f(x,y)=-e^{x-y}$.

(3) Mutassuk meg, hogy ha $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, illetve $u(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, akkor

$$\Delta u := \partial_1^2 u(x,y)+\partial_2^2 u(x,y)=0.$$

Megoldás. (a)

$$\partial_1^2(\ln(x^2+y^2))=2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \partial_2^2(\ln(x^2+y^2))=2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

az összegük valóban nulla.

(b)

$$\partial_1^2\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \partial_2^2\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

az összeg itt is nulla.

(4) Keressük meg az alábbi $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvények lokális szélsőértékeit!
(a) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$;
(b) $f(x,y)=(x^2+1)(y+\frac{1}{y})$;
(c) $f(x,y)=x^4-4xy+y^4$;
(d) $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2y^2$;
(e) $f(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$;
(f) $f(x,y)=x^2-2xy+y^2$.

Megoldás. (a) A parciális deriváltak: $\partial_1 f(x,y)=3x^2-3y=0$, $\partial_2 f(x,y)=3y^2-3x=0$. Az első egyenletből $y=x^2$, ezt a második egyenletbe helyettesítve

$$0=x^4-x=x(x^3-1)\iff x=0 \text{ vagy } x=1.$$

Vagyis az $f'(x,y)=0$ egyenletet kielégítő pontok: $(x,y)=(0,0)$, illetve $(1,1)$.

$$f''(x,y)=\begin{pmatrix}6x & -3\\ -3 & 6y\end{pmatrix}\Rightarrow f''(0,0)=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -3 & 0\end{pmatrix},\quad f''(1,1)=\begin{pmatrix}6 & -3\\ -3 & 6\end{pmatrix}.$$

Itt $\det f''(0,0)=-9<0$, azaz $f''(0,0)$ indefinit, vagyis $(0,0)$ nem szélsőértékhely; a $\det f''(1,1)=27>0$ és $6>0$, azaz $f''(1,1)$ pozitív definit, vagyis $(1,1)$ szigorú lokális minimum.

(b) A parciális deriváltak: $\partial_1 f(x,y) = 2x(y+\frac{1}{y}) = 0$, $\partial_2 f(x,y) = (x^2+1)(1-\frac{1}{y^2}) = 0$. A fenti egyenletrendszer megoldásai: $x=0, y=\pm 1$, azaz az $f'(x,y)=0$ egyenletet kielégítő pontok: $(x,y) = (0,1)$ illetve $(0,-1)$.

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2\Big(y+\dfrac{1}{y}\Big) & 2x\Big(1-\dfrac{1}{y^2}\Big) \\ 2x\Big(1-\dfrac{1}{y^2}\Big) & 2(x^2+1)\dfrac{1}{y^3} \end{pmatrix} \Rightarrow f''(0,1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f''(0,-1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Itt $\det f''(0,1) = 8 > 0$ és $4 > 0$, azaz $f''(0,1)$ pozitív definit, vagyis $(0,1)$ szigorú lokális minimum; $\det f''(0,-1) = 8 > 0$ és $-4 < 0$, azaz $f''(0,-1)$ negatív definit, vagyis $(1,1)$ szigorú lokális maximum.

(c) A parciális deriváltak: $\partial_1 f(x,y) = 4x^3 - 4y = 0$, $\partial_2 f(x,y) = 4y^3 - 4x = 0$. Az első egyenletből $y = x^3$, ezt a második egyenletbe helyettesítve

$$0 = 4x^9 - 4x = 4x(x^8-1) \iff x=0,\ x=1 \text{ vagy } x=-1.$$

Tehát az $f'(x,y)=0$ egyenlet megoldásai: $(x,y) = (0,0),\ (1,1)$ illetve $(-1,-1)$. Mivel

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix},$$

ezért

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}, \quad f''(-1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Itt $\det f''(0,0) = -16 < 0$, azaz $f''(0,0)$ indefinit, vagyis $(0,0)$ nem szélsőértékhely; $\det f''(1,1) = 128 > 0$ és $12 > 0$, azaz $f''(1,1)$ pozitív definit, vagyis $(1,1)$ szigorú lokális minimum; $f''(1,1) = f''(-1,-1)$, így a $(-1,-1)$ pontban is szigorú lokális minimum van.

(d) A parciális deriváltak: $\partial_1 f(x,y) = 4x^3 - 2x = 0$ $\partial_2 f(x,y) = 4y^3 - 4y = 0$. A fenti egyenleteket átalakítva

$$2x(2x^2-1) = 0 \Longrightarrow x=0,\ x=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ vagy } x=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$4y(y^2-1) = 0 \Longrightarrow y=0,\ y=1 \text{ vagy } y=-1.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldásai:

$$(x,y) = (0,0),\ (0,1),\ (0,-1),\ \Big(\frac{1}{\sqrt{2}},0\Big),\ \Big(\frac{1}{\sqrt{2}},1\Big),\ \Big(\frac{1}{\sqrt{2}},-1\Big),\ \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\Big),\ \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}},1\Big),\ \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}},-1\Big).$$

A második derivált

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-2 & 0 \\ 0 & 12y^2-4 \end{pmatrix},$$

amiből következik, hogy

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{negatív definit},$$

$$f''(0,1) = f''(0,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{indefinit},$$

$$f''\Big(\frac{1}{\sqrt{2}},0\Big) = f''\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\Big) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{indefinit},$$

$$f''\Big(\frac{1}{\sqrt{2}},1\Big) = f''\Big(\frac{1}{\sqrt{2}},-1\Big) = f''\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}},1\Big) = f''\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}},-1\Big) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{pozitív definit}$$

Tehát a függvénynek a $(0,0)$ pontban szigorú lokális maximuma van, az $(\frac{1}{\sqrt{2}},1)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}},-1)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}},1)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-1)$ pontokban szigorú lokális minimuma van, a maradék pontokban pedig nincs szélsőértéke.

(e) A parciális deriváltak:

$$\partial_1 f(x,y) = 8x^3 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = \frac{1}{2} \text{ vagy } x = -\frac{1}{2}$$
$$\partial_2 f(x,y) = 4y^3 - 4y = 0 \Longrightarrow y = 0,\ y = 1 \text{ vagy } y = -1.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldásai:

$$(x,y) = (0,0),\ (0,1),\ (0,-1),\ \left(\frac{1}{2},0\right),\ \left(\frac{1}{2},1\right),\ \left(\frac{1}{2},-1\right),\ \left(-\frac{1}{2},0\right),\ \left(-\frac{1}{2},1\right),\ \left(-\frac{1}{2},-1\right).$$

Mivel

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^2-2 & 0 \\ 0 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$$

ebből következően

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{negatív definit,}$$
$$f''(0,1) = f''(0,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{indefinit,}$$
$$f''\left(\frac{1}{2},0\right) = f''\left(-\frac{1}{2},0\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{indefinit,}$$
$$f''\left(\frac{1}{2},1\right) = f''\left(\frac{1}{2},-1\right) = f''\left(-\frac{1}{2},1\right) = f''\left(-\frac{1}{2},-1\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{pozitív definit}$$

Tehát a függvénynek a $(0,0)$ pontban szigorú lokális maximuma van, az $\left(\frac{1}{2},1\right)$, $\left(\frac{1}{2},-1\right)$, $\left(-\frac{1}{2},1\right)$, $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ pontokban szigorú lokális minimuma van, a maradék pontokban pedig nincs szélsőértéke.

(f) A parciális deriváltak: $\partial_1 f(x,y) = 2x-2y = 0$ $\partial_2 f(x,y) = 2y-2x = 0$. Az egyenletrendszer megoldása: $x = y$, vagyis az $f'(x,y) = 0$ egyenletnek az (x_0,x_0) típusú pontok tesznek eleget. A második derivált:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = f''(x_0,x_0).$$

Azonban itt $\det f''(x_0,x_0) = 0$, azaz a mátrix most csak szemidefinit, így nem alkalmazható az eddigi módszer. Azonban tetszőleges (x_0,x_0) pontra

$$f(x_0,x_0) = 0 \le (x-y)^2 = f(x,y),$$

vagyis az (x_0,x_0) pont lokális (sőt globális) minimum (de nem szigorú minimum).

(5) Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat!

(a) $\int_D \frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol $D = [1,2]\times[0,1]$;

(b) $\int_D \sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol $D = [0,1]\times[-1,1]$;

(c) $\int_D (\sqrt{x}+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol $D = [0,1]\times[0,1]$;

(d) $\int_D \cos x \cos y \cos z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, ahol $D = [0,\pi/2]\times[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$;

(e) $\int_D \cos(x+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, ahol $D = [0,\pi/2]\times[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$.

Megoldás. (a)

$$\int_0^1\int_1^2 \frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2\,\mathrm{d}y = \frac{7}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{7}{3}\,[\mathrm{arctg}y]_0^1 = \frac{7\pi}{12}.$$

(b)

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\sin y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\sin y\int_{0}^{1}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\sin y\cdot 1\,\mathrm{d}y=0,$$

mert 0 középű intervallumon páratlan függvény integrálja zérus.

(c)

$$\int_0^1\int_0^1(\sqrt{x}+y)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\frac{(\sqrt{x}+y)^3}{3}\right]_0^1\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{3}\left(\left(\sqrt{x}+1\right)^3-\left(\sqrt{x}\right)^3\right)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\left(x+\sqrt{x}+\frac{1}{3}\right)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{1}{3}x\right]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{2}.$$

(d)

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos x\cos y\cos z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^{\pi/2}\cos z\int_0^{\pi/2}\cos y\int_0^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\left(\int_0^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}x\right)^3=1$$

(e)

$$\int_D\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\left[\sin(x+z)\right]_{x=0}^{\pi/2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+z\right)-\sin z\right)\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}+z\right)+\cos z\right]_{z=0}^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}\left(-\cos\pi+\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=0.$$

(6) Számítsuk ki $\int_{N_x} f$ értékét, ha
  (a) $f(x,y)=1,\quad N_x:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[0,1],\ 0\le y\le 1-x^2\}$;
  (b) $f(x,y)=xy^2,\quad N_x:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\}$;
  (c) $f(x,y)=\sqrt{y},\quad N_x:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[-1,1],\ 0\le y\le (1-x)^2\}$.

Megoldás. (a)

$$\int_{N_x}f=\int_0^1\int_0^{1-x^2}1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1[y]_0^{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 1-x^2\,\mathrm{d}x=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}.$$

(b)

$$\int_{N_x}f=\int_0^1\int_{x^2}^{x}xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 x^4-x^7\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^8}{8}\right]_0^1=\frac{1}{40}.$$

(c)

$$\int_{N_x}f=\int_{-1}^{1}\int_0^{(1-x)^2}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left[\frac{2}{3}y^{3/2}\right]_0^{(1-x)^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}(1-x)^3\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\left[\frac{-(1-x)^4}{4}\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}.$$

(7) Számítsuk ki az $f(x,y)=xy$ függvény integrálját az $y=x^2-1$ és az $y=x+1$ görbék grafikonjai által határolt tartományon.

Megoldás. A megadott parabola és egyenes az $x=-1$ és $x=2$ pontban metszik egymást, ezért a normáltartomány most az $N_x:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[-1,2],\ x^2-1\le y\le x+1\}$ halmaz lesz.

$$\int_{N_x}f=\int_{-1}^{2}\int_{x^2-1}^{x+1}xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}x\int_{x^2-1}^{x+1}y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^{2}x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2-1}^{x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}-x^5+3x^3+2x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[-\frac{x^6}{6}+\frac{3x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{8}.$$