2. Integrálszámítás

2.3. Improprius integrálok

Tanulási cél

Megismerni az improprius integrálok fogalmát a két fontos esetben, amikor az integrálási intervallum nem véges, valamint amikor a függvény nem korlátos az integrálási intervallumban. Elsajátítani az integrálok kiszámítási módját mindkét esetben.

Motivációs példa

Mennyi munkára van szükség ahhoz, hogy egy m tömegű űrhajó végtelenül távolra kerüljön a Földtől, s ezáltal kikerüljön annak gravitációs hatása alól?
Egy hasonló feladattal találkoztunk akkor, amikor megismerkedtünk a határozott integrállal, de akkor azt volt a kérdés, mennyi munkára van szükség ahhoz, hogy az űrhajó egy adott h távolságra kerüljön a Föld felszínétől. Akkor kiderült, ennek meghatározásához integrálnunk kell a gravitációs erőt leíró $F_{grav}\left(r\right)=k\dfrac{Mm}{r^2}$ függvényt, melynek változója r Föld középpontjától mért távolság, az $\left[R,R+h\right]$ intervallumon. Ha most is így gondolkodunk, akkor azt mondhatjuk, a gravitációs erőt leíró függvényt az $\left[R,\infty\right)$ intervallumon kell integrálnunk. Ezzel az a gond, hogy a határozott integrál fogalmát véges zárt intervallumon definiáltuk. Véges értékeket tudunk helyettesíteni a Newton-Leibniz-formulába is, aminek segítségével az integrált ki tudjuk számolni. A ∞-t nem tudjuk behelyettesíteni ebbe szabályba. A kérdés ezután általánosabban úgy fogalmazható meg, hogy miként tudunk integrálni olyan esetben, amikor az integrálási intervallum nem véges, azaz határai között szerepel a ∞, vagy a $-\infty$, vagy mindkettő. Erre adjuk meg a választ az alábbiakban.

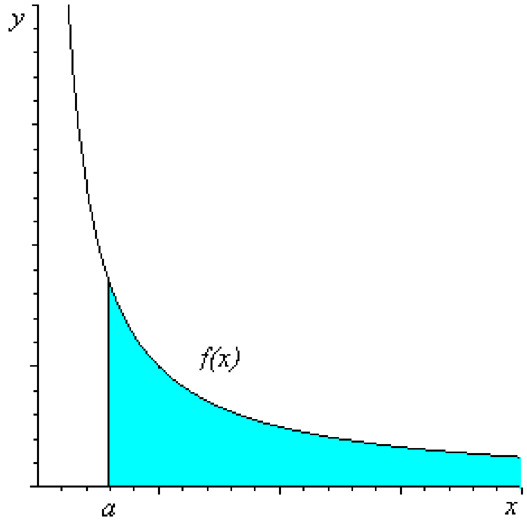
Elméleti összefoglaló

Legyen az $f\left(x\right)$ függvény értelmezett az $\left[a,\infty\right)$ intervallumon, és integrálható annak bármely $\left[a,b\right]$ részintervallumán. $\left(b>a\right)$ Ha létezik a $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ határérték, akkor ezt az $f\left(x\right)$ függvény $\left[a,\infty\right)$ intervallumon vett improprius integráljának nevezzük. Jele: $\int\limits_a^\infty f\left(x\right)dx$.

Ha a $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ határérték csak tágabb értelemben létezik, azaz ∞ vagy a $-\infty$, akkor azt mondjuk, hogy az integrál divergens. Ha van véges határérték, akkor az integrál konvergens.
A fentieket úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha egy függvényt ∞ -ig kell integrálnunk, akkor az integrálás felső határát kicseréljük egy véges értékre $\left(b\right)$, azaz szűkítünk az integrálási intervallumon. Ezek után véges intervallumon kell integrálnunk, amit ki tudunk számolni. De a felső határt változóként kezeljük, s így az integrál értéke a felső határ függvénye lesz. Ennek

a függvénynek vesszük a határértékét a ∞ -ben, azaz a megváltoztatott integrálási határral tartunk az eredeti határhoz. Ha létezik a határérték, akkor ez az integrál értéke a ∞ -ig tartó intervallumon.

Egy függvény $[a,\infty)$ intervallumon vett integrálja szemléletesen annak a síkrésznek az előjeles területét adja meg, ami a függvény grafikonja és az x tengely közötti helyezkedik el az $[a,\infty)$ intervallumon. Ebben az érdekes, hogy olyan alakzat területéről beszélünk, ami vízszintes irányban a ∞ -ig nyúlik, tehát nem korlátos.



Szemléletesen nyilvánvaló, hogy egy ilyen alakzatnak csak akkor létezhet területe, ha a ∞ felé haladva az alakzat egyre keskenyebb lesz, azaz a függvény grafikonja simul az x tengelyhez, ami azt jelenti, a függvény határértéke a végtelenben 0 . Kijelenthetjük tehát, hogy ha $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \neq 0$, akkor az $\int_a^\infty f(x)\,dx$ integrál biztosan divergens. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ha $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, az nem jelenti azt, hogy az $\int_a^\infty f(x)\,dx$ integrál konvergens, ebben az esetben is lehet divergens. Erre később majd látunk is példát.

Teljesen hasonló módon járhatunk el, ha az integrálási intervallum alsó határa $-\infty$.

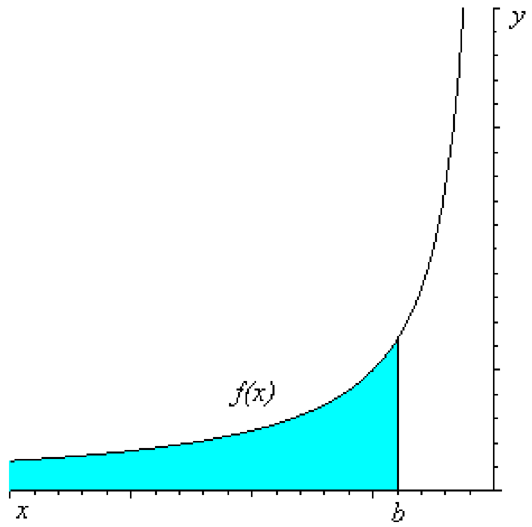
Legyen az $f(x)$ függvény értelmezett az $(-\infty,b]$ intervallumon, és integrálható annak bármely $[a,b]$ részintervallumán. $(a<b)$ Ha létezik a

$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ határérték, akkor ezt az $f(x)$ függvény $(-\infty,b]$ intervallumon vett improprius integráljának nevezzük. Jele: $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$.

Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha egy függvényt $-\infty$ -ig kell integrálnunk, akkor az integrálás alsó határát kicseréljük egy véges értékre (a) , azaz szűkítünk az integrálási intervallumon. Így már véges intervallumon kell integrálnunk, ami meghatározható. Az alsó határt azonban változóként kezeljük, tehát az integrál értéke az alsó határ függvénye lesz. Ennek a függvénynek vesszük a határértékét a $-\infty$ -ben, azaz a megváltoztatott integrálási határral tartunk az eredeti határhoz. Ha létezik a határérték, akkor ez az integrál értéke a $-\infty$ -ig tartó intervallumon.

Jelölésben: $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$.

Egy függvény $(-\infty,b]$ intervallumon vett integrálja szemléletesen annak a síkrésznek az előjeles területét adja meg, ami a függvény grafikonja és az x tengely közötti helyezkedik el az $(-\infty,b]$ intervallumon.

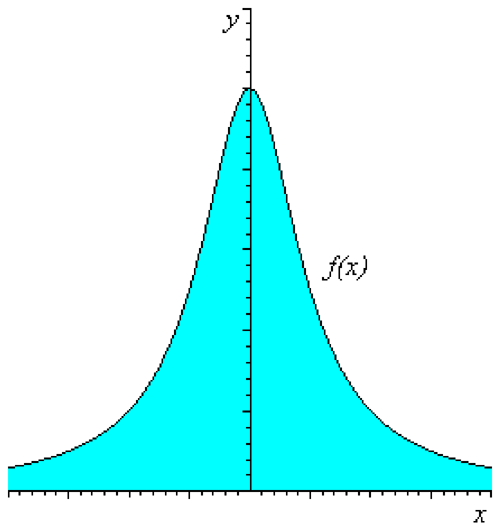


Nyilván csak akkor lehet konvergens egy ilyen integrál, ha az $f(x)$ függvény határértéke a $-\infty$ -ben 0 , azaz $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Ha egy függvényt $-\infty$ -től ∞ -ig akarunk integrálni, akkor ezek után egyértelmű, hogy az alsó és felső határt is megváltoztatjuk végesre. Az integrál így függni fog az alsó és felső határtól is. Ennek vesszük a határértékét úgy, hogy az alsó határral $-\infty$ -hez, a felső határral pedig ∞-hez, tehát az eredeti határokhoz tartunk. Ha létezik véges határérték, akkor ezt a függvény $(-\infty,\infty)$ intervallumon vett improprius integráljának nevezzük.

Jelölésben: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$.

Egy függvény $(-\infty,\infty)$ intervallumon vett integrálja szemléletesen annak a síkrésznek az előjeles területét adja meg, ami a függvény grafikonja és az x tengely közötti helyezkedik el az $(-\infty,\infty)$ intervallumon.



Nyilván csak akkor lehet konvergens egy ilyen integrál, ha az $f(x)$ függvény határértéke a $-\infty$ -ben és a ∞ -ben is 0 , azaz $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Kidolgozott feladatok

1. feladat: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx$

Megoldás: Az integrál improprius, hiszen a felső integrálási határ ∞ . Járjunk el a fentiek szerint, azaz szűkítsünk az integrálási intervallumon. Cseréljük ki a felső határban a ∞ -t egy véges értékre (b) , s határozzuk meg így az integrál értékét, majd vegyük az eredmény határértékét úgy, hogy a megváltoztatott határral tartunk az eredeti határhoz $(b\to\infty)$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx$$

Célszerű külön elvégezni a határozatlan integrálást, hogy ne kelljen minden átalakításnál írnunk a határértéket is. Ennek során írjuk a gyököt hatványként, majd alakítsuk az egész integrandust egyetlen hatvánnyá. A hatványt integráljuk a szokott módon, majd az eredményt alakítsuk vissza gyökös formába.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1}{x\cdot x^{\frac{1}{2}}}\, dx = \int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx = \int x^{-\frac{3}{2}}\, dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -2\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + c = \frac{-2}{\sqrt{x}} + c$$

A kapott primitív függvénnyel térjünk vissza a határozott integrálhoz, és helyettesítsünk a Newton-Leibniz-formulába.

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-2}{\sqrt{b}} - \frac{-2}{\sqrt{1}}\right) = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-2}{\sqrt{b}} + \frac{2}{\sqrt{1}}\right) = \lim_{b\to\infty} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{b}}\right)$$

A zárójelben egy függvény áll, aminek b a változója, s ennek a függvénynek keressük a határértékét $b\to\infty$ esetén.

Mivel $\lim_{b\to\infty} \sqrt{b} = \infty$, ebből következik, hogy $\lim_{b\to\infty} \frac{2}{\sqrt{b}} = 0$, hiszen $\frac{\text{véges}}{\infty}$ típusú. Ezt felhasználva:

$$\lim_{b\to\infty}\left(2-\frac{2}{\sqrt{b}}\right)=2-\lim_{b\to\infty}\frac{2}{\sqrt{b}}=2-0=2\ .$$

Mivel véges határértéket kaptunk, az integrál konvergens, és értéke 2 , azaz

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx=2\ .$$

2. feladat: $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Megoldás: Az integrálás felső határa ∞ , ezért improprius. Megváltoztatjuk a felső határt, majd határértékben tartunk az eredeti határhoz.

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

A primitív függvényt határozzuk meg külön mint az előző feladatban. Hajtsuk végre ugyanazokat a lépéseket, mint az előbb. Íjuk a gyököt hatványként, majd alakítsuk az egész integrandust egyetlen hatvánnyá. A hatványt integráljuk, s az eredményt írjuk gyökös formában.

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\int\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=2\sqrt{x}+c$$

Térjünk vissza az eredeti integrálhoz, és helyettesítsük a határokat a szokott módon.

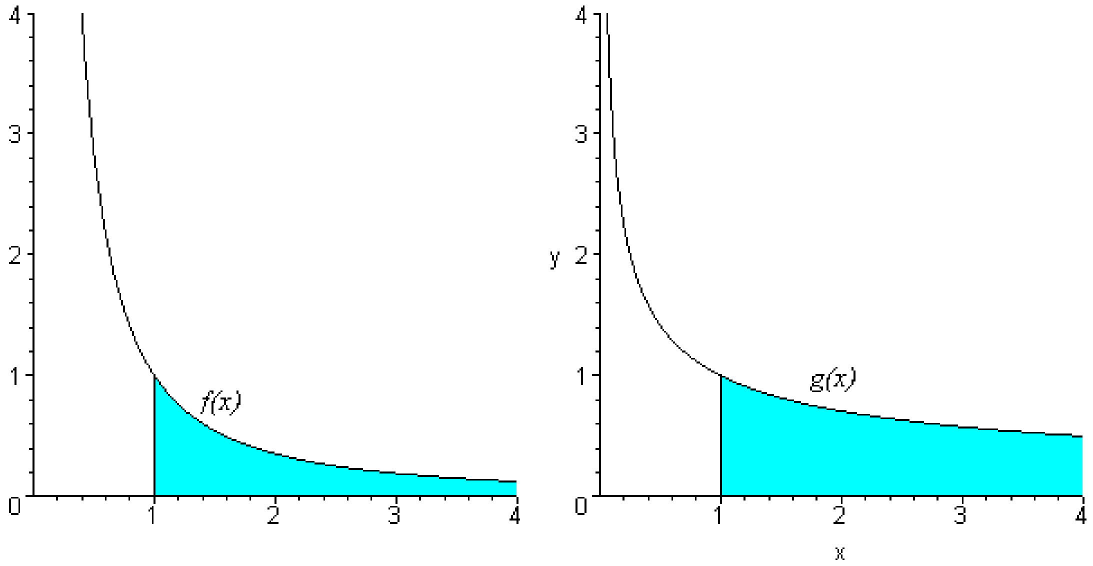
$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(2\sqrt{b}-2\sqrt{1}\right)=\lim_{b\to\infty}\left(2\sqrt{b}-2\right)$$

Utolsó lépésként határozzuk meg a határértéket. Ha $b\to\infty$, akkor $\sqrt{b}\to\infty$. Ebből következően:

$$\lim_{b\to\infty}\left(2\sqrt{b}-2\right)=2\infty-2=\infty\ .$$

Nem kaptunk véges határértéket, így az $\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ integrál divergens.

Megjegyzés: A két eddig megoldott feladatban lényegében ugyanolyan függvényeket integráltunk az $\left[1,\infty\right)$ intervallumon. Mindkét függvény esetén igaz, hogy $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=0$. Az eredmény mégis más, hisz az egyik integrálnak véges értéke lett, azaz konvergens, a másik viszont divergens. Feltehetjük a kérdést, hogy mi a különbség a két integrál között. A válaszhoz készítsünk egy-egy ábrát az $f\left(x\right)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$, és $g\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ függvényekről.



Az ábrákon az látható, hogy az $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ függvény grafikonja gyorsabban közeledik az x tengelyhez mint a $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ függvény grafikonja. Másképp fogalmazva, az $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ függvény gyorsabban tart 0 -hoz mint a $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ függvény. Ha egy függvényt ∞ ig integrálunk, akkor csak olyan esetben kapunk véges értéket az integrálra, ha az integrálandó függvény elég gyorsan tart 0 -hoz. Ekkor a függvény és az x tengely közötti síkrész gyorsan keskenyedik, így hiába nyúlik vízszintesen a végtelenbe, mégis lehet véges a területe. Ha azonban lassan konvergál egy függvény a 0 hoz, akkor az integrál még divergens lesz. A függvény és az x tengely közötti síkrész keskenyedik ugyan, de ez nem tudja ellensúlyozni, hogy az alakzat vízszintesen a végtelenbe nyúlik, így nem lesz véges terület. Azt, hogy a konvergencia mikor gyors és mikor lassú nem fogalmazzuk meg pontosan, csupán szemléletesen következtetünk az ábrákról.

3. feladat: $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2x}dx$

Megoldás: Most az alsó integrálási határ $-\infty$, ezért ezt változtatjuk meg végesre, majd a megváltoztatott határral tartunk az eredetihez.

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2x}dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} e^{2x}dx$$

A primitív függvényt célszerű most is külön meghatározni. Ne feledkezzünk el arról, hogy e^{2x} összetett függvény. Mivel a belső függvény elsőfokú, így hivatkozhatunk $\int f(ax+b)dx=\dfrac{F(ax+b)}{a}+c$ integrálási szabályra, amely szerint a külső függvény integrálját osztanunk kell a belső függvényből x együtthatójával.

$$\int e^{2x}dx=\frac{e^{2x}}{2}+c$$

Térjünk vissza a határozott integrálhoz.

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{2x}dx=\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_a^0=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{e^{2\cdot 0}}{2}-\frac{e^{2a}}{2}\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{e^{2a}}{2}\right)$$

Utolsó lépésként határozzuk meg a határértéket. Mivel $a\to-\infty$, nyilván $2a\to-\infty$. Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$, így $\lim_{a\to-\infty}e^{2a}=0$, amiből következik, hogy

$$\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{e^{2a}}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{0}{2}=\frac{1}{2}\ .$$

Véges határértéket kaptunk, az integrál konvergens, s értéke $\frac{1}{2}$, azaz

$$\int_{-\infty}^0 e^{2x}dx=\frac{1}{2}\ .$$

4. feladat: $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{3x-2}}dx$

Megoldás: Mivel az alsó integrálási határ $-\infty$, ezért megváltoztatjuk végesre, majd a megváltoztatott határral tartunk $-\infty$ -hez.

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{3x-2}}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt[3]{3x-2}}dx$$

A határozatlan integrálást hajtsuk végre külön. Ehhez írjuk a gyököt és a reciprokot hatványként, s azt integráljuk. Vegyük figyelembe a lineáris belső függvényt is. Az eredményt célszerű gyökös alakban írni.

$$\int\frac{1}{\sqrt[3]{3x-2}}dx=\int(3x-2)^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{(3x-2)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}\cdot 3}+c=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x-2)^2}+c$$

A primitív függvénnyel térjünk vissza az eredeti integrálhoz.

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^1\frac{1}{\sqrt[3]{3x-2}}dx=\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right]_a^1=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3\cdot1-2)^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3a-2)^2}\right)=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3a-2)^2}\right)$$

Befejezésként határozzuk meg a határértéket. Haladjunk lépésenként.

Nyilvánvalóan $\lim_{a\to-\infty}(3a-2)=-\infty$.

Ebből következik, hogy $\lim_{a\to-\infty}(3a-2)^2=\infty$.

Ezt követő lépésként pedig $\lim_{a\to-\infty}\sqrt[3]{(3a-2)^2}=\infty$.

Ezzel készen is vagyunk, hiszen

$$\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3a-2)^2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\infty=-\infty\ .$$

Nem kaptunk véges határértéket, az integrál divergens.

5. feladat: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+6x+10}dx$

Megoldás: Egyik határ sem véges, így mindkettőt megváltoztatjuk, majd a megváltoztatott határokkal tartunk az eredetiekhez. Így kettős határértékünk lesz.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+6x+10}\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b \frac{1}{x^2+6x+10}\,dx$$

Miután felírtuk a határértéket, végezzük el külön a határozatlan integrálást. Olyan racionális törtet kell integrálnunk, aminek számlálója konstans, nevezője pedig másodfokú. Vizsgáljuk meg, van-e valós gyöke a nevezőnek, azaz számoljuk ki a diszkriminánst.

$D = 6^2 - 4\cdot 1\cdot 10 = -4 < 0$

Negatívat kaptunk, a nevezőnek nincs valós gyöke, azaz nem bontható szorzattá. Alakítsuk ezért teljes négyzetté a nevezőt.

$$\int \frac{1}{x^2+6x+10}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)^2+1}\,dx$$

Lényegében az $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$ alapintegrált kaptuk, csak x szerepét $x+3$ vette át. Ez egy elsőfokú belső függvényt jelent. Ilyenkor a külső függvény integrálját osztanunk kell a belső függvényből x együtthatójával. Ez azonban most lényegtelen, mert x együtthatója 1 .

$$\int \frac{1}{(x+3)^2+1}\,dx = \operatorname{arctg}(x+3) + c$$

A primitív függvénnyel térjünk vissza az eredeti feladathoz.

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b \frac{1}{x^2+6x+10}\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \left[\operatorname{arctg}(x+3)\right]_a^b = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \left(\operatorname{arctg}(b+3) - \operatorname{arctg}(a+3)\right)$$

A különbség kettős határértékét két határérték különbségére bonthatjuk. Az első részben csak b szerepel, így ott csak azzal kell foglalkoznunk, hogy $b\to\infty$. A második részben csak a szerepel, így itt csak az érdekes, hogy $a\to-\infty$.

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \left(\operatorname{arctg}(b+3) - \operatorname{arctg}(a+3)\right) = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg}(b+3) - \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg}(a+3)$$

Mivel $\lim_{b\to\infty}(b+3) = \infty$ és $\lim_{a\to-\infty}(a+3) = -\infty$, ezért lényegében az a kérdés, hogy mi az $\operatorname{arctg} x$ függvény határértéke a ∞ -ben és a $-\infty$ -ben. Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ és $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$. Ezeket felhasználva kapjuk, hogy

$$\lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg}(b+3) - \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg}(a+3) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \ .$$

Véges határértéket kaptunk, így az integrál konvergens, és értéke π , azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+6x+10}\,dx = \pi \ .$$

6. feladat: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+4}\,dx$

Megoldás: Ismét kettős határértékkel kapjuk majd az integrál eredményét, mert egyik határ sem véges. Írjuk ezt fel első lépésként.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+4}\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b \frac{x}{x^2+4}\,dx$$

Mint a korábbiakban, most is határozzuk meg külön a primitív függvényt. Egy elsőfokú/másodfokú típusú racionális törtet kell integrálnunk, amelyben a nevezőnek nyilvánvalóan nincs valós gyöke. Ezért alakítsuk ki a számlálóban a nevező deriváltját.

Mivel $\left(x^2+4\right)'=2x$, ezért szorozzuk a számlálót 2 -vel, s az integrál előtt kompenzáljuk ezt $\frac{1}{2}$ -del.

$$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx$$

Így $\frac{f'}{f}$ típusú függvényt kell integrálnunk, amely típusú függvényekre korábban megismertük az $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+c$ szabályt. Ezt felhasználva kapjuk:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|+c \ .$$

A primitív függvény ismeretében térjünk vissza az eredeti feladathoz. Helyettesítsünk a Newton-Leibniz-formulába, és a különbség kettős határértékét bontsuk fel két határérték különbségére.

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b \frac{x}{x^2+4}\,dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left[\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|\right]_a^b=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left(\frac{1}{2}\ln\left|b^2+4\right|-\frac{1}{2}\ln\left|a^2+4\right|\right)=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left|b^2+4\right|-\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\ln\left|a^2+4\right|$$

Már csak a határértékeket kell meghatároznunk. Mivel $\lim_{b\to\infty}\left(b^2+4\right)=\infty$ és $\lim_{a\to-\infty}\left(a^2+4\right)=\infty$, ezért lényegében mindkét helyen az a kérdés, mi a logaritmus függvény határértéke a végtelenben. Ez szerepelt a korábbiakban, tudjuk $\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty$. Ezt felhasználva kapjuk:

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left|b^2+4\right|-\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\ln\left|a^2+4\right|=\frac{1}{2}\infty-\frac{1}{2}\infty=\infty-\infty \ .$$

Az eredményünk még annál is csúnyább, mint amikor ∞ -t vagy $-\infty$ -t kapunk, hiszen a $\infty-\infty$ egy határozatlan határérték. Ilyenkor az integrálnak nincs értéke, vagy más fogalmazva nem definiált. Az ilyen integrálok esetében nagyon fontos, hogy a különbség két részében egymástól független határértékek szerepelnek, azaz egyikben a , a másikban b a változó. Ha egy improprius integrál meghatározásához kettős határértékre van szükség, mert két határt is meg kell változtatni, akkor mindig különbözőeknek kell lenni a határértékekben a változóknak. Ha nem így járnánk el, akkor előfordulhatna olyan, hogy egy függvény $(-\infty,\infty)$ intervallumon vett integráljára véges értéket kapnánk, miközben a $(-\infty,0)$ és $(0,\infty)$ intervallumokon nem lenne véges az integrál értéke. Ezzel azonban ellentmondásba kerülünk az integrálás azon alapvető tulajdonságával, amely szerint ha egy függvén integrálható egy intervallumon, akkor annak bármely részintervallumán is integrálható.

7. feladat: Mennyi munkára van szükség ahhoz, hogy egy m tömegű űrhajó végtelenül távolra kerüljön a Földtől, s ezáltal kikerüljön annak gravitációs hatása alól?

Megoldás: Amint az korábban szerepelt, a munkát úgy határozhatjuk meg, hogy az űrhajóra a Föld által kifejtett gravitációs erőt leíró függvényt, $F_{grav} = F_{grav}(r) = k\frac{Mm}{r^2}$ integráljuk $[R,\infty)$ intervallumon. A változó szerepét most r tölti be, így r szerint integrálunk.

$$W = \int_R^\infty k\frac{Mm}{r^2}dr$$

Mivel az integrálási határok között szerepel a ∞, ezért ez egy improprius integrál. Megváltoztatjuk a nem véges integrálási határt, így elvégezzük az integrálást, majd vesszük az integrálás eredményének határértékét az eredeti határhoz tartva.

$$W = \int_R^\infty k\frac{Mm}{r^2}dr = \lim_{b\to\infty}\int_R^b k\frac{Mm}{r^2}dr$$

Mivel k, M, m konstansok, így kiemelhetők az integrálból és a határértékből.

$$W = kMm\lim_{b\to\infty}\int_R^b \frac{1}{r^2}dr$$

A primitív függvényt határozzuk meg külön. Ehhez írjuk az integrandust negatív kitevős hatvány formájában, és a hatványt integráljuk. Az eredményt hozzunk minél egyszerűbb alakra, azaz célszerűbb tört formában írnunk.

$$\int \frac{1}{r^2}dr = \int r^{-2}dr = \frac{r^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{r} + c$$

Térjünk vissza az eredeti feladathoz. Helyettesítsük be az integrálási határokat, s vegyük a két helyettesítési érték különbségét.

$$W = kMm\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^b = kMm\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{R}\right)\right) = kMm\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{b}\right)$$

Utolsó lépésként határozzuk meg a határértéket. Könnyű dolgunk van, mert $\frac{1}{b}$ nyilvánvalóan 0 -hoz tart, ha b tart ∞ -hez, azaz $\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b} = 0$, hiszen véges/végtelen típusú a határérték, aminek eredménye mindig 0 .

$$W = kMm\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{b}\right) = kMm\left(\frac{1}{R} - 0\right) = kMm\frac{1}{R}$$

Ezzel olyan összefüggést kaptunk a munkára, amibe csak az űrhajó tömegét kell behelyettesíteni az egyéb fizikai állandók mellett. Ha ez ismert, a munka pontosan meghatározható.

Ellenőrző kérdések

1. kérdés: $\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{5x-1}}dx$

$\frac{3}{5}$

$\frac{6}{5}$

6

Az integrál divergens. (X)

2. kérdés: $\int_0^{\infty} e^{-5x}\,dx$

$\frac{1}{5}$ (X)

1
5
Az integrál divergens.

3. kérdés: $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4}\,dx$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{3}$ (X)

1
Az integrál divergens.

4. kérdés: $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$\frac{1}{2}$

1
2
Az integrál divergens. (X)

5. kérdés: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4x^2+25}\,dx$

$\frac{\pi}{10}$ (X)

$\frac{2\pi}{5}$

$\frac{5\pi}{2}$

10π

6. kérdés: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+9\right)^3}\,dx$

-1
0 (X)
2
Az integrál divergens.

Elméleti összefoglaló

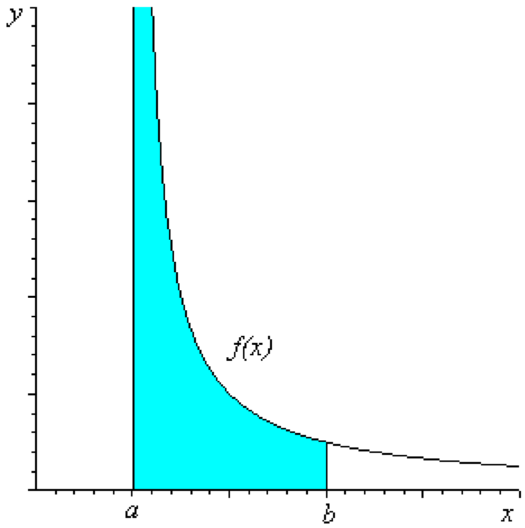
Legyen az $f(x)$ függvény értelmezett az $(a,b]$ intervallumon, és az $x=a$ hely jobb oldali környezetében nem korlátos. Ha $f(x)$ integrálható $(a,b]$ bármely $[a+\varepsilon,b]$ részintervallumán $(0<\varepsilon<b-a)$, és létezik a $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ határérték, akkor ezt az $f(x)$ függvény $[a,b]$ intervallumon vett improprius integráljának nevezzük.

Jelölésben: $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$.

Ha a $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ határérték csak tágabb értelemben létezik, azaz ∞ vagy a $-\infty$, akkor azt mondjuk, hogy az integrál divergens.

A fentieket úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha egy függvényt olyan $[a,b]$ intervallumon kell integrálnunk, amelyben az alsó határ jobb oldali környeztében a függvény nem korlátos, akkor az integrálás alsó határát a -t kicseréljük egy nála nagyobb számra $a+\varepsilon$ -ra , azaz szűkítünk az integrálási intervallumon. Ezen szűkebb intervallumon már korlátos a függvény, így itt meghatározható az integrálja. Az alsó határt azonban változóként kezeljük, így az integrál értéke az alsó határ függvénye lesz. Ennek a függvénynek vesszük a határértékét úgy, hogy a megváltoztatott határral az eredeti határhoz tartunk. Ha létezik a határérték, akkor ez az integrál értéke az $[a,b]$ intervallumon.

Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy egy olyan alakzat előjeles területét határozzuk meg az integrállal, amely a függvény grafikonja és az x tengely között helyezkedik el az $(a,b]$ intervallumon, s mivel a függvény nem korlátos az $x=a$ hely jobb oldali környezetében, ezért az alakzat függőlegesen nem korlátos, ∞ -be vagy $-\infty$ -be nyúlik függőlegesen az $x=a$ hely közelében, az a jobb oldalán.



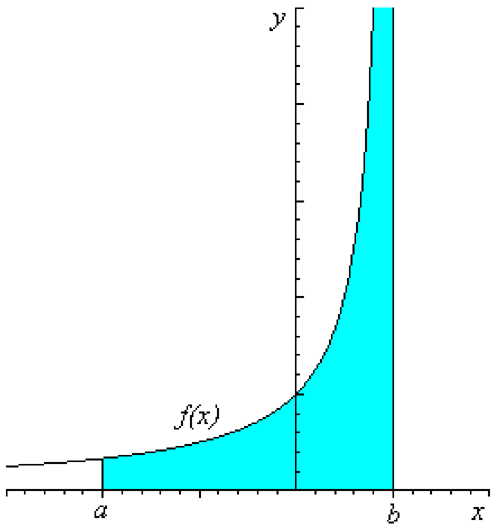
Hasonlóan járunk el, ha a függvény az $[a,b)$ intervallumon értelmezett, és az $x=b$ hely bal oldali környeztében nem korlátos. Ekkor ha $f(x)$ integrálható $[a,b)$ bármely $[a,b-\delta]$

részintervallumán $(0 < \delta < b-a)$, és létezik a $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$ határérték, akkor ezt az $f(x)$ függvény $[a,b]$ intervallumon vett improprius integráljának nevezzük.

Jelölésben: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\delta \to 0^+} \int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$.

Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy most is szűkítünk az integrálási intervallumon annál a határnál, amelynél gond van az integrálással. A szűkebb intervallumon meghatározzuk az integrált, ami a megváltoztatott határ függvénye lesz, majd tartunk a megváltoztatott határral az eredeti határhoz, és vesszük az integrál határértékét. Ha létezik a határérték, akkor ez az integrál értéke az $[a,b]$ intervallumon.

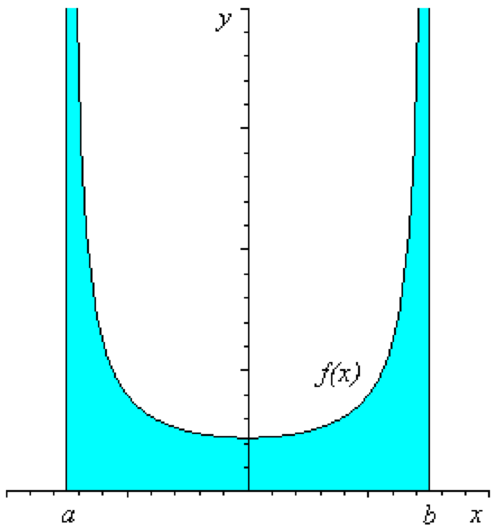
Szemléletesen azt mondhatjuk, olyan alakzat előjeles területét határozzuk meg az integrállal, amely a függvény grafikonja és az x tengely között helyezkedik el az $[a,b)$ intervallumon, s mivel a függvény nem korlátos az $x=b$ hely bal oldali környezetében, ezért az alakzat függőlegesen nem korlátos, ∞ -be vagy $-\infty$ -be nyúlik függőlegesen az $x=b$ hely közelében, az b bal oldalán.



Ha egy függvény értelmezett az (a,b) intervallumon, és az $x=a$ hely jobb oldali, az $x=b$ hely bal oldali környezetében nem korlátos, akkor is hasonlóan járunk el. Ekkor az intervallum mindkét határát megváltoztatjuk, a -t kicseréljük $a+\varepsilon$ -ra, b -t pedig $b-\delta$ -ra, s így szűkítünk az integrálási intervallumon. Ezen $[a+\varepsilon, b-\delta]$ intervallumon hajtjuk végre az integrálást, majd a határokkal tartunk az eredeti határokhoz. Mivel mindkét határt változtattuk, így kettős határértéket kell vennünk. Ha létezik az integrálnak határértéke, akkor azt a függvény $[a,b]$ intervallumon vett improprius integráljának nevezzük.

Jelölésben: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ \delta \to 0^+}} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\delta} f(x)\,dx$.

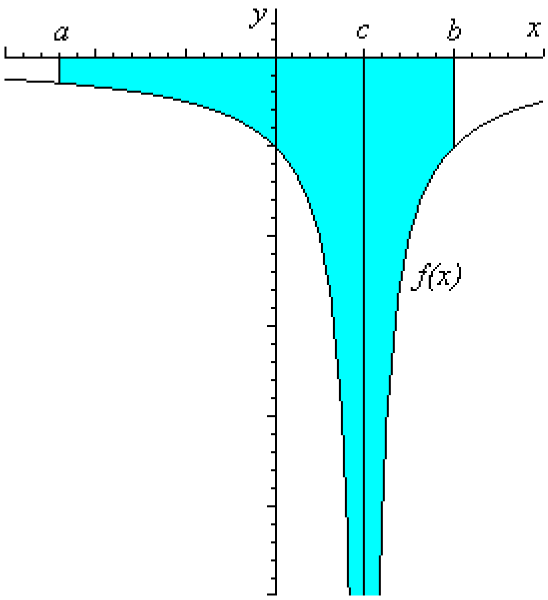
A függvény $[a,b]$ intervallumon vett integrálja szemléletesen annak a síkrésznek az előjeles területét adja meg, ami a függvény grafikonja és az x tengely közötti helyezkedik el az (a,b) intervallumon. Mivel a függvény egyik határ környezetében sem korlátos, így mindkét határ közelében ∞ -be vagy $-\infty$ -be nyúlik függőlegesen.



Ha az $f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumban egy belső $x=c$ hely környezetében nem korlátos, akkor az $[a,b]$ intervallumon vett improprius integrál az $[a,c]$ és $[c,b]$ intervallumokon vett improprius integrálok összegének tekinthető, azaz

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim_{\delta\to 0^+}\int_a^{c-\delta} f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c-\varepsilon}^b f(x)dx\ .$$

Ekkor olyan alakzat előjeles területét számoljuk, ami az $[a,b]$ intervallum belső c pontjának közelében nyúlik függőlegesen a ∞ -be vagy a $-\infty$ -be.



Amint látható, az improprius integrálokat mindegyik esetben határértékből kapjuk meg. Ha létezik határérték, akkor az integrál konvergens, de ha nem, akkor az integrál divergens. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az olyan esetek, amikor a függvény nem korlátos valahol az integrálási intervallumban, azok nem derülnek ki olyan látványosan az integrál felírásából, mint amikor az integrálási intervallum nem korlátos, azaz a határok között ∞ vagy $-\infty$ szerepel. Ezek egyszerű határozott integrálnak néznek ki, s csak ha megvizsgáljuk, milyen értékeket vesz fel a függvény az integrálási intervallumban, akkor derül ki róluk, hogy impropriusok. Ezért ha határozott integrál kiszámítása a feladat, akkor először mindig a függvény korlátosságát kell vizsgálni az integrálási intervallumon, s ha nem korlátos, akkor az eredmény csak a megfelelő határértékből kapható meg. Nagyon sok esetben azért improprius egy integrál, mert valamilyen törtet kell integrálnunk, és a nevezőnek zérushelye van az integrálási intervallum határán vagy belsejében. Ezért törtek integrálásakor mindig vizsgáljuk meg, van-e zérushelye a nevezőnek az integrálási intervallum határán vagy belsejében.

Kidolgozott feladatok

8. feladat: $\int_{-5}^{11} \frac{1}{\sqrt[4]{x+5}}\,dx$

Megoldás: A határok végesek, de az integrandus nincs értelmezve az $x=-5$ helyen, és ezen hely jobb oldali környezetében nem korlátos. Az integrál ezért improprius, és határértékkel lehet meghatározni. Mivel az alsó határnál van probléma, ezért megváltoztatjuk ezt a határt szűkítve az intervallumot. Kicseréljük a -5 -öt $-5+\varepsilon$ -ra. Ezután a $[-5+\varepsilon, 11]$ intervallumon integrálunk, és vesszük az eredmény határértékét úgy, hogy $\varepsilon \to 0^+$. Így a megváltoztatott határral az eredeti határhoz tartunk.

$$\int_{-5}^{11} \frac{1}{\sqrt[4]{x+5}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-5+\varepsilon}^{11} \frac{1}{\sqrt[4]{x+5}}\,dx$$

A primitív függvényt határozzuk meg külön. Ehhez a gyököt és a reciprokot írjuk hatványként, és a hatványt integráljuk. Az eredményt célszerű gyökös formára alakítani.

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x+5}}\,dx = \int (x+5)^{-\frac{1}{4}}\,dx = \frac{(x+5)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + c = \frac{4}{3}\sqrt[4]{(x+5)^3} + c$$

A primitív függvény ismeretében térjünk vissza az eredeti határozott integrálhoz, és helyettesítjük a határokat a Newton-Leibniz-formulába.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-5+\varepsilon}^{11} \frac{1}{\sqrt[4]{x+5}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{4}{3}\sqrt[4]{(x+5)^3}\right]_{-5+\varepsilon}^{11} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{4}{3}\sqrt[4]{(11+5)^3} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{((-5+\varepsilon)+5)^3}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{4}{3}\sqrt[4]{16^3} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{\varepsilon^3}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{4}{3}\cdot 8 - \frac{4}{3}\sqrt[4]{\varepsilon^3}\right)$$

Még a határértéket kell meghatároznunk. De ez most nagyon egyszerű, hiszen véges helyen veszünk határértéket, amit behelyettesítéssel megkapunk, ha a műveletek végrehajthatóak. Helyettesítsünk tehát ε helyére 0 -t.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{4}{3}\cdot 8 - \frac{4}{3}\sqrt[4]{\varepsilon^3}\right) = \frac{4}{3}\cdot 8 - \frac{4}{3}\sqrt[4]{0^3} = \frac{4}{3}\cdot 8 - 0 = \frac{32}{3}$$

Véges határértéket kaptunk, így az integrál konvergens, és értéke $\frac{32}{3}$, azaz

$$\int_{-5}^{11} \frac{1}{\sqrt[4]{x+5}}\,dx = \frac{32}{3}\ .$$

9. feladat: $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\,dx$

Megoldás: Az integrandus nincs értelmezve az $x=0$ helyen, s ezen hely jobb oldali környezetében nem korlátos. Az integrál ezért improprius, és határértékkel számolható ki. Az alsó határt változtatjuk meg 0 -ról $0+\varepsilon=\varepsilon$ -ra, és az integrálás után tartunk az eredeti alsó határhoz.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\,dx$$

A határozatlan integrálást hajtsuk végre a szokott módon.

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\,dx=\int x^{-\frac{5}{2}}\,dx=\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}+c=-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}+c$$

A primitív függvénnyel térjünk vissza az eredet integrálhoz, és helyettesítsük a határokat.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right]_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{1^3}}-\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^3}}\right)\right)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^3}}\right)$$

A határértéket kell még meghatároznunk. Azonban most hiába próbálunk ε helyére 0 -t helyettesíteni, mert így 0 kerül nevezőbe, azaz nem értelmezett művelethez jutunk.

Vizsgáljuk ezért külön a $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^3}}$ határértéket. Olyan törtet vizsgálunk, aminek számlálója egy pozitív véges érték, nevezője pedig 0 -hoz tart pozitív oldalról. A határérték ezen esetéről korábban volt szó, és akkor kiderült, hogy ilyenkor ∞ vagy $-\infty$ lehet a határérték a számláló és a nevező előjelétől függően. Mivel most mindkettő pozitív, így jelen esetben ∞ -t kapunk, azaz $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^3}}=\infty$. Ezt felhasználva kapjuk:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^3}}\right)=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\infty=\infty\ .$$

Az integrál tehát divergens, mert nincs véges határérték.

10. feladat: $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}\,dx$

Megoldás: Az integrál improprius, mert $\ln 1=0$, s így az $x=0$ helyen nincs értelmezve a függvény, valamint ezen hely bal oldali környezetében nem korlátos. Az 1 az integrálás felső határa, most ezt módosítjuk $1-\delta$ -ra. Az $\left[\frac{1}{e},1-\delta\right]$ intervallumon integrálunk, és az eredménynek vesszük a határértékét, a módosított határral az eredetihez tartva.

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}\,dx=\lim_{\delta\to 0^+}\int_{\frac{1}{e}}^{1-\delta}\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}\,dx$$

Ahogyan eddig is tettük, végezzük el külön a határozatlan integrálást. A gyököt és a reciprokot írjuk hatványként, s így az integrandus $f^\alpha\cdot f'$ típusú lesz. Alkalmazzuk az $\displaystyle\int f^\alpha(x)\cdot f'(x)dx=\frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+c$ szabályt.

$$\int\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}\,dx=\int(\ln x)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{(\ln x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\ln x)^2}+c$$

Térjünk vissza az eredeti feladathoz, és helyettesítsük a határokat a Newton-Leibniz-formulába.

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{\frac{1}{e}}^{1-\delta}\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}\,dx=\lim_{\delta\to 0^+}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\ln x)^2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1-\delta}=\lim_{\delta\to 0^+}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(\ln(1-\delta)\right)^2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2}\right)=$$

$$=\lim_{\delta\to 0^+}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(\ln(1-\delta)\right)^2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(-1)^2}\right)=\lim_{\delta\to 0^+}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(\ln(1-\delta)\right)^2}-\frac{3}{2}\right)$$

Az átalakítások során felhasználtuk, hogy $\ln\frac{1}{e}=\ln\left(e^{-1}\right)=-1$.

Már csak a határértéket kell meghatároznunk. Helyettesítsük δ helyére a 0 -t.

$$\lim_{\delta\to 0^+}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(\ln(1-\delta)\right)^2}-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(\ln(1-0)\right)^2}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\ln 1)^2}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{0^2}-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$$

Az integrál konvergens, mert véges határértéket kaptunk, ami az integrál értéke, azaz

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}\,dx=-\frac{3}{2}\ .$$

11. feladat: $\int_0^2\frac{x}{x^2-4}\,dx$

Megoldás: Az integrálandó függvény nincs értelmezve az $x=2$ helyen, és ezen hely bal oldali környezetében nem korlátos, így az integrál improprius. Ezért módosítjuk a felső határt, az új intervallumon integrálunk, és az eredménynek vesszük a határértékét az eredeti határhoz tartva.

$$\int_0^2\frac{x}{x^2-4}\,dx=\lim_{\delta\to 0^+}\int_0^{2-\delta}\frac{x}{x^2-4}\,dx$$

Most is végezzük el külön a határozatlan integrálást. Írjunk a számlálóba egy 2 -es szorzót, az integrál elé pedig $\frac{1}{2}$ et, mert így $\frac{f'}{f}$ típusú lesz az integrandus.

$$\int\frac{x}{x^2-4}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2-4}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4\right|+c$$

Térjünk vissza az eredeti határozott integrálhoz a primitív függvénnyel, és helyettesítsük be az integrálási határokat, majd végezzük el a műveleteket.

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_0^{2-\delta}\frac{x}{x^2-4}\,dx=\lim_{\delta\to 0^+}\left[\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4\right|\right]_0^{2-\delta}=\lim_{\delta\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\ln\left|(2-\delta)^2-4\right|-\frac{1}{2}\ln\left|0^2-4\right|\right)=$$

$$=\lim_{\delta\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\ln\left|4-4\delta+\delta^2-4\right|-\frac{1}{2}\ln|-4|\right)=\lim_{\delta\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\delta^2-4\delta\right|-\frac{1}{2}\ln 4\right)$$

Az utolsó lépésben határozzuk meg a határértéket. Mivel $\ln\left|\delta^2-4\delta\right|$ egy összetett függvény, így kezdjük a belső függvény határértékével. Mivel véges helyen veszünk határértéket, így egyszerűen behelyettesítünk.

$$\lim_{\delta\to 0^+}\left|\delta^2-4\delta\right|=\left|0^2-4\cdot 0\right|=0^+$$

Ezután vegyük a külső függvény határértékét azon a helyen, ahova a belső függvény tart. Az tehát a kérdés, hova tart a logaritmus függvény, ha a változó jobbról tart 0 -hoz. A korábbiakban szerepelt, hogy $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$. (A logaritmus függvénynek az $x=0$ helyen függőleges aszimptotája van, és 0 -hoz közeledve, a függvény egyre kisebb értékeket vesz fel.) Ezzel megkaptuk az összetett függvény határértékét is, azaz $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\frac{1}{2}\ln\left|\delta^2-4\delta\right|=-\infty$. Ezt felhasználva kapjuk:

$$\lim_{\delta\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\delta^2-4\delta\right|-\frac{1}{2}\ln 4\right)=\frac{1}{2}(-\infty)-\frac{1}{2}\ln 4=-\infty\ .$$

Nem kaptunk tehát véges határértéket, így az integrál divergens.

12. feladat: $\int\limits_{-4}^{4}\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$

Megoldás: Az integrálandó függvény egyik integrálási határnál sincs értelmezve, és az alsó határ jobb oldali, a felső határ bal oldali környezetében nem korlátos. Ezért mindkét határt megváltoztatjuk, szűkítve az integrálási intervallumot, és kettős határértéket veszünk.

$$\int\limits_{-4}^{4}\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}}\int\limits_{-4+\varepsilon}^{4-\delta}\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$$

Határozzuk meg külön a primitív függvényt. Az integrandus nagyon hasonlít az $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ függvényhez, ami alapintegrál, $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x+c$. Ha kiemelünk az integrál elé $\frac{1}{4}$ -et, majd a gyökön belül $\frac{x^2}{16}$ helyett $\left(\frac{x}{4}\right)^2$ -t írunk, akkor olyan összetett függvényt kapunk, aminek külső függvénye a fenti alapintegrál, belső függvénye pedig $\frac{x}{4}$.

$$\int\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{16\left(1-\frac{x^2}{16}\right)}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}}\,dx$$

Mivel $\frac{x}{4}$ elsőfokú függvény, így alkalmazhatjuk az $\int f(ax+b)dx=\frac{F(ax+b)}{a}+c$ szabályt. Most $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, s így $F(x)=\arcsin x$, valamint $ax+b=\frac{x}{4}$, tehát $a=\frac{1}{4}$. Így alkalmazva a fenti szabályt kapjuk:

$$\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}}\,dx=\frac{1}{4}\frac{\arcsin\frac{x}{4}}{\frac{1}{4}}+c=\arcsin\frac{x}{4}+c\ .$$

A primitív függvény ismeretében térjünk vissza az eredeti feladathoz, és helyettesítsük az integrálási határokat a szokott módon. A kettős határértéket bontsuk fel két határértékre.

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}}\int\limits_{-4+\varepsilon}^{4-\delta}\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}}\left[\arcsin\frac{x}{4}\right]_{-4+\varepsilon}^{4-\delta}=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}}\left(\arcsin\frac{4-\delta}{4}-\arcsin\frac{-4+\varepsilon}{4}\right)=$$

$$=\lim_{\delta\to 0^+}\arcsin\frac{4-\delta}{4}-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\arcsin\frac{-4+\varepsilon}{4}$$

Ezután határozzuk meg a két határértéket. Mivel mindkét esetben véges helyen veszünk határértéket, így egyszerűen behelyettesítünk.

$$=\lim_{\delta\to 0^+}\arcsin\frac{4-\delta}{4}-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\arcsin\frac{-4+\varepsilon}{4}=\arcsin\frac{4-0}{4}-\arcsin\frac{-4+0}{4}=$$

$$=\arcsin 1-\arcsin(-1)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

Véges határértéket kaptunk, így az integrál konvergens, és értéke a kapott határérték, azaz

$$\int_{-4}^{4}\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx=\pi\ .$$

13. feladat: $\displaystyle\int_{1}^{3}\frac{1}{x^2-4x+3}\,dx$

Megoldás: Határozzuk meg a nevező gyökeit, hogy lássuk van-e zérushelye az integrálási intervallumban. Ez azért fontos, mert a nevező zérushelyeiben nem értelmezhető a tört, és azok környeztében nem is korlátos.

$$x^2-4x+3=0\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\begin{cases}3\\1\end{cases}$$

Amint látható, az integrálandó tört nincs értelmezve egyik integrálási határnál sem, ezért most is kettős határértékből kapható meg az eredmény.

$$\int_{1}^{3}\frac{1}{x^2-4x+3}\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}}\int_{1+\varepsilon}^{3-\delta}\frac{1}{x^2-4x+3}\,dx$$

Végezzük el külön a határozatlan integrálást. Az integrandus egy racionális tört, s mivel a nevezőnek vannak valós gyökei, így szorzattá lehet bontani, majd ezt felhasználva a törtet felbonthatjuk résztörtekre. A résztörteket hozzuk közös nevezőre, és a számlálót rendezzük x hatványai szerint.

$$x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$$

$$\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x-3)}{(x-3)(x-1)}=\frac{(A+B)x+(-A-3B)}{(x-3)(x-1)}$$

A számlálók egyenlőségéből írjuk fel az egyenletrendszert, amit oldjunk meg.

$0=A+B$ (Az elsőfokú tagok egyenlősége.)

$1=-A-3B$ (A konstans tagok egyenlősége.)

A két egyenlete összeadva $1=-2B$, amiből $B=-\frac{1}{2}$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve kapjuk: $A=\frac{1}{2}$.

Írjuk fel ezután a konkrét résztörteket, és integráljuk őket.

$$\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{(x-3)(x-1)}=\frac{\frac{1}{2}}{x-3}-\frac{\frac{1}{2}}{x-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$\int\frac{1}{x^2-4x+3}\,dx=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{x-3}\,dx-\int\frac{1}{x-1}\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln|x-3|-\ln|x-1|\right)+c=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+c$$

A primitív függvénnyel térjünk vissza az eredeti feladathoz, helyettesítsük az integrálási határokat. A kettős határértéket bontsuk fel két külön határértékre.

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}} \int_{1+\varepsilon}^{3-\delta} \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}} \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\right]_{1+\varepsilon}^{3-\delta} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}} \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(3-\delta)-3}{(3-\delta)-1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\varepsilon)-3}{(1+\varepsilon)-1}\right|\right) =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}} \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-\delta}{2-\delta}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\varepsilon-2}{\varepsilon}\right|\right) = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{-\delta}{2-\delta}\right| - \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\varepsilon-2}{\varepsilon}\right|$$

Mindkét határérték esetén behelyettesítéssel próbálkozunk, mert véges helyen vesszük a határértékeket. Nézzük az elsőt. Mivel $\ln\left|\frac{-\delta}{2-\delta}\right|$ összetett függvény, így először a belső függvény határértékét vizsgáljuk, ami behelyettesítéssel megkapható.

$$\lim_{\delta\to 0^+}\left|\frac{-\delta}{2-\delta}\right| = \left|\frac{0}{2-0}\right| = 0^+$$

Ezután vegyük a külső függvény határértékét azon a helyen, ahova a belső függvény tart. Az a kérdés, hova tart a logaritmus függvény, ha a változó jobbról tart 0 -hoz. Egy korábbi feladatban már szerepelt, hogy $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$, így $\lim_{\delta\to 0^+}\ln\left|\frac{-\delta}{2-\delta}\right| = -\infty$.

Vizsgáljuk most a második határértéket. Itt is kezdjük a belső függvénnyel, s próbáljunk behelyettesíteni.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left|\frac{\varepsilon-2}{\varepsilon}\right| = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{|\varepsilon-2|}{|\varepsilon|} = \frac{2}{0^+}$$

A behelyettesítés azonban most nem működik, mert nem végezhető el a művelet. Nullával kellene osztanunk, s ez nincs értelmezve. Olyan törtet vizsgálunk, aminek számlálója egy pozitív véges érték, nevezője pedig 0 -hoz tart pozitív oldalról. Ilyenre is volt már példa korábbi feladatban, és akkor szerepelt, hogy az ilyen törteknél ∞ vagy $-\infty$ lehet a határérték a számláló és a nevező előjelétől függően. Mivel most mindkettő pozitív, így ∞ -t kapunk, azaz $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left|\frac{\varepsilon-2}{\varepsilon}\right| = \infty$.

Ezután vegyük a külső függvény határértékét azon a helyen, ahova a belső függvény tart. Az a kérdés, hova tart a logaritmus függvény, ha a változó a végtelenbe tart. Mivel a logaritmus függvény mindenhatáron túl növekszik, ezért $\lim_{x\to\infty}\ln x = \infty$, ebből $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln\left|\frac{\varepsilon-2}{\varepsilon}\right| = \infty$.

Részeredményeinket felhasználva kapjuk:

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-\delta}{2-\delta}\right| - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\varepsilon-2}{\varepsilon}\right| = \frac{1}{2}(-\infty) - \frac{1}{2}\infty = -\infty \ .$$

Az integrál tehát divergens, mert nem kaptunk véges határértéket.

14. feladat: $\int_{-1}^{8}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

Megoldás: Az integrandus nincsen értelmezve az $x=0$ helyen, s ezen hely környezetében nem korlátos. Mivel ez a hely az integrálási intervallum belsejében van, ezért két részletben kell integrálnunk, első részletben -1 -től 0 -ig, a második részletben 0 -tól 8 -ig. Ezek az integrálok külön-külön is impropriusok, így mindegyiket a megfelelő határérték felírásával kapjuk. Az első integrálban változtassuk meg a felső határt 0 -ról $0-\delta=-\delta$ -ra, a másodikban változtassuk az alsó határt 0 -ról $0+\varepsilon=\varepsilon$ -ra.

$$\int_{-1}^{8}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx+\int_{0}^{8}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\lim_{\delta\to0^+}\int_{-1}^{-\delta}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx+\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{8}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$$

Végezzük el külön a határozatlan integrálást. Ehhez írjuk az integrandust hatványként. A hatvány integrálása után az eredményt alakítsuk vissza gyökös formára.

$$\int\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+c$$

A primitív függvény ismeretében folytassuk az eredeti feladat megoldását, és helyettesítsünk a Newton-Leibniz-formulába.

$$\lim_{\delta\to0^+}\int_{-1}^{-\delta}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx+\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{8}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\lim_{\delta\to0^+}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_{-1}^{-\delta}+\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_{\varepsilon}^{8}=$$

$$=\lim_{\delta\to0^+}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(-\delta)^2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(-1)^2}\right)+\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{8^2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\varepsilon^2}\right)=$$

$$=\lim_{\delta\to0^+}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\delta^2}-\frac{3}{2}\cdot1\right)+\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{3}{2}\cdot4-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\varepsilon^2}\right)=\lim_{\delta\to0^+}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\delta^2}-\frac{3}{2}\right)+\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(6-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\varepsilon^2}\right)$$

Már csak a határértékek meghatározása van hátra. Ez most könnyű, hiszen mindkét helyen csak be kell helyettesítenünk.

$$\lim_{\delta\to0^+}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\delta^2}-\frac{3}{2}\right)+\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(6-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\varepsilon^2}\right)=\lim_{\delta\to0^+}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{0^2}-\frac{3}{2}\right)+\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(6-\frac{3}{2}\sqrt[3]{0^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{2}\cdot0-\frac{3}{2}\right)+\left(6-\frac{3}{2}\cdot0\right)=-\frac{3}{2}+6=\frac{9}{2}$$

Véges határértéket kaptunk, tehát az integrál konvergens, és értéke a kapott határérték, azaz

$$\int_{-1}^{8}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\frac{9}{2}\ .$$

15. feladat: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$

Megoldás: Az integrálandó függvény nincs értelmezve az $x=\pi$ helyen, s ezene hely környezetében nem korlátos. Ismét két részletben integrálunk, első részletben $\frac{\pi}{2}$ -től π -ig, a második részletben π -tól $\frac{3\pi}{2}$ -ig. Ezek az integrálok külön-külön is impropriusok, így mindegyiket a megfelelő határérték felírásával kapjuk. Az első integrálban változtassuk meg a felső határt π -ről $\pi-\delta$ -ra, a másodikban változtassuk az alsó határt π -ről $\pi+\varepsilon$ -ra.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=\lim_{\delta\to0^+}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\delta}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx+\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\pi+\varepsilon}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$$

A határozatlan integrálást szokás szerint végezzük el külön. Ehhez írjuk az integrandust szorzatként, első tényezőben $\sin x$ egy hatványa áll, a másodikban pedig $\cos x$, ami a $\sin x$

deriváltja. Így $f^{\alpha} \cdot f'$ típusú lesz a függvény, s alkalmazhatjuk az

$\int f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)dx = \dfrac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$ szabályt. Az eredmény célszerű törtként írni.

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \int (\sin x)^{-2} \cos x\, dx = \frac{(\sin x)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{\sin x} + c$$

A primitív függvénnyel térjünk vissza az eredeti feladathoz, és helyettesítsük az integrálási határokat. Ahol lehet, végezzük el a műveleteket.

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\delta} \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\pi+\varepsilon}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \lim_{\delta\to 0^+} \left[\frac{-1}{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\delta} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{-1}{\sin x}\right]_{\pi+\varepsilon}^{\frac{3\pi}{2}} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0^+} \left(\frac{-1}{\sin(\pi-\delta)} - \frac{-1}{\sin\frac{\pi}{2}} \right) + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{-1}{\sin\frac{3\pi}{2}} - \frac{-1}{\sin(\pi+\varepsilon)} \right) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0^+} \left(\frac{-1}{\sin(\pi-\delta)} - \frac{-1}{1} \right) + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{-1}{-1} - \frac{-1}{\sin(\pi+\varepsilon)} \right) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0^+} \left(\frac{-1}{\sin(\pi-\delta)} + 1 \right) + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(1 + \frac{1}{\sin(\pi+\varepsilon)} \right)$$

Még két határértéket kell meghatároznunk. Mivel $\sin\pi = 0$, ezért nem elég egyszerűen behelyettesíteni, ugyanis mindkét esetben 0 -hoz tart a nevező. Korábban már szerepelt, hogy ilyenkor ∞ -t vagy $-\infty$ -t kapunk a számláló és a nevező előjelétől függően. Az első esetben a számláló negatív a nevező pedig pozitívan tart nullához, így itt $-\infty$ az eredmény, azaz $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \dfrac{-1}{\sin(\pi-\delta)} = -\infty$. A második esetben a számláló pozitív a nevező pedig negatívan tart nullához, így itt is $-\infty$ az eredmény, azaz $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \dfrac{1}{\sin(\pi+\varepsilon)} = -\infty$.

A részeredményeket felhasználva kapjuk:

$$= \lim_{\delta\to 0^+} \left(\frac{-1}{\sin(\pi-\delta)} + 1 \right) + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(1 + \frac{1}{\sin(\pi+\varepsilon)} \right) = (-\infty+1) + (1-\infty) = -\infty$$

Nem kaptunk véges határértéket, tehát az integrál divergens.

Ellenőrző kérdések:

7. kérdés: $\displaystyle\int_2^6 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$

1

2

4 (X)

Az integrál divergens.

8. kérdés: $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{1}{(x+3)^2}dx$

$\frac{1}{2}$

1

2

Az integrál divergens. (X)

9. kérdés: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx$

1

$\frac{\pi}{2}$

$\ln \pi$

Az integrál divergens. (X)

10. kérdés: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}$

1 (X)

Az integrál divergens.

11. kérdés: $\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-16x^2}} dx$

$\frac{\pi}{4}$ (X)

$\frac{\pi}{2}$

π

Az integrál divergens.

12. kérdés: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-x^2} dx$

$\ln \frac{1}{2}$

$\ln 2$

1

Az integrál divergens. (X)

13. kérdés: $\int_{-32}^{1} \frac{4}{\sqrt[5]{x}} dx$

-85

-75 (X)
-50
Az integrál divergens.

14. kérdés: $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$

$\frac{1}{2}$
1
2
Az integrál divergens. (X)