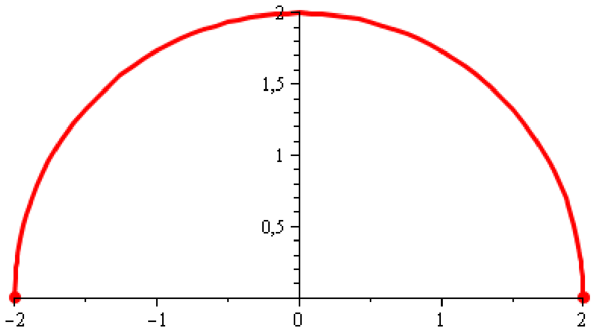
# 1. Síkgörbék

## 1.2. Paraméteres síkgörbék

### Elméleti összefoglaló

Tekintsük a következő ábrán látható síkgörbét. Ez tekinthető az $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ , $D_f=[-2,2]$ függvény grafikonjának, az $x^2+y^2=4$ implicit módon megadott függvény $[-2,2]\times[0,3]$ téglalapba eső darabjának, azoknak a pontoknak a mértani helyének a síkon, amelyek az origótól $2$ egység távolságra vannak és a második koordinátájuk nem negatív. Végül úgy is tekinthetünk erre a vonalra, mint egy síkban mozgó test egy pontjának a pályájára.




**0-1. ábra**

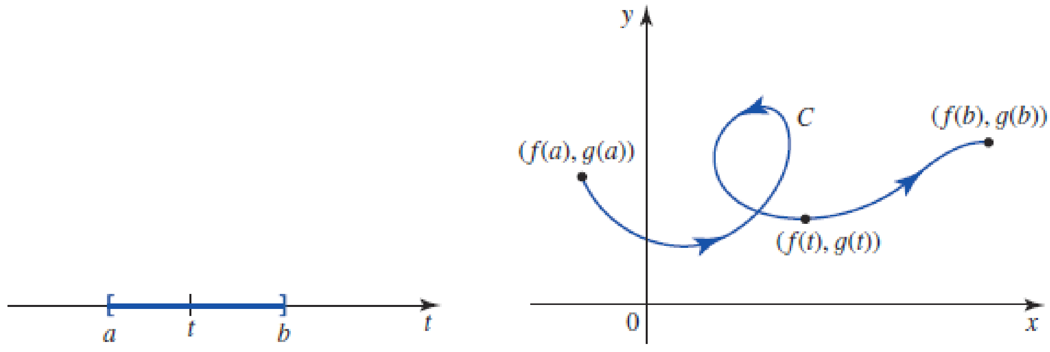
Ha a síkgörbe ezt akarja reprezentálni, akkor az előző három leírás mindegyikével kapcsolatban hiányosságok merülnek fel. Például egyikből sem derül ki, hogy melyik a kezdőpont, melyik irányban haladt végig a test a pályáján, a mozgás kezdete után $t$ időponttal a pálya melyik pontjában volt éppen a test megfigyelt pontja.

Egy mozgó pont pályáját, egy síkgörbét, matematikailag úgy is le lehet írni, hogy megadjuk, hogy a mozgás kezdete után egy $t$ időpontban mi a mozgó pont két, $t$ -től nyilván függő, $\left(x(t),y(t)\right)$ koordinátája.

Kicsit pontosabban egy $C$ síkgörbe **paraméteres megadása** esetén megadunk két, ugyanazon az $[a,b]$ intervallumon értelmezett $f$ és $g$ függvényt, és tekintjük a síkon az összes $\left(f(t),g(t)\right)$, $t\in[a,b]$ koordinátájú pontot. A $C$ görbe **paraméterezése** a

$$c(t)=\left(f(t),g(t)\right),\ t\in[a,b]$$

formula.
Az $f(t)$ és $g(t)$ formulákat **paraméteres egyenleteknek** hívjuk, az $[a,b]$ intervallum a **paraméter intervallum**.



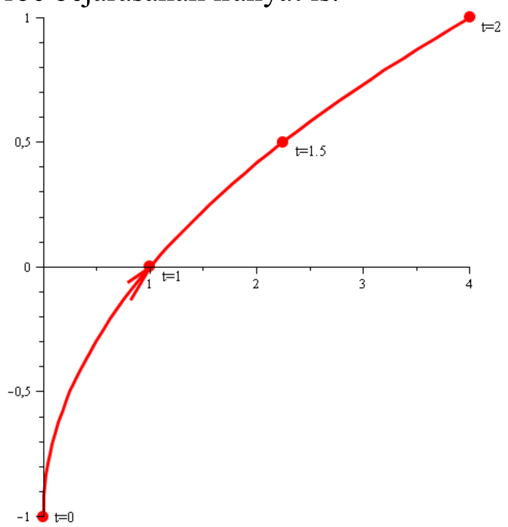

**0-2. ábra Síkgörbe paraméteres megadása**

Az $\left(f(a), g(a)\right)$ pont a görbe **kezdőpontja**, az $\left(f(b), g(b)\right)$ pont a görbe **végpontja**.

Példaként tekintsük a

$$c(t) = \left(t^2, t-1\right),\ t \in [0,2]$$

paraméterezést. Az alábbi ábrán a görbét látjuk, néhány paraméterértékhez tartozó pontot külön is feltüntetve, és a görbe bejárásának irányát is.



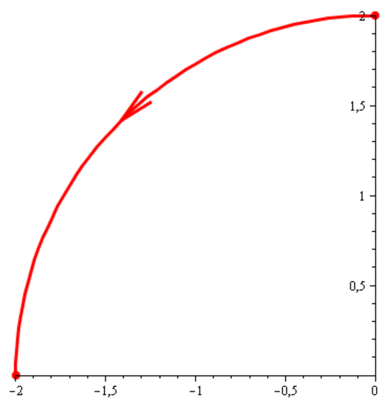

**0-3. ábra A $c(t) = \left(t^2, t-1\right),\ t \in [0,2]$ paraméterezésű görbe**

Hasonlóan az implicit formulával adott görbékhez, a paraméteresen megadott görbéknek is általában számos olyan darabja van, amelyek tekinthetők egy egyváltozós függvény grafikonjának is. Az ilyen darabokat az eredeti paraméter intervallum egy részintervallumának a megadásával lehet kijelölni. Például a

$$c(t) = \left(2\cos(t), 2\sin(t)\right),\ t \in [0, 2\pi]$$

paraméterezéssel megadott görbe egy origó középpontú $2$ sugarú kör. Ennek a második síknegyedbe eső része az $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ , $D_f = [-2,0]$ függvény grafikonja. Ennek a görbedarabnak a paraméterezése $\tilde{c}(t) = \left(2\cos(t), 2\sin(t)\right),\ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ .

Az alábbi ábra mutatja a görbét és a bejárás irányát.




**0-4. ábra Egy negyedkör**

Tekintsük az $c(t)=\left(f(t),g(t)\right),\, t\in[a,b]$ paraméterezést. Tegyük fel, hogy az $f(t)$ és $g(t)$ függvények deriválhatók az $(a,b)$ intervallumban és folytonosak is, továbbá $f'(t)\neq 0$ egyetlen $(a,b)$ intervallumba eső $t$ -re sem. Ekkor a paraméterezés egy olyan görbét definiál, amely tekinthető egy $y=F(x)$ , $D_F=\left[f(a),f(b)\right]$ függvény grafikonjának. Ennek a függvénynek a deriváltja a $t^*\in(a,b)$ paraméterértékhez tartozó $x=f\left(t^*\right)$ helyen

$$F'\left(f\left(t^*\right)\right)=F'(x)=y'=\frac{g'\left(t^*\right)}{f'\left(t^*\right)} .$$

Ebből következik, hogy a görbe $t^*$ -hoz tartozó $\left(f\left(t^*\right),g\left(t^*\right)\right)$ pontjához tartozó **érintő meredeksége** $\dfrac{g'\left(t^*\right)}{f'\left(t^*\right)}$ , és az **érintő egyenlete**

$$y=\frac{g'\left(t^*\right)}{f'\left(t^*\right)}\left(x-f\left(t^*\right)\right)+g\left(t^*\right) .$$

Általában az $y'=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$ formulát **paraméteres deriváltnak** hívjuk.

A $c(t)=\left(f(t),g(t)\right),\, t\in[a,b]$ paraméterezésű görbe **sima**, ha az $f$ és $g$ függvények differenciálhatók a nyílt $(a,b)$ intervallumon, és az $(a,b)$ intervallumban nincs olyan paraméterérték, amelyre egyszerre nulla az $f'$ és a $g'$ derivált is.
Az, hogy egy görbe sima azt jelenti, hogy a görbének nincs éles csúcspontja, ha a görbét elég közelről nézzük, akkor kisimul, minden kis darabja jó közelítéssel egyenes.

A $c(t)=\left(f(t),g(t)\right),\, t\in[a,b]$ paraméterezésű sima görbének **vízszintes érintője** van abban a $t^*\in(a,b)$ paraméterhez tartozó $\left(f\left(t^*\right),g\left(t^*\right)\right)$ pontban, ahol $g'\left(t^*\right)=0$ , és ugyanakkor $f'\left(t^*\right)\neq 0$ . **Függőleges érintője** van abban a $t^*\in(a,b)$ paraméterhez tartozó $\left(f\left(t^*\right),g\left(t^*\right)\right)$ pontban, ahol $g'\left(t^*\right)\neq 0$ , és ugyanakkor $f'\left(t^*\right)=0$ .

**Kidolgozott feladatok**

**1. feladat.** Tekintsük a $c(t)=(2t-1,t^2)$, $t\in[0,2]$ paraméterezést és határozzuk meg a paraméteres deriváltat.

**Megoldás:** A paraméterezésről leolvassuk, hogy $f(t)=2t-1$, ezért $f'(t)=2$. Hasonlóan $g(t)=t^2$, tehát $g'(t)=2t$. Ezeket az $y'=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$ formulába helyettesítve a paraméteres derivált

$$y'=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{2t}{2}=t\ .$$

**2. feladat.** Tekintsük a $c(t)=\left(t^2+t,t-\dfrac{1}{t}\right)$, $t\in[1,4]$ paraméterezést és határozzuk meg a paraméteres deriváltat.

**Megoldás:** Ugyanúgy eljárva, mint az előbb kapjuk, hogy $f(t)=t^2+t$, így $f'(t)=2t+1$, és $g(t)=t-\dfrac{1}{t}$, amiből $g'(t)=1+\dfrac{1}{t^2}$. Ezek felhasználásával a paraméteres derivált

$$y'=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{1+\frac{1}{t^2}}{2t+1}=\frac{t^2+1}{2t^3+t^2}\ .$$

**3. feladat.** Tekintsük a $c(t)=\left(\ln(t),e^{2t}\right)$, $t\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ paraméterezést és határozzuk meg a paraméteres derivált értékét a $t=1$ paraméterérték esetén.

**Megoldás:** Mivel $f(t)=\ln(t)$, ezért $f'(t)=\dfrac{1}{t}$, továbbá $g(t)=e^{2t}$, amiből $g'(t)=2e^{2t}$. Ezek felhasználásával a paraméteres derivált

$$y'=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{2e^{2t}}{\frac{1}{t}}=2te^{2t}\ .$$

Végül ennek helyettesítési értéke $t=1$ -ben

$$y'=2e^2\ .$$

**4. feladat.** Tekintsük a $c(t)=\left(2(t-\sin(t)),2(1-\cos(t))\right)$, $t\in[0,2\pi]$ paraméterezést és határozzuk meg a paraméteres derivált értékét a $t=\dfrac{\pi}{6}$ paraméterérték esetén.

**Megoldás:** Most $f(t)=2(t-\sin(t))$, tehát $f'(t)=2(1-\cos(t))$, és $g(t)=2(1-\cos(t))$, tehát $g'(t)=2\sin(t)$. Ezekből a paraméteres derivált

$$y' = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{2\sin(t)}{2(1-\cos(t))} = \frac{\sin(t)}{1-\cos(t)} \ .$$

Ennek helyettesítési értéke a $t = \frac{\pi}{6}$ értékre

$$y' = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \ .$$

**5. feladat.** Írjuk fel a $c(t) = (2t+1, t^3 - t^2 + 1)$, $t \in [0,2]$ paraméterezésű görbe $t = 1$ paraméterhez tartozó érintőjét.

**Megoldás:** Először meghatározzuk az érintési pont koordinátáit. Mivel $f(t) = 2t+1$ , $f(1) = 3$ , hasonlóan $g(t) = t^3 - t^2 + 1$ , $g(1) = 1$ . Az érintési pont tehát a $P(3,1)$ pont. A következő lépés a paraméteres derivált előállítása. Felhasználva, hogy $f'(t) = 2$ és $g'(t) = 3t^2 - 2t$ , kapjuk, hogy

$$y' = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{3t^2 - 2t}{2} \ .$$

ennek helyettesítési értéke a $t = 1$ értékre

$$y' = \frac{g'(1)}{f'(1)} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \ .$$

A keresett érintő meredeksége tehát $\frac{1}{2}$ . A $t = 1$ paraméterhez tartozó érintő egyenlete tehát

$$y = \frac{g'(1)}{f'(1)}(x - f(1)) + g(1) =$$

$$= \frac{1}{2}(x-3) + 1 = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ .$$

**6. feladat.** Írjuk fel a $c(t) = (t\cdot\cos(t), t\cdot\sin(t))$, $t \in [0,2\pi]$ paraméterezésű görbe $t = \frac{\pi}{2}$ paraméterhez tartozó érintőjét.

**Megoldás:** Ismét az érintési pont meghatározásával kezdünk. Most $f(t) = t\cdot\cos(t)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot 0 = 0$ , és $g(t) = t\cdot\sin(t)$ , $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot 1 = \frac{\pi}{2}$ . Tehát az érintési pont a $P\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pont. A paraméteres derivált

$$y' = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{\sin(t) + t\cdot\cos(t)}{\cos(t) - t\cdot\sin(t)} \ .$$

Ebbe helyettesítünk $t=\frac{\pi}{2}$ -t,

$$y'=\frac{g'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1+\frac{\pi}{2}\cdot 0}{0-\frac{\pi}{2}\cdot 1}\frac{1}{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}\ .$$

A keresett érintő meredeksége így $-\frac{2}{\pi}$ . Ezután már könnyű felírni az érintő egyenletét:

$$y=\frac{g'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left(x-f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)+g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{\pi}(x-0)+\frac{\pi}{2}=$$

$$=-\frac{2x}{\pi}+\frac{\pi}{2}\ .$$

**7. feladat.** Írjuk fel a $c(t)=\left(e^t,2e^{-t}-1\right), t\in[-1,2]$ paraméterezésű görbe $P(1,1)$ ponton átmenő érintőjét.

**Megoldás:** Azzal kezdjük, hogy megvizsgáljuk, hogy a $P(1,1)$ pont illeszkedik-e a görbére. Azt keressük, hogy van-e olyan $t$ érték, amelyre teljesül az

$$\begin{cases} e^t=1 \\ 2e^{-t}-1=1 \end{cases}$$

egyenletrendszer. Az első egyenletből $t=0$ , ha ezt a másodikba beírjuk $2e^{-0}-1=1$ , tehát ez az egyenlet is teljesül. Így a $P(1,1)$ pont illeszkedik a görbére, a $t=0$ paraméterértékhez tartozik. Most a paraméteres derivált, mivel $f(t)=e^t$ , és $g(t)=2e^{-t}-1$ ,

$$y'=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{-2e^{-t}}{e^t}\ .$$

Ennek a $t=0$ helyen vett helyettesítési értéke adja az érintő meredekségét, ami tehát

$$y'=\frac{g'(0)}{f'(0)}=\frac{-2e^{-0}}{e^0}=-2\ .$$

Ezek felhasználásával az érintő egyenlete

$$y=\frac{g'(0)}{f'(0)}\left(x-f(0)\right)+g(0)=$$

$$=-2(x-1)+1=-2x+3\ .$$

**8. feladat.** Írjuk fel a $c(t)=\left(t^2+t,t^2-t^3\right), t\in[-2,2]$ paraméterezésű görbe $P(0,2)$ ponton átmenő érintőjét.

**Megoldás:** Ismét az az első, hogy ellenőrizzük vajon a $P(0,2)$ pont illeszkedik-e a görbére. Ez akkor teljesül, ha megoldható a

$$\begin{cases} t^2 + t = 0 \\ t^2 - t^3 = 2 \end{cases}$$

egyenletrendszer. Az első egyenletből $t = 0$ vagy $t = -1$ . Ha a második egyenletbe $t = 0$ helyettesítünk az nem teljesül, ha viszont $t = -1$ -et akkor igen, hiszen $(-1)^2 - (-1)^3 = 1 - (-1) = 2$ . A pont ezek szerint a $t = -1$ paraméterhez tartozik. Most a paraméteres derivált

$$y' = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{\left(t^2 - t^3\right)'}{\left(t^2 + t\right)'} = \frac{2t - 3t^2}{2t + 1} .$$

Az érintő meredeksége tehát

$$y' = \frac{g'(-1)}{f'(-1)} = \frac{2(-1) - 3(-1)^2}{2(-1) + 1} = \frac{-5}{-1} = 5 .$$

Így az érintő egyenlete

$$\begin{aligned} y &= \frac{g'(-1)}{f'(-1)}\left(x - f(-1)\right) + g(-1) = \\ &= 5(x - 0) + 2 = 5x + 2 . \end{aligned}$$

**9. feladat.** Írjuk fel a $c(t) = \left(2t - 1, t^3\right), t \in [-2, 2]$ paraméterezésű görbe $m = \frac{3}{2}$ meredekségű érintőjének egyenletét.

**Megoldás:** Nem ismert az érintési pont, annak meghatározásával kezdünk. Pontosabban, kiszámoljuk, hogy az érintési pont milyen paraméterhez tartozik. Tudjuk, hogy

$$m = y' = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{\left(t^3\right)'}{(2t - 1)'} = \frac{3t^2}{2} = \frac{3}{2} .$$

Ebből $t = \pm 1$ . Két olyan pont is van tehát a görbén, amelyben az érintő meredeksége $\frac{3}{2}$ , a $P(-3, -1)$ és a $Q(1, 1)$ pont.

A $P(-3, -1)$ pontban húzott érintő egyenlete

$$\begin{aligned} y &= \frac{g'(-1)}{f'(-1)}\left(x - f(-1)\right) + g(-1) = \frac{3}{2}\left(x - (-3)\right) + (-1) = \\ &= \frac{3x}{2} + \frac{7}{2} . \end{aligned}$$

A $Q(1, 1)$ pontban húzott érintő egyenlete

$$\begin{aligned} y &= \frac{g'(1)}{f'(1)}\left(x - f(1)\right) + g(1) = \frac{3}{2}(x - 1) + 1 = \\ &= \frac{3x}{2} - \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

**10. feladat.** Írjuk fel a $c(t)=\left(t^3,t^2+t\right)$, $t\in[-2,2]$ paraméterezésű görbe $m=1$ meredekségű érintőjének egyenletét.

**Megoldás:** Most sem ismert az érintési pont. De mivel

$$m=y'=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{\left(t^2+t\right)'}{\left(t^3\right)'}=\frac{2t+1}{3t^2}=1\ ,$$

az érintési pontot meghatározó paraméter kielégíti a

$$3t^2-2t-1=0$$

egyenletet. Ennek két megoldása van: $t_1=-\frac{1}{3}$ , és $t_2=1$ .

A $t_1$ paraméterhez tartozó érintési pont $P\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^3,\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\right)=P\left(-\frac{1}{27},-\frac{2}{9}\right)$ , az itteni érintő tehát

$$y=\frac{g'\left(-\frac{1}{3}\right)}{f'\left(-\frac{1}{3}\right)}\left(x-f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)+g\left(-\frac{1}{3}\right)=1\cdot\left(x-\left(-\frac{1}{27}\right)\right)-\frac{2}{9}=$$

$$=x-\frac{5}{27}\ .$$

Hasonlóan a $t_2$ paraméterhez tartozó érintési pont $Q(1,2)$ , az itt húzható érintő egyenlete

$$y=\frac{g'(1)}{f'(1)}\left(x-f(1)\right)+g(1)=1\cdot(x-1)+2=$$

$$=x+1\ .$$

**11. feladat.** Határozzuk meg, hogy a $c(t)=\left(t^2-4,t^3-3t\right)$, $t\in[-2,2]$ paraméterezésű görbe melyik pontjában vízszintes, és melyik pontjában függőleges az érintője.

**Megoldás:** A paraméteres derivált most

$$y'=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{\left(t^3-3t\right)'}{\left(t^2-4\right)'}=\frac{3t^2-3}{2t}\ .$$

A számláló most $\pm1$-ben nulla, a nevező egyik esetben sem, a görbe tehát sima.
Tudjuk, hogy vízszintes az érintő abban a $(-2,2)$ nyílt intervallumba eső paraméterértékhez tartozó pontban, ahol ennek a törtnek a számlálója nulla, de a nevezője nem.
Ezért vízszintes az érintő a $-1$ paraméterhez tartozó $P_1(-3,2)$ pontban és az 1 paraméterhez tartozó $P_2(-3,-2)$ pontban.
Függőleges az érintő abban a $(-2,2)$ nyílt intervallumba eső paraméterértékhez tartozó pontban, ahol a paraméteres deriváltat megadó tört nevezője nulla, de a számlálója nem. Ez most a $0$ paraméterértékre teljesül. Az ehhez tartozó pont a $Q(-4,0)$ pont.

**12. feladat.** Határozzuk meg, hogy a $c(t)=\left(2t^3-3t^2-12t,2t^3+3t^2-12t\right),\ t\in[-3,3]$ paraméterezésű görbe melyik pontjában vízszintes, és melyik pontjában függőleges az érintője.

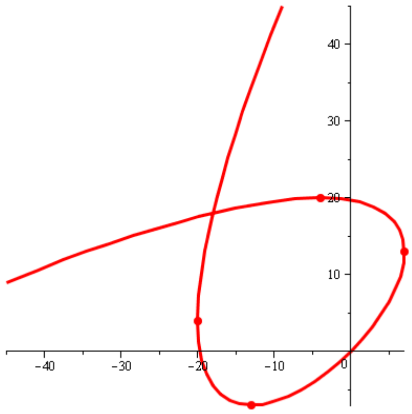
**Megoldás:** Tekintjük a paraméteres deriváltat:

$$y'=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{\left(2t^3+3t^2-12t\right)'}{\left(2t^3-3t^2-12t\right)'}=\frac{6t^2+6t-12}{6t^2-6t-12}=\frac{t^2+t-2}{t^2-t-2}\ .$$

Ennek számlálója nulla $1$ -ben és $-2$ -ben, a nevezője nulla $2$ -ben és $-1$ -ben. A számlálónak és a nevezőnek nincs tehát közös gyöke, ez a görbe is sima, és ezek az értékek mind a $(-3,3)$ nyílt intervallumba esnek.

Ezek után a görbének vízszintes az érintője az $1$ és $-2$ paraméterértékhez tartozó $P_1(-13,-7)$ és $P_2(-4,20)$ pontokban.

Végül a görbének függőleges az érintője a $2$ és $-1$ paraméterértékhez tartozó $Q_1(-20,4)$ és $Q_2(7,13)$ pontokban. Az alábbi ábrán a görbét, és ezeket a pontokat látjuk.




**0-5. ábra**

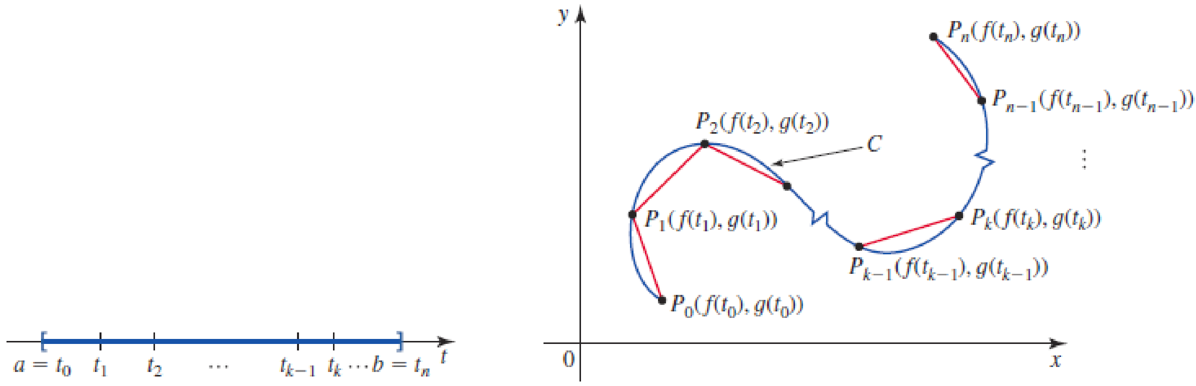
## Elméleti összefoglaló

A síkgörbék egyik legfontosabb numerikus jellemzője a görbe ívhossza, amit intuitívan úgy képzelhetünk el, mintha a görbe vékony nyújthatatlan fonálból lenne, és azt feszesre húznánk. Tekintsünk egy $c(t)=\left(f(t),g(t)\right),\ t\in[a,b]$ paraméterezésű sima görbét. Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot a $t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}$ osztópontokkal $n$ darab egyenlő hosszú részintervallumra, és legyen $t_0=a$ , $t_n=b$ , ahogy azt az alábbi ábrán látjuk. Ekkor a $P_k\left(f(t_k),g(t_k)\right)$ pontok a görbén fekszenek és kiszámolható a $P_0,P_1,\cdots,P_n$ pontok által meghatározott töröttvonal hossza, ami persze a $P_{k-1}P_k$ szakaszok hosszának az összege. A $P_{k-1}P_k$ szakasz hossza nyilván

$$d\left(P_{k-1},P_k\right)=\sqrt{\left(f(t_k)-f(t_{k-1})\right)^2+\left(g(t_k)-g(t_{k-1})\right)^2}\ ,$$

így a töröttvonal hossza

$$\sum_{k=1}^{n} d\left(P_{k-1}, P_k\right) .$$




**0-6. ábra Görbe és a beírt töröttvonal**

Ez az összeg közelíti a görbe $s$ ívhosszát: $s \approx \sum_{k=1}^{n} d\left(P_{k-1}, P_k\right)$ , és érezzük, hogy ez a közelítés annál jobb, minél több részre osztjuk az $[a,b]$ intervallumot.
Megmutatható, hogy a fenti módon konstruált beírt töröttvonalak hossza sima görbe esetén konvergál egy számhoz, ha az $[a,b]$ intervallum felosztásainak egy minden határon túl finomodó felosztássorozatát tekintjük. Ezt a számot hívjuk a görbe $[a,b]$ intervallumhoz tartozó ívének az **ívhosszának**. Erre az ívhosszra a következő tétel bizonyítható.

**Tétel:** Ha a $c(t)=\left(f(t), g(t)\right), t \in [a,b]$ paraméterezésű sima görbe nem metszi önmagát kivéve esetleg a $t=a$ és $t=b$ paraméterekhez tartozó pontokat, akkor a görbe $[a,b]$ intervallumhoz tartozó ívének ívhossza

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2+\left(g'(t)\right)^2}\, dt .$$

Egy sima görbe biztosan nem metszi önmagát, ha az $f$ és a $g$ függvények valamelyike szigorúan monoton $(a,b)$ -n.

**13. feladat.** Tekintsük a $c(t)=(1-t, 2t-1), t \in [0,2]$ paraméterezésű görbét és számoljuk ki az ívhosszát.

**Megoldás:** A feladatban $f(t)=1-t$ és $g(t)=2t-1$ . Mindkét függvény deriválható, a deriváltak folytonosak, és egyik derivált sem nulla sehol sem a $(0,2)$ intervallumon, tehát egyszerre sem nullák. Ezért a görbe sima. Mindkét koordináta függvény szigorúan monoton, ezért a görbe nem metszi önmagát, alkalmazható a fenti integrál formula. Mivel $f'(t)=-1$ és $g'(t)=2$ ,

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2+\left(g'(t)\right)^2}\, dt=\int_0^2 \sqrt{(-1)^2+(2)^2}\, dt=\int_0^2 \sqrt{5}\, dt=$$

$$=\left[\sqrt{5}\cdot t\right]_0^2=2\sqrt{5} .$$

A görbénk ívhossza tehát $s=2\sqrt{5}$ .

**14. feladat.** Tekintsük a $c(t)=\left(t^2+1,2t^2-1\right)$, $t\in[0,1]$ paraméterezésű görbét és számoljuk ki az ívhosszát.

**Megoldás:** A mostani feladatban $f(t)=t^2+1$ és $g(t)=2t^2-1$ . Mindkét függvény deriválható, $f'(t)=2t$ és $g'(t)=4t$ , a deriváltak folytonosak, és egyik derivált sem nulla sehol sem a $(0,1)$ intervallumon, tehát egyszerre sem nullák. Ezért a görbe sima. Mindkét függvény szigorúan monoton, ezért a görbe nem metszi önmagát, alkalmazható a fenti integrál formula. Tehát

$$s=\int_a^b\sqrt{\left(f'(t)\right)^2+\left(g'(t)\right)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{(2t)^2+(4t)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{20t^2}\,dt=$$

$$=\int_0^1\sqrt{20}\cdot t\,dt=\left[\frac{\sqrt{20}\cdot t^2}{2}\right]_0^1=\frac{\sqrt{20}}{2}=\sqrt{5}\ .$$

**15. feladat.** Tekintsük a $c(t)=\left(2t^2,3t^3\right)$, $t\in[0,1]$ paraméterezésű görbét és számoljuk ki az ívhosszát.

**Megoldás:** Mivel $f(t)=2t^2$ és $g(t)=3t^3$ , látjuk hogy mindkét függvény deriválható, $f'(t)=4t$ és $g'(t)=9t^2$ , a deriváltak folytonosak, és egyik derivált sem nulla sehol sem a $(0,1)$ intervallumon, tehát egyszerre sem nullák. Ezért a görbe sima. Mindkét függvény szigorúan monoton, ezért a görbe nem metszi önmagát, alkalmazható a fenti integrál formula.

$$s=\int_a^b\sqrt{\left(f'(t)\right)^2+\left(g'(t)\right)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{(4t)^2+\left(9t^2\right)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{16t^2+81t^4}\,dt=$$

$$=\int_0^1 t\cdot\sqrt{16+81t^2}\,dt=\frac{1}{162}\int_0^1\underbrace{162t}_{h'(t)}\cdot\underbrace{\left(16+81t^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{(h(t))^{\frac{1}{2}}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{162}\left[\frac{\left(16+81t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{243}\left[\sqrt{\left(16+81t^2\right)^3}\right]_0^1=\frac{1}{243}\left(\sqrt{97^3}-\sqrt{16^3}\right)\approx 3.668\ .$$

A továbbiakban nem vizsgáljuk a fenti integrál képlet alkalmazhatóságának feltételei, hanem az ívhossz számítás során feltesszük, hogy azok teljesülnek.

**16. feladat.** Tekintsük a $c(t)=\left(e^t+e^{-t},1-2t\right)$, $t\in[0,1]$ paraméterezésű görbét és számoljuk ki az ívhosszát.

**Megoldás:** Mivel most $f(t)=e^t+e^{-t}$ és $g(t)=1-2t$ , $f'(t)=e^t-e^{-t}$ és $g'(t)=-2$ . Ezért az ívhossz

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2+\left(g'(t)\right)^2}\,dt=\int_0^1 \sqrt{\left(e^t-e^{-t}\right)^2+(-2)^2}\,dt=\int_0^1 \sqrt{\left(e^t\right)^2-2+\left(e^{-t}\right)^2+4}\,dt=$$

$$=\int_0^1 \sqrt{\left(e^t\right)^2+2+\left(e^{-t}\right)^2}\,dt=\int_0^1 \sqrt{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}\,dt=\int_0^1 \left|\underbrace{e^t+e^{-t}}_{>0\,(0,1)-en}\right|dt=\int_0^1 \left(e^t+e^{-t}\right)dt=$$

$$=\left[e^t-e^{-t}\right]_0^1=e-\frac{1}{e}\approx 2.35\ .$$

Az ívhosszt megadó integrálást csak néhány esetben lehet egyszerű módszerekkel elvégezni. Az egyik szerencsés eset, ha a gyök alatti mennyiség valaminek a négyzete. Ekkor ugyanis elvégezhető a fő nehézséget okozó gyökvonás.

**17. feladat.** Tekintsük a $c(t)=\left(t-\sin(t),1-\cos(t)\right)$, $t\in[0,2\pi]$ paraméterezésű görbét és számoljuk ki az ívhosszát.

**Megoldás:** Ebben a feladatban $f'(t)=1-\cos(t)$ , és $g'(t)=\sin(t)$ . Így

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2+\left(g'(t)\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(1-\cos(t)\right)^2+\left(\sin(t)\right)^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi} \sqrt{1-2\cos(t)+\underbrace{\cos^2(t)+\sin^2(t)}_{=1}}\,dt=\int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{2-2\cos(t)}_{=4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt=\int_0^{2\pi} \left|\underbrace{2\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)}_{>0\,(0,2\pi)-n}\right|dt=2\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$=2\left[-\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right]_0^{2\pi}=4\left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi}=4\left(-(-1)-(-1)\right)=8\ .$$

**Ellenőrző kérdések**

**1. kérdés.** A $c(t)=\left(2t^2,3t-4\right)$, $t\in[0,2]$ paraméteres alakban adott függvény esetén a paraméteres derivált

$y'=\frac{3}{4}t$ .

$y'=\frac{4}{3t}$ .

$y'=\frac{3}{4t}$ . (x)

$y'=\frac{4}{3}t$ .

**2. kérdés.** A $c(t)=\left(\frac{1}{t}-t,t^3\right),\ t\in\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$ paraméteres alakban adott függvény esetén a paraméteres derivált értéke $t=-1$ -ben

$y'=-\frac{3}{2}$ . (x)
$y'=-\frac{1}{2}$ .
$y'=-2$ .
$y'=\frac{3}{2}$ .

**3. kérdés.** A $c(t)=\left(\sin(2t),\cos(3t)\right),\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ paraméterezésű görbe érintője $t=\frac{\pi}{6}$ -ban

$y=-3x+\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .
$y=-3x-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .
$y=-3x+\frac{3\sqrt{3}}{2}$ . (x)
$y=-3x-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

**4. kérdés.** A $c(t)=\left(t^2+t,t^3-3t\right),\ t\in[0,3]$ paraméterezésű görbe érintője a $P(6,2)$ pontban

$y=\frac{9x}{5}-\frac{46}{5}$ .
$y=\frac{9x}{5}-\frac{44}{5}$ . (x)
$y=\frac{9x}{5}+\frac{44}{5}$ .
$y=\frac{9x}{5}+\frac{46}{5}$ .

**5. kérdés.** A $c(t)=\left(3t^2-2t,t^3-6t\right),\ t\in[-10,10]$ paraméterezésű görbe $m=3$ meredekségű érintői

$y=3x$ és $y=3x-108$ . (x)
$y=3x-1$ és $y=3x-108$ .
$y=3x$ és $y=3x+108$ .
$y=3x$ és $y=3x-118$ .

**6. kérdés.** A $c(t)=(t-\sin(t),1-\cos(t))$, $t\in[0,2\pi]$ paraméterezésű görbe melyik pontjában vízszintes az érintője?

A $t=\pi$ paraméterértékhez tartozó $P(\pi,2)$ pontban. (x)
A $t=\pi$ paraméterértékhez tartozó $P(\pi,1)$ pontban.
A $t=0$ paraméterértékhez tartozó $P(0,0)$ pontban.
A $t=2\pi$ paraméterértékhez tartozó $P(2\pi,0)$ pontban.

**7. kérdés.** A $c(t)=(t^3-6t^2+1,t^3-4t)$, $t\in[-1,5]$ paraméterezésű görbe melyik pontjában függőleges az érintője?

A $P(0,1)$ és a $Q(-31,48)$ pontokban.
A $P(1,0)$ és a $Q(31,-48)$ pontokban.
A $P(1,0)$ és a $Q(-31,48)$ pontokban. (x)
A $P(1,0)$ és a $Q(31,48)$ pontokban.

**8. kérdés.** Mennyi a $c(t)=\left(\sqrt{t^3}+2,2t\right)$, $t\in[0,1]$ görbe ívhossza?

$\frac{61}{27}$. (x)
$\frac{60}{27}$.
$\frac{62}{27}$.
$\frac{63}{27}$.

**9. kérdés.** Mennyi a $c(t)=\left(\frac{t^3}{3}-1,\frac{t^2}{2}+1\right)$, $t\in[0,1]$ görbe ívhossza?

$\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}$.
$\frac{2\sqrt{3}-1}{3}$.
$\frac{3\sqrt{2}-1}{3}$.
$\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}$. (x)

**10. kérdés.** Mennyi a $c(t)=(3t^2-1,2t^2-2)$, $t\in[-1,2]$ görbe ívhossza?

$\sqrt{326}$ .
$\sqrt{324}$ .
$\sqrt{325}$ . (x)
$\sqrt{327}$ .