2. Integrálszámítás

2.2. Helyettesítéses integrálás

Tanulási cél

Megismerkedni a helyettesítéses integrálással, és alkalmazásaival feladatokban.

Elméleti összefoglaló

Ha az $f(x)$-nek egy primitív függvénye $F(x)$, és $g(x)$ differenciálható függvény, akkor deriválással könnyen igazolható, hogy
$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = F(g(x))+c$.
Ez azt jelenti, hogy tudjuk integrálni az olyan szorzatokat, amelyeknek egyik tényezője integrálható külső függvénnyel rendelkező összetett függvény, a másik tényezője pedig az összetett függvény belső függvényének deriváltja. Ha ezt feladatokban akarjuk alkalmazni, akkor az integrálandó függvényben fel kell ismernünk, hogy $f(g(x))\cdot g'(x)$ típusú.
Könnyebben követhetővé tehetjük az integrálást, ha a következő eljárást használjuk. A $g(x)$ függvény helyett bevezetünk egy új változót, melyet jelöljünk t -vel. Úgy is mondhatjuk, hogy a $g(x)$ függvényt helyettesítjük a t változóval. Írjunk az integrálban ezután $g(x)$ helyére t-t, $g'(x)dx$ helyére pedig dt-t. Így az $\int f(g(x))\cdot g'(x)dx$ integrált átalakítjuk az $\int f(t)dt$ integrálba, ami az eredeti integrálnál egyszerűbb. Ezt az integrálást elvégezzük, majd az eredményben t helyére visszahelyettesítjük a $g(x)$ függvényt.
Itt jegyezzük meg, hogy a helyettesítésnek az a része, miszerint a $g'(x)dx$ helyére dt-t írunk a következő formális úton is megkapható. Deriváljuk a $t = g(x)$ egyenlet mindkét oldalát x szerint, és jelöljük t-nek x szerinti deriváltját $\frac{dt}{dx}$ -vel. Így a $\frac{dt}{dx} = g'(x)$ egyenletet kapjuk. Ha ennek mindkét oldalát formálisan szorozzuk dx -szel, akkor a $dt = g'(x)dx$ egyenlőséget kapjuk. Bár ez matematikailag nem teljesen korrekt, de feladatok megoldása nagyon egyszerűen írható le ilyen módon. Ezért a későbbiekben ezt alkalmazni fogjuk. De hangsúlyozzuk, hogy ez így csak egy formális leírás.
Sajnos nagyon sok esetben nem könnyű felismerni egy integrálról, hogy $f(g(x))\cdot g'(x)$ típusú. Jelölje most az integrált egyszerűen $\int f(x)dx$, s tegyük fel, hogy $f(x)$ -nek létezik primitív függvénye. Ez az integrál is átalakítható egy másik integrálba, ami reményeink szerint egyszerűbb az eredeti integrálnál, csak másképp hajtunk végre helyettesítést. Ilyenkor nagyon gyakran az x változót helyettesítjük a t változó egy függvényével, amit $g(t)$ -vel jelölhetünk. Ezen $g(t)$ függvénynek differenciálhatónak kell lenni, és léteznie kell az inverzének. Ekkor a helyettesítés a következő módon történik. Az x változó helyett $g(t)$ -t, dx helyett pedig $g'(t)dt$ -t írunk az integrálba. Így átalakítjuk az $\int f(g(t))\cdot g'(t)dt$ integrálba. Ez most bonyolultabbnak tűnik mint az eredeti, de konkrét feladatokban megfelelő

$g(t)$ választással egyszerűbb az eredetinél. Ezt az integrált meghatározzuk, majd az eredményben t helyére $g^{-1}(x)$ -et helyettesítünk. (Itt g^{-1} a g függvény inverzét jelöli.)
A helyettesítésnek az a része, miszerint a dx helyére $g'(t)dt$ -t írunk a következő formális úton is megkapható. Deriváljuk az $x = g(t)$ egyenlet mindkét oldalát t szerint, és jelöljük x -nek t szerinti deriváltját $\frac{dx}{dt}$ -vel. Így a $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ egyenletet kapjuk. Ha ennek mindkét oldalát formálisan szorozzuk dt -vel, akkor a $dx = g'(t)dt$ egyenlőséget kapjuk. Bár ez matematikailag nem teljesen korrekt, de feladatok megoldását nagyon megkönnyíti. Ezért a későbbiekben alkalmazni fogjuk ezt. De hangsúlyozzuk, hogy ez így csak egy formális leírás.
Nagyon gyakran, amikor $g(x)$ függvényt helyettesítünk egy t változóval, akkor is úgy célszerű leírni a megoldást, hogy a $t = g(x)$ egyenletet x -re rendezzük, azaz kifejezzük x -et a t új változó függvényeként, s innentől úgy járunk el, ahogyan azt a második esetnél leírtuk.
A helyettesítésnek bármelyik módját használjuk, azzal nem az integrálást végezzük el. Ilyenkor az integrálandó függvényt alakítjuk át egy olyan függvénybe, amit az eredeti függvénynél könnyebb integrálni. A helyettesítés során a régi változó szerepét, általában x , egy új változó, amit általában t -vel jelölünk, veszi át. A helyettesítés után nem keveredhet a két változó. Az átalakított integrálban már csak az új változó szerepelhet.
A helyettesítést általában célszerű alkalmazni a következő esetekben.
1. Ha az integrálandó függvény valamelyik része összetett függvény. Ilyenkor a belső függvényt célszerű egy új változóval helyettesíteni, mert így eltüntethető az integrálandó függvényből az összetétel.
2. Ha az integrálandó függvény olyan tört, melyben $\sqrt{x}$, $\sqrt[n]{x}$ vagy e^x szerepel. Ilyenkor $\sqrt{x}$ -et, $\sqrt[n]{x}$ -et vagy e^x -t helyettesítjük új változóval, s a helyettesítés után általában egy racionális törtfüggvényt kapunk.
Nézzük ezután az eljárást konkrét feladatokban.

Kidolgozott feladatok

1. feladat: $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

Megoldás: Az integrandus számlálójában egy összetett függvény áll, ezért célszerű helyettesítéssel próbálkozni. A belső függvényt helyettesítjük az új változóval, azaz
$t = \sqrt{x}$.
Rendezzük ezt az egyenletet x -re.
$x = t^2$
Deriváljuk mindkét oldalt t szerint, majd formális szorzással fejezzük ki dx -et.
$$\frac{dx}{dt} = 2t \;\Rightarrow\; dx = 2tdt$$
Helyettesítsük be ezeket az integrandusba.
$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\sin t}{t}\,2t\,dt$$
A kapott függvényt egyszerűsítsük, és végezzük el az integrálást.

$$\int \frac{\sin t}{t} 2t\, dt = 2\int \sin t\, dt = -2\cos t + c$$

Utolsóként helyettesítsünk vissza t helyére $\sqrt{x}$ -et.

$$-2\cos t + c = -2\cos\sqrt{x} + c$$

2. feladat: $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3} dx$

Megoldás: Az integranduson belül most is látunk összetett függvényt, csak ez most a nevezőben áll. Próbálkozzunk a belső függvény helyettesítésével.

$$t = x^3$$

Fejezzük ki ebből x -et.

$$x = \sqrt[3]{t}$$

deriváljuk mindkét oldalt t szerint, és formális szorzással fejezzük ki dx -et.

$$\frac{dx}{dt} = \left(\sqrt[3]{t}\right)' = \left(t^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \Rightarrow dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} dt$$

Végezzük el a helyettesítést az integrandusban.

$$\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3} dx = \int \frac{\left(\sqrt[3]{t}\right)^2}{\cos^2 t} \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} dt = \int \frac{\sqrt[3]{t^2}}{\cos^2 t} \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} dt$$

Egyszerűsítsünk, és hajtsuk végre az integrálást.

$$\int \frac{\sqrt[3]{t^2}}{\cos^2 t} \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} dt = \int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \operatorname{tg} t + c$$

Befejezésül helyettesítsük vissza t helyére x^3 -öt.

$$\operatorname{tg} t + c = \operatorname{tg} x^3 + c$$

3. feladat: $\int \frac{1}{x + x\ln^2 x} dx$

Megoldás: Ebben a feladatban is találunk egy összetett függvényt az integrandusban, az $\ln^2 x$ -et. Célszerű ennek belső függvényét, az $\ln x$ -et helyettesíteni egy új változóval.

$$t = \ln x$$

Fejezzük ki ebből x -et.

$$x = e^t$$

Deriváljuk mindkét oldalt t szerint, s fejezzük ki dx -et.

$$\frac{dx}{dt} = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$$

Írjuk be ezeket az integrandusba.

$$\int \frac{1}{x + x\ln^2 x} dx = \int \frac{1}{e^t + e^t \ln^2\left(e^t\right)} e^t dt$$

Tudjuk, hogy $\ln\left(e^t\right) = t$, ezért $\ln^2\left(e^t\right) = t^2$. Írjuk ezt az integrandusba, valamint emeljünk ki a nevezőben, és egyszerűsítsünk.

$$\int \frac{1}{e^t + e^t \ln^2\left(e^t\right)} e^t dt = \int \frac{1}{e^t + e^t t^2} e^t dt = \int \frac{1}{e^t\left(1 + t^2\right)} e^t dt = \int \frac{1}{1 + t^2} dt$$

Most végezzük el az integrálást, majd helyettesítsük vissza régi változót.

$$\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} t + c = \operatorname{arctg}(\ln x) + c$$

4. feladat: $\int e^x \cos\left(e^x\right) dx$

Megoldás: Az integranduson belül látunk egy összetett függvényt, a $\cos\left(e^x\right)$ -t. Célszerű próbálkozni azzal, hogy ennek belső függvényét helyettesítjük. Az új változó bevezetése után hajtsuk végre ugyanazokat a lépéseket, amiket a korábbi feladatokban tettünk

$$t = e^x \;\Rightarrow\; x = \ln t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \;\Rightarrow\; dx = \frac{1}{t}\,dt$$

$$\int e^x \cos\left(e^x\right) dx = \int t \cos t \frac{1}{t}\,dt = \int \cos t\,dt = \sin t + c = \sin\left(e^x\right) + c$$

5. feladat: $\int (3x+2)\sqrt{4x+1}\,dx$

Megoldás: Az integrandus második tényezője most egy összetett függvény, de mégsem ennek belső függvényét célszerű helyettesíteni, hanem az egész összetett függvényt. Most azért célszerű ez, mert az összetétel külső függvénye a négyzetgyök. Ha csak a belső függvényt helyettesítjük, akkor megmarad a gyök, de ha az egész összetettet, akkor eltűnik a gyök. Vezessünk be tehát a gyökös kifejezés helyére egy új változót, s az egyenletet rendezzük x -re.

$$t = \sqrt{4x+1} \;\Rightarrow\; t^2 = 4x+1 \;\Rightarrow\; x = \frac{t^2-1}{4}$$

Deriváljuk mindkét oldalt t szerint, és fejezzük ki dx -et.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{4} = \frac{t}{2} \;\Rightarrow\; dx = \frac{t}{2}\,dt$$

Írjuk be ezeket az integrálandó függvénybe, majd a műveleteket elvégezve hozzuk minél egyszerűbb alakra a függvényt.

$$\int (3x+2)\sqrt{4x+1}\,dx = \int \left(3\frac{t^2-1}{4}+2\right) t \frac{t}{2}\,dt = \int \left(\frac{3}{4}t^2 + \frac{5}{4}\right)\frac{t^2}{2}\,dt = \int \frac{3}{8}t^4 + \frac{5}{8}t^2\,dt$$

Amint látható, valóban eltűnt az integrandusból a gyök, és immár csak egy polinomot kell integrálnunk. Végezzük ezt el, majd utána helyettesítsünk vissza t helyére $\sqrt{4x+1}$ -et.

$$\int \frac{3}{8}t^4 + \frac{5}{8}t^2\,dt = \int \frac{3}{8}\frac{t^5}{5} + \frac{5}{8}\frac{t^3}{3}\,dt = \frac{3}{40}t^5 + \frac{5}{24}t^3 + c =$$

$$= \frac{3}{40}\left(\sqrt{4x+1}\right)^5 + \frac{5}{24}\left(\sqrt{4x+1}\right)^3 + c = \frac{3}{40}\sqrt{(4x+1)^5} + \frac{5}{24}\sqrt{(4x+1)^3} + c$$

6. feladat: $\int \frac{2x-5}{\sqrt{3x+1}}\,dx$

Megoldás: Most az integrandus nevezőjében van olyan összetett függvény, aminek külső függvénye a gyök. Mint az előző feladatban, most sem csak a belső függvényt helyettesítjük, hanem az egész összetett függvényt.

$$t = \sqrt{3x+1} \;\Rightarrow\; t^2 = 3x+1 \;\Rightarrow\; x = \frac{t^2-1}{3}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{3}=\frac{2}{3}t \Rightarrow dx=\frac{2}{3}tdt$$

Hajtsuk végre az integrandusban a helyettesítést, majd végezzük el a műveleteke, s így hozzuk a függvényt minél egyszerűbb alakra.

$$\int\frac{2x-5}{\sqrt{3x+1}}dx=\int\frac{2\frac{t^2-1}{3}-5}{t}\frac{2}{3}tdt=\int\frac{\frac{2}{3}t^2-\frac{17}{3}}{t}\frac{2}{3}tdt=\int\frac{4}{9}t^2-\frac{34}{9}dt$$

A helyettesítéssel most is egy polinomba sikerült átalakítani az integrandust. Végezzük el az integrálást, és helyettesítsük vissza az eredeti változót.

$$\int\frac{4}{9}t^2-\frac{34}{9}dt=\frac{4}{9}\frac{t^3}{3}-\frac{34}{9}t+c=\frac{4}{27}t^3-\frac{34}{9}t+c=$$

$$=\frac{4}{27}\left(\sqrt{3x+1}\right)^3-\frac{34}{9}\sqrt{3x+1}+c=\frac{4}{27}\sqrt{(3x+1)^3}-\frac{34}{9}\sqrt{3x+1}+c$$

7. feladat: $\int\cos\sqrt{5x-3}\,dx$

Megoldás: Mivel összetett függvényt kell integrálnunk, érdemes próbálkozni a belső függvény helyettesítésével.

$$t=\sqrt{5x-3} \Rightarrow t^2=5x-3 \Rightarrow x=\frac{t^2+3}{5}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{5}=\frac{2}{5}t \Rightarrow dx=\frac{2}{5}tdt$$

Végezzük el a helyettesítést, és kapott függvényt írjuk minél egyszerűbb alakban.

$$\int\cos\sqrt{5x-3}\,dx=\int\cos t\frac{2}{5}tdt=\frac{2}{5}\int t\cos t\,dt$$

Most egy olyan szorzatot kell integrálnunk, aminek első tényezője egy elsőfokú polinom, második tényezője pedig $\cos t$. Az ilyen függvények integrálásáról korábban volt szó, és akkor kiderült, a parciális integrálást $\left(\int f\cdot g'=f\cdot g-\int f'\cdot g\right)$ kell használni úgy, hogy a polinomot, azaz t -t tekintjük f -nek, a $\cos t$ -t pedig g' -nak. A szabály alkalmazásához szükségünk van f' -ra és g -re.

$$f'(t)=t'=1$$

$$g=\sin t$$

Ezeket felhasználva alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát.

$$\frac{2}{5}\int t\cos t\,dt=\frac{2}{5}\left(t\sin t-\int 1\sin t\,dt\right)$$

Határozzuk meg a még visszamaradt integrált, majd utána helyettesítsünk vissza.

$$\frac{2}{5}\left(t\sin t-\int 1\sin t\,dt\right)=\frac{2}{5}\left(t\sin t+\cos t\right)+c=\frac{2}{5}\left(\sqrt{5x-3}\sin\sqrt{5x-3}+\cos\sqrt{5x-3}\right)+c$$

8. feladat: $\int\frac{1}{x\sqrt[3]{x}+2x+\sqrt[3]{x^2}}dx$

Megoldás: Olyan törtet kell integrálnunk, amiben többször is szerepel a $\sqrt[3]{x}$. Ezt jó lenne eltűntetni, ezért helyettesítsük őt egy új változóval. Arra számítunk, hogy a helyettesítés után egy racionális törtfüggvényt kapunk.

$$t=\sqrt[3]{x} \Rightarrow x=t^3$$

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 \;\Rightarrow\; dx = 3t^2 dt$$

Hajtsuk végre a helyettesítést az integrandusban, és egyszerűsítsük a kapott függvényt.

$$\int \frac{1}{t^3 t + 2t^3 + t^2} 3t^2 dt = 3\int \frac{1}{t^4 + 2t^3 + t^2} t^2 dt = 3\int \frac{1}{t^2\left(t^2 + 2t + 1\right)} t^2 dt = 3\int \frac{1}{t^2 + 2t + 1} dt$$

A nevezőben felismerhetjük $t+1$ négyzetét.

$$3\int \frac{1}{t^2 + 2t + 1} dt = 3\int \frac{1}{(t+1)^2} dt$$

A várakozásnak megfelelően egy racionális törtfüggvényt kaptunk, ráadásul egy nagyon egyszerű törtet. Nincs szükség résztörtekre bontásra, hanem rögtön tudjuk integrálni a törtet. Annyit kell csak tennünk, hogy tört helyett negatív kitevős hatványt írunk. A hatvány integrálása után egyből helyettesítsük vissza az eredeti változót.

$$3\int \frac{1}{(t+1)^2} dt = 3\int (t+1)^{-2} dt = 3\frac{(t+1)^{-1}}{-1} + c = -\frac{3}{t+1} + c = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1} + c$$

9. feladat: $\int \frac{2e^{2x} + 3e^x}{e^{2x} + 1} dx$

Megoldás: Az integrandus olyan tört, amiben több helyen is szerepel az exponenciális függvény, ezért logikusnak tűnik ezt helyettesíteni egy új változóval.

$$t = e^x \;\Rightarrow\; x = \ln t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \;\Rightarrow\; dx = \frac{1}{t} dt$$

Végezzük el a helyettesítést. Használjuk fel, hogy $e^{2x} = \left(e^x\right)^2$. A helyettesítés után egyszerűsítsünk.

$$\int \frac{2e^{2x} + 3e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{2\left(e^x\right)^2 + 3e^x}{\left(e^x\right)^2 + 1} dx = \int \frac{2t^2 + 3t}{t^2 + 1} \frac{1}{t} dt = \int \frac{t(2t+3)}{t^2+1} \frac{1}{t} dt = \int \frac{2t+3}{t^2+1} dt$$

Olyan racionális törtet kaptunk, aminek nevezője szorzattá nem bontható másodfokú polinom. (t^2+1 -nek nincs valós gyöke.)

Daraboljuk szét a törtet két tört összegére úgy, hogy az első $\frac{f'}{f}$ típusú legyen, a második számlálójában pedig csak konstans maradjon. Mivel a nevező deriváltja $\left(t^2+1\right)' = 2x$, a darabolás a következő:

$$\int \frac{2t+3}{t^2+1} dt = \int \frac{2t}{t^2+1} + \frac{3}{t^2+1} dt$$

Emeljük ki a második tört számlálójából a konstanst a tört elé, s így egy alapintegrált kapunk. Hajtsuk végre az integrálást, és helyettesítsük vissza az eredeti változót.

$$\int \frac{2t}{t^2+1} + \frac{3}{t^2+1} dt = \int \frac{2t}{t^2+1} + 3\frac{1}{t^2+1} dt = \ln\left|t^2+1\right| + 3\operatorname{arctg} t + c = \ln\left|e^{2x}+1\right| + 3\operatorname{arctg}\left(e^x\right) + c$$

10. feladat: $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx$

Megoldás: Most egy határozott integrált kell kiszámolnunk. Mivel az integrandus olyan tört, aminek nevezőjében egy elsőfokú kifejezés gyöke áll, a primitív függvény előállításához célszerű lenne ezt a gyökös kifejezést helyettesíteni. De ha határozott integrált helyettesítéssel számolunk, akkor nem csak a függvényben kell végrehajtani helyettesítést, hanem a határokban is, mert az új változó bevezetésével az integrálási határok is megváltozhatnak. Innentől két lehetőség közül választhatunk.
Az egyik lehetőség, hogy elvégezzük határozatlanul a függvény integrálását, és a visszahelyettesítés után visszatérünk a primitív függvénnyel az eredeti határozatlan integrálhoz, s a régi változóhoz tartozó határokat helyettesítjük a régi változó primitív függvényébe a Newton-Leibniz-formulának megfelelően. Ekkor nem kell kiszámolnunk, hogy a helyettesítéssel hogyan változnak meg a határok.
A másik lehetőség, hogy a helyettesítés során nem csak az integrandusban helyettesítünk, hanem kiszámoljuk az új változóhoz tartozó integrálási határokat is. Ekkor elég az új változóhoz tartozó primitív függvényt meghatározni, visszahelyettesítésre nincs szükség. Az új változóhoz tartozó határokkal számolhatjuk az integrál értékét a Newton-Leibniz-formulából, az új változóhoz tartozó primitív függvénybe történő behelyettesítéssel.
Haladjunk most az első úton, azaz végezzük el külön a határozatlan integrálást, új yváltozót bevezetve a nevező helyére.

$$t=\sqrt{3x+1} \;\Rightarrow\; t^2=3x+1 \;\Rightarrow\; x=\frac{t^2-1}{3}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{3} \;\Rightarrow\; dx=\frac{2t}{3}dt$$

Végezzük el a helyettesítést az integrandusban. Utána egyszerűsítsünk, hajtsuk végre az integrálást és helyettesítsünk vissza.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}}dx=\int \frac{\frac{t^2-1}{3}}{t}\frac{2}{3}tdt=\frac{2}{9}\int t^2-1dt=\frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+c=$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{\left(\sqrt{3x+1}\right)^3}{3}-\sqrt{3x+1}\right)+c=\frac{2}{9}\left(\frac{\sqrt{(3x+1)^3}}{3}-\sqrt{3x+1}\right)+c$$

Most térjünk vissza a primitív függvénnyel határozott integrálhoz. Helyettesítsük az integrálási határokat a Newton-Leibniz-formula szerint. Utána végezzük el a számolásokat.

$$\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}dx=\left[\frac{2}{9}\left(\frac{\sqrt{(3x+1)^3}}{3}-\sqrt{3x+1}\right)\right]_0^5=$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{\sqrt{(3\cdot5+1)^3}}{3}-\sqrt{3\cdot5+1}\right)-\frac{2}{9}\left(\frac{\sqrt{(3\cdot0+1)^3}}{3}-\sqrt{3\cdot0+1}\right)=$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{\sqrt{16^3}}{3}-\sqrt{16}\right)-\frac{2}{9}\left(\frac{\sqrt{1^3}}{3}-\sqrt{1}\right)=\frac{2}{9}\left(\frac{64}{3}-4\right)-\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}-1\right)=4$$

Ha a másik úton haladunk, akkor a következőt kell tennünk. A régi x_1 és x_2 integrálási határokból, helyettesítést megadó $t=\sqrt{3x+1}$ egyenletet felhasználva kiszámoljuk az új integrálási határokat. Jelölje az új határokat t_1 és t_2 .
Alsó határ: $t_1=\sqrt{3x_1+1}=\sqrt{3\cdot5+1}=\sqrt{16}=4$.

Felső határ: $t_2=\sqrt{3x_2+1}=\sqrt{3\cdot 0+1}=\sqrt{1}=1$.
Helyettesítsünk a határozott integrálban, de ne csak az integrálandó függvényben helyettesítsünk, hanem a határokban is. Utána a függvényt ugyanúgy integráljuk, mint az előbb. (Az integrálás részleteit most nem írjuk le, hiszen korábban szerepelt.)

$$\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\,dx=\int_1^4 \frac{\frac{t^2-1}{3}}{t}\frac{2}{3}t\,dt=\ldots=\left[\frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\right]_1^4$$

Ezután rögtön helyettesítjük a határokat a Newton-Leibniz-formula szerint.

$$\left[\frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\right]_1^4=\frac{2}{9}\left(\frac{4^3}{3}-4\right)-\frac{2}{9}\left(\frac{1^3}{3}-1\right)=4$$

Természetesen mindegy, melyik utat választjuk. Fontos azonban az, hogy ha egy határozott integrált számolunk helyettesítéssel, akkor általában megváltoznak az integrális határok. Ha új változóra térünk át, akkor a helyettesítést leíró egyenletből tudjuk kiszámolni az új integrálási határokat. Ezért helyettesítés után nem írhatjuk az integrált a régi változóhoz tartozó határokkal.

11. feladat: $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{e^x+2}\,dx$

Megoldás: Mivel olyan törtet kell integrálnunk, aminek nevezőjében szerepel az exponenciális függvény, célszerű próbálkozni az exponenciális helyettesítésével. A feladatot oldjuk meg úgy, hogy külön elvégezzük a határozatlan integrálást visszahelyettesítéssel együtt, majd utána térünk vissza a határozott integrálhoz.

$t=e^x \;\Rightarrow\; x=\ln t$

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t} \;\Rightarrow\; dx=\frac{1}{t}dt$

Írjuk be ezeket az integrandusba.

$$\int \frac{4}{e^x+2}\,dx=\int \frac{4}{t+2}\frac{1}{t}\,dt=\int \frac{4}{t(t+2)}\,dt$$

A helyettesítés után egy racionális törtfüggvényt kaptunk. Ezek integrálásáról volt szó a lecke korábbi részeiben. Mivel a nevező szorzat alakban van, így rögtön felbonthatjuk az integrálandó törtet résztörtekre. Mivel a nevezőben két elsőfokú tényező van, ezért két résztört lesz, melyek számlálója egy-egy konstans. A résztörteket rögtön hozzuk közös nevezőre, és számlálót rendezzük a változó, azaz t hatványai szerint.

$$\frac{4}{t(t+2)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+2}=\frac{A(t+2)+Bt}{t(t+2)}=\frac{(A+B)t+2A}{t(t+2)}$$

Írjuk fel az egyenletrendszert a számlálók azonos fokszámú tagjainak egyenlőségéből.
$0=A+B$ (Az elsőfokú tagok egyenlősége. A bal oldalon nincs t-s tag , így 0 az együttható.)
$4=2A$ (A konstansok egyenlősége.)
A második egyenletből $A=2$, amit az elsőbe helyettesítve $B=-2$ -t kapunk.
A számlálók ismeretében térjünk vissza az integrálhoz. Írjuk be a résztörteket az integrandusba, majd végezzük el az integrálást. Utána helyettesítsük vissza régi változót.

$$=2\ln\left|e^x\right|-2\ln\left|e^x+2\right|+c=2x-2\ln\left|e^x+2\right|+c=2\left(x-\ln\left|e^x+2\right|\right)+c$$

A primitív függvénnyel térjünk vissza a határozott integrálhoz. Helyettesítsük a határokat a Newton-Leibniz-formula szerint, és végezzük el a számolásokat.

$$\int_0^1 \frac{4}{e^x+2}\,dx = \left[2\left(x-\ln\left|e^x+2\right|\right)\right]_0^1 = 2\left(1-\ln\left|e^1+2\right|\right)-2\left(0-\ln\left|e^0+2\right|\right)=$$

$$=2\left(1-\ln\left|e+2\right|\right)+2\ln\left|1+2\right| \approx 1.09$$

Természetes most is eljárhattunk volna úgy, hogy kiszámoljuk a helyettesítés utáni új integrálási határokat. Jelölje a régi határokat x_1 és x_2, az új határokat pedig t_1 és t_2. Ekkor a helyettesítést leíró egyenletből a következőket kapjuk.

$t_1 = e^{x_1} = e^0 = 1$ (Az alsó határok.)

$t_2 = e^{x_2} = e^1 = e$ (A felső határok.)

Ha határokat is helyettesítjük a határozott integrálban, akkor az alábbit kapjuk.

$$\int_0^1 \frac{4}{e^x+2}\,dx = \int_1^e \frac{4}{t+2}\frac{1}{t}\,dt$$

A primitív függvény meghatározása ugyanúgy történik mint az előbb, azonban az új változóhoz tartozó primitív függvénybe rögtön helyettesíthetjük a határokat.

$$\int_1^e \frac{4}{t+2}\frac{1}{t}\,dt = \ldots = \left[2\ln|t|-2\ln|t+2|\right]_1^e =$$

$$=\left(2\ln|e|-2\ln|e+2|\right)-\left(2\ln|1|-2\ln|1+2|\right)\approx 1.09$$

Természetes ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az előbb.

Ellenőrző kérdések

1. kérdés: $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

$2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+c$

$\frac{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{2}+c$

$2\sin\sqrt{x}+c$ (X)

$\frac{\sin\sqrt{x}}{2}+c$

2. kérdés: $\int \frac{e^x}{\sin^2\left(e^x\right)}\,dx$

$-\mathrm{ctg}\left(e^x\right)+c$ (X)

$\mathrm{ctg}\left(e^x\right)+c$

$-e^x\mathrm{ctg}\left(e^x\right)+c$

$e^x\mathrm{ctg}\left(e^x\right)+c$

3. kérdés: $\int x^2\cos\left(x^3\right)dx$

$\frac{1}{3}x^3\sin\left(x^3\right)+c$

$3x^3\sin\left(x^3\right)+c$

$\frac{1}{3}\sin\left(x^3\right)+c$ (X)

$3\sin\left(x^3\right)+c$

4. kérdés: $\int \frac{6x+4}{\sqrt{2x-1}}\,dx$

$\frac{3}{2}\frac{3x^2+4x}{\sqrt{(2x-1)^3}}+c$

$3\frac{3x^2+4x}{\sqrt{(2x-1)^3}}+c$

$\sqrt{(2x-1)^3}+5\sqrt{2x-1}+c$

$\sqrt{(2x-1)^3}+7\sqrt{2x-1}+c$ (X)

5. kérdés: $\int e^{\sqrt{3x-4}}\,dx$

$\frac{2}{3}e^{\sqrt{3x-4}}\left(\sqrt{3x-4}+1\right)+c$

$\frac{2}{3}e^{\sqrt{3x-4}}\left(\sqrt{3x-4}-1\right)+c$ (X)

$\frac{1}{3}e^{\sqrt{3x-4}}\left(\sqrt{3x-4}+1\right)+c$

$\frac{1}{3}e^{\sqrt{3x-4}}\left(\sqrt{3x-4}-1\right)+c$

6. kérdés: $\int \frac{1}{4x\sqrt{x}+4x+\sqrt{x}}\,dx$

$\frac{-1}{4\sqrt{x}+2}+c$

$\frac{-4}{2\sqrt{x}+1}+c$

$\frac{-2}{2\sqrt{x}+1}+c$

$\frac{-1}{2\sqrt{x}+1}+c$ (X)

7. kérdés: $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

$\mathrm{arctg}\left(e^x\right)+c$ (X)

$2\mathrm{arctg}\left(e^x\right)+c$

$\ln\left(e^{2x}+1\right)+c$

$\frac{\ln\left(e^{2x}+1\right)}{2}+c$

8. kérdés: $\int_1^8 \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

$\frac{e^2-e}{3}$

e^2-e

$3\left(e^2-e\right)$ (X)

$6\left(e^2-e\right)$

9. kérdés: $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x+1}dx$

$\ln\left(e^2+1\right)-\ln\left(e+1\right)$ (X)

$\ln\left(e^2+1\right)+\ln\left(e+1\right)$

$\ln 3-\ln 2$

$\ln 3+\ln 2$