5. Lineáris Algebra

5.3. Sajátérték, sajátvektor

Elméleti összefoglaló

Egy négyzetes mátrix sajátértéke és sajátvektora a lineáris algebra legfontosabb fogalmai közé tartoznak, és az alkalmazásokban fontos szerepet játszanak. Például minden mátrix alkalmas mátrixokkal való szorzásokkal olyan felső háromszögmátrixszá alakítható, ahol a főátlóban a sajátértékek állnak. Ebből következik, hogy a determináns a sajátértékek szorzata.
Csak a két- és háromdimenziós esetet tárgyaljuk.

Tekintsük a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ mátrixot. Ez azonosítható a szokásos $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ egységvektorokkal felírt $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorral is és a háromdimenziós tér egy pontjával is. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Ekkor, ahogy azt a mátrixok szorzásánál tanultuk $\mathbf{Av}$ is 3×1 típusú mátrix, illetve háromdimenziós vektor vagy pont. Erre úgy is gondolhatunk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixszal való szorzás minden térbeli ponthoz egy másik térbeli pontot rendel, ez egy geometriai transzformáció. Jelölje ezt a transzformációt $\mathbf{T_A}$. A mátrixok szorzására vonatkozó azonosságok miatt, ekkor minden $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{3\times1}$ vektor, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbf{T_A}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{T_A}(\mathbf{v}) + \mathbf{T_A}(\mathbf{w})$$
$$\mathbf{T_A}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{T_A}(\mathbf{v}).$$

Ez a két tulajdonság azt jelenti, hogy a $\mathbf{T_A}$ **lineáris transzformáció**. A lineáris transzformációk rengeteg alkalmazással bírnak, például a számítógépes grafikában.

Ezek szerint tehát minden mátrix egy lineáris transzformációt is jelent. Ez fordítva is igaz, minden lineáris transzformáció egy alkalmas mátrixszal való szorzással adható meg.

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{3\times1}$ és $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$, továbbá $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor a λ számot az $\mathbf{A}$ mátrix **sajátértékének**, az $\mathbf{s}$ vektort pedig a λ -hoz tartozó **sajátvektornak** hívjuk, ha

$$\mathbf{As} = \lambda\mathbf{s}\,.$$

Mivel $\mathbf{As} = \lambda\mathbf{s}$ azt jelenti, hogy $\mathbf{As} - \lambda\mathbf{s} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_3)\mathbf{s} = \mathbf{0}$ a λ -hoz tartozó sajátvektor az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_3$ együttható mátrixszú $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_3)\mathbf{s} = \mathbf{0}$ úgynevezett homogén lineáris egyenletrendszer megoldása. Könnyű bebizonyítani, hogy egy sajátvektor tetszőleges számszorosa is ugyanahhoz a sajátértékhez tartozó sajátvektor, a sajátvektornak csak az iránya egyértelmű.

Egy homogén lineáris egyenletrendszernek mindig van megoldása, hiszen ha minden ismeretlen értéke nulla, akkor minden egyenlet nyilvánvalóan teljesül. Ezt a megoldást triviális megoldásnak hívjuk. A triviális megoldás az egyetlen megoldás, ha az együttható mátrix teljes rangú, ami akkor következik be, ha az együttható mátrix determinánsa nem nulla. A Gauss-eliminálásnál ez úgy jelentkezik, hogy minden ismeretlen egyértelműen kiszámolható, a megoldás felírásához nem kell paramétereket bevezetni.

A homogén lineáris egyenletrendszernek nem triviális megoldása ezek szerint csak akkor van, ha az együttható mátrix determinánsa nulla. Ezekből következik, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei a

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_3|=0$$

úgynevezett **sajátegyenlet** gyökei. A fenti képletben a bal oldalon álló kifejezést, ami három dimenzióban a λ egy harmadfokú polinomja, az $\mathbf{A}$ mátrix **karakterisztikus polinomjának** hívjuk. Egy adott λ sajátértékhez tartozó sajátvektor pedig a $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_3)\mathbf{s}=\mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer nem triviális megoldása.

Geometriailag, a mátrixszal megadott lineáris transzformáció a sajátvektort csak megnyújtja, a nyújtást megadó konstans éppen a sajátérték.

A következőkben az lesz a célunk, hogy meghatározzuk mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.

Kidolgozott feladatok

1. feladat. Számoljuk ki az $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

Megoldás: A sajátértékek kiszámolásával kezdünk. Tudjuk, hogy ezek a karakterisztikus polinom gyöke, ami 2×2 mátrix esetén másodfokú polinom. Az első lépés tehát, hogy kiszámoljuk a $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_2$ mátrix determinánsát. Most

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_2=\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-\lambda&0\\1&3-\lambda\end{bmatrix},$$

ennek determinánsa pedig

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&0\\1&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)-1\cdot0=(2-\lambda)(3-\lambda)=\lambda^2-5\lambda+6\,.$$

A sajátértékeket tehát megkapjuk, ha kiszámoljuk a $\lambda^2-5\lambda+6=0$ karakterisztikus polinom gyökeit. Ezek nyilván $\lambda_1=2$, és $\lambda_2=3$.

A $\lambda_1=2$ -hez tartozó $\mathbf{s}_1=\begin{bmatrix}s_1\\s_2\end{bmatrix}$ egyelőre ismeretlen sajátvektort úgy kapjuk meg, hogy megoldjuk az s_1, s_2 ismeretlenekre vonatkozó $\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}_2$ együttható mátrixszú homogén lineáris egyenletrendszert. Mivel

$$\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}_2=\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},$$

ennek az egyenletrendszernek a kibővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{cc|c}0&0&0\\1&1&0\end{array}\right].$$

Gauss-eliminálással megoldjuk ezt az egyenletrendszert. Első lépésként felcseréljük az első és a második sort.

$$\left[\begin{array}{cc|c}0&0&0\\1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{\boxed{1.}\leftrightarrow\boxed{2.}}\left[\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right].$$

Ezzel véget is ért a Gauss-eliminálás, hiszen az együttható mátrix felső háromszögmátrixszá alakult. Az alsó sor az érdektelen $0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 = 0$ egyenletet jelenti. Az első sor az

$$1 \cdot s_1 + 1 \cdot s_2 = 0$$

egyenletet. Ebből egyik ismeretlen sem fejezhető ki egyértelműen. Ha például az s_2 helyére paramétert vezetünk be, legyen mondjuk $s_2 = t$, akkor $s_1 = -t$. Az egyenletrendszer végtelen sok megoldása az $\begin{cases} s_1 = -t \\ s_2 = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ alakban írható fel.

A definíciója szerint a nullvektor nem lehet sajátvektor, ezért a λ_1 -hez tartozó $\mathbf{s}_1$ sajátvektorok így adhatók meg:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}, t \neq 0 .$$

Például, ha t -nek az 1 értéket választjuk, akkor kapjuk az $\mathbf{s}_1^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektort, ami valóban az $\mathbf{A}$ mátrix 2 sajátértékhez tartózó egyik sajátvektora, hiszen

$$\mathbf{A}\mathbf{s}_1^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{s}_1^* .$$

De, ha t -nek mondjuk a -4 értéket választjuk, akkor kapjuk az $\mathbf{s}_1^{**} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ vektort, ami szintén az $\mathbf{A}$ mátrix 2 sajátértékhez tartózó egyik sajátvektora, hiszen

$$\mathbf{A}\mathbf{s}_1^{**} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{s}_1^{**} .$$

A $\lambda_2 = 3$ -hoz tartozó $\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$ egyelőre ismeretlen sajátvektort úgy kapjuk meg, hogy megoldjuk az s_1 , s_2 ismeretlenekre vonatkozó $\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}_2$ együttható mátrixú homogén lineáris egyenletrendszert. (Az ismeretleneket ugyanúgy jelöltük, mint az előbb, de ennek nincs jelentősége, ezekre a jelölésekre csak átmenetileg van szükség.) Ebben az esetben

$$\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

és így a megoldandó homogén egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Gauss-eliminálást végzünk, az első sort hozzáadjuk a második sorhoz:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Az együttható mátrix máris felső háromszögmátrixszá alakult. Az első sorból

$$-1 \cdot s_1 = 0 ,$$

amiből $s_1 = 0$. Az utolsó kibővített mátrix által kódolt egyenletrendszer mindkét egyenletében az s_2 ismeretlen együtthatója nulla, (a második oszlop minden eleme nulla). Ez azt jelenti, hogy ennek az ismeretlennek bármi lehet az értéke, paraméterként szerepel. Tehát a homogén egyenletrendszer végtelen sok megoldása így adható meg

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

De a sajátvektor nullvektor nem lehet , ezért a λ_2 -hez tartozó $\mathbf{s}_2$ sajátvektorok így adhatók meg:

$$\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} = u \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u \in \mathbb{R}, u \neq 0.$$

Ellenőrizzük az eredményünket. Legyen $u = 2$. Ekkor $\mathbf{s}_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, és

$$\mathbf{A}\mathbf{s}_2^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \mathbf{s}_2^*,$$

ez rendben van. Ha például $u = -5$, akkor $\mathbf{s}_2^{**} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$, és

$$\mathbf{A}\mathbf{s}_2^{**} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \lambda_2 \mathbf{s}_2^{**},$$

ez is rendben van.

2. feladat. Számoljuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és a kisebbik sajátértékhez tartozó sajátvektort.

Megoldás: A karakterisztikus polinom most az

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsa, azaz

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6.$$

A $\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = -1$, ezek az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei. A két sajátérték közül a $\lambda_1 = -6$ a kisebb, ezért az ehhez tartozó sajátvektort kell meghatározni.

Legyen ez az $\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$ vektor. Ekkor megoldandó az

$$\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - (-6)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

együttható mátrixszal rendelkező homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek tehát a kibővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right].$$

Következik az eliminálás:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(-2)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Az együttható mátrix már felső háromszögmátrix, felírjuk a végtelen sok megoldást. Az első sor miatt

$$1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 = 0.$$

Legyen $s_2 = t$, ekkor $s_1 = -2t$, így a megoldás

$$\begin{cases} s_1 = -2t \\ s_2 = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Az összes megoldás közül ki kell zárnunk a triviális megoldást, ezért a $\lambda_1 = -6$ -hoz tartozó $\mathbf{s}_1$ sajátvektor

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}, t \neq 0.$$

Végezzünk ellenőrzést például a $t = \sqrt{3}$ értékre. Ekkor a konkrét sajátvektor $\mathbf{s}_1^* = \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$.

Ezzel

$$\mathbf{A}\mathbf{s}_1^* = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\sqrt{3} \\ -6\sqrt{3} \end{bmatrix} = (-6) \cdot \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{s}_1^*.$$

3. feladat. Tekintsük az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 \\ 3 & -1 & 3 \\ 7 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ mátrixot, és ellenőrizzük, hogy ennek a $\lambda = -1$ sajátértéke.

Megoldás: Ha λ sajátértéke az $\mathbf{A}$ mátrixnak, akkor $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3| = 0$. Kiszámoljuk $\lambda = -1$ esetén az $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3$ mátrixot:

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 \\ 3 & -1 & 3 \\ 7 & -4 & 8 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ennek determinánsa a második sor szerint kifejtve

$$\begin{vmatrix} -4 & 4 & -6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -4 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(36 - 24) - 3(16 - 28) = -36 + 36 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a -1 tényleg sajátértéke az $\mathbf{A}$ mátrixnak.

4. feladat. Határozzuk meg az előbbi $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 \\ 3 & -1 & 3 \\ 7 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ mátrix $\lambda = -1$ sajátértékéhez tartozó sajátvektorát.

Megoldás: A λ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}=\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$ sajátvektor a $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_3)\mathbf{s}=\mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer nem triviális megoldása. $\lambda=-1$ esetén, ahogy azt az előző feladatban már láttuk,

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_3=\begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 \\ 3 & -1 & 3 \\ 7 & -4 & 8 \end{bmatrix}-(-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & 4 & -6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -4 & 9 \end{bmatrix}.$$

A fenti homogén lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa tehát

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & -4 & 9 & 0 \end{array}\right].$$

Megoldjuk Gauss-eliminálással ezt az egyenletrendszert.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & -4 & 9 & 0 \end{array}\right]\xrightarrow{(1)\cdot\boxed{2.}+\boxed{1.}\to\boxed{1.}}\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & -4 & 9 & 0 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & -4 & 9 & 0 \end{array}\right]\xrightarrow[(7)\cdot\boxed{1.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}]{(3)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}}\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & 24 & -12 & 0 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & 24 & -12 & 0 \end{array}\right]\xrightarrow[\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\boxed{2.}]{(-2)\cdot\boxed{2.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}}\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Az együttható mátrix felső háromszög mátrix. A középső sorból $2s_2-s_3=0$. Legyen $s_2=t$, ekkor $s_3=2t$. Ezeket beírva az első sor szerinti $-s_1+4s_2-3s_3=0$ egyenletbe $-s_1+4t-6t=0$, amiből $s_1=-2t$. A keresett sajátvektor tehát

$$s=\begin{bmatrix} -2t \\ t \\ 2t \end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, t\in\mathbb{R}, t\neq 0.$$

Az ellenőrzés elvégzését az olvasóra bízzuk.

5. feladat. Határozzuk meg az előbbi feladatban szereplő $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 \\ 3 & -1 & 3 \\ 7 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit.

Megoldás: A karakterisztikus polinom az $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_3$ mátrix determinánsa. Ez a mátrix most

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_3=\begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 \\ 3 & -1 & 3 \\ 7 & -4 & 8 \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 \\ 3 & -1 & 3 \\ 7 & -4 & 8 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -5-\lambda & 4 & -6 \\ 3 & -1-\lambda & 3 \\ 7 & -4 & 8-\lambda \end{bmatrix}.$$

Látjuk ismét, hogy annyi történt, hogy a főátló elemeiből kivontunk λ -t.
A determinánst legegyszerűbb második sor szerint kifejtve

$$\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_3\right| = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 4 & -6 \\ 3 & -1-\lambda & 3 \\ 7 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$=3\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} + (-1-\lambda)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -5-\lambda & -6 \\ 7 & 8-\lambda \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -5-\lambda & 4 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$=\underline{-3(32-4\lambda-24)}-(1+\lambda)\left((-5-\lambda)(8-\lambda)+42\right)-\underline{\underline{3(20+4\lambda-28)}}=$$

Azt tudjuk erről a bonyolult kifejezésről, hogy egy harmadfokú polinom. A kiemelés lehetőségét keressük. Megpróbálunk mindhárom tagból kiemelni a λ -nak egy elsőfokú polinomját.

Mivel az aláhúzással megjelölt első tag $-12(2-\lambda)$, a dupla aláhúzással megjelölt harmadik tag $12(\lambda-2)$, ez csak $\lambda-2$ egy számszorosa lehet. Kiszámoljuk a középső tag második tényezőjét, (az első tényező nem lehet $\lambda-2$ számszorosa):

$$(-5-\lambda)(8-\lambda)+42=-40-8\lambda+5\lambda+\lambda^2+42=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2).$$

Kiderült tehát, hogy mind a három tagból kiemelhető $\lambda-2$. Így

$$=\underline{-3(32-4\lambda-24)}-(1+\lambda)\left((-5-\lambda)(8-\lambda)+42\right)-\underline{\underline{3(20+4\lambda-28)}}=$$

$$=12(\lambda-2)-(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)-12(\lambda-2)=$$

$$=(\lambda-2)\left(12-(\lambda+1)(\lambda-1)-12\right)=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1).$$

A karakterisztikus polinom tehát $(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)$, és a

$$(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)=0$$

egyenlet gyökei, a sajátértékek: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$, és $\lambda_3=2$.

6. feladat. Határozzuk meg az $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

Megoldás: A karakterisztikus polinomot megadó determinánst fejtsük ki az első sora szerint.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$=(1-\lambda)\left((1-\lambda)^2-1\right)+1-\lambda=(1-\lambda)\left((1-\lambda)^2-1+1\right)=(1-\lambda)^3.$$

Az $(1-\lambda)^3=0$ egyenletnek egy darab háromszoros gyöke van, a $\lambda=1$, ez tehát az egyetlen sajátérték.

Meghatározzuk a λ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}=\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$ sajátvektort. Mivel

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_3=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}-1\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

a megoldandó homogén lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\xrightarrow{\boxed{1.}\leftrightarrow\boxed{2.}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\xrightarrow{(1)\cdot\boxed{2.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Véget is ért az eliminálás. A második sorból $-s_2=0$, azaz $s_2=0$. Az első sor alapján $s_1+s_3=0$. Legyen $s_3=t$. Ekkor $s_1=-t$. Tehát a keresett sajátvektor

$$\mathbf{s}=\begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t\in\mathbb{R}, t\neq 0.$$

7. feladat. Határozzuk meg az $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -3 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

Megoldás: Most a karakterisztikus polinom, a determinánst az első sor szerint kifejtve

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 & -4 \\ 3 & -1-\lambda & 3 \\ 4 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$-(3+\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix}+(-4)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1-\lambda \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$=-(3+\lambda)\big(-(1+\lambda)(5-\lambda)+9\big)-3\big(3(5-\lambda)-12\big)-4\big(-9+4(1+\lambda)\big)=$$

$$=-(3+\lambda)\big(-(1+\lambda)(5-\lambda)+9\big)+11-7\lambda=$$

$$=-(3+\lambda)(\lambda-2)^2+11-7\lambda.$$

Most nincs mód kiemelésre, nem nagyon lehet mást csinálni, mint kiszámolni a kanonikus alakot. Elvégezve a műveleteket

$$-(3+\lambda)(\lambda-2)^2+11-7\lambda=-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1.$$

Végül vegyük észre, hogy ez az utolsó polinom könnyen szorzatra bontható:

$$-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1=-\lambda^2(\lambda-1)+\lambda-1=\left(-\lambda^2+1\right)(\lambda-1)=-(\lambda+1)(\lambda-1)^2.$$

Ez tehát a karakterisztikus polinom. Ennek gyökei $\lambda_1=-1$, és $\lambda_2=1$, ez utóbbi kétszeres gyök.

Meghatározzuk a $\lambda_1=-1$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_1=\begin{bmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{bmatrix}$ sajátvektort. Mivel

$$\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}_3=\begin{bmatrix}-3&3&-4\\3&-1&3\\4&-3&5\end{bmatrix}-(-1)\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&3&-4\\3&0&3\\4&-3&6\end{bmatrix},$$

a megoldandó homogén lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-2&3&-4&0\\3&0&3&0\\4&-3&6&0\end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-2&3&-4&0\\3&0&3&0\\4&-3&6&0\end{array}\right]\xrightarrow{\boxed{1.}\leftrightarrow\boxed{2.}}\left[\begin{array}{ccc|c}3&0&3&0\\-2&3&-4&0\\4&-3&6&0\end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3&0&3&0\\-2&3&-4&0\\4&-3&6&0\end{array}\right]\xrightarrow{(1)\cdot\boxed{2.}+\boxed{1.}\to\boxed{1.}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&0\\-2&3&-4&0\\4&-3&6&0\end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&0\\-2&3&-4&0\\4&-3&6&0\end{array}\right]\xrightarrow[(-4)\cdot\boxed{1.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}]{(2)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&0\\0&9&-6&0\\0&-15&10&0\end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&0\\0&9&-6&0\\0&-15&10&0\end{array}\right]\xrightarrow[\left(\frac{1}{5}\right)\cdot\boxed{3.}]{\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\boxed{2.}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&0\\0&3&-2&0\\0&-3&2&0\end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&0\\0&3&-2&0\\0&-3&2&0\end{array}\right]\xrightarrow{(1)\cdot\boxed{2.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&0\\0&3&-2&0\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

A második sorból $3s_2-2s_3=0$. Legyen $s_2=t$, így kell kisebb nevezőjű törtekkel számolni. Ekkor $s_3=\frac{3}{2}t$. Ezeket az első egyenletbe helyettesítve $s_1+3t-\frac{3}{2}t=0$, amiből $s_1=-\frac{3}{2}t$. Tehát

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}t \\ t \\ \frac{3}{2}t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}, t \neq 0 .$$

Végül meghatározzuk a $\lambda_2 = 1$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$ sajátvektort. Mivel

$$\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

a megoldandó homogén lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)\cdot\boxed{2.}+\boxed{1.}\to\boxed{1.}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[(4)\cdot\boxed{1.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}]{(3)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)\cdot\boxed{2.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A második sorból $s_2 = 0$. Az első sorból $-s_1 + 1 \cdot 0 - s_3 = -s_1 - s_3 = 0$. Legyen $s_3 = t$. Ekkor $s_1 = -t$. Ezek alapján az $\mathbf{s}_2$ sajátvektor

$$\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}, \ t \neq 0 .$$

Három dimenzióban a sajátértékek meghatározásának kulcsa, hogy a karakterisztikus polinomot szorzatra bontsuk, kiemeljünk belőle egy elsőfokú polinomot, mert akkor a másik másodfokú tényező gyökei már kiszámolhatók. Erre több módon is lehetőség nyílhat.

Ha a karakterisztikus polinomot megadó determináns valamelyik sorában vagy oszlopában két nulla elem van, akkor e szerint a sor vagy oszlop szerint kifejtve a determinánst a karakterisztikus polinom eleve szorzat.

Ha nem ez a helyzet, akkor kifejtve a determinánst valamelyik sor vagy oszlop szerint, az közvetlenül a kifejtés után egy harmadfokú tag és egy vagy két elsőfokú tag összege. Az elsőfokú tagokat összevonva végül is egy harmadfokú és egy elsőfokú tag összegét kapjuk.

Ha ez az elsőfokú tag számszorosa a harmadfokú tagban szereplő elsőfokú szorzónak, akkor ez kiemelhető.

A harmadfokú tag második tényezője, az, amelyik a 2×2 determináns kifejtéséből jön, másodfokú polinom. Ha ez szorzatra bontható a gyökei kiszámolásával és az egyik tényező az előbb említett elsőfokú tag számszorosa, akkor ezt a tényezőt lehet kiemelni a két tag összegéből.

Ha ezek egyikére sincs lehetőség, akkor kanonikus alakra kell hozni a karakterisztikus polinomot, és esetleg még akkor is felismerhető egy kiemelés lehetősége, amint azt az előző feladatban is láttuk.

Azzal az esettel, amikor ezekkel a fogásokkal nem bontható szorzatra a karakterisztikus polinom nem foglalkozunk.

Ez előbbi feladatban látott eset a legbonyolultabb eset, amivel a vizsgán találkozhat valaki, sőt, legtöbbször a szorzatra bontás jóval egyszerűbb lesz.

Elméleti összefoglaló

Tudjuk, hogy minden mátrix azonosítható egy lineáris transzformációval és fordítva. Gyakran a lineáris transzformációkat nem a mátrixuk megadásával, hanem a hozzárendelési utasításuk megadásával vagy „geometriai úton” definiáljuk.

Például: Legyen $\mathbf{T}$ az a háromdimenziós térben ható transzformáció, amely minden ponthoz (helyvektorhoz) a pontnak az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok által kifeszített síkra vett tükörképét rendeli.

Két kérdéssel fogunk foglalkozni: hogyan lehet egy ilyen módon definiált lineáris transzformáció mátrixát felírni, illetve hogyan lehet a sajátértékeket, sajátvektorokat „geometriai úton” meghatározni.

A linearitás miatt egy lineáris transzformációt teljesen meghatároz az, hogy az $\mathbf{i}$, a $\mathbf{j}$ és a $\mathbf{k}$ egységvektoroknak mi a képe.

Tekintsük a $\mathbf{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációt. Tegyük fel, hogy

$$\mathbf{T}(\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \mathbf{T}(\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \mathbf{T}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Ekkor a $\mathbf{T}$ lineáris transzformációhoz tartozó mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Egy pont (helyvektor) képét a $\mathbf{T}$ lineáris transzformációnál tehát úgy kapjuk, hogy a pont (helyvektor) oszlopmátrixát balról szorozzuk a fenti $\mathbf{A}$ mátrixszal:

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}.$$

Két dimenzióban hasonló a helyzet: ha $\mathbf{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció és

$$\mathbf{T}(\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \mathbf{T}(\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

akkor a $\mathbf{T}$ lineáris transzformációhoz tartozó mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$

8. feladat. Legyen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ és tekintsük a következő $\mathbf{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transzformációt

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 3v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}.$$

Igazoljuk, hogy ez lineáris transzformáció és határozzuk meg a mátrixát.

Megoldás: A linearitáshoz azt kell igazolni, hogy összeg képe a képek összege, és számszoros képe a kép számszorosa, formulákkal: tetszőleges $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorokra és α valós számra

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{T}(\mathbf{v}) + \mathbf{T}(\mathbf{w}),\ \mathbf{T}(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{T}(\mathbf{v}).$$

Ha $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, akkor $\mathbf{v}+\mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix}$. Ebből felhasználva $\mathbf{T}$ hozzárendelési utasítását

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 3(v_2 + w_2) \\ v_1 + w_1 \end{bmatrix}.$$

Mivel

$$\begin{bmatrix} 3(v_2 + w_2) \\ v_1 + w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3w_2 \\ w_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{v}) + \mathbf{T}(\mathbf{w})$$

teljesül az $\mathbf{T}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{T}(\mathbf{v}) + \mathbf{T}(\mathbf{w})$ összefüggés. Továbbá $\alpha\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \end{bmatrix}$ felhasználásával

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 3(\alpha v_2) \\ \alpha v_1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 3v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} = \alpha\mathbf{T}(\mathbf{v}),$$

így a leképezés tehát lineáris transzformáció.

Mivel $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ illetve $\mathbf{T}(\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} 3 \cdot 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, és $\mathbf{T}(\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, a $\mathbf{T}$ lineáris transzformáció $\mathbf{A}$ mátrixát úgy kapjuk, hogy ezt a két oszlopmátrixot egymás mellé írjuk:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ekkor valóban teljesül a $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$ összefüggés, hiszen egyrészt a definíciója szerint

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 3v_2 \\ v_1 \end{bmatrix},$$

másrészt a mátrix szorzás definíciója miatt

$$\mathbf{Av} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}.$$

9. feladat. Legyen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ és tekintsük a következő $\mathbf{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transzformációt

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ 2v_2 \end{bmatrix}.$$

Igazoljuk, hogy ez lineáris transzformáció és határozzuk meg a sajátértékeket és sajátvektorokat.

Megoldás: Egy lineáris transzformáció sajátértékei és sajátvektorai a transzformációhoz tartozó mátrix sajátértékei és sajátvektorai. Most is a linearitás igazolásával kezdünk: ha $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, akkor egyrészt, mivel $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{T}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} (v_1 + w_1) - (v_2 + w_2) \\ 2(v_2 + w_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (v_1 - v_2) + (w_1 - w_2) \\ 2(v_2 + w_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ 2v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 - w_2 \\ 2w_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{v}) + \mathbf{T}(\mathbf{w}),$$

másrészt, mivel $\alpha\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \alpha v_1 - \alpha v_2 \\ 2(\alpha v_2) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ 2v_2 \end{bmatrix} = \alpha\mathbf{T}(\mathbf{v}).$$

Tehát valóban lineáris transzformációval van dolgunk.

Felhasználva, hogy $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{T}(\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} 1-0 \\ 2\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Mivel $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{T}(\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} 0-1 \\ 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
Ezért a $\mathbf{T}$ lineáris transzformáció $\mathbf{A}$ mátrixa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja, kifejtve a determinánst

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 0\cdot(-1) = (1-\lambda)\cdot(2-\lambda).$$

Az $(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$ egyenlet gyökei sajátértékek, ezek tehát $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 2$.

A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$ sajátvektorok az $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}_2 = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer nem triviális megoldásai. Ennek az egyenletrendszernek a kibővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Gauss-eliminálást végzünk:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Az együtthatómátrix felső háromszög mátrix, felírható a megoldás. Mivel az együttható mátrix első oszlopa csupa nullát tartalmaz, az első ismeretlen, s_1, tetszőleges lehet: $s_1 = t$. Ezt beírva az első sor által megadott egyenletbe $0 \cdot t - s_2 = 0$, amiből $s_2 = 0$. Az egyenletrendszer megoldása tehát

$$\begin{cases} s_1 = t \\ s_2 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Kizárva a triviális megoldást

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}, t \neq 0$$

a keresett sajátvektor.

A $\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$ sajátvektorok az $\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}_2 = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer nem triviális megoldásai. Ennek az egyenletrendszernek a kibővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Itt az együtthatómátrix máris felső háromszög mátrix, nincs szükség eliminálásra. Az első sorból $-s_1 - s_2 = 0$. Legyen $s_2 = u$, ekkor $s_1 = -u$. Az egyenletrendszer megoldása tehát

$$\begin{cases} s_1 = -u \\ s_2 = u \end{cases}, u \in \mathbb{R},$$

amiből, ismét csak kizárva a nullvektort,

$$\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} -u \\ u \end{bmatrix} = u \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ u \in \mathbb{R}, u \neq 0.$$

10. feladat. Tekintsük a síkon azt a transzformációt, amelynél minden pontot tükrözünk az $y = -x$ egyenletű egyenesre. Igazoljuk, hogy ez lineáris transzformáció, és határozzuk meg a sajátértékeit és sajátvektorait.

Megoldás: Jelölje a transzformációnkat $\mathbf{T}$. $\mathbf{T}$ linearitását legegyszerűbben akkor tudjuk igazolni, ha előállítjuk $\mathbf{T}$ hozzárendelési utasítását. Ennek érdekében kiszámoljuk, hogy egy tetszőleges $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ helyvektorú P pontnak mi a képe a $\mathbf{T}$ transzformációnál.

Ehhez először felírjuk a $\mathbf{v}$ végpontján átmenő, az $y = -x$ egyenesre merőleges egyenes egyenletét. Ezután vesszük ennek az egyenesnek és az $y = -x$ egyenesnek a metszéspontját. A P képe az a P' pont, amelyre a PP' szakasz felezőpontja az előbb meghatározott metszéspont.

A $\mathbf{v}$ végpontján átmenő, az $y = -x$ egyenesre merőleges egyenes egyenlete $y = x - v_1 + v_2$. Valóban, ez a meredeksége miatt merőleges az eredeti egyenesre, ha x helyére v_1 -et írunk y értéke v_2 lesz. A két egyenes metszéspontja az

$$\begin{cases} y=-x \\ y=x-v_1+v_2 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása. Összeadva a két egyenletet $y=\frac{v_2-v_1}{2}$, ez a metszéspont második koordinátája. Ezt felhasználva az első egyenletből $x=\frac{v_1-v_2}{2}$, ami a metszéspont első koordinátája. Ha P' első koordinátáját p jelöli, akkor a felezés miatt $\frac{p+v_1}{2}=\frac{v_1-v_2}{2}$, amiből $p=-v_2$. Ha P' második koordinátáját q jelöli, akkor a felezőpont tulajdonsága miatt $\frac{q+v_2}{2}=\frac{v_2-v_1}{2}$, amiből $q=-v_1$. A P' tehát a $\begin{bmatrix} -v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix}$ helyvektorú pont. Azaz $\mathbf{T}$ hozzárendelési utasítása: tetszőleges $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ esetén

$$\mathbf{T}(\mathbf{v})=\begin{bmatrix} -v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix}.$$

Ezt felhasználva a linearitás már könnyen igazolható. Legyen $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{w}=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ két tetszőleges vektor, α tetszőleges szám. Ekkor egyrészt

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{T}\left(\begin{bmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -(v_2+w_2) \\ -(v_1+w_1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -w_2 \\ -w_1 \end{bmatrix}=\mathbf{T}(\mathbf{v})+\mathbf{T}(\mathbf{w}),$$

másrészt

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{v})=\mathbf{T}\left(\begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -(\alpha v_2) \\ -(\alpha v_1) \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} -v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix}=\alpha\mathbf{T}(\mathbf{v}).$$

$\mathbf{T}$ tehát valóban lineáris transzformáció.

Egy lineáris transzformáció sajátvektorai olyan vektorok, amelyeknek az origón átmenő egyenesét, amelyben fekszenek, a transzformáció helyben hagyja. Geometriai okokból a mi esetünkben két ilyen egyenes van: az $y=-x$ és az $y=x$ egyenes.

Az $y=-x$ egyenesben fekvő nem nulla $\mathbf{s}_1=\begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$, $t\neq 0$ vektorokat a $\mathbf{T}$ transzformáció helyben hagyja, ezért az ezekhez a sajátvektorokhoz tartozó sajátérték $\lambda_1=1$.

Az $y=x$ egyenesben fekvő nem nulla $\mathbf{s}_2=\begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix}$, $u\in\mathbb{R}$, $u\neq 0$ vektorokat a $\mathbf{T}$ transzformáció a mínusz egyszeresükbe viszi, ezért az ezekhez a sajátvektorokhoz tartozó sajátérték $\lambda_2=-1$.

Mindezeket persze az előző feladatokban látott számításokkal is megkaphatjuk.

Mivel $\mathbf{T}(\mathbf{i})=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{T}(\mathbf{j})=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, a $\mathbf{T}$ lineáris transzformáció $\mathbf{A}$ mátrixa

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-1.$$

A $\lambda^2-1=0$ egyenlet megoldásai a sajátértékek, látjuk, hogy ezek $\lambda_1=1$ és $\lambda_2=-1$.

A $\lambda_1=1$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_1=\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$ sajátvektorok az $\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}_2=\mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer nem triviális megoldásai. Ennek az egyenletrendszernek a kibővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Gauss-eliminálás következik:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Az első sorból $-s_1-s_2=0$. Legyen $s_2=t$, ekkor $s_1=-t$. Tehát a $\lambda_1=1$ sajátértékhez tartózó sajátvektorok

$$\mathbf{s}_1=\begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R},\ t\neq 0,$$

összhangban azzal, amit geometriai megfontolásokból kaptunk.

Hasonlóan a $\lambda_2=-1$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_2=\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$ sajátvektorok az $\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}_2=\mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer nem triviális megoldásai. Ennek az egyenletrendszernek a kibővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Ismét Gauss-eliminálás következik:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Az első sorból $s_1-s_2=0$. Legyen $s_2=u$, ekkor $s_1=u$. Tehát a $\lambda_2=-1$ sajátértékhez tartózó sajátvektorok

$$\mathbf{s}_2=\begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix},\ u\in\mathbb{R},\ u\neq 0.$$

Ez is ugyanaz, mint a geometriai okoskodásból kapott eredmény.

11. feladat. Tekintsük a térben azt a $\mathbf{T}$ transzformációt, amelyre $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} v_1 + v_2 \\ -v_1 + v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ tetszőleges $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ esetén. Igazoljuk, hogy ez lineáris transzformáció és határozzuk meg a sajátértékeit és sajátvektorait.

Megoldás: Ha $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$, akkor

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} (v_1+w_1)+(v_2+w_2) \\ -(v_1+w_1)+(v_2+w_2) \\ v_3+w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1+v_2 \\ -v_1+v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1+w_2 \\ -w_1+w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{v})+\mathbf{T}(\mathbf{w}), \text{ és}$$

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \alpha v_1+\alpha v_2 \\ -\alpha v_1+\alpha v_2 \\ \alpha v_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} v_1+v_2 \\ -v_1+v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \alpha\mathbf{T}(\mathbf{v}),$$

tehát a transzformáció lineáris.

Miután a definíciója alapján $\mathbf{T}(\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{T}(\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, és $\mathbf{T}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, a $\mathbf{T}$ lineáris transzformáció $\mathbf{A}$ mátrixa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Így $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2+1\right) = (1-\lambda)\left(\lambda^2-2\lambda+2\right).$$

A $(1-\lambda)\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)=0$ egyenletnek egy valós gyöke van a $\lambda=1$, hiszen a másodfokú polinom diszkriminánsa negatív. Ezért a mátrixnak ez az egy sajátértéke van.

Meghatározzuk az ehhez tartozó $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$ sajátvektorokat, amik az $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_3=\mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer nem triviális megoldásai. Az egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Felcseréljük a második és harmadik sort, ezután a megoldás leolvasható.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\boxed{1.}\leftrightarrow\boxed{2.}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Mivel a harmadik oszlop csupa nullát tartalmaz $s_3 = t$ tetszőleges. Az első és a második sorból pedig következik, hogy $s_1 = 0$ és $s_3 = 0$. Ezért a keresett sajátvektorok:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R},\ t \neq 0.$$

12. feladat. Tekintsük a térben az $S\colon x - z = 0$ egyenletű síkot. Legyen $\mathbf{T}$ az a transzformáció, ami minden pontot merőleges erre a síkra vetít. Igazoljuk, hogy ez lineáris transzformáció és határozzuk meg a sajátértékeit és sajátvektorait.

Megoldás: Azzal kezdünk, hogy felírjuk a transzformáció hozzárendelési utasítását. Ehhez azt kell kiszámolnunk, hogy mi lesz a képe egy tetszőleges $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ helyvektornak. Az S sík normálvektora $\mathbf{n} = (1,0,-1)$. A $\mathbf{v}$ végpontján átmenő $\mathbf{n}$ irányvektorú egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$\begin{cases} x = v_1 + t \\ y = v_2 \\ z = v_3 - t \end{cases}.$$

Ennek és az S síknak a döféspontja lesz $\mathbf{v}$ végpontjának képe. A

$$v_1 + t - (v_3 - t) = 0$$

egyenletből $t = \dfrac{-v_1 + v_3}{2}$. Ezért a döféspont három koordinátája

$$x = v_1 + \frac{-v_1 + v_3}{2} = \frac{v_1 + v_3}{2},\ y = v_2,\ z = v_3 - \frac{-v_1 + v_3}{2} = \frac{v_1 + v_3}{2}.$$

Ezért a transzformáció hozzárendelési utasítása: tetszőleges $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ esetén

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \dfrac{v_1 + v_3}{2} \\ v_2 \\ \dfrac{v_1 + v_3}{2} \end{bmatrix}.$$

Igazoljuk, hogy $\mathbf{T}$ lineáris. Legyen $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$ tetszőleges. Ekkor

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \frac{(v_1+w_1)+(v_3+w_3)}{2} \\ v_2+w_3 \\ \frac{(v_1+w_1)+(v_3+w_3)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_1+v_3}{2} \\ v_2 \\ \frac{v_1+v_3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{w_1+w_3}{2} \\ w_2 \\ \frac{w_1+w_3}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{v}) + \mathbf{T}(\mathbf{w}),$$

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha v_1+\alpha v_3}{2} \\ \alpha v_2 \\ \frac{\alpha v_1+\alpha v_3}{2} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{v_1+v_3}{2} \\ v_2 \\ \frac{v_1+v_3}{2} \end{bmatrix} = \alpha\mathbf{T}(\mathbf{v}).$$

Ezek együtt azt jelentik, hogy $\mathbf{T}$ lineáris.

Geometriailag világos, hogy ez a lineáris transzformáció minden, az S síkban fekvő, nullvektortól különböző helyvektort helyben hagy. Ezek tehát sajátvektorok, mégpedig az 1 sajátértékhez tartozóak. Az is világos, hogy minden , az S síkra merőleges, nullvektortól különböző helyvektor képe a nullvektor, ezek tehát sajátvektorok, mégpedig a 0 sajátértékhez tartozó sajátvektorok. Más fajta sajátvektor pedig nincs.

Mindezt számolással is igazoljuk.

Miután a hozzárendelési utasítása alapján $\mathbf{T}(\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{T}(\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, és $\mathbf{T}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, a $\mathbf{T}$ lineáris transzformáció $\mathbf{A}$ mátrixa

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = (1-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda\right).$$

A $(1-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda\right)=0$ egyenlet gyökei $\lambda_1 = 0$, és $\lambda_2 = 1$, ez utóbbi kétszeres gyök.

A $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$ sajátvektorok az

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

kibővített mátrixszú egyenletrendszer nem triviális megoldásai.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}} \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A második sorból $s_2 = 0$. Az első sorból $\frac{s_1}{2} + \frac{s_3}{2} = 0$. Legyen $s_3 = t$ tetszőleges paraméter, ekkor $s_1 = -t$, ezért

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}, \ t \neq 0 .$$

A $\lambda_2 = 1$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$ sajátvektorok az

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

kibővített mátrixszú egyenletrendszer nem triviális megoldásai.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A középső oszlop minden eleme nulla, így $s_2 = u$ tetszőleges paraméter. Az első sorból $-\frac{s_1}{2} + \frac{s_3}{2} = 0$. Legyen $s_3 = p$ tetszőleges paraméter, ekkor $s_1 = p$. Ezért a sajátvektor

$$\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} p \\ u \\ p \end{bmatrix}, \ p, u \in \mathbb{R}, \ p^2 + u^2 \neq 0 .$$

(A $p^2 + u^2 \neq 0$ feltétel azt fogalmazza meg, hogy p és u nem lehet egyszerre nulla.)

Ellenőrző kérdések

1. kérdés. Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei

$\lambda_1 = 5$ és $\lambda_2 = 0$.
$\lambda_1 = -5$ és $\lambda_2 = 0$. (x)
$\lambda_1 = -5$ és $\lambda_2 = 1$.
$\lambda_1 = 5$ és $\lambda_2 = 1$.

2. kérdés. Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei

$\lambda_1 = -5$ és $\lambda_2 = -2$.
$\lambda_1 = 5$ és $\lambda_2 = 2$.
$\lambda_1 = -5$ és $\lambda_2 = 2$. (x)
$\lambda_1 = 5$ és $\lambda_2 = -2$.

3. kérdés. Tekintsük az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ mátrixot. Melyik állítás igaz?

Mindkét sajátérték pozitív.
A sajátértékek különböző előjelűek.
Az egyik sajátérték a nulla.
Mindkét sajátérték negatív. (x)

4. kérdés. Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora

$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.
$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$.
$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. (x)
$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5. kérdés. Ha $\mathbf{s}$ az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora, akkor

$\mathbf{s}$ mindkét koordinátája azonos előjelű. (x)

s koordinátái különböző előjelűek.
s első koordinátája nulla.
s második koordinátája nulla.

6. kérdés. Az $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 3 & 3 & -2\end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei

$\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$ és $\lambda_3=-2$.
$\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$ és $\lambda_3=-2$. (x)
$\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$ és $\lambda_3=2$.
$\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ és $\lambda_3=-2$.

7. kérdés. Az $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 3 & 3 & -2\end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora

$\mathbf{s}=\begin{bmatrix}2\\ 2\\ 0\end{bmatrix}$.
$\mathbf{s}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 0\end{bmatrix}$.
$\mathbf{s}=\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 0\end{bmatrix}$. (x)
$\mathbf{s}=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$.

8. kérdés. Az $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 3\end{bmatrix}$ mátrix legkisebb sajátértékéhez tartozó egyik sajátvektora

$\mathbf{s}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 3\end{bmatrix}$.

$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. (x)

9. kérdés. Tekintsük az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixot. Melyik állítás igaz?

Van olyan sajátérték, amelynek mindhárom koordinátája pozitív.
Minden sajátértéknek legalább az egyik koordinátája nulla.
Van olyan sajátérték, amelynek egyik koordinátája sem nulla. (x)
Van olyan sajátérték, amelynek pontosan egy koordinátája nulla.