3. Differenciálegyenletek

3.1. A differenciálegyenlet fogalma, osztályozása, a megoldás fajtái. Az elsőrendű differenciálegyenletek néhány típusának megoldása.

Tanulási cél

A differenciálegyenletekkel kapcsolatos alapfogalmak megismerése. Elsajátítani a szétválasztható változójú és az elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldási módszerét.

Motivációs példa

Teánkba $10g$ cukrot szórunk, és állandó keveréssel biztosítjuk az egyenletes oldódást. Megfigyelésünk szerint a cukor fele $15s$ alatt oldódik fel. Milyen függvény írja le időben a még fel nem oldott cukor mennyiségét, és mennyi cukor lesz oldatlan állapotban $40s$ -mal azután, hogy a teába szórtuk a cukrot? Tapasztalat szerint híg oldatok esetén az oldódás sebessége arányos a még fel nem oldott cukor mennyiségével. (Ez a törvényszerűség nem csak a cukor, hanem más anyagok oldódásra is igaz.)
Jelölje az oldatlan cukor tömegét m . Ez most nem egy állandó, hanem egy függvény, aminek változója az idő, hiszen ahogyan az idő telik, úgy egyre kevesebb cukor lesz oldatlan állapotban. Ezt azzal fejezhetjük ki jelölésben, hogy $m = m(t)$ -t írunk.

A feladat megoldásához olyan egyenletet kellene keresnünk, amiben az ismeretlen az $m(t)$ függvény lesz. Ehhez fogalmazzuk meg egyenlet formájában azt a törvényt, amit korábban szövegben mondtunk ki az oldódásra. Az oldódás sebességét az fejezi ki, hogy mennyire gyorsan változik a még fel nem oldott cukor mennyisége az időben. Korábbi tanulmányaink alapján ez az $m(t)$ függvény idő szerinti deriváltja, hiszen a derivált írja le a függvény változását. Ezt a deriváltat $\frac{dm}{dt}$ -vel vagy $\dot{m}$ -tal szokták jelölni. (Ha egy függvény változója az idő, akkor a függvény deriváltját gyakran jelölik a függvény felett ponttal.) Mivel az oldódás sebessége arányos a fel nem oldott cukor tömegével, így ez a derivált az $m(t)$ függvény egy konstans szorosa lesz. Jelölje ezt a konstanst $-k$, s így az alábbi egyenletet kapjuk:

$\frac{dm}{dt} = -km$, vagy $\dot{m} = -km$.

Azért célszerű a konstanst így jelölni, mert a negatív előjellel hangsúlyozzuk, hogy a cukor mennyisége csökken a folyamat során. (Természetesen k pozitív konstans.)
Ezzel egy olyan egyenletet kaptunk, amiben egy függvény az ismeretlen, és az egyenletben ennek a függvénynek a deriváltja is szerepel. Az ilyen egyenleteket nevezzük differenciálegyenleteknek. Ha sikerül megoldanunk ezt az egyenletet, akkor le tudjuk írni az oldatlan cukor mennyiségét az idő függvényében, valamint ennek a függvénynek a $t = 40s$ helyen felvett értéke megadja majd, hogy mennyi cukor lesz még oldatlanul $40s$ -mal a folyamat kezdete után. Az alábbiakban ilyen differenciálegyenletekkel ismerkedünk majd. Az ilyen egyenletekkel általában valamilyen térben vagy időben lejátszódó folyamatot írhatunk le.

Elméleti összefoglaló

Differenciálegyenletnek nevezzük az olyan egyenleteket, amelyekben az ismeretlen egy függvény, s az egyenletben ezen ismeretlen függvény deriváltja vagy deriváltjai is szerepelnek.
A differenciálegyenleteket különböző szempontok szerint típusokba soroljuk.
Ha az ismeretlen függvény egyváltozós, akkor közönséges differenciálegyenletről beszélünk.
Ha az ismeretlen függvény többváltozós, akkor parciális differenciálegyenletnek nevezzük.
Mi csak közönséges differenciálegyenletekkel foglalkozunk.
A differenciálegyenletben előforduló legmagasabb rendű derivált rendszámát a differenciálegyenlet rendjének nevezzük. Így beszélünk elsőrendű, másodrendű stb. differenciálegyenletekről.
Ha egy differenciálegyenletben az ismeretlen függvény és deriváltjai csak első hatványon szerepelnek, és nem szerepel szorzatuk, akkor a differenciálegyenletet lineárisnak mondjuk. Ellenkező esetben nemlineáris differenciálegyenletről beszélünk.
Egy differenciálegyenletnek akkor megoldása egy függvény, ha deriváltjaival együtt igazzá teszi az egyenletet. A differenciálegyenleteknek mindig több függvény is megoldása.
Egy differenciálegyenlet általános megoldásának nevezzük azt a paraméter(eke)t tartalmazó függvényt, melyben a paraméter(ek) megengedett megválasztásai esetén mindig a differenciálegyenlet megoldását kapjuk, és így az összes reguláris megoldás előáll. (A differenciálegyenleteknek úgynevezett szinguláris megoldásai is lehetnek, melyek nem állíthatók elő az általános megoldásból a paraméterek megválasztásával. Ezek a szinguláris megoldások általában nem fontosak a gyakorlati alkalmazásokban.)
Egy n -ed rendű közönséges differenciálegyenlet általános megoldása pontosan n darab egymástól független paramétert tartalmaz.
Egy n -ed rendű közönséges differenciálegyenlet partikuláris megoldásainak nevezzük azokat a függvényeket, amelyekben n -nél kevesebb paraméter szerepel. Az elsőrendű differenciálegyenletek partikuláris megoldásaiban tehát nem szerepel paraméter.
Kezdeti érték feladatról beszélünk, ha egy n -ed rendű differenciálegyenlet megoldását olyan feltétel mellett keressük, hogy a független változó bizonyos értéke esetén adott az ismeretlen függvény és deriváltjainak értéke, kivéve az n -edik deriváltat. Ilyenkor az általános megoldásban szereplő paraméterek értéke általában meghatározható a plusz feltételekből, s így egyértelmű megoldást kapunk. (Nem minden kezdeti érték feladatot lehet azonban megoldani. Mi nem foglalkozunk a megoldhatóság feltételeivel, és a megoldás egyértelműségével sem.)
Ha egy differenciálegyenlet $y' = f(x)$ alakú, vagy ilyen alakra hozható, akkor általános megoldását megkaphatjuk, ha mindkét oldalt integráljuk, azaz
$y = \int y'\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + c$, ahol $F(x)$ a $f(x)$ egy primitív függvénye. Amint látható, a megoldásban szerepel egy paraméter, a c integrációs konstans, amelynek minden választása a differenciálegyenlet egy megoldását adja.

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Adjuk meg az alábbi differenciálegyenletek rendjét, és döntsük el, lineárisak vagy sem!

(1) $y' + xy^2 = x^2$

(2) $3\dot{u} - 4\ddot{u} = 2tu$

(3) $\frac{dy}{dx}+\sqrt{x}y=x^2$

(4) $y''+5y'+x\sqrt{y}=x^2$

(5) $\sqrt{x}+y\cdot y'=y'''-(y'')^2$

Megoldás:

A rend meghatározásához azt kell megnéznünk, melyik az ismeretlen függvény legmagasabb rendű deriváltja, ami az egyenletben szerepel. A linearitásnál pedig azt vizsgáljuk, hogy az ismeretlen függvény csak első hatványon szerepel-e, s nem fordul-e elő az ismeretlen függvény és valamelyik deriváltjának szorzata, vagy két derivált szorzata.

Az (1) egyenlet ennek megfelelően elsőrendű, mert benne az ismeretlen y függvénynek csak első deriváltja szerepel. Pontosan abból tudhatjuk, y az ismeretlen függvény, hogy az egyenletben y deriváltja szerepel. Ez a függvény az x független változó függvénye, de azért nem írunk jelölésben $y(x)$ -et, hogy rövidebb legyen a jelölés. Ez általában nem vezet félreértéshez, mert az ismeretlen függvény mindig az, aminek deriváltja is szerepel.
A linearitás eldöntéséhez vizsgáljuk meg az egyenletben szereplő tagokat. (A tagok az egyenlet olyan részei, melyeket $+$, $-$ vagy $=$ választ el egymástól.) Ebben az egyenletben három tag van, melyek: y' , xy^2 és x^3 . Ezek közül a másodikban az ismeretlen függvény négyzete áll, tehát ez a tag nem elsőfokú az ismeretlen függvényre nézve, így az egyenlet nemlineáris.

A (2) egyenletben u az ismeretlen függvény, mert neki szerepelnek deriváltjai. A független változó nyilván t , s így $u=u(t)$. Az egyenlet másodrendű, mert $\ddot{u}$, azaz u második deriváltja is szerepel. Ebben az egyenletben is három tag van, melyek: $3\dot{u}$, $4\ddot{u}$ és $2tu$. Ezek mindegyikében csak első hatványon szerepel az ismeretlen függvény vagy annak valamelyik deriváltja, tehát ez lineáris egyenlet.

A (3) egyenletben az ismeretlen függvénynek csak első deriváltja szerepel, így ez elsőrendű egyenlet. A derivált itt a törtes $\frac{dy}{dx}$ jelöléssel szerepel. Nyilván x a független változó, így $y=y(x)$. Az egyenletben most a következő tagok vannak: y' , $\sqrt{x}y$ és x^2 . Ezekben y és y' csak első hatványon fordul elő, ezért az egyenlet lineáris. (Ne zavarjon meg bennünket az, hogy az egyenletben $\sqrt{x}$ és x^2 is szerepel. Ezekben nem az ismeretlennek áll nemlineáris kifejezése, hanem a független változónak.)

A (4) egyenlet másodrendű, mert szerepel benne y'' is. Az ismeretlen y függvény nyilván x függvénye, azaz $y=y(x)$. A következő tagok szerepelnek az egyenletben: y'' , $x\sqrt{y}$ és x^2 . A második tagban szerepel $\sqrt{y}$, ami miatt az egyenlet nemlineáris, hiszen az ismeretlen függvénynek nem első hatványa van.

Az (5) egyenlet harmadrendű, mert y''' , azaz harmadik derivált is szerepel az egyenletben. Négy tag van az egyenletben: $\sqrt{x}$, $y\cdot y'$, y''' és $(y'')^2$. Az egyenlet két okból is nemlineáris. Egyrészt a második tagban az ismeretlen függvény és egy deriváltjának szorzata áll, az utolsó tagban pedig az egyik derivált négyzete. Egyik sem elsőfokú tag.

2. feladat: Behelyettesítéssel ellenőrizzük le, hogy az $y'+\frac{y}{3x}=1$ differenciálegyenletnek megoldása az $y=\frac{3x}{4}+\frac{c}{\sqrt[3]{x}}$, $c\in\mathbb{R}$ függvény! Milyen megoldása ez az egyenletnek, általános vagy partikuláris? Ha általános megoldás, akkor adjuk meg az $y(1)=2$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást!

Megoldás: A behelyettesítéshez állítsuk elő a függvény deriváltját.

$$y'=\left(\frac{3x}{4}+\frac{c}{\sqrt[3]{x}}\right)'=\left(\frac{3}{4}x+c\cdot x^{-\frac{1}{3}}\right)'=\frac{3}{4}+c\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot x^{-\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}-\frac{c}{3\sqrt[3]{x^4}}=\frac{3}{4}-\frac{c}{3x\sqrt[3]{x}}$$

Ezután helyettesítsünk az egyenlet bal oldalán y' és y helyére, majd végezzük el a műveleteket.

$$y'+\frac{y}{3x}=\left(\frac{3}{4}-\frac{c}{3x\sqrt[3]{x}}\right)+\frac{\frac{3x}{4}+\frac{c}{\sqrt[3]{x}}}{3x}=\frac{3}{4}-\frac{c}{3x\sqrt[3]{x}}+\frac{\frac{3x}{4}}{3x}+\frac{\frac{c}{\sqrt[3]{x}}}{3x}=$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{c}{3x\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{4}+\frac{c}{3x\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$$

A műveletek elvégzése után pontosan az egyenlet jobb oldalát kaptuk, tehát a függvény valóban megoldása az egyenletnek.
Mivel a függvény tartalmaz egy szabadon választható paramétert, s a differenciálegyenlet elsőrendű, ezért ez általános megoldás, hisz a paraméterek száma megegyezik a differenciálegyenlet rendjével.
A kezdeti feltételünk azt jelenti, hogy ha a megoldásban $x=1$ -et helyettesítünk, akkor y értéke 2 lesz. Helyettesítsük be ezeket a megoldásban x és y helyére. Így egyenletet kapunk, amiből a c paraméter értéke meghatározható.

$$2=\frac{3\cdot 1}{4}+\frac{c}{\sqrt[3]{1}}=\frac{3}{4}+c \;\Rightarrow\; c=\frac{5}{4}$$

Írjuk be ezt a megoldásba, így megkapjuk a keresett partikuláris megoldást. (Jelölje ezt y_0 .)

$$y_0=\frac{3x}{4}+\frac{\frac{5}{4}}{\sqrt[3]{x}}=\frac{3x}{4}+\frac{5}{4\sqrt[3]{x}}$$

Ez a paraméter nélküli, konkrét függvény megoldása a differenciálegyenletnek, és eleget tesz a kezdeti feltételnek is.

Megjegyzés: Az $y(1)=2$ kezdeti feltételt másképpen is megadhattuk volna. Sokszor úgy fogalmazzuk meg az ilyen feladatot, hogy keressük a differenciálegyenletnek azt a megoldását, melynek grafikonja áthalad a $P(1,2)$ ponton, vagy egyszerűen csak megadjuk a pontot. Ez ugyanazt jelenti, mint az első megadás, hiszen itt is egy összetartozó (x,y) értékpárt adunk meg, csak egy pont koordinátáiként.

3. feladat: Igazoljuk behelyettesítéssel, hogy az $y' + 4y^2 = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása $y = \dfrac{1}{4x+c}$, és határozzuk meg az $y(-1) = \dfrac{1}{2}$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást.

Megoldás: A behelyettesítéshez vegyük a függvény deriváltját.

$$y' = \left(\frac{1}{4x+c}\right)' = \left((4x+c)^{-1}\right)' = -1(4x+c)^{-2}\cdot 4 = \frac{-4}{(4x+c)^2}$$

Helyettesítsünk az egyenlet bal oldalán y' és y helyére, majd végezzük el a műveleteket.

$$y' + 4y^2 = \frac{-4}{(4x+c)^2} + 4\left(\frac{1}{4x+c}\right)^2 = \frac{-4}{(4x+c)^2} + \frac{4}{(4x+c)^2} = 0$$

Pontosan az egyenlet jobb oldalát kaptuk, tehát a függvény valóban megoldás. Mivel tartalmaz egy paramétert, s az egyenlet elsőfokú, így általános megoldás.
A kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás meghatározásához helyettesítsük be a feltételben megadott x és y értékeket a függvénybe. Oldjuk meg az egyenletet a c praraméterre.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4\cdot(-1)+c} \;\Rightarrow\; c-4=2 \;\Rightarrow\; c=6$$

A paraméterre kapott értéket írjuk be az általános megoldásba, így kapjuk a kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást.

$$y_0 = \frac{1}{4x+6}$$

4. feladat: Ellenőrizzük behelyettesítéssel, hogy az $y'' + y' - 6y = 0$ differenciálegyenletnek az általános megoldása $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$! Határozzuk meg az $y(0) = 8$ és $y'(0) = 1$ kezdeti feltételeknek eleget tevő partikuláris megoldsát!

Megoldás: Mivel most másodrendű a differenciálegyenlet, ezért az általános megoldásnak két egymástól függetlenül választható paramétert kell tartalmaznia. A megadott függvényben szerepel is két paraméter c_1 és c_2 , tehát ha a függvény megoldása a differenciálegyenletnek, akkor ez lesz az általános megoldás. Az ellenőrzéshez most elő kell állítanunk a függvény első és második deriváltját is.

$$y' = \left(c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}\right)' = c_1e^{2x}\cdot 2 + c_2e^{-3x}\cdot(-3) = 2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x}$$

$$y'' = \left(2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x}\right)' = 2c_1e^{2x}\cdot 2 - 3c_2e^{-3x}\cdot(-3) = 4c_1e^{2x} + 9c_2e^{-3x}$$

Helyettesítsünk a differenciálegyenlet bal oldalán y'' , y' és y helyére, majd végezzük el a műveleteket.

$$y'' + y' - 6y = \left(4c_1e^{2x} + 9c_2e^{-3x}\right) + \left(2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x}\right) - 6\left(c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}\right) =$$
$$= 4c_1e^{2x} + 9c_2e^{-3x} + 2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x} - 6c_1e^{2x} - 6c_2e^{-3x} =$$
$$= (4+2-6)c_1e^{2x} + (9-3-6)c_2e^{-3x} = 0$$

Pontosan az egyenlet jobb oldalát kaptuk, a függvény tehát megoldása az egyenletnek.
Vegyük ezután a kezdeti feltételeket, s helyettesítsük be a megadott x , y , és y' értékeket a függvénybe és deriváltjába.

$$8 = c_1e^{2\cdot 0} + c_2e^{-3\cdot 0} \;\Rightarrow\; 8 = c_1 + c_2$$

$1=2c_1e^{2\cdot 0}-3c_2e^{-3\cdot 0}\ \Rightarrow\ 1=2c_1-3c_2$

Egy egyenletrendszert kaptunk a c_1 és c_2 paraméterekre. Az egyenletrendszer megoldásához adjuk hozzá az első egyenlet háromszorosát a második egyenlethez.

$25=5c_1\ \Rightarrow\ c_1=5$

Ezt visszahelyettesítve kapjuk, hogy $c_2=3$.

Írjuk be a kapott értékeket az általános megoldásba.

$y_0=5e^{2x}+3e^{-3x}$

Ezzel megkaptuk a kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldást.

5. feladat: Mi az általános megoldása az $y'=\sin x$ differenciálegyenletnek? Határozzuk meg az $y(0)=5$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást.

Megoldás: A differenciálegyenlet $y'=f(x)$ típusú, s most $f(x)=\sin x$.

Az egyenlet mindkét oldalát integrálva megkapjuk az általános megoldást.

$\int y'\,dx=\int \sin x\,dx\ \Rightarrow\ y=-\cos x+c$

Helyettesítsük be a kezdeti feltételben megadott $x=0$, $y=5$ értékpárt, és számoljuk ki a paraméter értékét.

$5=-\cos 0+c\ \Rightarrow\ 5=-1+c\ \Rightarrow\ c=6$

Helyettesítsük ezt az általános megoldásba, s megkapjuk a keresett partikuláris megoldást.

$y_0=-\cos x+6=6-\cos x$

Megjegyzés: Mint látható, a határozatlan integrálásnál megjelenő integrációs konstans lesz az általános megoldásban a paraméter. A differenciálegyenletek megoldása során a későbbiekben is sokszor integrálnunk kell majd, s az integrációs konstans lesz ilyenkor a paraméter. Ha differenciálegyenlet magasabb rendű, akkor többször is kell integrálni. Mindegyik integrálásnál újabb integrációs konstans jelenik meg, így több paramétert kapunk.

6. feladat: Határozzuk meg az $y'=\dfrac{1}{3x-2}$ differenciálegyenlet általános megoldását, s keressük meg az $y(1)=7$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást!

Megoldás: A differenciálegyenlet $y'=f(x)$ típusú, általános megoldása a két oldal integrálásával kapható meg.

$$\int y'\,dx=\int \frac{1}{3x-2}\,dx\ \Rightarrow\ y=\frac{\ln|3x-2|}{3}+c$$

Helyettesítsük be a kezdeti feltételben megadott értékpárt, és határozzuk meg a paramétert.

$$7=\frac{\ln|3\cdot 1-2|}{3}+c\ \Rightarrow\ 7=\frac{\ln 1}{3}+c\ \Rightarrow\ c=7$$

Ezt beírva az általános megoldásba, a kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást kapjuk.

$$y_0=\frac{\ln|3x-2|}{3}+7$$

Ellenőrző kérdések

1. kérdés: Tekintsük az

(1) $y'-x^2=y$

(2) $y' - y^2 = x$
differenciálegyenleteket. Melyik lineáris?
Az (1) lineáris a (2) nem.
A (2) lineáris az (1) nem. (X)
Mindkettő lineáris.
Egyik sem lineáris.

2. kérdés: Behelyettesítéssel döntsük el, hogy melyik függvény az általános megoldása az $y' + 3y = 2$ differenciálegyenletnek!

$y = 2 + ce^{3x}$

$y = \frac{2}{3} + ce^{3x}$

$y = 2 + ce^{-3x}$

$y = \frac{2}{3} + ce^{-3x}$ (X)

3. kérdés: Behelyettesítéssel döntsük el, hogy melyik függvény az $y' - 2y = 4\cos x$ differenciálegyenlet $y(0) = 7$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldása!

$y_0 = \sin 2x - \cos 2x + 6e^{2x}$

$y_0 = \sin 2x - \cos 2x + 8e^{2x}$ (X)

$y_0 = \cos 2x - \sin 2x + 6e^{2x}$

$y_0 = \cos 2x - \sin 2x + 8e^{2x}$

4. kérdés: Mi az $y' = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}$ differenciálegyenlet általános megoldása?

$y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(2x-1)^2} + c$

$y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x-1} + c$

$y = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x-1)^2} + c$ (X)

$y = \frac{3}{4}\sqrt[3]{2x-1} + c$

5. kérdés: Melyik függvény az $y' = \cos\frac{x}{2}$ differenciálegyenlet $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldása?

$y = -2\sin\frac{x}{2} + 1$

$y = -2\sin\frac{x}{2} - 1$

$y = 2\sin\frac{x}{2} + 1$

$y = 2\sin\frac{x}{2} - 1$ (X)

Elméleti összefoglaló

Egy elsőrendű differenciálegyenletet szétválasztható változójúnak mondunk, ha $y' = g(x)h(y)$ alakú, vagy algebrai átalakításokkal ilyen alakra hozható. Ezen általános alak azt jelenti, hogy az ismeretlen függvény deriváltja egy olyan szorzattal egyenlő, melynek egyik tényezője csak x -től, a másik pedig csak y -tól függ.

A megoldás során a deriváltat célszerűbb a törtes jelöléssel írni, azaz áttérni az $y' = \frac{dy}{dx}$ jelölésre. Egyenletünk alakja ekkor $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ lesz.

A következő lépésben osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $h(y)$ -nal. Ezt azonban csak akkor tehetjük meg, ha $h(y) \neq 0$. Ezért vizsgáljuk meg először, mit mondhatunk a $h(y) = 0$ esetben. Ha például y_1 zérushelye h -nak, azaz $h(y_1) = 0$, akkor az $y(x) = y_1$ konstans függvény megoldása lesz a differenciálegyenletnek. Ilyen esetben ugyanis az egyenlet mindkét oldala zérus. A bal oldalon egy konstans függvény deriváltja áll, ami nulla, a jobb oldalon pedig a szorzat második tényezője lesz nulla. Ha tehát h -nak van zérushelye, akkor a $h(y) = 0$ egyenlet megoldásával a differenciálegyenlet megoldását kapjuk. De ebben nem szerepel paraméter, így ez nem az általános megoldás. A differenciálegyenletnek még végtelenül sok más megoldása is van.

Foglalkozzunk innentől a $h(y) \neq 0$ esettel, és végezzük el az osztást.

$$\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Ezután integráljuk mindkét oldalt x szerint.

$$\int \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx}dx = \int g(x)dx$$

A bal oldalon helyettesítéssel áttérünk az y új változóra. Ez formálisan dx -szel egyszerűsítésként írható le.

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx$$

Hangsúlyozni szeretnénk, hogy bár így a bal oldalon y szerint integrálunk, de valójában mindkét oldalon x a változó, s aszerint integrálunk.

A két oldal integrálása után kapott egyenletet, ha van rá lehetőség, y -ra rendezzük, s ezzel megkapjuk a megoldást explicit alakban. Ha a kapott egyenlet nem rendezhető y -ra, akkor a kapott egyenletet implicit alakú megoldásnak nevezzük.

A rendezés során kihasználhatjuk egy kicsit jobban a derivált törtes jelölésében rejlő lehetőségeket. Ha az $\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x)$ egyenlet mindkét oldalát formálisan szorozzuk dx -szel, akkor az $\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$ alakhoz jutunk. Ezzel azt érjük el, hogy a bal oldalon csak y szerepel, míg a jobb oldalon csak x . Erre mondjuk azt, hogy szétválasztottuk a változókat.

Ezután integráljuk a két oldalt, s megkapjuk ugyanazt, amit az előbb. (A bal oldalon y szerint, a jobb oldalon x szerint.)

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

Mivel ez a formális leírás rövidebb, ezt fogjuk használni a feladatok megoldása során.

Kidolgozott feladatok

7. feladat: Döntsük el a következő differenciálegyenletekről, hogy szétválasztható változójúak-e, s ha igen, válasszuk szét a változókat!

(1) $y' - x^3 y = 0$

(2) $y' - x^3 + y = 0$

(3) $y' - 10^{2x+y} = 0$

(4) $y' - \ln x \cdot \ln y = 0$

(5) $y' - \ln(xy) = 0$

Megoldás: Ha egy elsőrendű differenciálegyenletről el kell dönteni, hogy változói szétválaszthatók-e. akkor az ismeretlen függvény deriváltjára rendezzük az egyenletet, a másik oldalt pedig megpróbáljuk két tényező szorzatára bontani úgy, hogy egyik tényezőben csak egyik, másikban csak a másik változó szerepeljen. Ha ez megvalósítható, akkor az egyenlet szétválasztható változójú, ellenkező esetben nem. Vizsgáljuk ezután sorban ennek megfelelően az egyenleteket.

Rendezzük az (1) egyenletet y'-ra.

$$y' = x^3 y$$

A jobb oldalon pontosan olyan szorzat áll, aminek egyik tényezőjében csak x, másik tényezőjében csak y szerepel, így ez szétválasztható változójú egyenlet.

Írjuk ezután a deriváltat törtes alakban, osszunk y-nal, és szorozzunk formálisan dx-szel.

$$\frac{dy}{dx} = x^3 y \Rightarrow \frac{1}{y} dy = x^3 dx$$

Ezzel sikerült szétválasztani a változókat. A két oldal integrálása után megkapnánk az egyenlet általános megoldását, de ezt most nem kérdezték.

Tekintsük ezután a (2) egyenletet, s rendezzük ezt is a deriváltra.

$$y' = x^3 - y$$

Az egyenlet jobb oldalán nem szorzat áll, és nem is tudjuk szorzattá bontani. Ez az egyenlet tehát nem szétválasztható változójú.

Próbálkozzunk a (3) egyenlettel. Kezdjük itt is a deriváltra rendezéssel.

$$y' = 10^{2x+y}$$

Bár a jobb oldalon nem szorzat áll, de felbontható szorzattá.

$$y' = 10^{2x} \cdot 10^{y}$$

A szorzat egyik tényezőjében csak x, a másikban csak y szerepel, tehát ebben az egyenletben szétválaszthatók a változók. Ehhez írjuk a deriváltat törtként, osszunk 10^y-nal és szorozzunk formálisan dx-szel.

$$\frac{dy}{dx}=10^{2x}\cdot 10^{y} \Rightarrow \frac{1}{10^{y}}dy=10^{2x}dx \Rightarrow 10^{-y}dy=10^{2x}dx$$

Jöjjön a (4) egyenlet, s először most is rendezzünk a deriváltra.

$y'-\ln x\cdot\ln y=0$

A jobb oldalon álló szorzat megfelel annak, amit szeretnék, így az egyenlet szétválasztható változójú.

A szétválasztáshoz térjünk át a deriváltban törtes alakra, osszunk $\ln y$ -nal, és szorozzunk formálisan dx-szel.

$$\frac{dy}{dx}=\ln x\cdot\ln y \Rightarrow \frac{1}{\ln y}dy=\ln x dx$$

Már csak az (5) egyenlet van hátra. Rendezzük ezt is a deriváltra.

$y'=\ln(xy)$

A jobb oldalon nem szorzat áll, s bár írható más formában, hiszen $\ln(xy)=\ln x+\ln y$, de így sem kapunk szorzatot. Ez az egyenlet tehát nem szétválasztható változójú.

8. feladat: Határozzuk meg az $y'=y^2\sqrt{x}$ differenciálegyenlet általános megoldását, s keressük meg az $y(1)=-1$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást!

Megoldás: A differenciálegyenlet alakján látható, hogy szétválasztható változójú, mert a jobb oldal a feltételnek megfelelő szorzat. Írjuk a deriváltat a törtes jelöléssel.

$$\frac{dy}{dx}=y^2\sqrt{x}$$

Mindkét oldalt osztanunk kellene y^2 -tel, de most meg kell vizsgálnunk lehet-e ez nulla. Az $y^2=0$ egyenlet egyetlen megoldása $y=0$, s a korábbiak szerint az $y(x)=0$ konstans függvény megoldása lesz a differenciálegyenletnek. A kezdeti feltételnek viszont nem tesz eleget ez a megoldás, ezért további megoldásokat keresünk.

Ezután feltesszük, hogy $y^2\neq 0$, s elosztjuk vele az egyenletet. Célszerű egyből formálisan szorozni dx-szel.

$$\frac{1}{y^2}dy=\sqrt{x}dx \Rightarrow y^{-2}dy=x^{\frac{1}{2}}dx$$

Sikerült szétválasztani a változókat, így mindkét oldalon integrálhatunk. Azért volt célszerű a hatvány reciprokát és a gyököt egyetlen hatványként írni, mert hatványokat könnyű integrálni.

$$\int y^{-2}\,dy=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx \Rightarrow \frac{y^{-1}}{-1}=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c \Rightarrow -\frac{1}{y}=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$$

Integrációs konstanst elég csak egyik oldalra írni, mert ha mindkét oldalon kiírjuk, akkor egy oldalra rendezhetők, és különbségük is egy szabadon választható konstans lesz. A konstanst célszerű a változót tartalmazó oldalra írni. Így könnyebb az ismeretlen függvényre rendezni az egyenletet, ha ez egyáltalán megoldható.

Most tudunk rendezni y -ra, ha vesszük mindkét oldal reciprokát, és szorzunk -1 -gyel.

$$-\frac{1}{y}=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c \Rightarrow y=\frac{-1}{\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c}$$

Ezzel megkaptuk a differenciálegyenlet általános megoldását explicit alakban.
Nézzük a kezdeti feltételt. Helyettesítsük a megadott értékpárt az általános megoldásba, és határozzuk meg c értékét.

$$-1=\frac{-1}{\frac{2}{3}\sqrt{1^3}+c} \Rightarrow 1=\frac{1}{\frac{2}{3}+c} \Rightarrow \frac{2}{3}+c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{3}$$

Ebből a kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$y_0=\frac{-1}{\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{1}{3}}\ .$$

Célszerű 3 -mal bővíteni a jobb oldalon, s így ezt az alábbi alakban is írhatjuk:

$$y_0=\frac{-3}{2\sqrt{x^3}+1}\ .$$

Megjegyzés: Látható, hogy a c paraméter semmilyen választásával sem kapjuk meg az egyenlet korábban megtalált $y(x)=0$ konstans megoldását, hiszen y olyan tört, aminek számlálója sosem nulla. Ezért az $y(x)=0$ most egy szinguláris megoldás.

9. feladat: Oldjuk meg az $y'=\frac{2y}{x}$, $y(1)=3$ kezdeti érték feladatot!

Megoldás: Írjuk a deriváltat törtes jelöléssel, így az egyenlet $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$, vagy $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x}y$, melyen látszik, az egyenlet szétválasztható változójú.
A szétválasztáshoz azonban osztanunk kellene y -nal, így előbb vizsgáljuk meg az $y(x)=0$ esetet. Ez a konstans függvény megoldása ugyan a differenciálegyenletnek, de a kezdeti feltételt nem elégíti ki. Keressük a további megoldásokat.
Ezután feltesszük, hogy $y\neq 0$, és osztunk vele. Közben formálisan szorzunk dx -szel.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x}y \Rightarrow \frac{1}{y}dy=\frac{2}{x}dx$$

Integráljunk mindkét oldalon.

$$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{2}{x}dx \Rightarrow \ln|y|=2\ln|x|+c$$

A kapott egyenletből fejezzük ki y -t, ha ez lehetséges. Ehhez célszerű az integrációs konstanst másképp írni. Írjunk a c helyére $\ln c_1$ -et. Ezt megtehetjük, mert a logaritmus függvény minden valós értéket felvesz. Bármi is tehát a c , található olyan c_1 , hogy teljesül a $c=\ln c_1$ egyenlőség. Az új c_1 konstans természetesen csak pozitív értékeket vehet fel.
Ezután a jobb oldal átalakítható.

$$\ln|y|=2\ln|x|+\ln c_1=\ln\left(x^2\right)+\ln c_1=\ln\left(c_1x^2\right)$$

Mivel a logaritmus függvény szigorúan monoton, ezért elhagyható az egyenlet két oldaláról.

$$|y|=c_1x^2$$

Ha ezután a konstans helyére egy új konstanst írunk, amely felvehet negatív értékeket is, akkor a bal oldalon elhagyható az abszolút érték. Legyen az új konstans c_2 .

$$y=c_2x^2$$

Ezzel megkaptuk a differenciálegyenlet általános megoldását.
A rendezés során többször cseréltük a konstanst, s most részletesen jelöltük a konstans változását. A későbbiekben ezt egyszerűsítjük, és nem jelöljük, hogy hányadik konstansnál járunk, hanem csak egyszerűen c -t írunk. Így a megoldás most is egyszerűen $y = cx^2$ alakban írható. Felesleges a konstans minden változását feltüntetni, mert ezzel csak a megoldás leírását nehezítjük meg.
Nézzük a kezdeti feltételt. Helyettesítsük a megadott értékpárt az általános megoldásba, és fejezzük ki c -t.

$$3 = c \cdot 1^2 \;\Rightarrow\; c = 3$$

Ebből a kezdeti érték feladat megoldása az $y_0 = 3x^2$ függvény.

Megjegyzés: Az $y(x) = 0$ megoldás most $c = 0$ választással megkapható az általános megoldásból, tehát most ez is reguláris megoldás.

10. feladat: Oldjuk meg az $y' = xy$, $y(0) = 2$ kezdeti érték feladatot!

Megoldás: Az egyenlet alakjából nyilvánvaló, hogy szétválasztható változójú. A szokott módon térjünk törtre a deriváltban.

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

Mivel y -nal osztanunk kell a változók szétválasztása közben, az $y(x) = 0$ konstans függvény megoldása lesz az egyenletnek. A kezdeti érték feladatnak azonban nem megoldása, így további megoldásokat keresünk. Feltesszük, hogy $y \neq 0$, osztunk vele, és dx -szel formálisan szorzunk.

$$\frac{dy}{dx} = xy \;\Rightarrow\; \frac{1}{y}dy = xdx$$

Integráljuk mindkét oldalt.

$$\int \frac{1}{y}dy = \int x\,dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = \frac{x^2}{2} + c$$

A logaritmust most nem tudjuk úgy eltüntetni, mint az előző feladatban, mert a jobb oldalon nincs logaritmus. Tekintsük ezért mindkét oldalt kitevőnek, amire az e számot emeljük.

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + c \;\Rightarrow\; e^{\ln|y|} = e^{\frac{x^2}{2}+c} \;\Rightarrow\; |y| = e^{\frac{x^2}{2}+c}$$

Mivel a jobb oldalon kitevőben összeg áll, ezt szorzattá tudjuk alakítani.

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}+c} \;\Rightarrow\; |y| = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^c$$

Itt azonban e^c egy konstanst jelent, aminek helyére egy új konstans írható. A korábbiakra hivatkozva azonban ezt nem jelöljük, hanem csak egyszerűen e^c helyett c -t írunk. Ez a konstans csak pozitív lehet, hiszen e egy hatványa helyett írtuk be.

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot c = ce^{\frac{x^2}{2}}$$

Ha most megengedjük, hogy c negatív értéket is felvegyen, akkor az abszolút érték elhagyható a bal oldalon. Így az általános megoldás az alábbi egyszerű alakban írható:

$$y = ce^{\frac{x^2}{2}} .$$

A megfelelő partikuláris megoldás meghatározásához helyettesítsük a kezdeti feltételt, és fejezzük ki c -t.

$2 = ce^{\frac{0^2}{2}} \Rightarrow c = 2$

A kezdeti feltételnek tehát az $y_0 = 2e^{\frac{x^2}{2}}$ függvény felel meg.

Megjegyzés: A differenciálegyenletek megoldása során sokszor kapunk olyat, hogy a megoldás exponenciális, melyben a kitevőben összeg vagy különbség áll. Ilyenkor ha a kitevő egyik tagja c , akkor a megoldás mindig hasonlóan alakítható mint most. Az exponenciálist szorzattá bontjuk, és e^c helyett c -t írhatunk. Ezáltal elérhető, hogy c szorzó legyen. Ha pedig a konstans szorzó, akkor az abszolút érték elhagyható, ha a konstans szorzó negatív is lehet.

Az $y(x) = 0$ megoldás $c = 0$ választással most is megkapható az általános megoldásból, tehát ez most is reguláris megoldás.

11. feladat: Mi az általános megoldása a $3xy^2y' - 2y^3 = 5xy^3 + xy'$ differenciálegyenletnek?

Megoldás: Az egyenlet ezen alakjából nem egyértelmű, hogy szétválaszthatók-e a változók. Ezért rendezzük y' -re az egyenletet. Egyből térjünk át a deriváltban törtes jelölésre.

$$3xy^2y' - 2y^3 = 5xy^3 + xy' \Rightarrow \left(3xy^2 - x\right)y' = (5x+2)y^3 \Rightarrow y' = \frac{(5x+2)y^3}{\left(3xy^2 - x\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(5x+2)y^3}{x\left(3y^2 - 1\right)} \Rightarrow y' = \frac{(5x+2)}{x}\frac{y^3}{\left(3y^2 - 1\right)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(5x+2)}{x}\frac{y^3}{\left(3y^2 - 1\right)}$$

Ezen alakból már egyértelműen látható, hogy a változók szétválaszthatók. Az ehhez szükséges lépések: szorzás $\left(3y^2 - 1\right)$ -gyel, osztás y^3 -bel, és formális szorzás dx -szel.

Mivel osztunk y^3 -bel, ezért vizsgáljuk az $y^3 = 0$ esetet, amiből az $y(x) = 0$ megoldást kapjuk. Ezután feltesszük, hogy $y \neq 0$, és végrehajtjuk a fenti műveleteket.

$$\frac{3y^2 - 1}{y^3}dy = \frac{5x+2}{x}dx$$

Ezután mindkét oldalon integrálnunk kell, de ehhez célszerű a törteket két törtre bontani, s ahol lehet egyszerűsíteni. Hatvány reciprokát pedig írjuk negatív kitevős hatványként az integráláshoz.

$$\left(\frac{3y^2}{y^3} - \frac{1}{y^3}\right)dy = \left(\frac{5x}{x} + \frac{2}{x}\right)dx \Rightarrow \left(\frac{3}{y} - \frac{1}{y^3}\right)dy = \left(5 + \frac{2}{x}\right)dx$$

Az $\frac{1}{y^3}$ helyett írjunk inkább negatív kitevős hatványt, és integrálhatunk mindkét oldalon.

$$\int\left(\frac{3}{y} - y^{-3}\right)dy = \int\left(5 + \frac{2}{x}\right)dx \Rightarrow 3\ln|y| - \frac{y^{-2}}{-2} = 5x + 2\ln|x| + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\ln|y| + \frac{1}{2y^2} = 5x + 2\ln|x| + c$$

Ebből az egyenletből nem fejezhető ki y , így a megoldás ebben az implicit alakban adható csak meg, explicit alakban nem.

12. feladat: Oldjuk meg az $\left(1 + x^3\right)y' - 2x^2y = 0$, $y(0) = 4$ kezdeti érték feladatot!

Megoldás: Először döntsük el, szétválaszthatók-e a változók. Ehhez rendezzük a deriváltra az egyenletet. A deriváltat egyből írjuk törtként.

$\left(1+x^3\right)y' = 2x^2y \;\Rightarrow\; y' = \frac{2x^2y}{1+x^3} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{1+x^3}y$

Így már látszik, hogy ez az egyenlet is szétválasztható változójú. Mivel osztanunk kell y -nal, az $y(x)=0$ konstans függvény megoldása az egyenletnek. A kezdeti feltételnek azonban nem felel meg, így további megoldásokat keresünk. Feltesszük, hogy $y \neq 0$, s szétválasztjuk a változókat.

$\frac{1}{y}dy = \frac{2x^2}{1+x^3}dx$

Integráljunk mindkét oldalon. A jobb oldalon kialakítható egy $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú integrandus.

$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{2x^2}{1+x^3}dx \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{y}dy = \frac{2}{3}\int \frac{3x^2}{1+x^3}dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = \frac{2}{3}\ln\left|1+x^3\right| + c$

Mivel mindkét oldalon logaritmus áll, célszerű c helyére $\ln c$ -t írni, s a jobb oldalt egyetlen logaritmussá alakítani.

$\ln|y| = \frac{2}{3}\ln\left|1+x^3\right| + c \;\Rightarrow\; \ln|y| = \ln\left|1+x^3\right|^{\frac{2}{3}} + \ln c \;\Rightarrow\; \ln|y| = \ln\left(c\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}\right)$

A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt a két oldalon elhagyhatóak a logaritmusok. Mivel c szorzó lesz, az abszolút érték is elhagyható megengedve a negatív c értékeket.

$y = c\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}$

Ezzel megkaptuk az általános megoldást explicit alakban.
Helyettesítsük be ebbe a kezdeti feltételben megadott értékeket, és számoljuk ki c -t.

$4 = c\sqrt[3]{\left(1+0^3\right)^2} \;\Rightarrow\; c = 4$

A kezdeti érték feladat megoldása tehát az $y_0 = 4\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}$ függvény.

13. feladat: Teánkba $10g$ cukrot szórunk, és állandó keveréssel biztosítjuk az egyenletes oldódást. Megfigyelésünk szerint a cukor fele $15s$ alatt oldódik fel. Milyen függvény írja le időben a még fel nem oldott cukor mennyiségét, és mennyi cukor lesz oldatlan állapotban $40s$ -mal azután, hogy a teába szórtuk a cukrot? Tapasztalat szerint híg oldatok esetén az oldódás sebessége arányos a még fel nem oldott cukor mennyiségével.

Megoldás: Amint látható, visszatértünk a motivációs példához, amivel a leckeindult. Ott eljutottunk addig, hogy az oldódás folyamata a $\frac{dm}{dt} = -km$ differenciálegyenlettel írható le.

Nyilván kezdeti feltételünk is van, hiszen ismerjük a cukor kezdeti tömegét, így g -ban mérve $m(0)=10$.

Van azonban még egy feltételünk, mert a szövegben az is szerepel, hogy $15s$ alatt a cukor fele oldódik fel, tehát $m(15)=5$. A későbbiekben majd meglátjuk, mire is lesz jó ez a plusz információ.

Egyelőre határozzuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását. Ehhez válasszuk szét a változókat. Mivel osztanunk kell m -mel, az $m(t)=0$ konstans függvény megoldása a differenciálegyenletnek. A kezdeti feltételnek azonban ez a megoldás nyilván nem felel meg, így további megoldásokat keresünk. Feltesszük, hogy $m \neq 0$, és szétválasztjuk a változókat.

$$\frac{1}{m}dm = -kdt$$

Integráljunk mindkét oldalon.

$$\int \frac{1}{m}dm = -\int k\,dt \;\Rightarrow\; \ln|m| = -kt + c$$

Emeljük fel e -t a bal illetve jobb oldalon álló kifejezésre.

$$e^{\ln|m|} = e^{-kt+c} \;\Rightarrow\; |m| = e^{-kt}\cdot e^{c}$$

Mivel e^c egy konstans, helyére egyszerűen c -t írhatunk, s mivel így a konstans szorzó lesz, elhagyható az abszolút érték.

$$|m| = e^{-kt}\cdot e^{c} \;\Rightarrow\; m = ce^{-kt}$$

Ezzel megkaptuk az általános megoldást explicit alakban. Behelyettesíthetjük a kezdeti feltételt, és meghatározhatjuk c -t.

$$10 = ce^{-k\cdot 0} \;\Rightarrow\; c = 10$$

A kezdeti feltételnek tehát az $m_0 = 10e^{-kt}$ függvény felel meg. Sajnos ebben nem ismerjük a k arányossági tényezőt. Most használjuk ki, hogy van egy további feltételünk, s helyettesítsük be az abban megadott értékeket.

$$5 = 10e^{-k\cdot 15} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} = e^{-15k} \;\Rightarrow\; \ln\frac{1}{2} = -15k \;\Rightarrow\; k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-15} = \frac{-\ln 2}{-15} = \frac{\ln 2}{15}$$

Ezután tehát ismerjük az oldódási folyamatra jellemző arányossági tényezőt is, és a folyamatot az $m_0 = 10e^{-\frac{\ln 2}{15}t} = 10\left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{15}} = 10\cdot 2^{-\frac{t}{15}}$ függvény írja le.

Az utolsó kérdés megválaszolásához ebbe a függvénybe kell a $t = 40$ értéket behelyettesítenünk.

$$m_0(40) = 10\cdot 2^{-\frac{40}{15}} = 10\cdot 2^{-\frac{8}{3}} \approx 1.57$$

A teában $40s$ elteltével tehát közelítőleg $1.57g$ fel nem oldott cukor lesz.

Ellenőrző kérdések

6. kérdés: Az alábbi két differenciálegyenlet közül melyik szétválasztható változójú, és melyik nem?

(1) $y' - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$

(2) $y' - \frac{1}{xy} = 0$

Az (1) szétválasztható változójú a (2) nem.
A (2) szétválasztható változójú az (1) nem. (X)
Mindkettő szétválasztható változójú.
Egyik sem szétválasztható változójú.

7. kérdés: A következő két differenciálegyenlet közül melyik szétválasztható változójú, és melyik nem?

(1) $y' + (xy)^2 = 0$

(2) $y' + (x+y)^2 = 0$
Az (1) szétválasztható változójú a (2) nem. (X)
A (2) szétválasztható változójú az (1) nem.
Mindkettő szétválasztható változójú.
Egyik sem szétválasztható változójú.

8. kérdés: Tekintsük az $\left(y^3 - 1\right)x + y^2\left(x^2+1\right)y' = 0$ differenciálegyenletet. Mi az egyenlet alakja a változók szétválasztása után?

$\frac{y^2}{y^3-1}dy = \frac{x}{x^2+1}dx$

$\frac{y^2}{y^3-1}dy = -\frac{x}{x^2+1}dx$ (X)

$\frac{y^3-1}{y^2dy} = \frac{x^2+1}{xdx}$

$\frac{y^3-1}{y^2dy} = -\frac{x^2+1}{xdx}$

9. kérdés: Mi az $y' + \frac{y}{x} = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása?

$y = x + c$
$y = c - x$
$y = cx$
$y = \frac{c}{x}$ (X)

10. kérdés: Melyik az $y' = y\cos x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

$y = ce^{\sin x}$ (X)
$y = ce^{\cos x}$
$y = \frac{c}{e^{\sin x}}$
$y = \frac{c}{e^{\cos x}}$

11. kérdés: Mi az $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása?

$y = c\sin x$
$y = \frac{c}{\sin x}$
$y = c\cos x$ (X)
$y = \frac{c}{\cos x}$

12. kérdés: Melyik függvény a megoldása az $y' = 3x^2y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$ kezdeti érték feladatnak?

$y = \dfrac{1}{x^3 + 2}$

$y = \dfrac{1}{x^3 - 2}$

$y = \dfrac{-1}{x^3 + 2}$

$y = \dfrac{-1}{x^3 - 2}$ (X)

13. kérdés: Mi a megoldása az $y' + \dfrac{2xy \ln y}{x^2 + 1} = 0$, $y(0) = e^2$ kezdeti érték feladatnak?

$y = e^{x^2 + 2}$

$y = e^{\left(\frac{1}{x^2+1} + 1\right)}$

$y = e^{2(x^2+1)}$

$y = e^{\frac{2}{x^2+1}}$ (X)

Elméleti összefoglaló

Az $y' + a(x)y = b(x)$ alakú differenciálegyenleteket elsőrendű lineáris differenciálegyenleteknek nevezzük. (Mivel y' és y csak első hatványon szerepelnek, és nem szerepel a szorzatuk, ezért lineárisak.) Az egyenletben $a(x)$ és $b(x)$ a változó tetszőleges függvényei lehetnek.

Ha $b(x) = 0$ konstans függvény, akkor az egyenlet homogén, egyébként inhomogén.

Homogén egyenletben minden tag tartalmazza vagy az ismeretlen függvényt, vagy annak deriváltját. Inhomogén egyenletekben van olyan tag, ami vagy konstans, vagy csak a független változó szerepel benne.

Az $y' + a(x)y = b(x)$, $b(x) \neq 0$ inhomogén egyenlethez tarozó homogén egyenletnek nevezzük $y_h' + a(x)y_h = 0$ egyenletet. Először ennek a megoldásával foglalkozunk. A ilyen homogén egyenletek mindig szétválasztható változójúak. Mivel a változók szétválasztása során osztanunk kell y_h -val, ezért a homogén egyenletnek mindig megoldása az $y_h = 0$ konstans függvény. Tegyük fel ezután, hogy $y_h \neq 0$, és válasszuk szét a változókat.

$$y_h' + a(x)y_h = 0 \Rightarrow \frac{dy_h}{dx} = -a(x)y_h \Rightarrow \frac{1}{y_h}dy_h = -a(x)dx$$

Integráljuk ezután mindkét oldalt.

$\int \frac{1}{y_h} dy_h = \int -a(x)dx \Rightarrow \ln|y_h| = -A(x) + c$, ahol $A(x)$ a $a(x)$ egy primitív függvénye.

Fejezzük ki az egyenletből y_h -t. Ehhez tekintsük mindkét oldalt kitevőnek, amire az e számot emeljük.

$$e^{\ln|y_h|} = e^{-A(x)+c} \Rightarrow |y_h| = e^{-A(x)+c} \Rightarrow |y_h| = e^{-A(x)} \cdot e^c$$

Itt e^c helyére egyszerűen c -t írhatunk, s megengedve ezen új konstansban a negatív értékeket, az abszolút érték is elhagyható, valamint a $c=0$ esetben megkapjuk az $y_h=0$ megoldást is. Így a homogén egyenlet általános megoldása:

$y_h = ce^{-A(x)}$, ahol $A(x)$ a $a(x)$ egy primitív függvénye.

Lényegében ezzel egy képletet kaptunk, amelybe csak be kell helyettesíteni az egyenletben szereplő $a(x)$ függvényt, meghatározni az integrálját, s fel tudjuk írni a megoldást. Megjegyzésre azonban nem ezt a képletet javasoljuk, hanem a megoldási módszert.

Foglalkozzunk ezután az inhomogén egyenlet megoldásával. Tegyük fel, hogy az inhomogén egyenlet megoldása hasonlít a hozzá tartozó homogén egyenlet megoldásához, csupán a konstans helyén valamilyen függvény áll, azaz $y=k(x)e^{-A(x)}$. Innentől a $k(x)$ függvény meghatározása a cél, hiszen ha azt ismerjük, akkor a differenciálegyenlet megoldása is felírható. Ezt az eljárást, hogy a konstans helyére egy függvényt írunk, a konstans variálás módszerének hívják. A $k(x)$ függvény meghatározásához helyettesítsük be az így felírt y függvényt és deriváltját az inhomogén egyenletbe. Ehhez deriváljuk a függvényt, mely olyan szorzat, amiben a második tényező összetett függvény. A belső függvény deriválásakor használjuk ki, hogy $A(x)$ a $a(x)$ egy primitív függvénye, ezért $A'(x)=a(x)$.

$$y'=k'(x)e^{-A(x)}+k(x)e^{-A(x)}\cdot\left(-A(x)\right)'=k'(x)e^{-A(x)}+k(x)e^{-A(x)}\cdot\left(-a(x)\right)$$

$$y'=k'(x)e^{-A(x)}-a(x)k(x)e^{-A(x)}$$

Hajtsuk végre a helyettesítést.

$$y'+a(x)y=b(x)\ \Rightarrow\ \left(k'(x)e^{-A(x)}-a(x)k(x)e^{-A(x)}\right)+a(x)k(x)e^{-A(x)}=b(x)$$

Az egyenlet bal oldalán a második és harmadik tag csak előjelében különbözik, így összegük zérus. Így az egyenlet egyszerűbbé vált, és már csak $k'(x)$ szerepel benne $k(x)$ nem.

$$k'(x)e^{-A(x)}=b(x)$$

Fejezzük ki $k'(x)$ -t, majd integráljunk, s így megkapjuk az ismeretlen $k(x)$ függvényt.

$$k'(x)=\frac{b(x)}{e^{-A(x)}}=b(x)e^{A(x)}\ \Rightarrow\ k(x)=\int b(x)e^{A(x)}dx$$

Helyettesítsük ezt $k(x)$ helyére az y függvényben, s így megkapjuk az inhomogén egyenlet általános megoldását.

$y=\left(\int b(x)e^{A(x)}dx\right)e^{-A(x)}$, ahol $A(x)$ a $a(x)$ egy primitív függvénye.

Ezzel olyan képletet kaptunk, melybe behelyettesítve az egyenletben szereplő $a(x)$ és $b(x)$ függvényeket, majd a kijelölt integrálokat meghatározva, megkapjuk az egyenlet megoldását. Nem javasoljuk azonban megjegyzésre ezt a képletet, hanem inkább az eljárást. A feladatok megoldása során azokat a lépéseket hajtjuk majd végre, amiket most a képlet levezetése során tettünk, csak ott az egyenletben szereplő konkrét függvényekkel. Így nem csak kijelöljük majd az integrálokat, hanem azokat meg is határozzuk.

Kidolgozott feladatok

14. feladat: Határozzuk meg az $y'+4x^3y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Az egyenlet homogén, mert nincs benne olyan tag, amiben ne szerepelne vagy az ismeretlen függvény, vagy annak deriváltja, így változói szétválaszthatók.

$$y' + 4x^3 y = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -4x^3 y \;\Rightarrow\; \frac{1}{y}dy = -4x^3 dx$$

Integráljunk mindkét oldalon.

$$\int \frac{1}{y}dy = \int -4x^3\,dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = -x^4 + c$$

Emeljük fel az e számot az egyenlet két oldalán álló kifejezésekre.

$$e^{\ln|y|} = e^{-x^4+c} \;\Rightarrow\; |y| = e^{-x^4}\cdot e^c$$

Mivel e^c egy konstans, helyére egyszerűen c írható, és így a szorzó konstans miatt az abszolút érték is elhagyható.

A megoldás tehát: $y = ce^{-x^4} = \dfrac{c}{e^{x^4}}$.

Megjegyzés: Az elméleti összefoglalóban a homogén egyenlet megoldását y_h -val jelöltük, hogy megkülönböztessük az inhomogén egyenlet megoldásától. Ha azonban nincs inhomogén egyenlet, akkor erre a megkülönböztetésre nincs szükség. Ezért ha csak egy homogén egyenlet megoldása a feladat, akkor ott nem szoktuk y_h -val jelölni a megoldást, hanem csak egyszerűen y -t írunk.

15. feladat: Oldjuk meg $y' - y\cos x = 0$ egyenletet!

Megoldás: Ismét homogén egyenletet kell megoldanunk, mert minden tagban szerepel y vagy y' , ezért szétválasztjuk a változókat.

$$y' - y\cos x = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = y\cos x \;\Rightarrow\; \frac{1}{y}dy = \cos x dx$$

Integráljunk az egyenlet két oldalán.

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \cos x\,dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = \sin x + c$$

Emeljük fel az e számot az egyenlet két oldalára.

$$e^{\ln|y|} = e^{\sin x + c} \;\Rightarrow\; |y| = e^{\sin x}\cdot e^c$$

Írjunk e^c helyett egyszerűen c -t, s ezzel az abszolút értéket is elhagyhatjuk.
A megoldás így a következő: $y = ce^{\sin x}$.

16. feladat: Mi az általános megoldása az $\left(x^3+5\right)y' - x^2 y = 0$ differenciálegyenletnek?

Megoldás: Ez az egyenlet is homogén, hiszen minden tagban szerepel y vagy y' , így most is a változók szétválasztásával kezdjük a megoldást.

$$\left(x^3+5\right)y' - x^2 y = 0 \;\Rightarrow\; \left(x^3+5\right)\frac{dy}{dx} = x^2 y \;\Rightarrow\; \frac{1}{y}dy = \frac{x^2}{\left(x^3+5\right)}dx$$

Következik a két oldal integrálása. A jobb oldalon egy 3 -as szorzó becsempészésével $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ típusú integrandust kapunk.

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{x^2}{\left(x^3+5\right)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{\left(x^3+5\right)}dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+5\right| + c$$

Mivel mindkét oldalon logaritmus van, ezért most célszerű c helyett $\ln c$ -t írni, majd a jobb oldalt egyetlen logaritmussá alakítani.

$$\ln|y| = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+5\right| + c \;\Rightarrow\; \ln|y| = \ln\left|x^3+5\right|^{\frac{1}{3}} + \ln c \;\Rightarrow\; \ln|y| = \ln\left(c\sqrt[3]{\left|x^3+5\right|}\right)$$

Az egyenlet két oldaláról elhagyható a logaritmus, mert szigorúan monoton függvény. Mivel így a szorzó konstans lesz, az abszolút értékek is elhagyhatók.

Így az általános megoldás: $y = c\sqrt[3]{x^3+5}$.

17. feladat: Határozzuk meg az $y' - \frac{3y}{x} = x^3\cos x$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Ez a differenciálegyenlet inhomogén, mert van benne egy tag, az $x^3\cos x$, amelyik csak a független változót tartalmazza. Vegyük a hozzá tartozó homogén egyenletet. Ehhez hagyjuk el az $x^3\cos x$ tagot az egyenletből.

$$y_h' - \frac{3y_h}{x} = 0$$

Ezt az egyenletet oldjuk meg úgy mint az előző homogén egyenleteket. Először válasszuk szét a változókat.

$$\frac{dy_h}{dx} = \frac{3y_h}{x} \;\Rightarrow\; \frac{1}{y_h}dy_h = \frac{3}{x}dx$$

Integráljuk a két oldalt, és a jobb oldalt alakítsuk egyetlen logaritmussá. Ehhez írjunk c helyett $\ln c$ t.

$$\int \frac{1}{y_h}dy_h = \int \frac{3}{x}dx \;\Rightarrow\; \ln|y_h| = 3\ln|x| + c = \ln|x|^3 + \ln c = \ln\left(c|x|^3\right)$$

Elhagyva a logaritmusokat és az abszolút értékeket kapjuk: $y_h = cx^3$.

Ezután keressük az inhomogén egyenlet megoldását a konstans variálásának módszerével, azaz írjunk a homogén egyenlet megoldásában a konstans helyére egy függvényt. Így $y = k(x)x^3$ alakban keressük a megoldást, s innentől a $k(x)$ függvény meghatározása a cél.

Vesszük az y deriváltját.

$$y' = k'(x)x^3 + k(x)3x^2 = k'(x)x^3 + 3k(x)x^2$$

Helyettesítjük y -t és y' -t az inhomogén egyenletbe.

$$y' - \frac{3y}{x} = x^3\cos x \;\Rightarrow\; \left(k'(x)x^3 + 3k(x)x^2\right) - \frac{3k(x)x^3}{x} = x^3\cos x$$

A bal oldalon egyszerűsítsük a törtet és vonjunk össze.

$$k'(x)x^3 + 3k(x)x^2 - 3k(x)x^2 = x^3\cos x \;\Rightarrow\; k'(x)x^3 = x^3\cos x$$

Fejezzük ki $k'(x)$ -et és integrálással határozzuk meg $k(x)$ -et.

$$k'(x) = \cos x \;\Rightarrow\; k(x) = \int k'(x)\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

Helyettesítsük ezt be y -ba, s megkapjuk az inhomogén egyenlet általános megoldását.

$$y = k(x)x^3 = (\sin x + c)x^3$$

18. feladat: Oldjuk meg az $y' + \frac{3y}{x} = 10x$, $y(1) = 4$ kezdeti érték feladatot!

Megoldás: A differenciálegyenlet inhomogén, mert a jobb oldalon álló tag nem tartalmazza sem y -t, sem y' -t. Hagyjuk el ezt a tagot, s megkapjuk a hozzá tartozó homogén egyenletet. Ezt oldjuk meg úgy, mint az eddigieket.

$$y_h' + \frac{3y_h}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy_h}{dx} = -\frac{3y_h}{x} \Rightarrow \frac{1}{y_h}dy_h = -\frac{3}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{y_h}dy_h = \int -\frac{3}{x}dx \Rightarrow \ln|y_h| = -3\ln|x| + c = \ln|x|^{-3} + \ln c = \ln\left(\frac{c}{|x|^3}\right)$$

Ebből a homogén egyenlet általános megoldása: $y_h = \frac{c}{x^3}$.

Keressük ezután az inhomogén egyenlet megoldását a konstans variálásával, tehát írjuk függvényt a konstans helyére, azaz $y = \frac{k(x)}{x^3}$. Vegyük ennek a függvénynek a deriváltját.

$$y' = \left(\frac{k(x)}{x^3}\right)' = \frac{k'(x)x^3 - k(x)3x^2}{\left(x^3\right)^2} = \frac{k'(x)x^3 - 3k(x)x^2}{x^6} = \frac{k'(x)}{x^3} - \frac{3k(x)}{x^4}$$

Helyettesítsünk az inhomogén egyenletben y' és y helyére.

$$y' + \frac{3y}{x} = 10x \Rightarrow \left(\frac{k'(x)}{x^3} - \frac{3k(x)}{x^4}\right) + \frac{3\frac{k(x)}{x^3}}{x} = 10x$$

A bal oldalon az emeletes törtet alakítsuk egyszerű törtté, majd vonjunk össze.

$$\frac{k'(x)}{x^3} - \frac{3k(x)}{x^4} + \frac{3k(x)}{x^4} = 10x \Rightarrow \frac{k'(x)}{x^3} = 10x$$

Fejezzük ki $k'(x)$-t, majd integráljuk, így megkapjuk $k(x)$ -et.

$$\frac{k'(x)}{x^3} = 10x \Rightarrow k'(x) = 10x^4 \Rightarrow k(x) = \int k'(x)dx = \int 10x^4 dx = 2x^5 + c$$

Ezt behelyettesítve y -ba, megkapjuk az inhomogén egyenlet általános megoldását.

$$y = \frac{k(x)}{x^3} = \frac{2x^5 + c}{x^3} = 2x^2 + \frac{c}{x^3}$$

Foglalkozzunk ezután a kezdeti feltétellel. Helyettesítsük be a megadott értékpárt, és fejezzük ki c -t.

$$4 = 2\cdot 1^2 + \frac{c}{1^3} \Rightarrow 4 = 2 + c \Rightarrow c = 2$$

Így a kezdeti érték feladat megoldása az $y_0 = 2x^2 + \frac{2}{x^3}$ függvény lesz.

Megjegyzés: Ha összehasonlítjuk az előző feladat homogén egyenletét ennek a feladatnak a homogén egyenletével, akkor azt látjuk, csak egy előjelben térnek el. Ez az előjel a megoldás során egy logaritmus elé kerül, s így a megoldásban ahelyett, hogy szoroznánk, osztanunk kell. Az előző feladatban cx^3 volt a megoldás, most pedig $\frac{c}{x^3}$. Figyeljünk ezért oda nagyon az előjelekre, mert ha hibázunk, az teljesen megváltoztathatja a megoldásul kapott függvényt.

19. feladat: Mi a megoldása az $y' + y\sin x = 3x^2 e^{\cos x}$, $y(0) = 2e$ kezdeti érték feladatnak?

Megoldás: A differenciálegyenlet inhomogén a jobb oldalon álló tag miatt, amiben csak x szerepel. Hagyjuk el ezt a tagot, s a kapott homogén egyenletet oldjuk meg a szokott módon.

$$y_h' + y_h \sin x = 0 \Rightarrow \frac{dy_h}{dx} = -y_h \sin x \Rightarrow \frac{1}{y_h}dy_h = -\sin x dx$$

$$\int \frac{1}{y_h} dy_h = \int -\sin x\, dx \Rightarrow \ln|y_h| = \cos x + c \Rightarrow |y_h| = e^{\cos x + c} = e^{\cos x} \cdot e^c$$

Ebből a homogén egyenlet általános megoldása: $y_h = ce^{\cos x}$.

Következik a konstans variálása, azaz keressük az inhomogén egyenlet megoldását $y = k(x)e^{\cos x}$ alakban. Határozzuk meg ennek deriváltját.

$$y' = \left(k(x)e^{\cos x}\right)' = k'(x)e^{\cos x} + k(x)e^{\cos x}(-\sin x) = k'(x)e^{\cos x} - k(x)e^{\cos x}\sin x$$

Helyettesítsünk az inhomogén egyenletben y' és y helyére.

$$y' + y\sin x = 3x^2 e^{\cos x} \Rightarrow \left(k'(x)e^{\cos x} - k(x)e^{\cos x}\sin x\right) + k(x)e^{\cos x}\sin x = 3x^2 e^{\cos x}$$

Vonjunk össze a bal oldalon, rendezzünk $k'(x)$ -re, majd integráljunk.

$$k'(x)e^{\cos x} = 3x^2 e^{\cos x} \Rightarrow k'(x) = 3x^2 \Rightarrow k(x) = \int k'(x)\,dx = \int 3x^2\,dx = x^3 + c$$

Ebből az inhomogén egyenlet általános megoldása: $y = \left(x^3 + c\right)e^{\cos x}$.

Helyettesítsük ebbe a kezdeti feltétel adatait.

$$2e = \left(0^3 + c\right)e^{\cos 0} \Rightarrow 2e = ce \Rightarrow c = 2$$

A kezdeti érték feladat megoldása tehát az $y_0 = \left(x^3 + 2\right)e^{\cos x}$ függvény.

20. feladat: Határozzuk meg az $y' - \frac{y}{2x} = \sqrt{x^3}$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Az egyenlet inhomogén a jobb oldali tag miatt, mert abban csak x szerepel. Hagyjuk el ezt a tagot, s oldjuk meg a kapott homogén egyenletet.

$$y_h' - \frac{y_h}{2x} = 0 \Rightarrow \frac{dy_h}{dx} = \frac{y_h}{2x} \Rightarrow \frac{1}{y_h} dy_h = \frac{1}{2x} dx$$

$$\int \frac{1}{y_h} dy_h = \int \frac{1}{2x} dx \Rightarrow \ln|y_h| = \frac{1}{2}\ln|x| + c = \ln|x|^{\frac{1}{2}} + \ln c = \ln\left(c\sqrt{|x|}\right) = \ln\left(c\sqrt{x}\right)$$

Azért hagyhattuk el x -nél az abszolút értéket, mert a differenciálegyenlet a $\sqrt{x^3}$ tag miatt csak akkor értelmezhető, ha x nem negatív, s ekkor $|x| = x$.

Elhagyjuk a logaritmusokat és y_h -nál is az abszolút értéket, s kapjuk a homogén egyenlet általános megoldását.

$$y_h = c\sqrt{x}$$

Jöjjön a konstans variálása, azaz cseréljük ki c -t függvényre. Keressük az inhomogén egyenlet megoldását $y = k(x)\sqrt{x}$ alakban. Vegyük ennek a függvénynek a deriváltját.

$$y' = \left(k(x)\sqrt{x}\right)' = k'(x)\sqrt{x} + k(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Helyettesítsük ezt az inhomogén egyenletben y' helyére, $k(x)\sqrt{x}$ -et pedig y helyére.

$$y' - \frac{y}{2x} = \sqrt{x^3} \Rightarrow \left(k'(x)\sqrt{x} + k(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - \frac{k(x)\sqrt{x}}{2x} = \sqrt{x^3}$$

A bal oldalon az utolsó tagot egyszerűsítsük $\sqrt{x}$ -szel, majd vonjunk össze.

$$k'(x)\sqrt{x} + k(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{k(x)}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x^3} \Rightarrow k'(x)\sqrt{x} = \sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$$

Fejezzük ki $k'(x)$ -et, s integráljunk.

$$k'(x) = x \;\Rightarrow\; k(x) = \int k'(x)\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

Ezek után az inhomogén egyenlet általános megoldása: $y = k(x)\sqrt{x} = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)\sqrt{x}$.

21. feladat: Oldjuk meg az $y' - y\,\text{ctg}\,x - \text{ctg}\,x = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ kezdeti érték feladatot!

Megoldás: Az egyenlet inhomogén, mert a harmadik tag nem tartalmazza sem y -t sem y' -t. Hagyjuk el ezt a tagot, s oldjuk meg a kapott homogén egyenletet.

$$y_h' - y_h\text{ctg}\,x = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy_h}{dx} = y_h\text{ctg}\,x \;\Rightarrow\; \frac{1}{y_h}dy_h = \text{ctg}\,x\,dx \;\Rightarrow\; \frac{1}{y_h}dy_h = \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$\int \frac{1}{y_h}dy_h = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx \;\Rightarrow\; \ln|y_h| = \ln|\sin x| + c = \ln|\sin x| + \ln c = \ln\left(c|\sin x|\right)$$

Ebből a homogén egyenlet általános megoldása: $y_h = c\sin x$.
Keressük az inhomogén egyenlet megoldását a konstans variálás módszerével, azaz legyen $y = k(x)\sin x$. Deriváljuk ezt a függvényt.

$$y' = \left(k(x)\sin x\right)' = k'(x)\sin x + k(x)\cos x$$

Helyettesítsünk az eredeti inhomogén differenciálegyenletben az ismeretlen függvény és deriváltjának helyére.

$$y' - y\,\text{ctg}\,x - \text{ctg}\,x = 0 \;\Rightarrow\; \left(k'(x)\sin x + k(x)\cos x\right) - k(x)\sin x\,\text{ctg}\,x - \text{ctg}\,x = 0$$

Írjunk a $\text{ctg}\,x$ -ek helyére $\frac{\cos x}{\sin x}$ -et, egyszerűsítsünk a harmadik tagban, vonjunk össze, majd fejezzük ki $k'(x)$ -et.

$$k'(x)\sin x + k(x)\cos x - k(x)\sin x\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \;\Rightarrow\; k'(x)\sin x - \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \;\Rightarrow$$

$$k'(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

Ezt integrálva megkapjuk $k(x)$ -et. A jobb oldalon $f^{\alpha}(x)\,f'(x)$ típusú integrandust kapunk, ha $\sin x$ negatív kitevős hatványát írjuk.

$$k(x) = \int k'(x)\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \int (\sin x)^{-2}\cos x\,dx = \frac{(\sin x)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{\sin x} + c = c - \frac{1}{\sin x}$$

Ebből az inhomogén egyenlet általános megoldása az alábbi:

$$y = k(x)\sin x = \left(c - \frac{1}{\sin x}\right)\sin x = c\sin x - 1$$

Helyettesítsük ebbe a kezdeti feltételben megadott értékpárt.

$$3 = c\sin\frac{\pi}{2} - 1 \;\Rightarrow\; 3 = c - 1 \;\Rightarrow\; c = 4$$

Így a kezdeti érték feladat megoldása az $y_0 = 4\sin x - 1$ függvény lesz.

Ellenőrző kérdések

14. kérdés: Mi az általános megoldása az $y' - 3x^2 y = 0$ differenciálegyenletnek?

$y = c + e^{x^3}$

$y = c - e^{x^3}$

$y = ce^{x^3}$ (X)

$y = \frac{c}{e^{x^3}}$

15. kérdés: Melyik függvény az $y' - y\sin x = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása?

$y = c + e^{\cos x}$

$y = c - e^{\cos x}$

$y = ce^{\cos x}$

$y = \frac{c}{e^{\cos x}}$ (X)

16. kérdés: Mi az általános megoldása az $\left(x^2 + 6\right) y' + xy = 0$ differenciálegyenletnek?

$y = c\sqrt{x^2 + 6}$

$y = \frac{c}{\sqrt{x^2 + 6}}$ (X)

$y = ce^{\sqrt{x^2+6}}$

$y = \frac{c}{e^{\sqrt{x^2+6}}}$

17. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $y' - \frac{2y}{x} = x^2 \sin x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

$y = x^2 \left(c + \cos x\right)$

$y = x^2 \left(c - \cos x\right)$ (X)

$y = x^2 \left(c + \sin x\right)$

$y = x^2 \left(c - \sin x\right)$

18. kérdés: Mi a megoldása az $y' - \frac{2y}{x} = x^2 \sin x$, $y\left(1\right) = 6$ kezdeti érték feladatnak?

$y_0 = \frac{x^5 + 5}{x^2}$ (X)

$y_0 = \frac{7 - x^5}{x^2}$

$y_0 = x^2 \left(5x + 1\right)$

$y_0 = x^2 \left(11 - 5x\right)$

19. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $y' + y\cos x = 2xe^{-\sin x}$, $y(0) = 5$ kezdeti érték feladat megoldása?

$y_0 = e^{\sin x}\left(5 + x^2\right)$

$y_0 = e^{\sin x}\left(5 - x^2\right)$

$y_0 = e^{-\sin x}\left(5 + x^2\right)$ (X)

$y_0 = e^{-\sin x}\left(5 - x^2\right)$

20. kérdés: Mi az $y' - \dfrac{y}{3x} = \sqrt[3]{x^4}$ differenciálegyenlet általános megoldása?

$y = \sqrt[3]{x}\left(c + \dfrac{x^2}{2}\right)$ (X)

$y = \sqrt[3]{x}\left(c - \dfrac{x^2}{2}\right)$

$y = \dfrac{c + \dfrac{x^2}{2}}{\sqrt[3]{x}}$

$y = \dfrac{c - \dfrac{x^2}{2}}{\sqrt[3]{x}}$

21. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,x$, $y(0) = 3$ kezdeti érték feladat megoldása?

$y_0 = 2\cos x + 1$ (X)

$y_0 = 4\cos x - 1$

$y_0 = \dfrac{2}{\cos x} + 1$

$y_0 = \dfrac{4}{\cos x} - 1$