1. Síkgörbék

1.1. Implicit alakban megadott görbék és függvények

Tanulási cél

Megismerkedni a síkgörbék implicit és paraméteres megadásával, függvények implicit megadásával. Begyakorolni az implicit és paraméteres deriválást. Begyakorolni implicit és paraméteres alakban adott görbék érintőinek felírását. Begyakorolni a linearizáltak használatát közelítő értékek meghatározására.

Elméleti összefoglaló

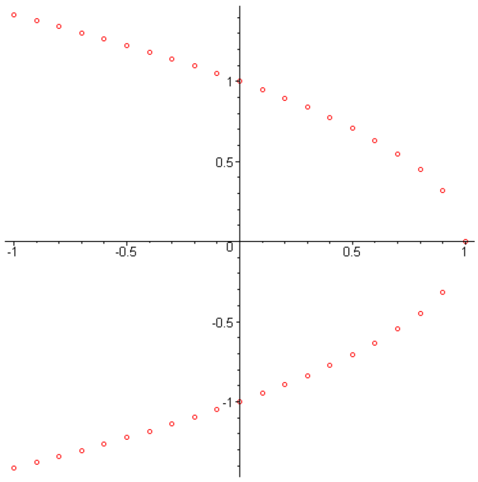
Síkgörbék és függvények implicit megadása

A folytonos egyváltozós valós függvények grafikonja egy síkgörbe. Ezek a görbék azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy minden függőleges egyenes legfeljebb egy pontban metszi őket. Olyan síkgörbék is vannak, amelyekre ez nem igaz. Például ilyen a kör is. Ebben a modulban megismerkedünk két módszerrel, amelyekkel síkgörbéket lehet definiálni, továbbá a síkgörbék körében legfontosabb fogalmakkal és tételekkel.

Tekintsük az

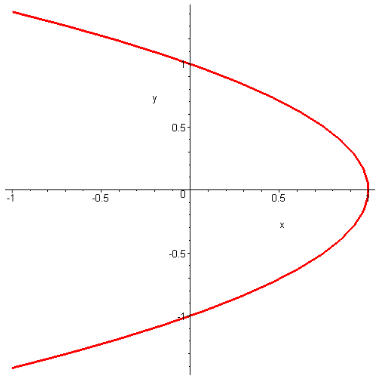
$$x + y^2 = 1$$

egyenletet. Ennek egy megoldása $x = 0, y = 1$, egy másik megoldása $x = 0, y = -1$. Látjuk ebből, hogy ha egy x, y szám pár megoldás, akkor az $x, -y$. szám pár is az. Az is világos, hogy egy megoldásban az x nem lehet nagyobb 1 -nél. Ha $x = 1$, akkor $y = 0$, és ha $x < 1$, akkor két y is jó lesz, $y = \pm\sqrt{1-x}$. Ha meghatározunk néhány megoldást, és azokat ábrázoljuk egy koordinátarendszerben, akkor az alábbihoz hasonló ábrát kaphatunk.



0-1. ábra: Az $x + y^2 = 1$ egyenlet néhány megoldása.

Ebből már sejthető, hogy az $x+y^2=1$ összefüggés egy síkgörbét definiál, ezt látjuk a következő ábrán.



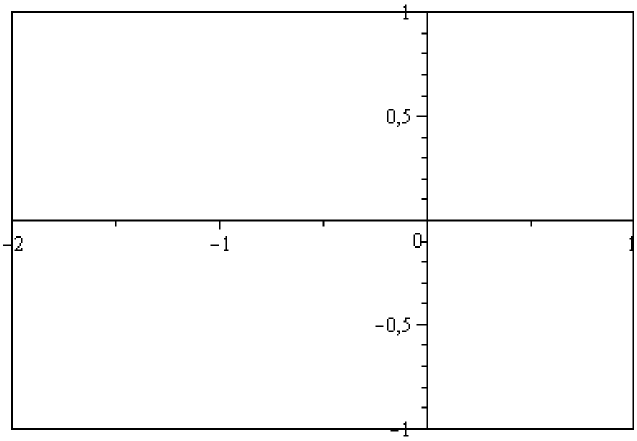
0-2. ábra: Az $x+y^2=1$ görbe.

Implicit alakban úgy lehet görbét definiálni, hogy megadunk egy, az x és y változókra vonatkozó egyenletet, és tekintjük a síkon az összes olyan (x,y) koordinátájú pontot, amelyek kielégítik a megadott egyenletet. Például az alábbi egyenletek mind egy-egy görbét definiálnak implicit alakban.

$$x^2+y^2=1\ ,$$
$$x^3+y^2=1\ ,$$
$$y-x^2=0\ ,$$
$$\left(x^2+y^2\right)^2=4\left(x^2-y^2\right)\ .$$

A legtöbb esetben egy implicit módon definiált görbe nem lehet egy függvény grafikonja is egyben, mert vannak függőleges egyenesek, amelyek egynél több pontban is metszik a görbét, mint azt az $x+y^2=1$ görbe esetén is látjuk. De ilyenkor is van a görbének számos olyan darabja, amelyik lehet egy függvény grafikonja.

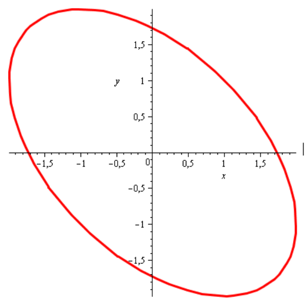
Tekintsük az $[a,b]$ és a $[c,d]$ zárt intervallumokat. Ekkor az $[a,b]\times[c,d]$ téglalap a sík azon pontjaiból áll, amelyek x koordinátája az $[a,b]$ intervallumból, y koordinátája a $[c,d]$ intervallumból van. Az alábbi ábrán a $[-2,-1]\times[-1,1]$ téglalapot látjuk.



0-3. ábra: A $[-2,-1]\times[-1,1]$ téglalap.

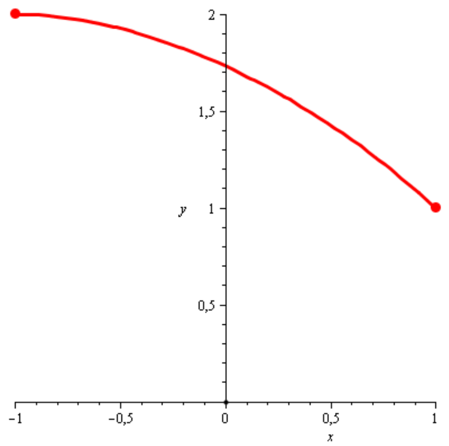
Egy implicit módon megadott görbe esetén úgy jelölhetünk ki egy olyan görbedarabot, amely lehet egy egyváltozós függvény grafikonja, hogy megadunk egy alkalmas $[a,b]\times[c,d]$ téglalapot, és tekintjük a görbének azokat a pontjait, amelyek ebbe a téglalapba esnek.

Például tekintsük az $x^2+xy+y^2=3$ implicit módon megadott görbét.



0-4. ábra: Az $x^2+xy+y^2=3$ görbe.

Ennek a görbének a $[-1,1]\times[0,3]$ téglalapba eső darabja látható a következő ábrán.



0-5. ábra

Ez már valóban lehet egy, a $[-1,1]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja, erre a görbe darabra illeszkedő (x,y) koordinátájú pont második koordinátája egyértelmű módon függ az elsőtől: $y=y(x)$.

Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $x^2+xy+y^2=3$ összefüggés és a $[-1,1]\times[0,3]$ téglalap implicit módon definiálja ezt a függvényt.

Gyakran nem egyszerű, most sem lenne nagyon kényelmes, sokszor pedig egyáltalán nem is lehet, egy ilyen módon definiált függvény hozzárendelési utasítását felírni. Ha ezt most meg akarnánk tenni, akkor ki kéne fejezni az $x^2+xy+y^2=3$ kifejezésből az y -t x -el.

Implicit alakban adott függvények deriválása

Noha egy implicit módon definiált függvény hozzárendelési utasítását általában nem ismerjük, ennek a függvénynek a deriváltja a függvény grafikonjának legtöbb pontjában kiszámolható e nélkül is.

Példaként tekintsük az előbbi $x^2+xy+y^2=3$, görbe $[-1,1]\times[0,3]$ téglalapba eső darabját. Ekkor az y az x függvényének tekinthető, $y=y(x)$, és az implicit formulát így is felírhatjuk:

$$x^2+xy(x)+(y(x))^2=3 \ .$$

Deriváljuk ennek az összefüggésnek mindkét oldalát x szerint. Ekkor, felhasználva a szorzat függvény és az összetett függvény deriválási szabályát

$$2x+y(x)+xy'(x)+2y(x)y'(x)=0 \ .$$

Ebből az összefüggésből $y'(x)$ kifejezhető:

$$y'(x)=\frac{-2x-y(x)}{x+2y(x)} \ .$$

A most vizsgált görbe darab egyik pontja $\left(0,\sqrt{3}\right)$. Így a 0 helyen az implicit módon definiált $y(x)$ függvény deriváltja

$$y'(0)=\frac{-2\cdot 0-\sqrt{3}}{0+2\cdot\sqrt{3}}=-\frac{1}{2} \ .$$

Vegyük észre, hogy a kapott $y'(x)=\dfrac{-2x-y(x)}{x+2y(x)}$ képlet nem függ attól, hogy milyen téglalappal jelöltük ki a görbe egy darabját, hiszen mindig ugyanazt a formulát kell deriválni.

Ezt az eljárást nevezzük **implicit deriválásnak**, ahogyan előállítottuk $y'(x)$ képletét.

Szokás ilyenkor az y -nak az x -től való függését nem jelölni, de persze figyelembe kell venni. Az összetett függvény deriválási szabálya biztosítja, hogy a deriválás során kapott képlet azon tagjaiban, amelyekben szerepel az y' , azokban szorzó tényezőként szerepel, így a képletből kifejezhető.

Az első célunk az lesz, hogy begyakoroljuk az implicit deriválást.

Kidolgozott feladatok

1. feladat. Határozzuk meg az $x^2y=e^x$ implicit alakban adott függvény deriváltját.

Megoldás: Az y -t az x függvényének tekintve, és mindkét oldalt deriválva x szerint, felhasználva a szorzat függvény deriválási szabályát,

$$2xy+x^2y'=e^x \ ,$$

amiből kifejezve az y' deriváltat, azt kapjuk, hogy

$$y'=\frac{e^x-2xy}{x^2} \, .$$

2. feladat. Határozzuk meg az $\dfrac{y}{x}=y^2-1$ implicit alakban adott függvény deriváltját.

Megoldás: Ugyanúgy eljárva, mint az előző feladatban, csak most, mivel az implicit formulában az y -nak egy függvénye is előfordul, (az y^2), az összetett függvény deriválási szabályára is szükség van. Ez a legtöbb esetben ezután is így lesz.

$$\frac{y'x-y}{x^2}=2yy' \ ,$$

$$\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}=2yy' \ ,$$

$$\frac{y'}{x}-2yy'=\frac{y}{x^2} \ ,$$

$$y'\left(\frac{1}{x}-2y\right)=\frac{y}{x^2} \ ,$$

$$y'=\frac{\frac{y}{x^2}}{\frac{1}{x}-2y}=\frac{\frac{y}{x^2}}{\frac{1-2xy}{x}}=\frac{y}{x-2x^2y} \ .$$

3. feladat. Határozzuk meg az $\ln(x-y)=xy$ implicit alakban adott függvény deriváltját.

Megoldás: Most

$$\frac{1-y'}{x-y}=y+xy' \ ,$$

$$\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x-y}y'=y+xy' \ ,$$

$$\frac{1}{x-y}-y=\left(\frac{1}{x-y}+x\right)y' \ ,$$

$$y'=\frac{\frac{1}{x-y}-y}{\frac{1}{x-y}+x}=\frac{\frac{1-xy+y^2}{x-y}}{\frac{1+x^2-xy}{x-y}}=\frac{1-xy+y^2}{1+x^2-xy} \ .$$

Láthatjuk, hogy implicit deriválásnál gyakran találkozunk emeletes törtekkel. A deriválás után kapott első formulát sokféle módon lehet rendezni. Általában célszerű mindkét oldalt összegként felírni, majd egy oldalra gyűjteni az y' -t szorzóként tartalmazó tagokat, a másik oldalra a többi tagot. Ezután y' kiemelésével és az együtthatójával való átosztással megkapjuk a keresett formulát.

4. feladat. Határozzuk meg az $x^2+2y^2=\sqrt{xy}$ implicit alakban adott függvény deriváltját.

Megoldás: Először is

$$2x+4yy'=\frac{y+xy'}{2\sqrt{xy}} \ .$$

A jobb oldali törtet összegként felírva

$$2x+4yy'=\frac{y}{2\sqrt{xy}}+\frac{xy'}{2\sqrt{xy}} \ .$$

Most a bal oldalra gyűjtve az y' -t tartalmazó tagokat és ott kiemelve azt

$$\left(4y-\frac{x}{2\sqrt{xy}}\right)y'=\frac{y}{2\sqrt{xy}}-2x \ .$$

Ebből osztással és az emeletes tört megszüntetésével

$$y'=\frac{\frac{y}{2\sqrt{xy}}-2x}{4y-\frac{x}{2\sqrt{xy}}}=\frac{\frac{y-4x\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}}}{\frac{8y\sqrt{xy}-x}{2\sqrt{xy}}}=\frac{y-4x\sqrt{xy}}{8y\sqrt{xy}-x} \ .$$

5. feladat. Határozzuk meg az $x^2+y^2=5x$ implicit alakban adott függvény deriváltját a $P(1,2)$ koordinátájú pontban.

Megoldás: Az implicit formulában x helyére -1 -et, y helyére 2 -t írva

$$1^2+2^2=5\cdot 1 \ ,$$

ami igaz, így a P pont illeszkedik a görbére. Meghatározzuk az y' deriváltat.

$$2x+2yy'=5 \ ,$$

$$y'=\frac{5-2x}{2y} \ .$$

Ha ebben elvégezzük a helyettesítést, akkor

$$y'=\frac{5-2\cdot 1}{2\cdot 2}=\frac{3}{4} \ .$$

6. feladat. Határozzuk meg az $x^3+\frac{1}{y}=1$ implicit alakban adott függvény deriváltját az $x=-1$ helyen.

Megoldás: Először megvizsgáljuk, hogy a görbének van-e olyan pontja, amelynek az első koordinátája -1 . Az implicit formulában x helyére -1 -et írva

$$-1+\frac{1}{y}=1 \ ,$$

amiből $y=\frac{1}{2}$. Tehát a $P\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ pont illeszkedik a görbére. Ezután

$$3x^2-\frac{y'}{y^2}=0 \, ,$$

ahonnan

$$y'=3x^2y^2 \ .$$

Az $y'(-1)$ értékét megkapjuk, ha ebben a képletben x helyére -1 -et, y helyére $\frac{1}{2}$ -et írunk:

$$y'(-1)=3(-1)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4} \ .$$

Elméleti összefoglaló

Korábban megtanultuk, hogy hogyan kell egy f függvény grafikonjának egy adott $\left(a, f(a)\right)$ pontjában húzható érintő egyenletét felírni. Ehhez az érintési pont koordinátáin kívül csak az $f'(a)$ derivált értékére van szükség. Ha f folytonos a -ban és $\lim_{x\to a} f'(x) \neq \pm\infty$, akkor

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a) \ ,$$

vagy rendezve

$$y = f'(a)\cdot x + f(a) - a\cdot f'(a) \ .$$

Ezek a formulák implicit módon definiált függvények esetén is használhatók: a és $f(a)$ a görbére illeszkedő pont első és második koordinátája, $f'(a)$ pedig az y' implicit derivált értéke az $\left(a, f(a)\right)$ pontban. Itt persze f az a függvény, amit az implicit formula definiál egy $\left(a, f(a)\right)$ körüli elég kicsi téglalapon.

Ha f folytonos a -ban és $\lim_{x\to a} f'(x) = \pm\infty$, akkor a grafikonnak itt függőleges érintője van.

Egyszerű esetekben az implicit módon definiált görbének **vízszintes** érintője van azokban a pontokban, ahol az y' **számlálója nulla, de a nevezője nem** az. **Függőleges** érintője van azokban a pontokban, ahol a y' **nevezője nulla, de a számlálója nem** az.

7. feladat. Írjuk fel az $x^2 - xy + y^2 = 4$ implicit módon definiált görbe $(0,2)$ pontbeli érintőjének az egyenletét.

Megoldás: Ha behelyettesítjük a megadott pont koordinátáit az implicit formulába, akkor az $0^2 - 0\cdot 2 + 2^2 = 4$ igaz összefüggést kapjuk, a pont tehát rajta van a görbén. Ezután meghatározzuk az y' deriváltat.

$$2x - \left(y + xy'\right) + 2yy' = 0 \ ,$$

$$2x - y + \left(-x + 2y\right)y' = 0 \ ,$$

$$y' = \frac{y - 2x}{-x + 2y} \ .$$

Ha ebben elvégezzük az $x = 0$, $y = 2$ helyettesítést $y' = \frac{1}{2}$ adódik. Ezután az érintő egyenes egyenlete

$$y = \frac{1}{2}\cdot x + 2 - 0\cdot\frac{1}{2} \ ,$$

$$y = \frac{x}{2} + 2 \ .$$

8. feladat. Írjuk fel az $x - y^2 - 2y = 1$ implicit módon definiált görbe $(1,0)$ pontbeli érintőjének az egyenletét.

Megoldás: Mivel $1-0^2-2\cdot 0=1$, az $(1,0)$ pont illeszkedik a görbére.

$$1-2yy'-2y'=0 \ ,$$

$$y'=\frac{1}{2y+2} \ .$$

Ennek $(1,0)$ -ban a helyettesítési értéke $y'=\frac{1}{2}$. Ezek felhasználásával az érintő egyenlete

$$y=\frac{1}{2}\cdot x+0-1\cdot\frac{1}{2} \ ,$$

$$y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2} \ .$$

9. feladat. Írjuk fel az $x-y^2-2y=1$ implicit módon definiált görbe $y=x-3$ egyenessel párhuzamos érintőjének az egyenletét.

Megoldás: Most nincs megadva az érintési pont két koordinátája. Ilyenkor azzal kezdünk, hogy meghatározzuk azokat. Tudjuk, hogy az érintő meredeksége a derivált értéke az érintési pontban. A megadott $y=x-3$ egyenes meredeksége 1 . Tehát megkeressük a görbén azt a pontot, amelyre $y'=1$. Az előbb meghatároztuk, hogy

$$y'=\frac{1}{2y+2} \ .$$

Meg kell oldanunk tehát az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2y+2}=1 \\ x-y^2-2y=1 \end{cases}$$

Az első egyenletből $y=-\frac{1}{2}$ adódik. Ha $y=-\frac{1}{2}$, akkor a második összefüggésből

$$x-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)=1 \ ,$$

$$x=\frac{1}{4} \ .$$

Azt kaptuk, hogy a görbe $\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$ pontjában lesz az érintő meredeksége 1 . Ezután a keresett érintő egyenlete

$$y=1\cdot x-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}\right)\cdot 1 \ ,$$

$$y=x-\frac{3}{4} \ .$$

10. feladat. Írjuk fel az $x^2+y^2=5y$ implicit módon definiált görbe $y=\frac{4x}{3}$ egyenessel párhuzamos érintőjének az egyenletét.

Megoldás: Először most is az érintési pont koordinátáit számoljuk ki. Azt az x és y értéket keressük, amelyekre az y' implicit derivált értéke $\frac{4}{3}$ lesz. Mivel

$$2x+2yy'=5y' \ ,$$
$$2x=(5-2y)y' \ ,$$
$$y'=\frac{2x}{5-2y} \ .$$

Most tehát az

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{5-2y}=\dfrac{4}{3} \\ x^2+y^2=5y \end{cases}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az első egyenletből $x=\frac{4y-10}{3}$. Ha ezt a másodikba behelyettesítjük a

$$\left(\frac{4y-10}{3}\right)^2+y^2=5y$$

másodfokú egyenletet kapjuk, ami rendezéssel az $y^2-5y+4=0$ kanonikus alakra hozható. Ennek gyökei 1 és 4. Ha $y=1$, akkor $x=2$, ha $y=4$, akkor $x=-2$. Két olyan pont is van tehát a görbén, ahol az érintő meredeksége $\frac{4}{3}$. Az egyik a $P(2,1)$, a másik a $Q(-2,4)$ koordinátájú pont.

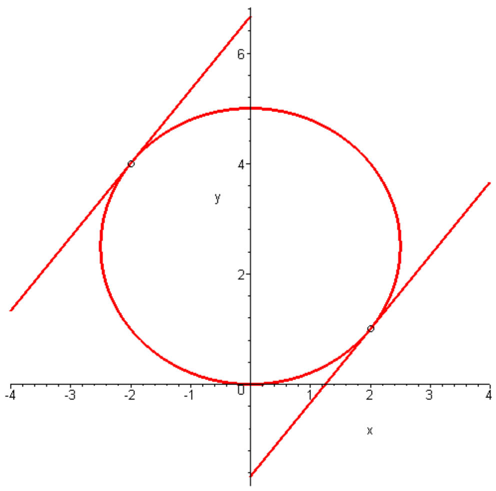
A $P(2,1)$ pontban húzott érintő egyenlete

$$y=\frac{4}{3}x+1-2\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3} \ .$$

A $Q(-2,4)$ pontban húzott érintő egyenlete

$$y=\frac{4}{3}x+4-(-2)\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}x+\frac{20}{3} \ .$$

Az alábbi ábrán az implicit görbét látjuk és a két érintőjét.



3.1-6. ábra

11. feladat. Keressük meg az $x^2 - xy + y^2 = 3$ görbe vízszintes érintőinek egyenletét.

Megoldás: Ha egy pontban az érintő vízszintes, akkor a meredeksége, ami a derivált az adott pontban nulla. Most

$$2x - (y + xy') + 2yy' = 0 \ ,$$

$$2x - y + (-x + 2y)y' = 0 \ ,$$

$$y' = \frac{y - 2x}{-x + 2y} \ .$$

Azokat a görbére eső pontokat keressük, amelyre ez a derivált nulla. Ezek az

$$\begin{cases} \dfrac{y - 2x}{-x + 2y} = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásai. Az első egyenletből, mivel egy tört akkor lehet nulla, ha a számlálója nulla, az $y = 2x$ összefüggést kapjuk. Ezt beírva a második egyenletbe és rendezve abból a $3x^2 = 3$ egyenletet kapjuk. Ennek két megoldása van, $x = \pm 1$. Ha $x = -1$, akkor $y = -2$, ha pedig $x = 1$, akkor $y = 2$.

Behelyettesítéssel meggyőződünk róla, hogy a $P(-1,-2)$ és a $Q(1,2)$ pont valóban a görbén van, és mindkét pontban a derivált tényleg nulla. (Ez az ellenőrzés azért is fontos, mert a deriváltnak a nevezője is nulla lehetne valamelyik pontban, és akkor a derivált nem lenne nulla értékű.)

$$(-1)^2 - (-1)(-2) + (-2)^2 = 3 \text{ , és } 1^2 - 1 \cdot 2 + 2^2 = 3 \ ,$$

valamint

$$\frac{-2 - 2(-1)}{-(-1) + 2(-2)} = 0 \text{ , és } \frac{2 - 2 \cdot 1}{-1 + 2 \cdot 2} = 0 \ .$$

Ezután a $P(-1,-2)$ pontban húzható vízszintes érintő egyenlete

$$y = -2 \ ,$$

a $Q(1,2)$ pontban húzotté pedig

$$y = 2 \ .$$

12. feladat. Keressük meg az $x^3 + \frac{1}{y} = 1$ görbe vízszintes érintőinek egyenletét.

Megoldás: Megint azokat a pontjait keressük a görbének, ahol a derivált értéke nulla. Tudjuk egy korábbi feladatból, hogy $y' = 3x^2y^2$. Egy szorzat akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla. De az implicit összefüggésben az y egy tört nevezőjében szerepel, tehát nem lehet nulla. Tehát a derivált csak akkor lehet nulla, ha $x = 0$. Ekkor az implicit összefüggésből $y = 1$. Most is könnyű ellenőrizni, hogy a $P(0,1)$ pont tényleg a görbén van, és a derivált ebben a pontban valóban nulla.

Végül a $P(0,1)$ pontban húzható vízszintes érintő egyenlete

$$y = 1 \ .$$

13. feladat. Keressük meg az $x-1=(y-3)^2$ görbe függőleges érintőit.

Megoldás: Az y' deriválttal kezdünk.

$$1=2(y-3)y' \ ,$$

$$y'=\frac{1}{2(y-3)} \ .$$

Ennek nevezője akkor nulla, ha $y=3$. Ezt az implicit összefüggésbe beírva

$$x-1=(3-3)^2 \ ,$$

amiből $x=1$. A $P(1,3)$ pontban az y' számlálója nem nulla, mert az mindenütt 1 .

A $P(1,3)$ pontban tehát a görbének függőleges érintője van.

14. feladat. Keressük meg az $x^2-xy+y^2=27$ görbe függőleges érintőit.

Megoldás: Először meghatározzuk az y' deriváltat.

$$2x-(y+xy')+2yy'=0 \ ,$$

$$2x-y+2yy'-xy'=0 \ ,$$

$$2x-y+(2y-x)y'=0 \ ,$$

$$y'=\frac{y-2x}{2y-x} \ .$$

Megkeressük a görbén azokat a pontokat, ahol az y' derivált nevezője nulla, de a számlálója nem. Ehhez először kiszámoljuk a

$$\begin{cases} 2y-x=0 \\ x^2-xy+y^2=27 \end{cases}$$

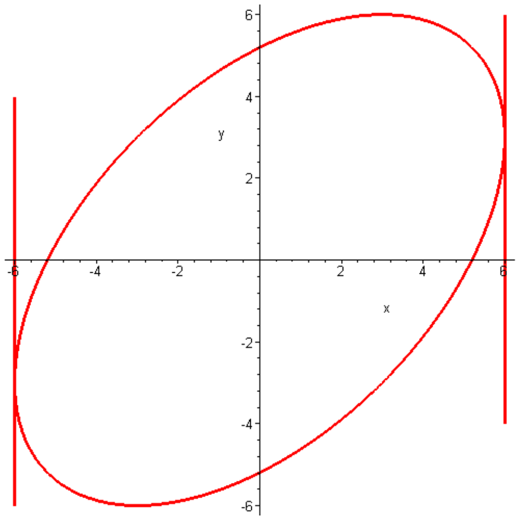
egyenletrendszer megoldásait, és kiválasztjuk közülük azokat, amelyekben y' számlálója nem nulla. Az első egyenletből $x=2y$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve

$$4y^2-2y^2+y^2=27 \ ,$$

$$3y^2=27 \ .$$

Ebből $y=\pm 3$. Ha $y=3$, akkor $x=6$. Ha $y=-3$, akkor $x=-6$. A $P(6,3)$ pontban az y' számlálója $3-2\cdot 6\neq 0$, a $Q(-6,-3)$ pontban az y' számlálója $-3-2\cdot(-6)\neq 0$.

Tehát a görbe $P(6,3)$ és $Q(-6,-3)$ pontjaiban húzott érintők függőlegesek. Ezeket és a görbét látjuk az alábbi ábrán.



3.1-7 ábra

Elméleti összefoglaló

Tekintsük az $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ implicit görbét. Könnyű ellenőrizni, hogy a $P\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ illeszkedik a görbére, $\frac{1}{4}+\frac{27}{36}=1$.

Tegyük föl, hogy szeretnénk megtalálni a görbe egy további, a P pont közelében lévő pontját.

Eljárhatunk úgy, hogy kicsit megváltoztatjuk a P pont egyik koordinátáját, azt beírjuk az implicit összefüggésbe, és abból kiszámoljuk a másik koordináta értékét.

Például keressük meg a görbének az a pontját, amelynek első koordinátája 1.1. Beírva ezt az implicit összefüggésbe

$$0.3025+\frac{y^2}{9}=1$$

adódik, amiből $y=\pm 2.505493963$. A két érték közül nyilván a pozitív van $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ közelében.
Tehát arra jutottunk, hogy a $Q(1.1,\ \ 2.505493963)$ pont a görbe egy további, a P pont közelében lévő pontja.

Ebből is láthatjuk, hogy ilyen esetben általában közelítő értékekkel vagyunk kénytelenek számolni, sőt az is sejthető, hogy ha az implicit összefüggés bonyolult, a közelítő számolások elvégzése is nagyon bonyolult lehet.

De van egy másik lehetőség is. Tudjuk, hogy az érintő az érintési pont közelében jól közelíti a görbét. Ha úgyis be kell érnünk közelítő értékekkel, miért nem számolhatnánk ezt az érintőből, ami mindig egy egyszerű lineáris függvény?

Az előbbi példánál maradva azt csinálhatjuk, hogy felírjuk a görbe P pontbeli érintőjét, majd abban az x helyére 1.1-et helyettesítve megkapjuk, közelítően, a keresett pont második koordinátáját. Mivel implicit deriválással

$$\frac{x}{2}+\frac{2yy'}{9}=0 \ ,$$

amiből

$$y'=-\frac{9x}{4y} \ ,$$

a derivált értéke a P pontban $y'=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Az érintő egyenlete tehát

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}-1\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+2\sqrt{3} \ .$$

A keresett közelítő érték tehát $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1.1+2\sqrt{3}=1.45\cdot\sqrt{3}=2.511473672$.

A két közelítő érték eltérése kicsit kisebb, mint 0.006 , tehát használható eredményt kaptunk.

15. feladat. Tekintsük az $x^5-2xy+y^5=0$ implicit görbét. Ellenőrizzük, hogy a $P(1,1)$ pont illeszkedik a görbére, és ennek felhasználásával határozzuk meg közelítően a görbe azon pontjának második koordinátáját, amelynek első koordinátája $x=0.99$.

Megoldás: Helyettesítéssel $1^5-2\cdot1\cdot1+1^5=0$ összefüggés teljesül, a P pont a görbén fekszik. Mivel 0.99 közel van 1 -hez, a P pontban húzott érintőt fogjuk használni. Először elkészítjük az y' implicit deriváltat.

$$5x^4-\left(2y+2xy'\right)+5y^4y'=0 \ ,$$

$$5x^4-2y-2xy'+5y^4y'=0 \ ,$$

$$5x^4-2y+\left(5y^4-2x\right)y'=0 \ ,$$

$$y'=\frac{2y-5x^4}{5y^4-2x} \ .$$

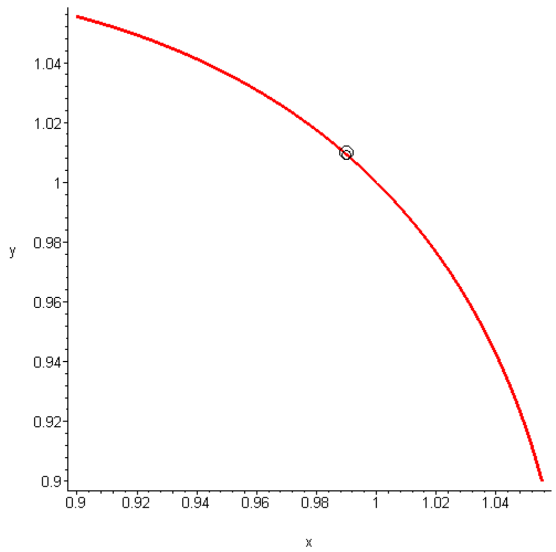
Ennek helyettesítési értéke a P pontban $y'=\frac{2-5}{5-2}=-1$. Ezek felhasználásával az érintő egyenlete

$$y=-1\cdot x+1-1\cdot\left(-1\right)=-x+2 \ .$$

Ennek helyettesítési értéke $x=0.99$ -ben

$$y=-0.99+2=1.01 \ .$$

Azt kaptuk tehát, hogy a $Q\left(0.99,\ 1.01\right)$ pont jó közelítéssel a görbére esik.



3.1-8. ábra

Ezen az ábrán a görbe egy darabját látjuk. A nagyobbik kör jelöli a $Q(0.99,\, 1.01)$ pontot, a kisebbik a görbére „pontosan” illeszkedő pontot. Mivel a két kör nem koncentrikus, láthatjuk, hogy a Q második koordinátája csak közelítően jó. Az is látszik az ábráról, hogy a Q feljebb van, mint a görbe igazi pontja, ami azért van, mert itt a görbe érintője a grafikon felett halad, ami a görbe jellegéből világos is.

16. feladat. Tekintsük a $2\left(x^2+y^2\right)^2=25\left(x^2-y^2\right)$ implicit görbét. Ellenőrizzük, hogy a $P(3,1)$ pont illeszkedik a görbére, és ezt felhasználva határozzuk meg a görbe azon pontjának az első koordinátáját, amelynek a második koordinátája $y=1.01$.

Megoldás: Az ellenőrzés még most sem nagyon bonyolult:

$$2\left(3^2+1^2\right)^2=25\left(3^2-1^2\right) \ ,$$

$$2\cdot 10^2=25\cdot 8 \ ,$$

$$200=200 \ .$$

Meghatározzuk az y' deriváltat.

$$4\left(x^2+y^2\right)\left(2x+2yy'\right)=25\left(2x-2yy'\right) \ ,$$

$$4\left(x^2+y^2\right)\left(x+yy'\right)=25\left(x-yy'\right) \ ,$$

$$4x^3+4xy^2+4x^2yy'+4y^3y'=25x-25yy' \ ,$$

$$\left(4x^2y+4y^3+25y\right)y'=25x-4x^3-4xy^2 \ ,$$

$$y'=\frac{25x-4x^3-4xy^2}{4x^2y+4y^3+25y} \ .$$

Az y' értéke a P pontban

$$y'=\frac{25\cdot 3-4\cdot 3^3-4\cdot 3\cdot 1^2}{4\cdot 3^2\cdot 1+4\cdot 1^3+25\cdot 1}=-\frac{9}{13} \ .$$

Így tehát a P pontban húzott érintő egyenlete

$$y=-\frac{9}{13}x+1-3\cdot\left(-\frac{9}{13}\right)=-\frac{9}{13}x+\frac{40}{13} \ .$$

Ha ebben elvégezzük az $y = 1.01$ helyettesítést, akkor az

$$1.01 = -\frac{9}{13}x + \frac{40}{13}$$

egyenletből $x = 2.986$.

Tehát a $Q(2.896, 1.01)$ pont jó közelítéssel a görbére esik.

Ellenőrző kérdések

1. kérdés. Az $x - y^2 = xy$ implicit alakban adott függvény deriváltja

$y' = \frac{1-y}{x+2y}$. (x)

$y' = \frac{1+y}{x+2y}$.

$y' = \frac{1-y}{2x+y}$.

$y' = -\frac{1+y}{x+2y}$.

2. kérdés. Az $x^2 + 3xy + y^3 = 5$ implicit alakban adott függvény deriváltja

$y' = -\frac{3x+2y}{3\left(x+y^2\right)}$.

$y' = -\frac{2x+3y}{3\left(x+y^2\right)}$. (x)

$y' = -\frac{2x+3y}{2\left(x+y^2\right)}$.

$y' = -\frac{2x+3y}{3x+y^2}$.

3. kérdés. Az $3y^3 + x^2 = 7$ implicit alakban adott függvény deriváltja a $P\left(2,1\right)$ pontban

$y' = \frac{4}{9}$.

$y' = -\frac{2}{9}$.

$y' = -\frac{4}{9}$. (x)

$y' = \frac{2}{9}$.

4. kérdés. Az $y^4 - 4y = 4x^3 + x$ implicit alakban adott függvény deriváltja az $x = 1$ helyen

$y' = -\frac{11}{8}$.

$y' = -\frac{12}{4}$.

$y' = -1$.

$y' = -\frac{13}{8}$. (x)

5. kérdés. Az $x^4 + y^2 = x + 4$ görbe $P(1,2)$ pontbeli érintője

$y = \frac{3x-11}{4}$.

$y = -\frac{3x}{4} - \frac{11}{4}$.

$y = -\frac{3x}{4} + \frac{11}{4}$. (x)

$y = -\frac{3x+11}{4}$.

6. kérdés. A $\frac{2}{y} + y = x$ görbe $m = -1$ meredekségű érintőinek egyenlete

$y = -x + 3$ és $y = -x - 3$.

$y = -x + 4$ és $y = -x - 3$.

$y = -x + 3$ és $y = -x - 4$.

$y = -x + 4$ és $y = -x - 4$. (x)

7. kérdés. Az $x + \sqrt{y} = y + 1$ görbe $y = 2x - 3$ egyenessel párhuzamos érintője

$y = 2x - 1$. (x)

$y = 2x - 3$.

$y = 2x + 1$.

$y = 2x + 3$.

8. kérdés. Az $x + 2 = xy + 1$ görbe $y = x - 3$ egyenesre merőleges érintőinek egyenlete

$y = -x - 3$ és $y = -x - 1$.

$y = -x + 3$ és $y = -x - 1$. (x)

$y = -x + 3$ és $y = -x + 1$.

$y = -x - 3$ és $y = -x + 1$.

9. kérdés. Az $x^2 + y^2 + xy = 3$ görbének melyik pontjaiban vízszintes az érintője?

A $P(1,-2)$ és a $Q(-1,2)$ pontokban. (x)
A $P(1,-2)$ és a $Q(-1,-2)$ pontokban.
A $P(1,2)$ és a $Q(-1,2)$ pontokban.
A $P(1,2)$ és a $Q(1,2)$ pontokban.

10. kérdés. Az $x^2+y^2-xy=3$ görbének melyik pontjaiban függőleges az érintője?

A $P(2,-1)$ és a $Q(2,1)$ pontokban.
A $P(2,1)$ és a $Q(-2,1)$ pontokban.
A $P(2,-1)$ és a $Q(-2,1)$ pontokban.
A $P(2,1)$ és a $Q(-2,-1)$ pontokban. (x)