4. Többváltozós függvények

4.3. Kétváltozós függvények integrálszámítása

Tanulási cél: Az egyváltozós függvények esetében nagyon sokat foglalkoztunk a határozatlan és a határozott integrál fogalmával. Ebben a leckében a határozott integrál fogalmát kiterjesztjük kétváltozós függvényekre.

Elméleti összefoglaló

Emlékezzünk arra, hogy egyváltozós függvények esetében a határozott integrál az $f(x)$ függvény görbe alatti előjeles területét jelentette egy véges zárt $[a,b]$ intervallumon, melyet a Newton-Leibniz tétel segítségével számoltunk ki.

Először bevezetjük a véges zárt intervallum kétdimenziós megfelelőjét, a téglalap fogalmát.

Definíció: Legyen $[a,b]$ és $[c,d]$ két intervallum. Ekkor az $[a,b]\times[c,d]$ téglalapon a következő tartományt értjük:

$$[a,b]\times[c,d]=\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, a\le x\le b, c\le y\le d\right\}.$$

Tehát a továbbiakban a téglalap mindig olyan téglalap alakú tartományt jelent, amelynek oldalai párhuzamosak a koordináta tengelyekkel.

Definíció: Legyen $f(x,y)$ folytonos függvény az $[a,b]\times[c,d]$ téglalapon. Kétszeres integrálnak az

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy \text{ és az } \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

típusú integrálokat nevezzük.

A zárójelen belüli integrált belső, a zárójelen kívülit pedig külső integrálnak hívjuk. A kétszeres integrálok kiszámolása során mindig a belső integrált határozzuk meg előbb. A *dx* illetve *dy* szimbólum mutatja, hogy melyik változó szerint kell először integrálnunk. Ekkor a belső integrál mindig a második változónak a függvénye lesz, és ezt kell a külső integrálban kiszámolnunk.

Tétel: Legyen $f(x,y)$ egy olyan kétváltozós függvény, amely az [a,b]×[c,d] téglalapon értelmezett, mindkét változó szerint parciálisan differenciálható, és a parciális deriváltak folytonosak az egész téglalapon. Ekkor:

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx,$$

azaz az integrálás sorrendje felcserélhető.

Eddig csak téglalap alakú tartományon értelmeztük a kettős integrál fogalmát. Lépjünk egy kicsit tovább.

Definíció: Legyen $[a,b]$ intervallum, és tegyük fel, hogy az $f(x)$ és a $g(x)$ függvényekre teljesül, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén $f(x) \leq g(x)$. Ekkor az

$$N = \left\{(x,y) \in R^2 \,\middle|\, a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\right\}$$

halmazt normáltartománynak nevezzük.

Definíció: Normáltartományon a kétszeres integrál a következőt jelent:

$$\int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)\, dy \right) dx .$$

Megjegyzés: Ebben az esetben azonban fontos az integrálok sorrendje és az nem cserélhető fel! Az *x* az a változó, amely szabadon mozog egy $[a,b]$ intervallumban, az *y* pedig olyan, hogy annak határai az *x* függvényei. Így a külső integrálnak kell *x* szerintinek lennie, a belsőnek pedig az *y* szerintinek. Ekkor ha a belső függvény integráljánál beírjuk a határokat, továbbra is *x* függvényét kapjuk, amelyet *x* szerint kiintegrálva számot kapunk

Egyváltozós függvények esetén a határozott integrál szemléletes jelentése a görbe alatti előjeles terület volt. Ezt a fogalmat most kiterjesztjük a kétváltozós függvények esetére.

Definíció: Legyen az $f(x,y)$ kétváltozós függvény folytonos egy tetszőleges $H \subset R^2$ halmazon és legyen $f(x,y) \geq 0$ minden $(x,y) \in H$ esetén. Ekkor az

$$\left\{(x,y,z) \in R^3 \middle| (x,y) \in H,\, 0 \leq z \leq f(x,y)\right\}$$

térbeli halmaz egy test. Ez a test egy olyan *H* alapú hasáb, amelyet alulról az *xy* sík, felülről pedig az $f(x,y)$ függvény grafikonja határol. Ennek a testnek a térfogatát a

$$V = \iint_H f(x,y)\, dA$$

kettősintegrállal definiáljuk.

A következőkben megmutatunk egy egyszerű alkalmazást a kettős integrálok témakörben.

Tétel: Legyen *H* egy egyszerű síkidom. Ekkor H területét a

$$\iint_H 1\, dA$$

kettős integrál adja.

Ezt a tételt egyszerű meggondolni, hiszen a kettős integrál geometriai jelentése miatt ez éppen a *H* alapú, egységnyi magasságú hasáb térfogata, ami így a *H* halmaz területével egyenlő. A kettős integrál segítségével nem csak a halmaz területe, hanem a súlypontjának koordinátái is meghatározhatók.

Tétel: Jelölje a *H* halmaz súlypontját (S_x, S_y). Ekkor

$$S_x = \frac{\iint\limits_H x\, dA}{\iint\limits_H 1\, dA}, \quad S_y = \frac{\iint\limits_H y\, dA}{\iint\limits_H 1\, dA}.$$

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Számolja ki az alábbi kétszeres integrált:

$$\int_{-1}^{2}\left(\int_{0}^{1}(2x-3y^2)\, dx\right) dy.$$

Megoldás

Mindig a belső integrál kiszámításával kezdjük. A belül elhelyezkedő *dx* szimbólum azt jelöli, hogy az *x* változó szerint integrálunk először. Ilyenkor, akárcsak a parciális deriválásnál, az *y*-ra úgy kell tekintenünk, mint egy konstansra:

$$\int_{0}^{1}(2x-3y^2)\, dx = \left[x^2-3y^2x\right]_0^1 = (1-3y^2)-(0-0) = 1-3y^2.$$

Vigyázni kell arra, hogy a Newton-Leibniz szabály alkalmazása során abba a változóba helyettesítsük be az integrálok határait, amelyik változó szerint az integrálás történt. Így lesz a belső integrál a másik változó függvénye, hiszen mint látható, a kifejezésből el is tűnt az *x*. Ekkor a kettős integrál:

$$\int_{-1}^{2}\left(\int_{0}^{1}(2x-3y^2)\, dx\right) dy = \int_{-1}^{2}(1-3y^2)\, dy = \left[y-y^3\right]_{-1}^{2} = (2-2^3)-(-1-(-1)^3) = -6.$$

2. feladat: Számolja ki az alábbi kétszeres integrált:

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1}(2xy^2+3x^3y)\, dx\right) dy.$$

Megoldás

Most is először külön kiszámoljuk a belső integrált, amely *x* szerinti integrálást jelent, ilyenkor az *y*-t konstansnak tekintjük, majd az *x* helyére beírva a megfelelő határokat:

$$\int_{0}^{1}(2xy^2+3x^3y)\, dx = \left[x^2y^2+\frac{3}{4}x^4y\right]_0^1 = \left(y^2+\frac{3}{4}y\right)-0 = y^2+\frac{3}{4}y.$$

Ezt követően:

$$\int_{-1}^{1}\left(y^2+\frac{3}{4}y\right) dy = \left[\frac{y^3}{3}+\frac{3}{8}y^2\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3}+\frac{3}{8}\right)-\left(\frac{-1}{3}+\frac{3}{8}\right) = \frac{2}{3}.$$

3. feladat: Számítsuk ki az $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}$ függvény kettős integrálját a következő téglalap alakú tartományon: $0 \le x \le 1, \quad 1 \le y \le e$.

Megoldás

Mivel téglalap alakú a tartomány, ezért az integrál kétféleképpen is felírható:

$$\int_1^e\left(\int_0^1 \frac{x^2}{y}\,dx\right)dy=\int_0^1\left(\int_1^e \frac{x^2}{y}\,dy\right)dx\,.$$

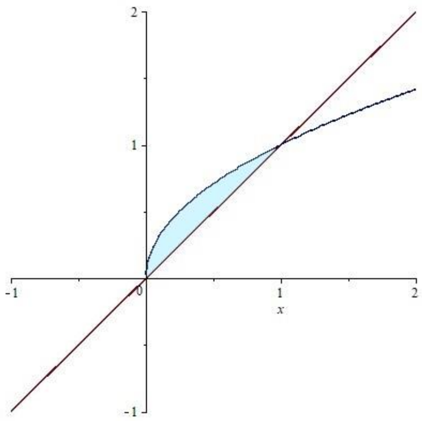
Mivel az eredmény mindkét sorrend mellett azonos lesz, ezért szabadon választhatunk, hogy milyen sorrendben kívánunk integrálni.

$$\int_1^e\left(\int_0^1 \frac{x^2}{y}\,dx\right)dy=\int_1^e\left[\frac{x^3}{3y}\right]_0^1 dy=\int_1^e\left(\frac{1}{3y}\right)dy=\frac{1}{3}\big[\ln|y|\big]_1^e=\frac{1}{3}.$$

4. feladat: Legyen $N=\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, 0\le x\le 1,\, x\le y\le \sqrt{x}\right\}$. Rajzoljuk fel a tartományt és számítsuk ki az $f(x,y)=4xy^2$ függvény kettősintegrálját az N tartományon!

Megoldás

A normáltartományt mutatja az ábra:



A definíció szerint a következő integrált kell kiszámolni:

$$\int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{x}} (4xy^3)\,dy\right)dx\,.$$

Először külön kiszámoljuk a belső integrált:

$$\int_x^{\sqrt{x}} (4xy^3)\,dy=\left[xy^4\right]_x^{\sqrt{x}}=\left(x^3\right)-\left(x^5\right).$$

Most a külső integrállal folytatva:

$$\int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{x}} (4xy^3)\,dy\right)dx=\int_0^1 (x^3-x^5)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)-\left(0\right)=\frac{1}{12}\,.$$

Ellenőrző kérdések

1. kérdés: Számolja ki az alábbi kétszeres integrált:

$$\int_0^2 \left(\int_1^3 (x^3y^3 - xy)\, dx \right) dy .$$

Megoldás

70
72 (X)
74
76

2. kérdés: Számítsuk ki az $f(x,y) = \frac{2x}{y^2}$ függvény kettős integrálját a következő téglalap alakú tartományon: $0 \le x \le 1, \quad 1 \le y \le 2$.

Megoldás

$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$ (X)
0
$-\frac{1}{2}$

3. kérdés: Legyen $N = \left\{ (x,y) \in R^2 \,\middle|\, 0 \le x \le 1,\, x \le y \le \sqrt{x} \right\}$. Számítsuk ki az $f(x,y) = 2xy$ függvény kettősintegrálját az *N* tartományon!

Megoldás

$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{12}$ (X)

Összetett feladatok

5. feladat: Számítsuk ki az alábbi kettős integrált:

$$\int_0^1 \int_{x-1}^{-x+1} \big((x - 2y)\, dy \big)\, dx .$$

Megoldás

Ebben a feladatban az *y* szerinti integrálás határai függnek az *x*-től. Ez azt jelenti, hogy először *y* szerint integrálunk és a kapott eredménybe *y* helyére helyettesítünk.
Most is a belső integrállal kezdünk:

$$\int_{x-1}^{-x+1}(x-2y)dy=\left[xy-y^2\right]_{x+1}^{-x+1}=\left(x(-x+1)-(-x+1)^2\right)-\left(x(x-1)-(x-1)^2\right)=$$

$$=-x^2+x-(x^2-2x+1)-(x^2-x-x^2+2x-1)=-2x^2+2x.$$

A külső integrállal folytatva:

$$\int_0^1(-2x^2+2x)dx=\left[-2\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^1=\left(-\frac{2}{3}+1\right)-0=\frac{1}{3}.$$

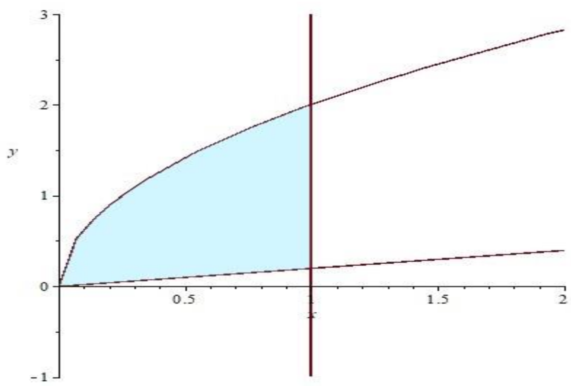
6. feladat: Számítsuk ki az $f(x,y)=xy$ függvény kettős integrálját az

$$x=0,\quad x=1,\quad y=\frac{x}{5},\quad y=2\sqrt{x}$$

görbék által határolt normáltartományon. Rajzoljuk fel a tartományt is!

Megoldás

Célszerű először lerajzolni a keresett tartományt, majd a szokásos alakban is megadni.



A keresett normáltartomány:

$$N=\left\{(x,y)\in R^2 \;\middle|\; 0\le x\le 1,\ \frac{x}{5}\le y\le 2\sqrt{x}\right\}.$$

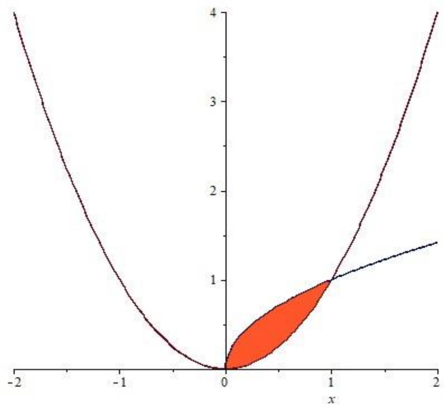
Ekkor a keresett kettős integrál:

$$\int_0^1\left(\int_{\frac{x}{5}}^{2\sqrt{x}}(xy\,dy)\right)dx=\int_0^1\left[x\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x}{5}}^{2\sqrt{x}}dx=\int_0^1\left(2x^2-\frac{x^3}{50}\right)dx=\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{200}\right]_0^1=\frac{397}{600}.$$

7. feladat: Számítsuk ki az $f(x,y)=x+2y$ függvény integrálját az $y=x^2$ és az $y=\sqrt{x}$ görbék által határolt tartományon.

Megoldás

Készítsünk ábrát a keresett tartományról.



Ahhoz, hogy fel tudjuk írni a normáltartományt, először ki kell számolni a két függvény metszéspontját. Ehhez meg kell oldani a következő egyenletet:

$$x^2 = \sqrt{x} \quad \to x^4 = x \quad \to \quad x(x^3-1)=0 \quad x_1 = 0, \quad x_0 = 1 .$$

Felírva a feladathoz tartozó normáltartományt:

$$N = \left\{ (x,y) \in R^2 \,\middle|\, 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \right\}.$$

Ekkor a keresett integrál:

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+2y)\, dy \right) dx .$$

A belső integrállal kezdünk:

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+2y)\, dy = \left[xy + y^2 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} = (x\sqrt{x}+x) - (x^3+x^4) = x^{\frac{3}{2}} + x - x^3 - x^4 .$$

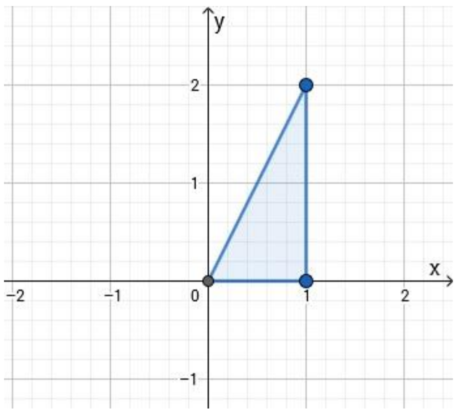
A kapott eredményt behelyettesítve a külső integrálba:

$$\int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} + x - x^3 - x^4 \right) dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{9}{20} .$$

8. feladat: Számítsa ki az $f(x,y) = \dfrac{5}{x^2+1}$ függvény kettős integrálját az $A(0,0)$, $B(1,0)$ és $C(1,2)$ pontok által határolt háromszög felett.

Megoldás

Rajzoljuk fel az adott csúcspontokkal rendelkező háromszöget.



Ez a tartomány felfogható egy olyan normáltartománynak, amelyet balról az $x=0$, jobbról az $x=1$, alulról az x tengely ($f(x)=0$) , felülről pedig az $y=2x$ ($g(x)=2x$) egyenesek határolnak. Azaz:

$$N=\left\{(x,y)\in R^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2x\right\}.$$

Ekkor a kettős integrál:

$$\int_0^1\left(\int_0^{2x}\frac{5}{x^2+1}\,dy\right)dx\,.$$

Itt

$$\int_0^{2x}\frac{5}{x^2+1}\,dy=\frac{5}{x^2+1}\left[y\right]_0^{2x}=\frac{10x}{x^2+1},$$

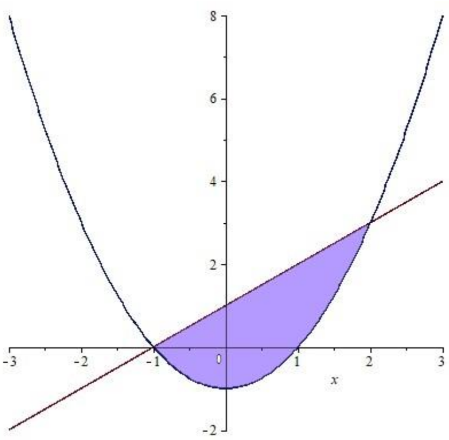
ebből pedig

$$\int_0^1\frac{10x}{x^2+1}\,dx=5\cdot\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}\,dx=5\left[\ln\left|x^2+1\right|\right]_0^1=5\ln 2-5\ln 1=5\ln 2\,.$$

9. feladat: Számítsuk ki az $f(x)=x^2-1$ és a $g(x)=x+1$ görbék által határolt véges területű H síkidom súlypontjának koordinátáit!

Megoldás

Célszerű először ábrát készíteni.



Számítsuk ki a két függvény metszéspontját.

$$f(x)=g(x) \quad \rightarrow \quad x^2-1=x+1 \quad \rightarrow \quad x^2-x-2=0 \quad \rightarrow \quad x_1=-1, \quad x_2=2.$$

Ekkor fel tudjuk írni a H síkidomot, mint egy normáltartományt:

$$H=\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, -1\le x\le 2,\ x^2-1\le y\le x+1\right\}.$$

Ekkor a kettős integrálok a következő módon írhatók fel:

$$\iint_H 1\,dA=\int_{-1}^{2}\int_{x^2-1}^{x+1}(1dy)\,dx=\int_{-1}^{2}\left[y\right]_{x^2-1}^{x+1}=\int_{-1}^{2}(2+x-x^2)\,dx=\left[2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

$$\iint_H x\,dA=\int_{-1}^{2}\int_{x^2-1}^{x+1}(x\,dy)\,dx=\int_{-1}^{2}\left[xy\right]_{x^2-1}^{x+1}=\int_{-1}^{2}(2x+x^2-x^3)\,dx=\left[x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{4}$$

$$\iint_H y\,dA=\int_{-1}^{2}\int_{x^2-1}^{x+1}(y\,dy)\,dx=\int_{-1}^{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2-1}^{x+1}=\int_{-1}^{2}\left(x+\frac{3x^2}{2}-\frac{x^4}{2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{10}\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{10}.$$

Innen a súlypont:

$$S_x=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{2}}=\frac{1}{2}\ ,\quad S_y=\frac{\frac{27}{10}}{\frac{9}{2}}=\frac{3}{5}.$$

Ellenőrző kérdések

4. kérdés: Számítsa ki az $f(x,y)=xy$ függvény kettős integrálját az y tengely, az $y=2-x$ és az $y=x$ egyenesek által határolt háromszög felett.

Megoldás

$\frac{1}{3}$ (X)

$\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}$

$\frac{3}{2}$

5. kérdés: Az $f(x,y)=x-2y$ függvény kettős integrálja az $y=0$ és az $y=x-x^2$ görbék által határolt tartomány felett:

Megoldás

$\frac{1}{16}$

$\frac{1}{18}$

$\frac{1}{20}$ (X)

$\frac{1}{22}$.

6. kérdés: Számítsa ki az $f(x,y)=x-y$ függvény kettős integrálját az $A(0,0)$, $B(1,-1)$ és $C(1,1)$ pontok által határolt háromszög felett.

Megoldás

$\frac{2}{3}$ (X)

$\frac{3}{4}$

$\frac{3}{2}$

$\frac{4}{3}$