Sorozatok

1. Írja fel az $a_n = \frac{1-5n}{n+4}$ sorozat 10. és $(n+1)$-edik elemét! $[a_{10} = -\frac{49}{14}, a_{n+1} = \frac{-5n-4}{n+5}]$

2. Írja fel az $a_n = \frac{3n+4}{5n-1}$ sorozat $(n+1)$-edik és $(n-2)$-edik tagját! $[a_{n+1} = \frac{3n+7}{5n+4}, a_{n-2} = \frac{3n-2}{5n-11}]$

3. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat monotonitás szempontjából!(a tétel alapján, nem elegendő a sorozat néhány elemének kiszámolása)

   (a) $a_n = \frac{n+1}{n+3}$ [a sorozat szigorúan monoton nő]

   (b) $a_n = \frac{n+3}{1+n}$ [a sorozat szigorúan monoton csökken]

   (c) B $a_n = \frac{n+7}{2n-1}$ [a sorozat szigorúan monoton csökken]

   (d) B $a_n = \frac{2+4n}{3-5n}$ [a sorozat szigorúan monoton nő]

   (e) B $a_n = \frac{3n-2}{1-2n}$ [a sorozat szigorúan monoton csökken]

   (f) B $a_n = \frac{1+2n}{2-3n}$ [a sorozat szigorúan monoton nő]

   (g) B $a_n = -3 \cdot 4^n$ [a sorozat szigorúan monoton csökken]

4. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat monotonitás szempontjából (elegendő a sorozat néhány elemének kiszámolása) és korlátosság szempontjából!

   (a) B,V $a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$
   [a sorozat nem monoton; legnagyobb alsó korlát: k= $-\frac{1}{4}$; legkisebb felső korlát:K= $\frac{1}{16}$; a sorozat korlátos]

   (b) B,V $a_n = (-4)^n$
   [a sorozat nem monoton; legnagyobb alsó korlát:nincs; legkisebb felső korlát:nincs; a sorozat nem korlátos]

   (c) B,V $a_n = 3^n$
   [a sorozat szigorúan monoton nő; legnagyobb alsó korlát: k= 3; legkisebb felső korlát:nincs; a sorozat nem korlátos]

   (d) B,V $a_n = -n^4$
   [a sorozat szigorúan monoton csökken;legnagyobb alsó korlát:nincs; legkisebb felső korlát:K=-1; a sorozat nem korlátos]

5. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat konvergencia szempontjából!

   (a) B $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
   [a sorozat konvergens]

   (b) B $a_n = (-4)^n$
   [a sorozat divergens]

   (c) B $a_n = 3^n$
   [a sorozat divergens]

(d) B $a_n = -n^4$
[a sorozat divergens]

6. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat monotonitás szempontjából (a tétel alapján, nem elegendő a sorozat néhány elemének kiszámolása) és korlátosság szempontjából!

   (a) V $a_n = \frac{3-4n}{5-7n}$
   [szigorúan monoton nő; legnagyobb alsó korlát: k= $\frac{1}{2}$; legkisebb felső korlát:K= $\frac{4}{7}$; a sorozat korlátos]

   (b) V $a_n = \frac{3n+4}{5n-1}$
   [szigorúan monoton csökken; legnagyobb alsó korlát: k=$\frac{3}{5}$; legkisebb felső korlát:K=$\frac{7}{4}$; a sorozat korlátos]

   (c) V $a_n = 8^{3n}$
   [szigorúan monoton nő; legnagyobb alsó korlát:$k = 512$; legkisebb felső korlát:nincs; a sorozat nem korlátos]

   (d) V $a_n = -5^n$
   [szigorúan monoton csökken; legnagyobb alsó korlát:nincs; legkisebb felső korlát:K=-5; a sorozat nem korlátos]

7. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat konvergencia szempontjából! Ha a sorozat konvergens, adja meg azt az N_0 küszöbszámot, amelytől kezdve a sorozat elemei a határérték $\varepsilon = 10^{-2}$ sugarú környezetén belül esnek!

   (a) V $a_n = \frac{2-3n}{1-4n}$
   [a sorozat konvergens, $N_0 = 31$]

   (b) V $a_n = \frac{6n^2+3}{2+9n}$
   [a sorozat divergens]

   (c) V $a_n = \frac{8-10n}{5n+2}$
   [a sorozat konvergens, $N_0 = 239$]

   (d) V $a_n = \frac{2n-3}{4n+1}$
   [a sorozat konvergens, $N_0 = 87$]

   (e) V $a_n = \frac{-4n^3+8}{5+7n^2}$
   [a sorozat divergens]

8. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat monotonitás szempontjából (a tétel alapján, nem elegendő a sorozat néhány elemének kiszámolása) és korlátosság szempontjából! Ha a sorozat konvergens, adja meg azt az N_0 küszöbszámot, amelytől kezdve a sorozat elemei a határérték $\varepsilon = 10^{-3}$ sugarú környezetén belül esnek!

   (a) V $a_n = \frac{5-7n}{4-5n}$
   [a sorozat szigorúan monoton csökken; legnagyobb alsó korlát: k=$\frac{7}{5}$; legkisebb felső korlát:K=2, a sorozat korlátos, a sorozat konvergens, $N_0 = 120$]

(b) V $a_n = \frac{2n-2}{1+3n}$
[a sorozat szigorúan monoton nő; legnagyobb alsó korlát:k= 0; legkisebb felső korlát:K= $\frac{2}{3}$, a sorozat korlátos, a sorozat konvergens,$N_0 = 888$]

(c) V $a_n = 2^{n+1}$
[a sorozat szigorúan monoton nő; legnagyobb alsó korlát:k= 4; legkisebb felső korlát:nincs, a sorozat nem korlátos, a sorozat divergens]

9. V Vizsgálja meg az $a_n = \frac{n-5}{1-3n}$ sorozatot monotonitás szempontjából (a tétel alapján, nem elegendő a sorozat néhány elemének kiszámolása) és korlátosság szempontjából! Ha a sorozat konvergens, adja meg azt az N_0 küszöbszámot, amelytől kezdve a sorozat elemei a határérték $\varepsilon = 10^{-4}$ sugarú környezetén belül esnek!
[szigorúan monoton csökken; legnagyobb alsó korlát: k=$-\frac{1}{3}$; legkisebb felső korlát:K=2,
a sorozat korlátos,a sorozat konvergens, $N_0 = 15555$]

10. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $a_n = -5n^2 + 4n - 8$ $[-\infty]$

(b) $a_n = 3n^4 + \sqrt{7}n^5 - \frac{4}{3}n^2$ $[\infty]$

(c) $a_n = \sqrt{5n^4 - 2n^2 + 1}$ $[\infty]$

(d) $a_n = \sqrt[5]{3 - n - n^2}$ $[-\infty]$

(e) B $a_n = \dfrac{7n^3 - 4n^2}{6 - 5n^3 - 9n}$ $\left[-\frac{7}{5}\right]$

(f) B $a_n = \dfrac{6n - 2n^5 - 7}{3n^2 + 8n}$ $[-\infty]$

(g) B $a_n = \dfrac{2n^6 + 3 - 4n}{2 + 8n^2}$ $[\infty]$

(h) B $a_n = \dfrac{4n + 3 - 9n^4}{-2 + 5n^7}$ $[0]$

(i) B $a_n = \dfrac{(5n - 4)^2 + 2n}{3n - 2n^2}$ $\left[-\frac{25}{2}\right]$

(j) B,V $a_n = \dfrac{(-3 - 2n)^2 - 4n}{1 - 7n}$ $[-\infty]$

(k) B,V $a_n = \dfrac{(3 - 6n^2)^2 + 2n^3}{2 + 4n^5 + 3n^2}$ $[0]$

(l) B,V $a_n = \dfrac{(n^2 + 1)(2n + 3)}{n(3n - 1)^2}$ $\left[\frac{2}{9}\right]$

(m) B,V $a_n = \dfrac{(3n^2 - 1)(n^3 + 1)}{5n^3(n + 4)^2}$ $\left[\frac{3}{5}\right]$

11. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) B $a_n = \dfrac{\sqrt{2n^2 + 7}}{6 + n}$ $\left[\sqrt{2}\right]$

(b) B $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+2}}{6n-3}$ $[0]$

(c) B $a_n = \dfrac{n^2+2}{\sqrt[4]{n^5-6}}$ $[\infty]$

(d) B $a_n = \dfrac{-\sqrt{5n^2+4+2n}-8n}{n+3}$ $\left[-\sqrt{5}-8\right]$

(e) B $a_n = \dfrac{3n+\sqrt{6n^2+2n-8}}{5n-1}$ $\left[\frac{3+\sqrt{6}}{5}\right]$

(f) B $a_n = \dfrac{11n^3-2n}{\sqrt[3]{6n+2n^3-1}+7n}$ $[\infty]$

(g) B $a_n = \dfrac{2+n}{n^2+\sqrt[4]{6n+3n^4-1}}$ $[0]$

(h) B $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{16n^7+6n^3-n}}{4+4n}$ $[\infty]$

(i) B $a_n = \dfrac{8n^3+\sqrt{4n^6+2n^2-8n}}{n^3-1}$ $[10]$

(j) B $a_n = \dfrac{2-3n^2}{\sqrt[3]{4n^5+2n}+5n}$ $[-\infty]$

(k) B $a_n = \dfrac{5-\sqrt{n^2-9}}{2n+3}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

(l) B $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^4+3n^2-1}-2n}{3+5n}$ $[\infty]$

(m) B $a_n = \dfrac{n^2-1}{3n-\sqrt[3]{4n^7-2n^3}}$ $[0]$

(n) V $a_n = \dfrac{2-\sqrt{2n^2+3n}}{\sqrt{n-2}}$ $[-\infty]$

(o) V $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^4+5}+\sqrt{6n^2+2n-8}}{n-1}$ $[\infty]$

(p) V $a_n = \dfrac{\sqrt{9n^4-3n^2+4}-3n}{n^2-\sqrt{5n+16n^4-2}}$ $[-1]$

(r) V $a_n = \dfrac{6n^2+\sqrt[3]{3n^7+6n^4}}{\sqrt[5]{3n^{10}+6n}-2n^3}$ $[0]$

12. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $a_n = 5^n - 3^n$ $[\infty]$

(b) $a_n = 10^n - 2^{4n}$ $[-\infty]$

(c) $a_n = 3^n - 5^{-n}$ $[\infty]$

(d) $a_n = \dfrac{3^n+2\cdot 5^n}{4^n-4}$ $[\infty]$

(e) $a_n = \dfrac{8^n + 3}{3^n - 4 \cdot 8^n}$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

(f) $a_n = \dfrac{2^n + 5 \cdot 7^n}{2 \cdot 3^n + 5 \cdot 8^n}$ $[0]$

(g) $a_n = \dfrac{3^{n+1} + 2 \cdot 5^n}{5^{n+2} - 2 \cdot 2^{2n}}$ $\left[\frac{2}{25}\right]$

(h) B $a_n = \dfrac{2^{2n} + 3^{10}}{2^5 - 5^{n+3}}$ $[0]$

(i) B $a_n = \dfrac{4^{3n} - 10^n}{10^8 - 7^{2n}}$ $[-\infty]$

(j) B $a_n = \dfrac{3 \cdot 2^{3n+1} - 3^n}{5 \cdot 8^{1+n} - 5^{n+1}}$ $\left[\frac{3}{20}\right]$

(k) B $a_n = \dfrac{4^{n+1} + 6^{n-2}}{3^{n+3} - 6^{n-1}}$ $\left[-\frac{1}{6}\right]$

(l) B $a_n = \dfrac{3^{2n+1} + 5^n}{9^{n+3} + 2^{3n}}$ $\left[\frac{1}{243}\right]$

(m) B $a_n = \dfrac{7^{-2+n} + 2 \cdot 8^{n+2}}{-3^{n-1} + 5 \cdot 2^{2+3n}}$ $\left[\frac{32}{5}\right]$

(n) B $a_n = \dfrac{5^{n+3} - 4 \cdot 3^{2n+1}}{4^{n-1} + 2^{2+3n}}$ $[-\infty]$

(o) B $a_n = \dfrac{3^{n+3} - 5 \cdot 2^{2n+1}}{25 \cdot 5^{n-2} + 3^{1+3n}}$ $[0]$

(p) B $a_n = \dfrac{-9^{2n-1} + 3 \cdot 5^{n+2}}{-3^{n+1} - 4 \cdot 3^{2n+1}}$ $[\infty]$

13. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) V $a_n = \dfrac{4^{2n+1} + 3 \cdot 2^{3n+2}}{7 \cdot 4^{n-2} + 9^{n-1}}$ $[\infty]$

(b) V $a_n = \dfrac{3^{n-2} - 4 \cdot 5^{3n+1}}{2 \cdot 5^{3n-2} + 4^{1+2n}}$ $[-250]$

(c) V $a_n = \dfrac{5 \cdot 2^{3n-2} + 3 \cdot 3^{2n+1}}{7 \cdot 8^{n+2} - 3^{2+3n}}$ $[0]$

(d) V $a_n = \dfrac{-3^{n+3} - 6 \cdot 6^{2n+1}}{2 \cdot 6^{n-2} + 2^{3n-1}}$ $[-\infty]$

(e) V $a_n = \dfrac{-4^{2n+2} + 3 \cdot 2^{3n-1}}{2 \cdot 7^{n+1} + 2^{4n+2}}$ $[-4]$

(f) V $a_n = \dfrac{6^{-n+2} + 5^{n+7}}{2^{-n-1} - 3^n}$ $[-\infty]$

(g) V $a_n = \dfrac{3^{n+2} - 4^{2n}}{5^{-2n} - 2^{4n+1}}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

14. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) V $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n-7}$ $[0]$

(b) V $a_n = \sqrt{5n^2-13} - \sqrt{5n^2+4}$ $[0]$

(c) V $a_n = \sqrt{3n^2+5n} - \sqrt{2n-5}$ $[\infty]$

(d) V $a_n = \sqrt{2+3n^2} - \sqrt{3n+7+7n^2}$ $[-\infty]$

(e) V $a_n = \sqrt{7+4n^6} - \sqrt{3+3n^6+7n}$ $[\infty]$

(f) V $a_n = \sqrt{4+3n^2+2n} - \sqrt{3n^2+2n-2}$ $[0]$

(g) V $a_n = \sqrt{7n^2-5n-13} - \sqrt{n^4-n+2}$ $[-\infty]$

(h) V $a_n = \sqrt{8n^2+6n-11} - \sqrt{8n^2-n+3}$ $\left[\frac{7}{2\sqrt{8}} = \frac{7}{4\sqrt{2}}\right]$

(i) V $a_n = \sqrt{3n^2-2+4n} - \sqrt{7+3n^2-2n}$ $\left[\frac{3}{\sqrt{3}}\right]$

(j) V $a_n = \sqrt{3+7n^4-n} - \sqrt{7n^4+3n-2}$ $[0]$

(k) V $a_n = \sqrt{5+6n^8+4n^3} - \sqrt{2n^4+6n^8+3}$ $\left[-\frac{1}{\sqrt{6}}\right]$

(l) V $a_n = \sqrt{5n^2+3n-13} - \sqrt{5n^2-n+2}$ $\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$

(m) V $a_n = \sqrt{9n^2+6} - 3n$ $\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$

(n) V $a_n = 4n - \sqrt{16n^2-2n-1}$ $\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$

(o) V $a_n = \dfrac{7}{\sqrt{3n^2+5n+3} - \sqrt{3n^2-7n+12}}$ $\left[\frac{7\sqrt{3}}{6}\right]$