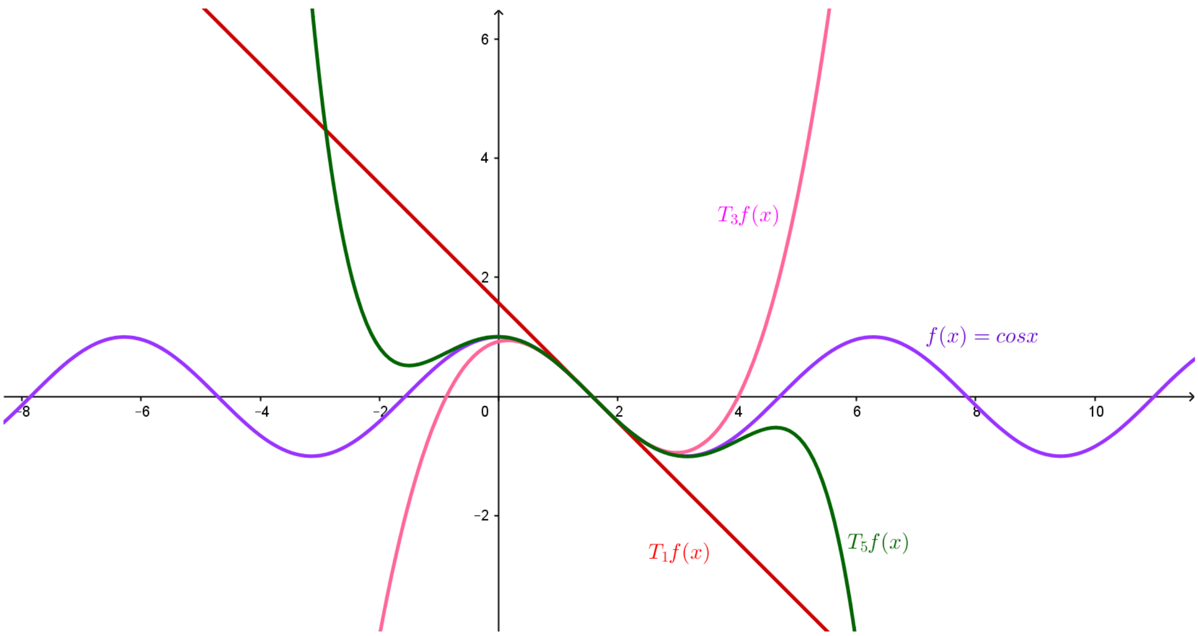
3. Differenciálszámítás

3.2. Taylor polinomok és a L'Hospital-szabály

Tanulási cél: Megismerni a Taylor- és Maclaurin polinom fogalmát, és ezek alkalmazását közelítő értékek kiszámolására, valamint egy újabb, hatékony határértékszámítási módszer, a L'Hospital-szabály megismerése, és alkalmazásának elsajátítása egyszerűbb esetekben.

Elméleti összefoglaló:
Sokszor találkozunk a gyakorlatban olyan bonyolult függvényekkel, melyekkel a számolás nehézkes. Ilyenkor érdemes a bonyolult függvényt egyszerűbbel közelíteni, amely valamilyen értelemben jól közelíti az eredetit. Célszerűnek tűnik a hatványfüggvényekkel való közelítés, mivel azokkal könnyű dolgozni.
Egy függvény lineáris közelítésére egy adott pont környezetében már láttunk példát egy függvény adott pontjába húzott érintő egyenese kapcsán.
A lineáris közelítésnél (érintő egyenesnél) jobb közelítést nyerhetünk egy adott pont környezetében magasabbfokú polinomokkal. Erre mutat példát a következő ábra, melyen a $\cos x$ függvényt közelítettük első-, harmad-, ötödfokú polinommal a $\frac{\pi}{2}$ környezetében.



1. ábra: A $\cos x$ függvény közelítése első-, harmad-, ötödfokú polinommal a $\frac{\pi}{2}$ környezetében

Definíció: Legyen az f olyan függvény, mely értelmezett az $a \in \mathbb{R}$ rögzített hely egy környezetében, s ott n-szer folytonosan differenciálható. Ekkor a

$$T_n f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)\cdot(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)\cdot(x-a)^2 + . \quad . \quad . + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\cdot(x-a)^n$$

polinomot az f függvény a helyen vett n-edfokú **Taylor-polinom**jának nevezzük.

(A nulladik derivált magát a függvényt jelenti, azaz $f^{(0)}(a) = f(a)$, és $0! = 1$.)
Észrevehetjük, hogy az elsőfokú Taylor-polinom pontosan az f függvény a helyen vett érintő egyenesének egyenletét adja: $T_1 f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) \cdot (x-a) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$. (Az érintő egyenes egyenletét lásd Matematika 1. tárgy Differenciálszámítás bevezetése című leckében.)
A Taylor-polinom közelíti az eredeti függvényt. Minél közelebb van x az a-hoz, és minél magasabb a polinom rendje, a közelítés általában annál jobb.

Ha $a = 0$, azaz a függvényt $a = 0$ környezetében közelítjük, akkor **Maclaurin-polinom**ról beszélünk.

$$M_n f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot (x-0) + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot (x-0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \cdot (x-0)^n =$$
$$= f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \cdot x^n$$

Kidolgozott feladatok:
1. feladat: Írjuk fel az $f(x) = e^{-2x}$ függvény másodfokú Maclaurin-polinomját!

Megoldás: A megoldásban induljunk el a Maclaurin-polinom definíciójából, miszerint egy függvény n-edfokú Maclaurin-polinomjának nevezzük, a 0 helyen vett n-edfokú Taylor-polinomot, mely az alábbi módon írható fel.

$$M_n f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \cdot x^n$$

Mivel feladatunkban másodfokú polinomot kell felírnunk, így $n = 2$, s így a polinomban csupán három tag fog szerepelni.

$$M_2 f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2$$

Természetesen a konkrét Maclaurin-polinom felírásához meg kell határoznunk a képletben szereplő $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket.

Elsőként helyettesítsük a függvénybe a 0-t.

$$f(0) = e^{-2\cdot 0} = e^0 = 1$$

Ezután állítsuk elő a függvény deriváltját, és határozzuk meg a derivált helyettesítési értékét is a 0 helyen.

$$f'(x) = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}$$

A deriválás során ne feledkezzünk el arról, hogy összetett függvényt deriválunk, így a külső függvény deriválása után szoroznunk kell még a belső függvény deriváltjával is.

Hajtsuk végre a 0 behelyettesítését.

$f'(0) = -2e^{-2\cdot 0} = -2e^0 = -2$

Állítsuk elő a második deriváltat.

$f''(x) = -2e^{-2x} \cdot (-2) = 4e^{-2x}$

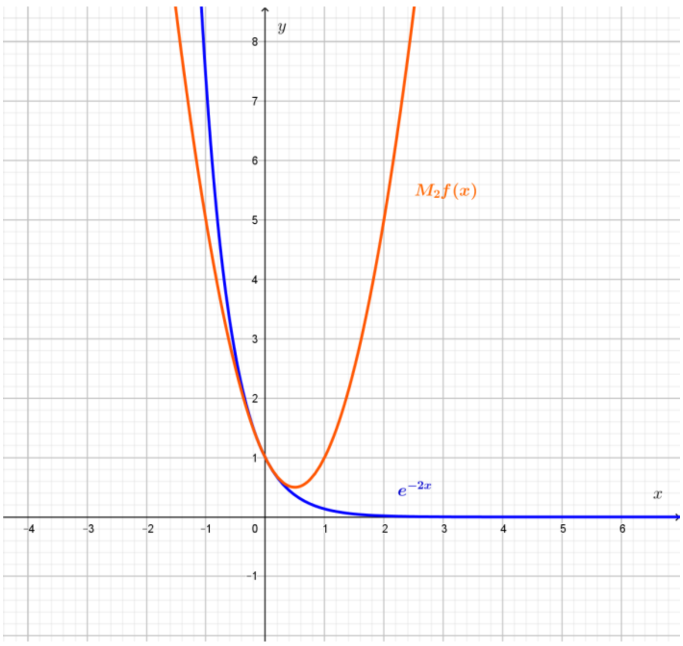
Helyettesítsük ebbe is a 0-t.

$f''(0) = 4e^{-2\cdot 0} = 4e^0 = 4$

Utolsó lépésként helyettesítsük be a meghatározott $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket a másodfokú Maclaurin-polinom képletébe. A behelyettesítés után határozzuk meg a faktoriálisok értékét, és egy-egy tagban szorozva a konstansokat, hozzuk egyszerűbb alakra a polinomot.

$$M_2 f(x) = 1 + \frac{1}{1!} \cdot (-2) \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 4 \cdot x^2 = 1 + \frac{1}{1} \cdot (-2) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x^2 =$$
$$= 1 - 2x + 2x^2$$

Az alábbi ábra jól szemlélteti, hogy milyen módon közelíti az eredeti függvényt a számolt másodfokú Maclaurin polinom.



2. ábra: Az $f(x) = e^{-2x}$ függvény másodfokú Maclaurin-polinommal való közelítése

2. feladat: Írjuk fel az $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ függvény másodfokú Maclaurin-polinomját!

Megoldás: Itt is elindulhatunk a másodfokú Maclaurin-polinom definíciójából.

$$M_2 f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2$$

Most is elő kell állítanunk az $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket.

Helyettesítsük be elsőként a függvénybe a 0 -t.

$$f(0)=\sqrt[3]{0+1}=1$$

Ezután állítsuk elő a függvény deriváltját. A deriválás előtt célszerű átalakítani a függvényt. A gyök helyett írjunk törtkitevős hatványt.

$$f(x)=\sqrt[3]{x+1}=(x+1)^{\frac{1}{3}}$$

Ebből az alakból már egyszerű a deriválás.

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$$

Helyettesítsük be a deriváltba a 0 -t.

$$f'(0)=\frac{1}{3}(0+1)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}$$

Állítsuk elő a második deriváltat is.

$$f''(x)=\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(x+1)^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}}$$

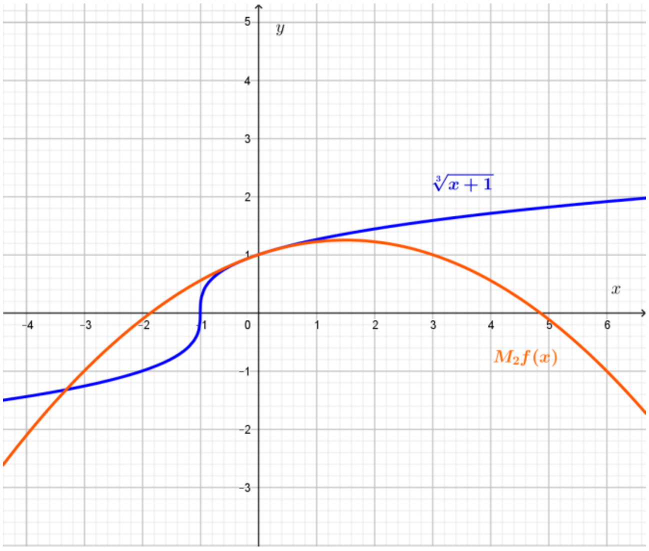
Határozzuk meg a második derivált 0 helyen vett helyettesítési értékét.

$$f''(0)=-\frac{2}{9}(0+1)^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{9}$$

Végül a meghatározott $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket helyettesítsük be a másodfokú Maclaurin-polinom képletébe. A behelyettesítés után hozzuk egyszerűbb alakra a polinomban az együtthatókat.

$$M_2 f(x)=1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{3}\cdot x+\frac{1}{2!}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot x^2=1+\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot x^2=$$
$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$$

A másodfokú Maclaurin polinommal való közelítést szemlélteti a következő ábra.



3. ábra: Az $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ függvény másodfokú Maclaurin-polinommal való közelítése

3. feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{1}{3-2x}$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinomját!

Megoldás: Induljunk ki a Maclaurin-polinom definíciójából.

$$M_3 f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f'(0)\cdot x+\frac{1}{2!}f''(0)\cdot x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)\cdot x^3$$

Állítsuk elő a szükséges deriváltakat, és határozzuk meg a függvény, valamint a deriváltak értékét a nulla helyen. A deriválások egyszerűbbek ha a függvényt átalakítjuk, mert akkor tört helyett összetett függvényünk lesz.

$$f(x)=\frac{1}{3-2x}=(3-2x)^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad f(0)=3^{-1}=\frac{1}{3}$$

$$f'(x)=(-1)\cdot(3-2x)^{-2}\cdot(-2)=2\cdot(3-2x)^{-2} \qquad \Rightarrow \qquad f'(0)=2\cdot 3^{-2}=\frac{2}{9}$$

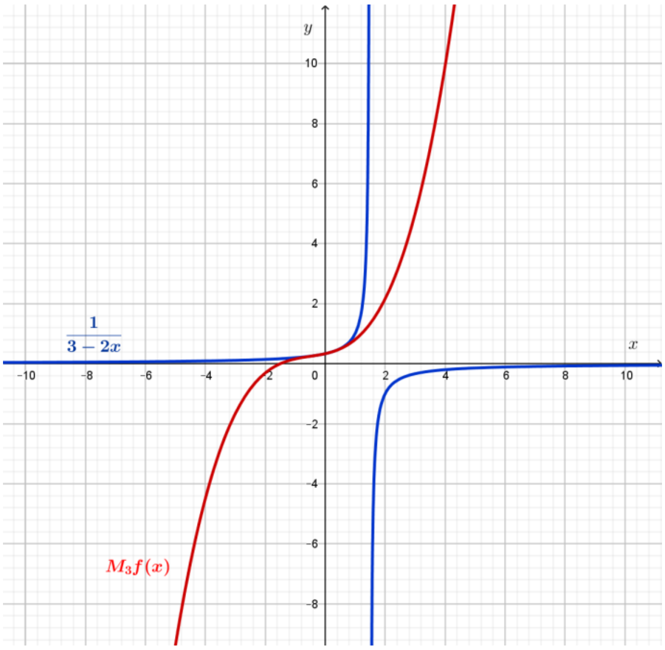
$$f''(x)=(-4)\cdot(3-2x)^{-3}\cdot(-2)=8\cdot(3-2x)^{-3} \qquad \Rightarrow \qquad f''(0)=8\cdot 3^{-3}=\frac{8}{27}$$

$$f'''(x)=(-24)\cdot(3-2x)^{-4}\cdot(-2)=48\cdot(3-2x)^{-4} \qquad \Rightarrow \qquad f'''(0)=48\cdot 3^{-4}=\frac{48}{81}$$

A kapott értékeket helyettesítsük be a polinomba.

$$M_3 f(x)=\frac{1}{3}+\frac{1}{1!}\cdot\frac{2}{9}x+\frac{1}{2!}\cdot\frac{8}{27}x^2+\frac{1}{3!}\cdot\frac{48}{81}x^3=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}x+\frac{4}{27}x^2+\frac{8}{81}x^3$$

A közelítést a következő ábra szemlélteti.



4. ábra: Az $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3-2x}$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinommal való közelítése

4. feladat: Írjuk fel az $f(x)=\sin 2x$ függvény $a=\dfrac{\pi}{4}$ helyen vett másodfokú Taylor-polinomját!

Megoldás: A definícióból indulunk el, mely szerint az $f(x)$ függvény a helyen vett n-edfokú Taylor-polinomja a következő:

$$T_n f(x)= f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)\cdot(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)\cdot(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\cdot(x-a)^n.$$

Mivel másodfokú polinom a kérdés, így $n=2$.

$$T_2 f(x)= f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)\cdot(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)\cdot(x-a)^2$$

Annyiban változik tehát csak a dolgunk az előzőekhez képest, hogy nem a 0 helyen kell meghatároznunk a függvény, valamint első és második deriváltjának értékét, hanem az $a=\dfrac{\pi}{4}$ helyen.

Helyettesítsünk először a függvénybe.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

Állítsuk elő a függvény deriváltját. Figyeljünk oda, mert összetett függvényről van szó, ne felejtsünk el szorozni a belső függvény deriváltjával.

$$f'(x)=\cos 2x\cdot 2=2\cos 2x$$

Helyettesítsünk most a deriváltba is.

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\frac{\pi}{2}=0$$

Ezután deriváljunk még egyszer.

$$f''(x)=2(-\sin 2x)\cdot 2=-4\sin 2x$$

A második deriváltba is helyettesítsük be az $a=\frac{\pi}{4}$ értéket.

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=-4\sin\frac{\pi}{2}=-4$$

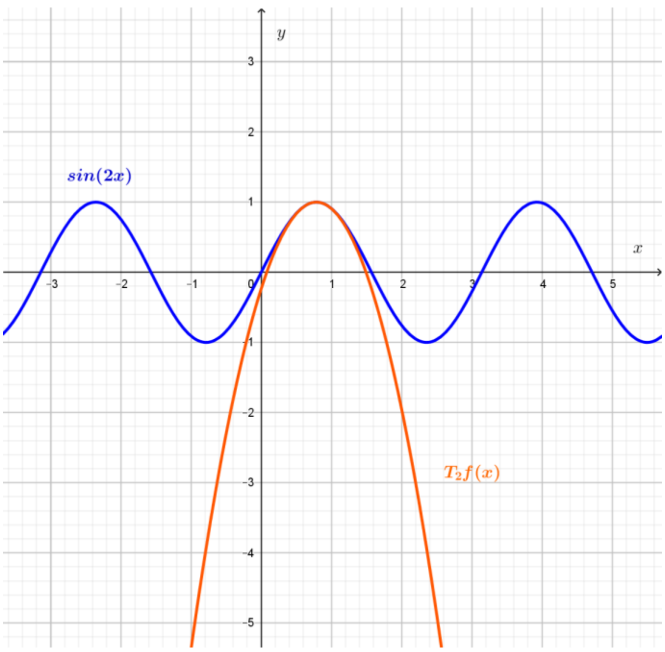
Az előzőekben meghatározott $f(a)$, $f'(a)$ és $f''(a)$ értékeket írjuk be a Taylor-polinom képletébe, s egyben helyettesítsünk a helyére is.

$$T_2 f(x)=1+\frac{1}{1!}\cdot 0\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2!}\cdot(-4)\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2$$

Végül hozzuk egyszerűbb alakra a polinom együtthatóit.

$$T_2 f(x)=1+\frac{1}{2}\cdot(-4)\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2=1-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2$$

A szemléltetést a következő ábra segíti.



5. ábra: Az $f(x)=\sin 2x$ függvény másodfokú Taylor-polinommal való közelítése az $a=\frac{\pi}{4}$ környezetében

5. feladat: Írjuk fel az $f(x)=\ln 3x$ függvény $a=\frac{1}{3}$ helyen vett másodfokú Taylor-polinomját!

Megoldás: Most is a másodfokú Taylor-polinom definícióját használjuk fel.

$$T_2 f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)\cdot(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)\cdot(x-a)^2$$

Határozzuk meg a polinomban szereplő, egyelőre ismeretlen $f(a)$, $f'(a)$ és $f''(a)$ értékeket.

Helyettesítsük elsőként a függvénybe az $a=\frac{1}{3}$-ot.

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\left(3\cdot\frac{1}{3}\right)=\ln 1=0$$

Deriváljuk a függvényt.

$$f'(x)=\frac{1}{3x}\cdot 3=\frac{1}{x}$$

Helyettesítsünk be a deriváltba is a helyére $\frac{1}{3}$-ot.

$$f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$$

Állítsuk elő a második deriváltat.

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

Helyettesítsük a második deriváltba is az $a=\frac{1}{3}$-ot.

$$f''(x)=-\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-9$$

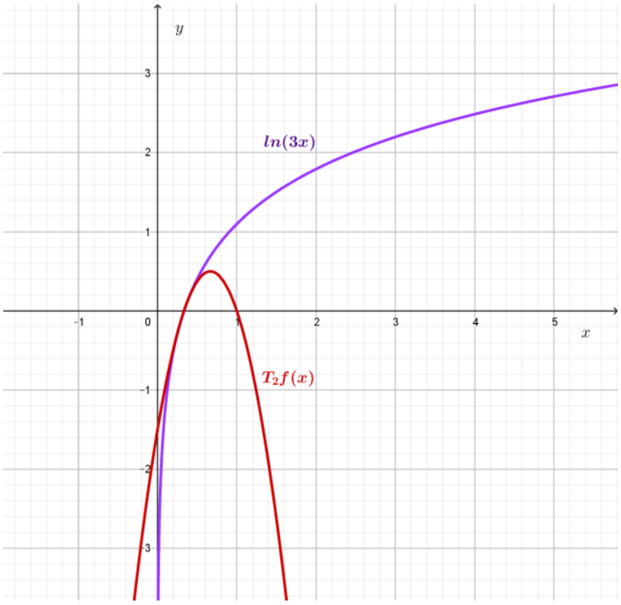
Majd a Taylor-polinom képletében helyettesítsünk a, $f(a)$, $f'(a)$ és $f''(a)$ helyére.

$$T_2 f(x)=0+\frac{1}{1!}\cdot 3\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2!}\cdot(-9)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$$

Végül írjuk egyszerűbb alakban a polinom együtthatóit.

$$T_2 f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{9}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$$

Jelen esetben a Taylor polinommal való közelítést a következő ábra szemlélteti.



6. ábra: Az $f(x) = \ln 3x$ függvény másodfokú Taylor-polinommal való közelítése az $a = \frac{1}{3}$ környezetében

6. feladat: Írjuk fel az $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 20$ függvény $a = 3$ hely körüli harmadfokú Taylor-polinomját!

Megoldás: Induljunk ki a Taylor-polinom definíciójából, eszerint

$$T_3 f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2!} f''(a) \cdot (x-a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a) \cdot (x-a)^3$$

Ebben a sorban kell most a helyére 3-at helyettesítenünk.

$$T_3 f(x) = f(3) + \frac{1}{1!} f'(3) \cdot (x-3) + \frac{1}{2!} f''(3) \cdot (x-3)^2 + \frac{1}{3!} f'''(3) \cdot (x-3)^3$$

Ehhez először az $f(3)$, $f'(3)$, $f''(3)$, $f'''(3)$ értékeket kell meghatároznunk és behelyettesítenünk.

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 20 \quad \Rightarrow \quad f(3) = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 3 + 20 = 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 + 1 = -2$$

$$f''(x) = 6x - 10 \quad \Rightarrow \quad f''(3) = 6 \cdot 3 - 10 = 8$$

$$f'''(x) = 6 \quad \Rightarrow \quad f'''(3) = 6$$

Tehát

$$T_3 f(x) = 5 + \frac{1}{1!}(-2)(x-3) + \frac{1}{2!}8(x-3)^2 + \frac{1}{3!}6(x-3)^3 = 5 - 2(x-3) + 4(x-3)^2 + (x-3)^3$$

Ha elvégeznénk a hatványozásokat és összevonnánk az azonos fokszámú tagokat, természetesen visszakapnánk az eredeti polinomot, ezzel tudnánk ellenőrizni a megoldást.

7. feladat: Melyik az a harmadfokú polinom, melyre a következők igazak: $p(0)=3, \quad p'(0)=-1, \quad p''(0)=-6, \quad p'''(0)=12$?

Megoldás: Mivel a függvény és deriváltjainak értéke a nulla helyen adott és a polinom harmadfokú, ezért a harmadfokú Maclaurin-polinom felírásából indulunk ki.

$$p(x) = p(0) + \frac{1}{1!}p'(0)\cdot x + \frac{1}{2!}p''(0)\cdot x^2 + \frac{1}{3!}p'''(0)\cdot x^3.$$

Nincs más dolgunk, mint a függvény és a derivált megadott értékeit behelyettesíteni.

$$p(x) = 3 + \frac{1}{1!}(-1)x + \frac{1}{2!}(-6)x^2 + \frac{1}{3!}12x^3 = 3 - x - 3x^2 + 2x^3$$

Ha a tagokat a szokott sorrendben írjuk, akkor $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 3$.

8. feladat: Hogyan határozhatjuk meg $\frac{1}{\sqrt[10]{e}}$ közelítő értékét, ha csak négy alapműveletes számológépünk van?

Megoldás: Mivel $\frac{1}{\sqrt[10]{e}} = e^{-0.1}$, ezért a feladatot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy adjuk meg közelítőleg az $f(x) = e^x$ függvény $x_0 = -0.1$ helyen vett helyettesítési értékét. Mivel a -0.1 "közel van" a nullához, ezért az $f(x)$ függvény egy tetszőleges fokszámú Maclaurin-polinomjának segítségével határozhatjuk meg a közelítő értéket. Vegyük ezen függvény másodfokú Maclaurin-polinomját, melybe majd x helyére a megadott x_0 értéket kell behelyettesítenünk.

$$f(x) = e^x \quad\Rightarrow\quad f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \quad\Rightarrow\quad f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = e^x \quad\Rightarrow\quad f''(0) = e^0 = 1$$

Ebből

$$M_2 f(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2$$

$$e^{-0.1} \approx 1 + \frac{1}{1!}(-0.1) + \frac{1}{2!}(-0.1)^2 = 1 - 0.1 + 0.005 = 0.905.$$

Minél minél magasabbfokú polinomot veszünk figyelembe, a közelítő érték annál pontosabb lesz.

Ha például a harmadfokú Maclaurin-polinomba helyettesítünk, akkor

$$e^{-0.1} \approx 1 + \frac{1}{1!}(-0.1) + \frac{1}{2!}(-0.1)^2 + \frac{1}{3!}(-0.1)^3 = 1 - 0.1 + 0.005 - 0.00016 = 0.9049$$

Ha a negyedfokú polinomba, akkor

$$e^{-0.1} \approx 1 + \frac{1}{1!}(-0.1) + \frac{1}{2!}(-0.1)^2 + \frac{1}{3!}(-0.1)^3 + \frac{1}{4!}(-0.1)^4 =$$

$$= 1 - 0.1 + 0.005 - 0.0001\dot{6} + 0.0000041\dot{6} = 0.9048375.$$

Ha nem csak négy alapműveletes számológépünk van, akkor egy lépésben kaphatunk közelítő értéket, s így $e^{-0.1} \approx 0.904837418$. Amint látható a negyedfokú polinomból kapott érték már 6 tizedesjegyre pontos. Ha ennél is pontosabb értékre van szükség, további tagokat figyelembe véve tetszőleges pontosság érhető el.

9. feladat: Adjunk közelítést $\cos 0.1$-re , ha csak négy alapműveletes számológépünk van.
Megoldás: A feladatot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy adjuk meg közelítőleg az $f(x)=\cos x$ függvény $x_0=0.1$ helyen vett helyettesítési értékét. Mivel a 0.1 "közel van" a nullához, ezért az $f(x)$ függvény egy tetszőleges fokszámú Maclaurin-polinomjának segítségével határozhatjuk meg a közelítő értéket.

$$f(x)=\cos x \quad \Rightarrow \quad f(0)=\cos 0=1$$
$$f'(x)=-\sin x \quad \Rightarrow \quad f'(0)=-\sin 0=0$$
$$f''(x)=-\cos x \quad \Rightarrow \quad f''(0)=-\cos 0=-1$$

Ebből

$$M_2 f(x)=1+\frac{0}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2=1-\frac{1}{2}x^2$$
$$\cos 0.1\approx 1-\frac{1}{2}(0.1)^2=0.99500$$

Ha nem csak négy alapműveletes számológépünk van, akkor egy lépésben kaphatunk közelítő értéket, s így $\cos 0.1\approx 0.995004$. Amint látható a másodfokú polinomból kapott érték már 5 tizedesjegyre pontos.

Ellenőrző kérdések:

1. kérdés: Melyik az $f(x)=\dfrac{1}{5-2x}$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinomja?

$\frac{1}{5}+\frac{2}{25}x+\frac{4}{125}x^2+\frac{8}{625}x^3$ (X)

$\frac{1}{5}-\frac{2}{25}x+\frac{4}{125}x^2-\frac{8}{625}x^3$

$\frac{1}{5}+\frac{2}{25}x+\frac{4}{125}x^2+\frac{16}{625}x^3$

$\frac{1}{5}-\frac{2}{25}x+\frac{4}{125}x^2-\frac{16}{625}x^3$

2. kérdés: Melyik az $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x$ negyedfokú Maclaurin-polinomja?

$1-2x^2+\frac{1}{3}x^4$

$-1+2x^2-\frac{1}{3}x^4$

$1-2x^2+\frac{2}{3}x^4$

$-1+2x^2-\frac{2}{3}x^4$ (X)

3. kérdés: Az alábbiak közül melyik az $f(x)=\cos^2 x$ negyedfokú Maclaurin-polinomja?

$1-x^2+\frac{1}{3}x^4$

$1-2x^2+\frac{1}{3}x^4$

$1-x^2+\frac{2}{3}x^4$

$1-2x^2+\frac{2}{3}x^4$ (X)

4. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $f(x)=2x^3-11x^2+17x-2$ függvény $a=2$ hely körüli harmadfokú Taylor-polinomja?

$f(x)=4-(x-2)+3(x-2)^2+2(x-2)^3$

$f(x)=4-3(x-2)+(x-2)^2+2(x-2)^3$ (X)

$f(x)=2-3(x-2)+4(x-2)^2+2(x-2)^3$

$f(x)=2-4(x-2)+3(x-2)^2+2(x-2)^3$

5. kérdés: Melyik az a harmadfokú $p(x)$ polinom, melyre a következők igazak: $p(0)=5,\quad p'(0)=-3,\quad p''(0)=4,\quad p'''(0)=18$?

$p(x)=5x^3-3x^2+4x+18$

$p(x)=5x^3-3x^2+2x+3$

$p(x)=18x^3+4x^2-3x+5$

$p(x)=3x^3+2x^2-3x+5$ (X)

6. kérdés: Ha $\sqrt{e}$ közelítő értékét az $f(x)=e^x$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinomjából számoljuk, akkor mit kapunk?

$1.6443\dot{6}$

$1.6458\dot{3}$ (X)

$1.6465\dot{3}$

$1.6481\dot{6}$

7. kérdés: Ha $\sin 0.1$ értékét az $f(x)=\sin x$ harmadfokú Maclaurin-polinomjából számoljuk, akkor mit kapunk?

$0.1001\dot{6}$

$0.0998\dot{3}$ (X)

0.0017453283

$-0.1001\dot{6}$

Elméleti összefoglaló:

Korábban foglalkoztunk már határértékszámítási feladatokkal. Gyakran találkozhatunk olyan határértékszámítási problémákkal, melyek nem oldhatóak meg a korábban tanult módszerekkel, így például a $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határértékek, valamint az ezekre visszavezethetőek. Ezen típusok meghatározására ad hatékonyt módszert a L'Hospital-szabály.

Tegyük fel, hogy a

$\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ határérték $\frac{\infty}{\infty}$ vagy $\frac{0}{0}$ típusú,

és c egy környezetében, esetleg c-től eltekintve, f is és g is differenciálható, továbbá $g(x)\neq 0$ és $g'(x)\neq 0$.

Ha a $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik és véges, akkor az is teljesül, hogy

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

A c jelölhet egy véges értéket, valamint mindkét végtelent is.

A tétel rövid és pontatlan megfogalmazása: a tört limesze a deriváltak hányadosának a limeszével egyenlő.
Fontos, hogy csak határozatlan alakú határértékek kiszámolására próbáljuk a tételt alkalmazni, különben hibás eredményt ad.

Előfordulhat olyan eset, amikor a szabály egyszeri alkalmazása nem elegendő, mert a deiváltak hányadosa újra határozatlan alakot ad. Ekkor (ha a feltételek teljesülnek) újra alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt. Ilyenkor az újabb deriválás előtt célszerű a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezni.

A feladatmegoldások során először mindig megvizsgáljuk, hogy milyen típusú határértékről van szó. A $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan esetekben közvetlenül alkalmazható a L'Hospital-szabály. Ezen túlmenően foglalkozunk „$0\cdot\infty$" típusú határértékekkel, melyekre bizonyos átalakítások után a szabály alkalmazható.

Ha az $f(x)\cdot g(x)$ szorzat, (a szóbanforgó helyen) „$0\cdot\infty$ " típusú, akkor az

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

vagy az

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

formulák valamelyikét felhasználva, a kérdéses határérték átalakítható $\frac{\infty}{\infty}$, vagy $\frac{0}{0}$ típusúvá, aztán alkalmazható a L'Hospital-szabály.
Gyakran a kétféle átírási lehetőség közül csak az egyik használható. Azzal érdemes először próbálkozni, amelyik a deriválás szempontjából egyszerűbbnek tűnik.

Kidolgozott feladatok

10. feladat: Számítsuk ki a $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ határértéket.

Megoldás: Most egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határértékkel van dolgunk, így a L'Hospital-szabályt közvetlenül tudjuk alkalmazni. Ennek érdekében külön deriváljuk a számlálót és külön deriváljuk a nevezőt, s ennek a hányadosnak vesszük az eredeti helyen vett határértékét. Ez most

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\ln x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}.$$

Ebben a formájában ez egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték, látszólag nem jutottunk előre. De az utóbbi határérték átalakítható (megszüntetjük az emeletes törtet), és ezután könnyen kiszámolható a határérték:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{2}=\infty.$$

A deriváltak hányadosának plusz végtelen a limesze, így tételünk értelmében ennyi az eredeti limesz is, azaz

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=\infty.$$

11. feladat: Számítsuk ki a $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^2}$ határértéket.

Megoldás: Egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határértéket kell kiszámolni. Tekintjük a deriváltak hányadosának a határértékét.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{2x}\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x}.$$

Ez is egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határérték. Kiszámolásához a L'Hospital-szabályt újra alkalmazzuk.
A deriváltak hányadosának határértéke most

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{2x}\right)'}{\left(x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\left(2e^{2x}\right)=\infty.$$

A tételünk értelmében ekkor

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x}=\infty$$

is teljesül, majd még egyszer alkalmazva a tételt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^2}=\infty$$

is fennáll. Tehát ebben az esetben kétszer alkalmaztuk egymás után a L'Hospital-szabályt.

12. feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2+e^x}$ határértéket.

Megoldás: A limesz $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú. Tekintjük a deriváltak hányadosának limeszét:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^3\right)'}{\left(x^2+e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2x+e^x}.$$

Ez még mindig $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú. Nézzük tehát a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(3x^2\right)'}{\left(2x+e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2+e^x}$$

határértéket, de ez még mindig $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú. Végül, még egyszer képezve a deriváltak hányadosának határértékét, kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(6x)'}{\left(2+e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=0,$$

ezért sorban minden limesz nullával egyenlő, így az eredeti is, azaz

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+e^x}=0.$$

Tehát ebben az esetben háromszor alkalmaztuk egymás után a L'Hospital-szabályt.

13. feladat: Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$ határértéket.

Megoldás: A 0-t behelyettesítve kapjuk, hogy a határérték $\dfrac{0}{0}$ típusú. Tehát tekintjük a deriváltak hányadosának limeszét, ami

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{\cos x}=1.$$

Ennyi tehát az eredeti limesz is:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{\sin x}=1.$$

14. feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x}{1-e^{2x}}$ határértéket.

Megoldás A 0-t behelyettesítve kapjuk, hogy a határérték $\dfrac{0}{0}$ típusú. Vesszük a deriváltak hányadosának limeszét:

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(xe^x\right)'}{\left(1-e^{2x}\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+xe^x}{-2e^{2x}}=\frac{1+0}{-2}=-\frac{1}{2}.$$

Tehát az eredeti határértékre is fennáll, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x}}{1-e^{2x}}=-\frac{1}{2}.$$

15. feladat: Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos 3x}$ határértéket.

Megoldás: A 0-t behelyettesítve kapjuk, hogy a határérték $\dfrac{0}{0}$ típusú. Most a deriváltak hányadosának limesze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{3\sin 3x},$$

ami a 0-t való behelyettesítést követően újra $\dfrac{0}{0}$ típusú. Ebből kapjuk a deriváltak hányadosát képezve a

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x-2\sin^2 x}{9\cos 3x}=\frac{2-0}{9}=\frac{2}{9}$$

eredményt, s így ennyi az eredeti limesz is,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos 3x}=\frac{2}{9}.$$

Akár eszünkbe juthatott volna az első deriválás után egy trigonometrikus azonosság is, mely alapján

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{3\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3\sin 3x}.$$

Ez persze így is egy $\dfrac{0}{0}$ típusú limesz, de ha most vesszük a deriváltak hányadosának limeszét, azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{9\cos 3x}=\frac{2}{9},$$

és ismét hivatkozhatunk arra, hogy a tételünk alapján az eredeti határérték is ennyi. Ezen az úton a deriválás némileg egyszerűbb volt.
Az ilyenféle átalakítások gyakran jelentős egyszerűsödést tudnak eredményezni.

16. feladat: Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{tg} x}{\sin x-x}$ határértéket.

Megoldás: A 0-t behelyettesítve kapjuk, hogy a határérték $\dfrac{0}{0}$ típusú. A deriváltak hányadosának limesze így:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\cos x-1}=\frac{1-\dfrac{1}{\cos^2 0}}{\cos 0-1}.$$

Ez továbbra is $\dfrac{0}{0}$ típusú, de átalakítható a következő módon:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x}}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x\left(\cos x-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x+1)(\cos x-1)}{\cos^2 x(\cos x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+1}{\cos^2 x}=\frac{1+1}{1}=2\,.$$

A tétel alapján az eredeti limesz is ennyi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{tg}x}{\sin x-x}=2\,.$$

Ha a fenti átalakítási lehetőséget nem vesszük észre, akkor ismét a L'Hospital-szabály alkalmazásával próbálkozhatnánk, ekkor azt kapnánk, hogy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)'}{(\cos x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2\sin x}{\cos^3 x}}{-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos^3 x}=2\,.$$

Most tehát így is célhoz értünk. Néha azonban az egyszerűsítések elvégzése nélkül nem számítható ki a limesz.

17. feladat: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{e}{x}\right)}{\sin\left(\frac{3}{x}\right)}=?$

Megoldás: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{e}{x}\right)}{\sin\left(\frac{3}{x}\right)}=\frac{\ln(1+0)}{\sin(0)}=\frac{0}{0}$

Tehát újra egy $\frac{0}{0}$ típusú limesszel van dolgunk. Most a deriváltak hányadosának limesze:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{e}{x}}\left(-\frac{e}{x^2}\right)}{\cos\left(\frac{3}{x}\right)\left(-\frac{3}{x^2}\right)}\,.$$

Ez továbbra is $\frac{0}{0}$ típusú. Vegyük észre azonban, hogy a problémát okozó $-\frac{1}{x^2}$ tényezővel egyszerűsíthetünk. Ekkor kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{e}{x}}\left(-\frac{e}{x^2}\right)}{\cos\left(\frac{3}{x}\right)\left(-\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{e}{x}}(e)}{\cos\left(\frac{3}{x}\right)(3)}=\frac{e}{3}.$$

Persze az eredeti limesz is ezzel egyenlő:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{e}{x}\right)}{\sin\left(\frac{3}{x}\right)}=\frac{e}{3}.$$

Ha most a deriváltak hányadosában nem egyszerűsítenénk a $-\frac{1}{x^2}$ tényezővel, hanem ismét tekintenénk a deriváltak hányadosának limeszét, akkor az továbbra is $\frac{0}{0}$ típusú maradna, és ez történne akárhányszor vennénk, az egyébként egyre bonyolultabb deriváltak hányadosának limeszét. Ezért, ha lehet, akkor mindig egyszerűsítsünk!

18. feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\left(xe^{-2x}\right)$ határértéket.

Megoldás: Ez a határérték egy $0\cdot\infty$ típusú szorzat. A negatív kitevőjű hatvány miatt kínálkozik a

$$\lim_{x\to\infty}\left(xe^{-2x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}}$$

tört alakú átírás.

Így egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú tört határértékének a kiszámítására vezettük vissza a feladatot, melyre már alkalmazható a L'Hospital szabály. Véve a deriváltak hányadosának határértékét, arra jutunk, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}}=0\,.$$

Tehát az eredeti limesz is ennyi:

$$\lim_{x\to\infty}\left(xe^{-2x}\right)=0\,.$$

19. feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\operatorname{tg}x\cdot\ln x\right)$ határértéket.

Megoldás: A feladat egyoldali határértékszámítással kapcsolatos ismeretekre épül (lásd Matematika 1. tárgy 8.Határérték című lecke).

Az egyoldali határértékeket megvizsgálva kapjuk, hogy a szorzatunk limesze $0\cdot\infty$ típusú. Mivel $\frac{1}{\operatorname{tg}x}=\operatorname{ctg}x$ elemi alapfüggvény, a

$$\lim_{x\to0^+}\left(\operatorname{tg}x\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}$$

átírást választjuk.

Így egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határérték kiszámítása a feladatunk, melyre alkalmazható a L'Hospital szabály. Tekintsük a deriváltak hányadosának határértékét:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2x}}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{\sin^2x}{x}\right).$$

Ez egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték. Alkalmazhatjuk ismét a L'Hospital-szabályt, és egy lépésben célhoz jutunk, de talán még egyszerűbb, ha felhasználjuk a nevezetes $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$ határértéket. Ekkor

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\sin^2 x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}(-\sin x)=1\cdot 0=0.$$

Ezzel egyenlő az eredeti limesz is:

$$\lim_{x\to 0^+}(\mathrm{tg}x\cdot \ln x)=0.$$

Ellenőrző kérdések:

8. kérdés: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=$

$1.$

$\infty.$

$0.$ (X)

$\frac{1}{2}.$

9. kérdés: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{2x}}=$

0 . (X)

6 .

$\infty.$

$\frac{3}{2}.$

10. kérdés: $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{x^2}=$

$\infty.$ (X)

$0.$

$\frac{1}{2}.$

1 .

11. kérdés: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$

$0.$

$-\frac{1}{2}.$

$-1.$

$\frac{1}{2}.$ (X)

12. kérdés: $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-2x}}{x^2+3x}=$

$0.$

$\frac{2}{3}.$ (X)

$-\frac{2}{3}.$

$1.5.$

13. kérdés: $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(5x-4)}{\ln(3-2x)} =$

$-\frac{5}{2}$. (X)

$\frac{5}{2}$.

1 .

-1 .

14. kérdés: $\lim_{x \to \infty} \left(x^2 e^{-x} \right) =$

∞.

1.

0 . (X)

2.

15. kérdés: $\lim_{x \to \infty} \left(x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \right) =$

0 .

$-\pi$.

∞.

π . (X)