3. Differenciálegyenletek

3.2. Első és másodrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenletek

Tanulási cél

Elsajátítani az első és másodrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenletek megoldási módszerét, és azt alkalmazni feladatokban.

Motivációs példa

Egy $m = 10dkg$ tömegű testet $D = 10\frac{N}{m}$ rugóállandójú csavarrugóra akasztunk. A mozdulatlanul függő testet meglökjük lefelé $v_0 = 0.5\frac{m}{s}$ kezdősebességgel. Adjuk meg a test elmozdulását az idő függvényében, ha a légellenállás elhanyagolható. Tekintsük a felfelé mutató irányt pozitívnak.
Tapasztalatok alapján tudjuk, hogy ilyen feltételek mellett általában rezgőmozgás jön létre. Ekkor célszerű az egyensúlyi helyzethez viszonyítva megadni a test elmozdulását, amit a test kitérésének is nevezhetünk. Járjunk el mi is így, azaz adjuk meg a test kitérését az idő függvényében, azaz keressük azon $y = y(t)$ függvényt, amely minden időpillanatban megadja a test egyensúlyi helyzethez viszonyított kitérését. Ezt a függvényt a mozgást leíró differenciálegyenlet megoldásával kapjuk meg. Ez a differenciálegyenlet nem más, mint Newton 2. törvénye, amit középiskolából $F = ma$ alakban ismerünk. Most a mozgás során a testre ható erők eredője a rugó által kifejtett erő és a gravitációs erő összegként kapható meg. Ez az egyensúlyi helyzetben 0 , egyébként pedig arányos a test kitérésével, de azzal ellentétes irányú, az arányossági tényező pedig a rugóállandó. Az erő tehát az $F = -Dy$ egyenlettel írható le, ahol y a test kitérése. Az egyenlet másik oldalán a gyorsulás nem más, mint a kitérés idő szerinti második deriváltja, azaz $a = \ddot{y}$. Az idő szerinti deriválást ponttal jelöltük úgy, ahogyan a fizikában szokás, de persze $a = y''$ -t is írhattunk volna. Így jutunk a $-Dy = m\ddot{y}$ differenciálegyenlethez, ami $\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$ alakra is rendezhető. Ebben a differenciálegyenletben y és $\ddot{y}$ csak első hatványon szerepelnek, azaz lineáris az egyenlet, és mindegyiküknek az együtthatója csak egy konstans, nem függ a független változótól, azaz t -től.
A kitérést leíró függvény előállításához természetesen figyelembe kell vennünk azt, hogy most kezdeti feltételek is vannak. Tudjuk, a mozgás kezdetén az egyensúlyi helyzetben van a test, tehát kitérése ekkor nulla, azaz $y(0) = 0$. De a mozgás kezdetén a test sebességét is ismerjük. A sebesség a kitérés idő szerinti első deriváltja, s ebből az $\dot{y} = -0.5$ egyenlet írható fel. Az előjel azért van, mert a felfelé irányt vettük pozitívnak, a testet pedig lefelé lökjük meg. Így a következő kezdeti érték feladatot kell megoldanunk:

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0 \ , \ y(0) = 0 \ , \ \dot{y} = -0.5 \ .$$

A feladatban szereplő differenciálegyenlet azért különleges, mert egyrészt lineáris, másrészt benne az ismeretlen függvény és deriváltja vagy deriváltjai csak konstanssal vannak szorozva. Az ilyen egyenletek megoldásával foglalkozunk az alábbiakban.

Elméleti összefoglaló

Az $y' + ay = b(x)$, $a \in \mathbb{R}$ alakú, vagy ilyen alakra hozható differenciálegyenleteket elsőrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenleteknek nevezzük. (Mivel y' és y csak első hatványon szerepelnek, és nem szerepel a szorzatuk, ezért lineárisak, s mivel mindegyiknek csak egy konstans a szorzója, ezért állandó együtthatósak.) Ezek az egyenletek megoldhatók az előző leckében ismertetett módszerrel is, de sokszor egyszerűbb úton is meghatározható a megoldás.

Először most is a homogén egyenletet oldjuk meg, ami jelen esetben $y_h' + ay_h = 0$. (Elhagytuk az egyenletből a $b(x)$ tagot, amiben nem szerepel sem y , sem y' , s ami miatt inhomogén az $y' + ay = b(x)$ egyenlet.) Belátható, hogy az ilyen homogén egyenletek megoldása mindig $y_h = ce^{\lambda x}$ alakú. A megoldásban szereplő λ számot úgy határozhatjuk meg, hogy előállítjuk y_h deriváltját, majd y_h -t és y_h' -t behelyettesítjük az egyenletbe. Így egyenletet kapunk λ -ra, amit megoldunk.

$$y_h = ce^{\lambda x} \;\Rightarrow\; y_h' = \left(ce^{\lambda x}\right)' = ce^{\lambda x} \cdot \lambda = c\lambda e^{\lambda x}$$

A deriválás során azt használtuk ki, hogy $e^{\lambda x}$ egy összetett függvény, aminek külső függvénye az exponenciális, belső függvénye pedig λx . A külső függvény deriváltját pedig meg kell szorozni a belső függvény deriváltjával, ezért van a λ szorzó.

Elvégezzük a homogén egyenletbe y_h' és y_h behelyettesítését.

$$y_h' + ay_h = 0 \;\Rightarrow\; c\lambda e^{\lambda x} + ace^{\lambda x} = 0 \;\Rightarrow\; ce^{\lambda x}(\lambda + a) = 0$$

Mivel $e^{\lambda x} > 0$ minden esetben teljesül, ezért eloszthatjuk vele az egyenletet. A c konstanssal is oszthatunk, mert a $c = 0$ nyilvánvalóan megoldás, s elegendő a $c \neq 0$ esetet vizsgálnunk. Így kapjuk a $\lambda + a = 0$ elsőfokú egyenletet, aminek $\lambda = -a$ a megoldása.

A $\lambda + a = 0$ egyenletet a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének nevezzük.

Ezután felírhatjuk a homogén egyenlet általános megoldását.

$$y_h = ce^{\lambda x} = ce^{-ax}$$

A feladatok megoldása során nem kell mindig végigjárnunk az előző levezetés minden lépését, hanem a karakterisztikus egyenletet formálisan is felírhatjuk. Lényegében annyit kell tennünk, hogy a homogén differenciálegyenletben y_h' helyére λ -t írunk, y_h -t pedig töröljük az egyenletből, csak az együtthatóját tartjuk meg. Például az $y_h' - 3y_h = 0$ homogén differenciálegyenlethez a $\lambda - 3 = 0$ karakterisztikus egyenlet tartozik.

Ezután foglalkozzunk az inhomogén egyenletek megoldásával. Belátható, hogy egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása (y) , a hozzá tartozó homogén egyenlet általános megoldásának (y_h) , és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összegeként áll elő, azaz $y = y_h + y_p$.

Mivel y_h meghatározására már van módszerünk, így innentől a cél az inhomogén egyenlet egy y_p partikuláris megoldásának előállítása. Ha az egyenlet jobb oldalán álló $b(x)$ függvény, amit zavaró függvénynek is nevezünk, egy polinom, vagy $e^{\alpha x}$, vagy $\sin \beta x$, vagy

$\cos\beta x$, vagy ezek konstans szorosainak összege, vagy szorzata, akkor y_p -t ugyanolyan alakú függvényként keressük mint $b(x)$, csak a függvényben minden tagba ismeretlen együtthatót írunk. Az így felírt függvényt, amiben a tagok együtthatói ismeretlenek, próbafüggvénynek nevezzük. Az ismeretlen együtthatókat úgy határozzuk meg, hogy vesszük a próbafüggvény deriváltját, majd a próbafüggvényt és a deriváltat behelyettesítjük a differenciálegyenletbe. Az így kapott egyenletet általában több egyenletre bonthatjuk, mert csak úgy állhat fenn egyenlőség, ha a két oldalon az azonos típusú függvények együtthatói megegyeznek.
Például az $Ax^2+B+C\sin x=2x^2-5-7\sin x$ egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $A=2$, $B=-5$ és $C=-7$. Az egyenletben ugyanis három típusú függvény szerepel, x^2 , konstans és $\sin x$. Külön-külön egyenlőnek kell lenni a négyzetes tagok együtthatóinak, a konstans tagoknak, és a $\sin x$ -es tagok együtthatóinak.
Így egyenletrendszert kapunk amiből az ismeretlen együtthatók kiszámolhatók. Az együtthatók ismeretében pedig felírható az y_p függvény, majd abból a differenciálegyenlet megoldása.
A módszer végrehajtása során nagyon fontos a megfelelő próbafüggvény megválasztása, ezért tekintsük át a próbafüggvény felírásának szabályait.
Ha a $b(x)$ zavaró függvény egy polinom, akkor a próbafüggvény ugyanolyan fokszámú polinom mint $b(x)$, és szerepel benne a legmagasabb fokszámú tagnál alacsonyabb fokszámú valamennyi tag, még akkor is, ha a zavaró függvényben nem volt olyan fokszámú tag. Az együtthatók a próbafüggvényben ismeretlenek, melyeket $A,B,C\ldots$ -vel szokás jeleni. Ezt mutatja az alábbi két példa.

$$b(x)=x^2+5 \;\Rightarrow\; y_p=Ax^2+Bx+C$$

$$b(x)=x^3 \;\Rightarrow\; y_p=Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

Ha a zavaró függvény exponenciális, akkor a próbafüggvény az exponenciális konstans szorosa lesz. Ha a kitevő nem egyszerűen x , hanem annak konstans szorosa, azaz αx , akkor a próbafüggvényben is ugyanez szerepel a kitevőben. Tekintsünk most is két konkrét példát.

$$b(x)=4e^x \;\Rightarrow\; y_p=Ae^x$$

$$b(x)=-5e^{3x} \;\Rightarrow\; y_p=Ae^{3x}$$

Itt jegyezzük meg a második példa kapcsán, hogy bár abban negatív az exponenciális együtthatója, a próbafüggvényben mégsem kell, és nem is célszerű $-A$ -t szerepeltetni együtthatóként, mivel a próbafüggvényben az együtthatók ismeretlenek. Majd az ismeretlenek meghatározásakor kiderül, hogy melyik pozitív és melyik negatív. Ha felesleges előjelet írunk a próbafüggvénybe, az nem hiba, de megnehezítjük a saját dolgunkat, mert jobban oda kell figyelni a későbbiekben, ezért nem javasoljuk.
Ha a zavaró függvényben a $\sin$ vagy $\cos$ függvények legalább egyike szerepel, akkor a próbafüggvényben mindkettőnek szerepelnie kell. Természetesen mindkettőnek ismeretlen együtthatója lesz. Ha pedig a változó szerepét x helyett βx vette át, akkor a próbafüggvényben is ez veszi át a változó szerepét. Erre tekintsük az alábbi konkrét példákat.

$$b(x)=\sin x \;\Rightarrow\; y_p=A\sin x+B\cos x$$

$$b(x)=7\cos x \;\Rightarrow\; y_p=A\sin x+B\cos x$$

$$b(x)=2\sin x-\cos x \;\Rightarrow\; y_p=A\sin x+B\cos x$$

$$b(x)=4\cos 3x \;\Rightarrow\; y_p=A\sin 3x+B\cos 3x$$

Ha a zavaró függvény a fentiekben említett függvények összege, akkor a próbafüggvényt is a megfelelő próbafüggvények összegeként kell felírnunk. Ismét nézzünk néhány konkrét példát. Az elsőben a zavaró függvény egy elsőfokú polinom és egy exponenciális összege, így a próbafüggvény az elsőfokú polinomhoz tartozó próbafüggvény és az exponenciálishoz tartozó próbafüggvény összege lesz. Ugyanezt az elvet láthatjuk a többi példában is.

$b(x) = x + e^x \;\Rightarrow\; y_p = Ax + B + Ce^x$

$b(x) = 5e^{3x} - \cos x \;\Rightarrow\; y_p = Ae^{3x} + B\sin x + C\cos x$

$b(x) = e^x - e^{5x} \;\Rightarrow\; y_p = Ae^x + Be^{5x}$

$b(x) = \sin x - \cos 4x \;\Rightarrow\; y_p = A\sin x + B\cos x + C\sin 4x + D\cos 4x$

Ha a $b(x)$ zavaró függvény a fentiekben említett függvények szorzata, akkor a próbafüggvény az egyes tényezőkhöz tartozó próbafüggvények szorzataként áll elő. Ilyenkor azonban az ismeretlen együtthatókat csak azután írjuk be a függvénybe, miután elvégeztük a szorzást úgy, hogy minden együttható helyére 1 került. Ezután a szorzatban írunk mindegyik tagba egy ismeretlen együtthatót. Ezt mutatják az alábbi példák.

Ha $b(x) = xe^x$, tehát a zavaró függvény egy elsőfokú polinom és egy exponenciális szorzata, akkor vesszük az elsőfokú polinomhoz tartozó próbafüggvényt minden tagban 1 együtthatóval. Ez $x+1$ lesz. Hasonlóan az exponenciálishoz tartozó próbafüggvény 1 együtthatóval e^x lesz. Vesszük ezek szorzatát, ami $(x+1)e^x = xe^x + e^x$ lesz. A próbafüggvényben a szorzat tagjaiba írunk egy-egy ismeretlent, így $y_p = Axe^x + Be^x$ lesz. Ugyanez látható az alábbi példákban is.

$b(x) = e^x \sin x \;\Rightarrow\; e^x(\sin x + \cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x \;\Rightarrow\; y_p = Ae^x \sin x + Be^x \cos x$

$b(x) = x\cos x \;\Rightarrow\; (x+1)(\sin x + \cos x) = x\sin x + x\cos x + \sin x + \cos x \;\Rightarrow$

$y_p = Ax\sin x + Bx\cos x + C\sin x + D\cos x$

Valószínűleg első olvasásra bonyolultnak tűnik a módszer, de a kidolgozott feladatok áttekintése után ez már remélhetőleg nem így lesz. A konkrét feladatok megoldásának megismerése nagyban elősegíti a módszer megértését, aminek nagy előnye az előző leckében megismert módszerhez képest, hogy integrálás nélkül oldhatunk meg vele differenciálegyenleteket. A próbafüggvény felírásakor azonban nagyon figyeljünk oda, és a fent leírtak szerint járjunk el. Hibásan felírt próbafüggvényből nem kaphatunk helyes eredményt. Ezek után tekintsük a konkrét feladatokat.

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Határozzuk meg az $y' + 2y = 4x$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Először oldjuk meg az $y_h' + 2y_h = 0$ homogén egyenletet. Ehhez írjuk fel a karakterisztikus egyenletet. Kicseréljük a deriváltat λ -ra, az ismeretlen függvénynek pedig csak az együtthatóját tartjuk meg.

$\lambda + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -2$

Ebből a homogén egyenlet megoldása: $y_h = ce^{\lambda x} = ce^{-2x}$.

Ezután keressük az inhomogén egyenlet egy y_p partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerrel. Mivel a jobb oldalon a zavaró függvény egy elsőfokú polinom, így a próbafüggvény is elsőfokú polinom lesz. Bár az egyenlet jobb oldalán csak elsőfokú tag szerepel, konstans tag nincs, a próbafüggvénybe konstans tag is kerül.

$y_p = Ax + B$

Állítsuk elő ennek a függvénynek a deriváltját.

$y'_p = (Ax+B)' = A$

Ezután helyettesítsük az eredeti differenciálegyenletben y és y' helyére a próbafüggvényt és deriváltját.

$y' + 2y = 4x \Rightarrow A + 2(Ax+B) = 4x$

A bal oldalon bontsuk fel a zárójelet, és a tagokat csoportosítsuk fokszámuk szerint.

$2Ax + (A+2B) = 4x$

Két polinom csak úgy lehet egyenlő egymással, ha az azonos fokszámú tagok együtthatói a két oldalon megegyeznek. Így az egyenletet két egyenletre bontjuk.

$4 = 2A$ (az elsőfokú tagok egyenlősége)

$A + 2B = 0$ (a konstans tagok egyenlősége)

Az első egyenletből $A = 2$, amit a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $B = -1$. Ezzel megoldottuk az egyenletrendszert, és a kapott számokat a próbafüggvénybe helyettesítve, felírhatjuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását.

$y_p = 2x - 1$

Mivel az inhomogén egyenlet általános megoldása a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege, ezért

$y = y_h + y_p = ce^{-2x} + 2x - 1$.

Megjegyzés: Látható, hogy a megoldás során a homogén egyenletre igaziból nem is volt szükségünk, mert a karakterisztikus egyenletet az inhomogén egyenletből is felírhatjuk. Ezért a későbbiekben nem fogjuk felírni a homogén egyenletet.

2. feladat: Oldjuk meg a $3y' + y = x^2 + 5$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Írjuk fel a karakterisztikus egyenletet, majd oldjuk meg. Az egyenletben y' helyére λ -t írunk, y -nak csak az együtthatóját tartjuk meg, a jobb oldalt pedig elhagyjuk, mert ez a zavaró függvény, ami miatt inhomogén az egyenlet.

$$3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

Ezután a homogén egyenlet megoldása: $y_h = ce^{\lambda x} = ce^{-\frac{x}{3}}$.

Írjuk fel most a próbafüggvényt, amivel az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük. Mivel a zavaró függvény másodfokú polinom, így a próbafüggvény is másodfokú polinom lesz. Bár az egyenlet jobb oldalán nincs elsőfokú tag, a próbafüggvényben lesz, mert minden másodfokúnál alacsonyabb fokú tagnak szerepelnie kell.

$y_p = Ax^2 + Bx + C$

Vegyük ennek a függvénynek a deriváltját.

$y'_p = (Ax^2 + Bx + C)' = 2Ax + B$

A próbafüggvényt és deriváltját helyettesítsük az inhomogén egyenletben y és y' helyére.

$3y' + y = x^2 + 5 \Rightarrow 3(2Ax+B) + (Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 5$

Az egyenlet bal oldalán bontsuk fel a zárójeleket, és csoportosítsunk fokszám szerint.

$Ax^2 + (6A+B)x + (3B+C) = x^2 + 5$

Az azonos fokszámú tagok egyenlőségeit felírva bontsuk több egyenletre ezt az egyenletet.

$A = 1$ (a másodfokú tagok egyenlősége)

$6A + B = 0$ (az elsőfokú tagok egyenlősége)

$3B + C = 5$ (a konstansok egyenlősége)
Megoldjuk az egyenletrendszert. A második egyenletbe helyettesítjük A -t, kapjuk $B = -6$.
Ezt helyettesítjük a harmadik egyenletbe, amiből $C = 23$.
A kapott megoldást a próbafüggvényben helyettesítjük az ismeretlen együtthatók helyére, és megkapjuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását.

$y_p = x^2 - 6x + 23$

Ezek után az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$y = y_h + y_p = ce^{-\frac{x}{3}} + x^2 - 6x + 23$.

3. feladat: Keressük meg az $y' - 4y = 5\cos 3x$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Írjuk fel a karakterisztikus egyenletet, oldjuk meg, majd adjuk meg a homogén egyenlet általános megoldását.

$\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \Rightarrow y_h = ce^{\lambda x} = ce^{4x}$

Most írjuk fel a próbafüggvényt. Mivel a zavaró függvény most $5\cos 3x$, ezért a próbafüggvényben $\sin 3x$ és $\cos 3x$ mindegyikének szerepelni kell, azaz

$y_p = A\sin 3x + B\cos 3x$.

Állítsuk elő ennek a függvénynek a deriváltját. Mivel a $\sin 3x$ és $\cos 3x$ összetett függvények, így mindegyik esetében a külső függvény deriváltját szorozni kell a belső függvény deriváltjával.

$y_p' = \left(A\sin 3x + \cos 3x\right)' = A\cos 3x \cdot 3 + B\left(-\sin 3x\right) \cdot 3 = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x$

Helyettesítsük y_p -t és y_p' -t az eredeti inhomogén egyenletbe.

$y' - 4y = 5\cos 3x \Rightarrow \left(3A\cos 3x - 3B\sin 3x\right) - 4\left(A\sin 3x + B\cos 3x\right) = 5\cos 3x$

Bontsuk fel a zárójeleket, és az azonos függvényt tartalmazó tagokat vonjuk össze.

$\left(-4A - 3B\right)\sin 3x + \left(3A - 4B\right)\cos 3x = 5\cos 3x$

Az egyenletet bontsuk két egyenletre úgy, hogy felírjuk az ugyanolyan függvényt tartalmazó tagok egyenlőségeit.

$-4A - 3B = 0$ (a $\sin 3x$ -es tagok egyenlősége)
$3A - 4B = 5$ (a $\cos 3x$ -es tagok egyenlősége)

Az első egyenletből fejezzük ki B -t, helyettesítsük a második egyenletbe, és határozzuk meg A -t, majd utána B -t.

$$-4A - 3B = 0 \Rightarrow B = -\frac{4}{3}A \Rightarrow 3A - 4\left(-\frac{4}{3}A\right) = \frac{25}{3}A = 5 \Rightarrow A = \frac{3}{5} \Rightarrow B = -\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{4}{5}$$

Az együtthatók ismeretében az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$y_p = \frac{3}{5}\sin 3x - \frac{4}{5}\cos 3x$.

Végül az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$y = y_h + y_p = ce^{4x} + \frac{3}{5}\sin 3x - \frac{4}{5}\cos 3x$.

4. feladat: Oldjuk meg a $2y' - y = \sin x - 2\cos x$, $y\left(0\right) = 4$ kezdeti érték feladatot!

Megoldás: Vegyük most is a karakterisztikus egyenletet, melynek megoldása után írjuk fel a homogén egyenlet általános megoldását.

$2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow y_h = ce^{\lambda x} = ce^{\frac{x}{2}}$

Ezután írjuk fel a próbafüggvényt. A zavaró függvényben szerepel $\sin x$ és $\cos x$ is, így ugyanezek szerepelnek majd a próbafüggvényben is.

$y_p = A\sin x + B\cos x$

Vegyük ennek deriváltját.

$y_p' = \left(A\sin x + B\cos x\right)' = A\cos x - B\sin x$

Helyettesítsük be ezeket az eredeti egyenletbe.

$2y' - y = \sin x - 2\cos x \Rightarrow 2\left(A\cos x - B\sin x\right) - \left(A\sin x + B\cos x\right) = \sin x - 2\cos x$

Vonjuk össze az ugyanolyan függvényt tartalmazó tagokat.

$\left(-A - 2B\right)\sin x + \left(2A - B\right)\cos x = \sin x - 2\cos x$

Az egyforma függvényt tartalmazó tagok egyenlőségéből alakítsuk egyenletrendszerré az egyenletet.

$-A - 2B = 1$ (a $\sin x$ -es tagok egyenlősége)

$2A - B = -2$ (a $\cos x$ -es tagok egyenlősége)

Most oldjuk meg az egyenletrendszert. Kifejezhetjük az egyik ismeretlent valamelyik egyenletből, de dolgozhatunk az egyenlő együtthatók módszerével is. Ha például az első egyenlet kétszereséhez hozzáadjuk a második egyenletet, akkor csak B marad ismeretlenként.

$2\left(-A - 2B\right) + (2A - B) = 2 \cdot 1 + \left(-2\right) \Rightarrow -5B = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow A = -1$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása tehát:

$y_p = -1 \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x = -\sin x$.

Ebből az általános megoldás: $y = y_h + y_p = ce^{\frac{x}{2}} - \sin x$.

Ezután helyettesítsük be a kezdeti feltételben megadott értékpárt, és oldjuk meg c -re a kapott egyenletet.

$4 = ce^{\frac{0}{2}} - \sin 0 \Rightarrow c = 4$

A kezdeti érték feladat megoldása tehát az $y_0 = 4e^{\frac{x}{2}} - \sin x$ függvény lesz.

5. feladat: Adjunk meg három olyan függvényt, ami megoldása az $y' + y = 12e^{2x}$ differenciálegyenletnek!

Megoldás: Ha meghatározzuk a differenciálegyenlet általános megoldását, akkor abban c helyére bármilyen valós számot írhatunk, mindenképpen megoldást kapunk. Így tetszőleges számú megoldást elő tudunk állítani. Először most is a homogén egyenlet általános megoldását határozzuk meg az előző feladatokban bemutatott módon.

$\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow y_h = ce^{\lambda x} = ce^{-x}$

Írjuk fel ezután a próbafüggvényt. Mivel a zavaró függvény most $12e^{2x}$, azaz exponenciális függvény, így a próbafüggvényben is ugyanilyen exponenciális szerepel majd.

$y_p = Ae^{2x}$

A próbafüggvény deriváltja: $y_p' = \left(Ae^{2x}\right)' = Ae^{2x} \cdot 2 = 2Ae^{2x}$.

A próbafüggvényt és deriváltját behelyettesítjük az inhomogén differenciálegyenletbe, majd az így kapott egyenletet megoldjuk.

$y' + y = 12e^{2x} \;\Rightarrow\; 2Ae^{2x} + Ae^{2x} = 12e^{2x} \;\Rightarrow\; 3Ae^{2x} = 12e^{2x} \;\Rightarrow\; A = 4$
(Mivel csak egyetlen határozatlan együttható volt, most nem kellett egyenletrendszert felírni.)
Adjuk meg az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását, majd az általános megoldást.
$y_p = 4e^{2x} \;\Rightarrow\; y = y_h + y_p = ce^{-x} + 4e^{2x}$
Ezután adjunk a konstansnak három értéket, s így három olyan függvényt kapunk, ami megoldása a differenciálegyenletnek. Legyen ez a három szám: 0 , 2 és 5 . Ekkor a három megoldás a következő:
$y_1 = 0 \cdot e^{-x} + 4e^{2x} = 4e^{2x}$, $y_2 = 2e^{-x} + 4e^{2x}$ és $y_3 = 5e^{-x} + 4e^{2x}$.
(Ha a konstanst 0 -nak választjuk, akkor pontosan azt a megoldást kapjuk, amit a próbafüggvénnyel meghatároztunk. Tulajdonképpen elég lett volna kér értéket adni a konstansnak, hiszen ezt a megoldást már ismertük az általános megoldás felíráskor, így csak két további másik megoldást kellett még előállítanunk.)

6. feladat: Határozzuk meg az $5y' - y = e^x + x$ differenciálegyenlet általános megoldását!
Megoldás: Határozzuk meg először a homogén egyenlet általános megoldását.
$5\lambda - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{1}{5} \;\Rightarrow\; y_h = ce^{\lambda x} = ce^{\frac{x}{5}}$
Következik a próbafüggvény felírása. Mivel az egyenlet jobb oldalán egy exponenciális függvény és egy elsőfokú polinom összege áll, ezért a próbafüggvény is két ilyen függvény összege lesz. A felírt próbafüggvényt rögtön deriváljuk.
$y_p = Ae^x + Bx + C \;\Rightarrow\; y_p' = Ae^x + B$
Helyettesítsük ezeket az eredeti differenciálegyenletbe.
$5y' - y = e^x + x \;\Rightarrow\; 5\left(Ae^x + B\right) - \left(Ae^x + Bx + C\right) = e^x + x$
Rendezzünk a függvények típusa szerint.
$4Ae^x - Bx + \left(5B - C\right) = e^x + x$
Az egyforma függvények együtthatóinak egyeztetéséből a következő egyenletrendszert kapjuk.
$4A = 1$ (az exponenciális tagok egyenlősége)
$-B = 1$ (az elsőfokú tagok egyenlősége)
$5B - C = 0$ (a konstans tagok egyenlősége)
Az egyenletrendszer megoldása: $A = \frac{1}{4}$, $B = -1$, $C = -5$.
Ezt felhasználva írjuk fel az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását, majd az általános megoldást.
$y_p = \frac{1}{4}e^x - x - 5 \;\Rightarrow\; y = y_h + y_p = ce^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}e^x - x - 5$

7. feladat: Oldjuk meg a $2y' - 3y = xe^{3x}$ differenciálegyenletet!
Megoldás: Határozzuk meg először a homogén egyenlet általános megoldását.
$2\lambda - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; y_h = ce^{\lambda x} = ce^{\frac{3}{2}x}$
Mivel a zavaró függvény egy exponenciális és egy elsőfokú polinom szorzata, így a próbafüggvény is két ilyen típusú függvény szorzata lesz. Vegyük a két függvénytípus szorzatát úgy, hogy minden együttható 1 .
$e^{3x}\left(x + 1\right) = xe^{3x} + e^{3x}$

A tagokhoz ezután írjunk ismeretlen együtthatókat.

$y_p = Axe^{3x} + Be^{3x}$

Vegyük a próbafüggvény deriváltját, és rendezzük a függvények típusa szerint.

$y_p' = \left(Axe^{3x} + Be^{3x}\right)' = A\cdot 1\cdot e^{3x} + Axe^{3x}\cdot 3 + Be^{3x}\cdot 3 = 3Axe^{3x} + \left(A+3B\right)e^{3x}$

Helyettesítsük az inhomogén egyenletbe y_p -t és y_p' -t.

$2y' - 3y = xe^{3x} \;\Rightarrow\; 2\left(3Axe^{3x} + \left(A+3B\right)e^{3x}\right) - 3\left(Axe^{3x} + Be^{3x}\right) = xe^{3x}$

Csoportosítsuk a tagokat a függvények típusa szerint.

$3Axe^{3x} + \left(2A+3B\right)e^{3x} = xe^{3x}$

Osszuk az egyenletet e^{3x} -szel. Ezt megtehetjük, hiszen exponenciális függvény sosem vesz fel nulla értéket.

$3Ax + \left(2A+3B\right) = x$

Az egyenletet bontsuk egyenletrendszerré az egyforma típusú függvények együtthatóinak egyenlőségeit felírva.

$3A = 1$ (az elsőfokú tagok egyenlősége)

$2A + 3B = 0$ (a konstansok egyenlősége)

Az egyenletrendszer megoldása: $A = \frac{1}{3}$ és $B = -\frac{2}{9}$.

Ezekből felírjuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását, majd az általános megoldást.

$y_p = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} \;\Rightarrow\; y = y_h + y_p = ce^{\frac{3}{2}x} + \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x}$

8. feladat: Mi az általános megoldása a $4y' + 3y = 13e^x\cos x$ differenciálegyenletnek?

Megoldás: Szokás szerint először a homogén egyenletet oldjuk meg.

$4\lambda + 3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; y_h = ce^{\lambda x} = ce^{-\frac{3}{4}x}$

A zavaró függvény szorzat, melynek egyik tényezője exponenciális, a másik pedig $\cos x$. Ugyanilyen szorzat lesz a próbafüggvény is. Vegyük a két tényezőhöz tarozó próbafüggvény típusokat csupa 1 együtthatóval, végezzük el a szorzást, majd írjuk fel a próbafüggvényt határozatlan együtthatókkal a tagokban.

$e^x\left(\sin x + \cos x\right) = e^x\sin x + e^x\cos x \;\Rightarrow\; y_p = Ae^x\sin x + Be^x\cos x$

Deriváljuk ezt a függvényt.

$y_p' = \left(Ae^x\sin x + Be^x\cos x\right)' = Ae^x\sin x + Ae^x\cos x + Be^x\cos x + Be^x\left(-\sin x\right)$

Ezt célszerű rendezni az egyforma típusú függvényt tartalmazó tagok összevonásával.

$y_p' = \left(A-B\right)e^x\sin x + \left(A+B\right)e^x\cos x$

Helyettesítsük a próbafüggvényt és deriváltját a $4y' + 3y = 13e^x\cos x$ egyenletbe.

$4\left(\left(A-B\right)e^x\sin x + \left(A+B\right)e^x\cos x\right) + 3\left(Ae^x\sin x + Be^x\cos x\right) = 13e^x\cos x$

Osszuk az egyenletet az exponenciális függvénnyel. Megtehetjük, hiszen sehol sem zérus.

$4\left(\left(A-B\right)\sin x + \left(A+B\right)\cos x\right) + 3\left(A\sin x + B\cos x\right) = 13\cos x$

Bontsuk fel a zárójeleket, és vonjuk össze az egyforma függvényt tartalmazó tagokat.

$\left(7A-4B\right)\sin x + \left(4A+7B\right)\cos x = 13\cos x$

Ezt az egyenletet bontsuk egyenletrendszerré.

$7A-4B=0$ (a $\sin x$ -es tagok egyenlősége)
$4A+7B=13$ (a $\cos x$ -es tagok egyenlősége)
Az első egyenletből fejezzük ki B -t, és helyettesítsünk a második egyenletbe. Így megkapjuk először A , majd utána B értékét is.

$$7A-4B=0 \;\Rightarrow\; B=\frac{7}{4}A \;\Rightarrow\; 4A+7\cdot\frac{7}{4}A=\frac{65}{4}A=13 \;\Rightarrow\; A=\frac{4}{5} \;\Rightarrow\; B=\frac{7}{5}$$

Az együtthatók ismeretében írjuk fel az y_p függvényt, majd az inhomogén egyenlet általános megoldását.

$$y_p=\frac{4}{5}e^x\sin x+\frac{7}{5}e^x\cos x \;\Rightarrow\; y=y_h+y_p=ce^{-\frac{3}{4}x}+\frac{4}{5}e^x\sin x+\frac{7}{5}e^x\cos x$$

Ellenőrző kérdések

1. kérdés: Mi az $y'-3y=9x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

$y=ce^{-3x}-4x+3$
$y=ce^{-3x}-x+4$
$y=ce^{3x}-3x-1$ (X)
$y=ce^{3x}+2x-5$

2. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik a $2y'+y=x^2-2$ differenciálegyenlet általános megoldása?

$y=ce^{\frac{x}{2}}+3x^2-x+5$
$y=ce^{\frac{x}{2}}-x^2+3x-1$
$y=ce^{-\frac{x}{2}}+2x^2-3x-2$
$y=ce^{-\frac{x}{2}}+x^2-4x+6$ (X)

3. kérdés: Melyik függvény az $y'+6y=10\sin 2x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

$y=ce^{-6x}+\frac{3}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$ (X)
$y=ce^{-6x}-\frac{3}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$
$y=ce^{-6x}+\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x$
$y=ce^{-6x}-\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x$

4. kérdés: A felsorolt függvények közül melyik a $3y'-y=\cos x-2\sin x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

$y=ce^{\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ (X)

$y = ce^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{3}{2}\cos x$

$y = ce^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

$y = ce^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{3}{2}\cos x$

5. kérdés: A következő függvények közül melyik megoldása az $y' - y = 6e^{3x}$ differenciálegyenletnek?

$y = 2e^{x} - 3e^{3x}$

$y = 3e^{x} - 2e^{3x}$

$y = -2e^{x} + 3e^{3x}$ (X)

$y = -3e^{x} + 2e^{3x}$

6. kérdés: Mi az általános megoldása a $4y' + y = e^{3x} + x$ differenciálegyenletnek?

$y = ce^{-\frac{x}{4}} + \frac{1}{7}e^{3x} - x + 3$

$y = ce^{-\frac{x}{4}} + \frac{1}{13}e^{3x} + x - 4$ (X)

$y = ce^{-\frac{x}{4}} + \frac{1}{13}e^{3x} - x + 3$

$y = ce^{-\frac{x}{4}} + \frac{1}{7}e^{3x} + x - 4$

7. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik megoldása a $3y' - 2y = 4xe^{2x}$ differenciálegyenletnek?

$y = ce^{\frac{2}{3}x} - xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x}$

$y = ce^{\frac{2}{3}x} + xe^{2x} + \frac{3}{4}e^{2x}$

$y = ce^{\frac{2}{3}x} + xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x}$ (X)

$y = ce^{\frac{2}{3}x} - xe^{2x} + \frac{3}{4}e^{2x}$

8. kérdés: Melyik függvény az $3y' - 4y = 5e^{x}\sin x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

$y = ce^{\frac{4}{3}x} - \frac{3}{2}e^{x}\sin x - \frac{1}{2}e^{x}\cos x$

$y = ce^{\frac{4}{3}x} + \frac{1}{2}e^{x}\sin x - \frac{3}{2}e^{x}\cos x$

$y = ce^{\frac{4}{3}x} + \frac{3}{2}e^x \sin x - \frac{1}{2}e^x \cos x$

$y = ce^{\frac{4}{3}x} - \frac{1}{2}e^x \sin x - \frac{3}{2}e^x \cos x$ (X)

Elméleti összefoglaló

Az $y'' + py' + qy = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$ alakú, vagy ilyen alakra hozható differenciálegyenleteket másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenleteknek nevezzük.
Ezek megoldását ugyanúgy $y = ce^{\lambda x}$ alakban keressük, mint ahogyan ezt a hasonló elsőrendű egyenleteknél tettük. Vegyük ennek a függvénynek az első és második deriváltját.
$y' = \lambda ce^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 ce^{\lambda x}$
Helyettesítsük ezeket a differenciálegyenletbe.
$y'' + py' + qy = 0 \Rightarrow \lambda^2 ce^{\lambda x} + p\lambda ce^{\lambda x} + qce^{\lambda x} = 0 \Rightarrow ce^{\lambda x}\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right) = 0$
Ezt az egyenletet eloszthatjuk $ce^{\lambda x}$ -szel, mert $e^{\lambda x}$ nem nulla, a $c = 0$ esetben pedig nyilvánvalóan megoldást kapunk, s így a további megoldások kereséséhez feltehetjük, hogy $c \neq 0$. Így az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk.
$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$
Ezt a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének nevezzük. Ezt az egyenletet formálisan is megkaphatjuk, ha a differenciálegyenletben y'' helyére λ^2 -et, y' helyére λ -t írunk, y -t pedig elhagyjuk az egyenletből, csak az együtthatóját tartjuk meg. Az $y = ce^{\lambda x}$ függvény akkor megoldása a differenciálegyenletnek, ha λ gyöke a karakterisztikus egyenletnek.
Ha elő szeretnénk állítani a differenciálegyenlet általános megoldását, akkor három esetet kell megkülönböztetnünk aszerint, hogy a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke van, vagy egy valós gyöke van, amit kétszeres gyöknek is szoktak nevezni, vagy két komplex gyöke van.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke van, melyeket jelöljön λ_1 és λ_2 , akkor a differenciálegyenlet általános megoldása a következő:
$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$.

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós gyöke van, melyet jelöljön λ , akkor a differenciálegyenlet általános megoldása a következő:
$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\left(c_1 + c_2 x\right)$.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két komplex gyöke van, melyeket jelöljön λ_1 és λ_2 , akkor ezek mindig egymás konjugáltjai, azaz felírhatók $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ és $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ alakban, ahol α és β valós számok. A differenciálegyenlet általános megoldása ekkor a következő:
$y = e^{\alpha x}\left(c_1 \sin\beta x + c_2 \cos\beta x\right)$.

Amint látható, attól függően, hogy hány valós gyöke van a karakterisztikus egyenletnek, más-más képletből kapjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását. Azonban mindegyik esetben két konstans szerepel a megoldásban, melyeket egymástól függetlenül lehet megválasztani. Azért szerepel két konstans, mert a differenciálegyenlet másodrendű, és az általános megoldás mindig annyi paraméter tartalmaz, amennyi a differenciálegyenlet rendje.

Kidolgozott feladatok

9. feladat: Határozzuk meg az $y'' + y' - 12y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Írjuk fel a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét, és határozzuk meg a gyökeit.

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1} = \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

Mivel a karakterisztikus egyenletnek két valós gyöke van, az általános megoldást az $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ képletből kapjuk. Így a feladat megoldása a következő:

$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x}$.

10. feladat: Oldjuk meg az $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ kezdeti érték feladatot!

Megoldás: A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 + 3\lambda = 0$.

Ennek megoldásához felesleges a megoldóképletbe helyettesíteni, mert λ kiemelhető a bal oldalon. Ezután szorzat egyenlő nullával, ami csak úgy lehet, ha vagy az egyik, vagy a másik tényező egyenlő nullával.

$$\lambda(\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -3 \end{matrix}$$

Ismét két valós gyököt kaptunk, ezért megint az $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ képletbe helyettesítve kapjuk az általános megoldást.

$y = c_1 e^{0\cdot x} + c_2 e^{-3x} = c_1 + c_2 e^{-3x}$

A kezdeti értek feladat megoldásához vegyük ennek deriváltját.

$y' = \left(c_1 + c_2 e^{-3x}\right)' = 0 + c_2 e^{-3x} \cdot (-3) = -3c_2 e^{-3x}$

Helyettesítsük be y -ba és y' -ba a kezdeti feltételben megadott értékeket.

$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 e^{-3\cdot 0} = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$

$y'(0) = 3 \Rightarrow -3c_2 e^{-3\cdot 0} = 3 \Rightarrow -3c_2 = 3 \Rightarrow c_2 = -1$

Behelyettesítve az első egyenletbe kapjuk: $c_1 = 2$.

A kezdeti érték feladat megoldása tehát az $y_0 = 2 - e^{-3x}$ függvény lesz. Ez a függvény megoldása a differenciálegyenletnek, és kielégíti a kezdeti feltételeket is.

Megjegyzés: A karakterisztikus egyenlet gyökeit a megoldóképletből is meghatározhattuk volna.

$$\lambda^2 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot 0}}{2\cdot 1} = \frac{-3 \pm 3}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

Ha azonban nincs konstans tag egy másodfokú egyenletben, akkor az ismeretlen mindig kiemelhető, és így a gyökök egyszerűbben is meghatározhatók.

11. feladat: Határozzuk meg az $y'' - 10y' + 25y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet most $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$.
A bal oldalon teljes négyzetet ismerhetünk fel.
$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2 = 0$
Ez csak akkor teljesülhet, ha $\lambda - 5 = 0$, amiből egyetlen valós gyököt kapunk, ami $\lambda = 5$.
Mivel csak egy valós gyöke van a karakterisztikus egyenletnek, így az általános megoldást az $y = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x)$ képletbe történő behelyettesítéssel kapjuk. Így a megoldás a következő:
$y = e^{5x}(c_1 + c_2 x)$.
Megjegyzés: A karakterisztikus egyenlet gyökét a megoldóképletből is meghatározhattuk volna.

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 0}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 5 \text{ , azaz } \lambda = 5$$

Ha egy másodfokú egyenletnek egy valós gyöke van, akkor a képletben a gyök alatt nullát kapunk, azaz a diszkrimináns ilyenkor zérus.

12. feladat: Határozzuk meg az $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$ kezdeti érték feladat megoldását!
Megoldás: Írjuk fel a karakterisztikus egyenletet, és oldjuk meg.
$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda + 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$
A karakterisztikus egyenletnek egy valós gyöke van, így az $y = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x)$ képletbe kell helyettesítenünk. A differenciálegyenlet általános megoldása a következő:
$y = e^{-3x}(c_1 + c_2 x)$.
Vegyük ennek deriváltját a kezdeti érték feladat megoldásához.

$$y' = \left(e^{-3x}(c_1 + c_2 x)\right)' = e^{-3x} \cdot (-3)(c_1 + c_2 x) + e^{-3x} \cdot c_2 = e^{-3x}(-3c_1 - 3c_2 x + c_2)$$

Helyettesítsük az általános megoldásba és deriváltjába a kezdeti feltételekben megadott érték párokat.

$$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = e^{-3 \cdot 0}(c_1 + c_2 \cdot 0) \Rightarrow c_1 = 2$$

$$y'(0) = -1 \Rightarrow -1 = e^{-3 \cdot 0}(-3c_1 - 3c_2 \cdot 0 + c_2) \Rightarrow -1 = -3c_1 + c_2$$

Helyettesítsük a második egyenletbe c_1 értékét, így kapjuk $c_2 = 5$.
Tehát a differenciálegyenlet azon partikuláris megoldása, ami eleget tesz a kezdeti feltételeknek: $y_0 = e^{-3x}(2 + 5x)$.

13. feladat: Oldjuk meg az $y'' - 6y' + 34y = 0$ differenciálegyenletet!
Megoldás: A karakterisztikus egyenlet most a következő: $\lambda^2 - 6\lambda + 34 = 0$.
A gyököket a megoldóképletből kaphatjuk meg.

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 34}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{6 \pm 10i}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 3 + 5i \\ \lambda_2 = 3 - 5i \end{cases}$$

A karakterisztikus egyenletnek két konjugált komplex gyöke van, ezért az általános megoldást az $y = e^{\alpha x}(c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x)$ képletbe helyettesítve kapjuk. Ebben a képletben α a komplex gyökök valós része, β pedig a képzetes rész. Jelen esetben tehát $\alpha = 3$ és $\beta = 5$.
A differenciálegyenlet általános megoldása a következő:
$y = e^{3x}(c_1 \sin 5x + c_2 \cos 5x)$.

14. feladat: Mi a megoldása az $y''+64y=0$, $y(0)=5$, $y'(0)=16$ kezdeti érték feladatnak?
Megoldás: Írjuk fel, és oldjuk meg a karakterisztikus egyenletet.
$\lambda^2+64=0 \Rightarrow \lambda^2=-64 \Rightarrow \lambda=\sqrt{-64} \Rightarrow \lambda=\pm 8i$
Ismét konjugált komplex gyökpárt kaptunk, megint az $y=e^{\alpha x}\left(c_1\sin\beta x+c_2\cos\beta x\right)$ képletbe kell helyettesítenünk. Jelen esetben a valós és képzetes rész: $\alpha=0$ és $\beta=8$.
Ebből a differenciálegyenlet általános megoldása a következő:
$y=e^{0\cdot x}\left(c_1\sin 8x+c_2\cos 8x\right)=c_1\sin 8x+c_2\cos 8x$
A kezdeti érték feladat megoldásához szükségünk van ennek deriváltjára.
$y'=\left(c_1\sin 8x+c_2\cos 8x\right)'=c_1\cos 8x\cdot 8+c_2\left(-\sin 8x\right)\cdot 8=8c_1\cos 8x-8c_2\sin 8x$
Helyettesítsük az általános megoldásba és deriváltjába a kezdeti feltételekből az adatokat.
$y(0)=5 \Rightarrow 5=c_1\sin(8\cdot 0)+c_2\cos(8\cdot 0) \Rightarrow c_2=5$
$y'(0)=16 \Rightarrow 16=8c_1\cos(8\cdot 0)-8c_2\sin(8\cdot 0) \Rightarrow c_1=2$
A kezdeti érték feladat megoldása tehát az $y_0=2\sin 8x+5\cos 8x$ függvény lesz.

15. feladat: Egy $m=10dkg$ tömegű testet $D=10\dfrac{N}{m}$ rugóállandójú csavarrugóra akasztunk. A mozdulatlanul függő testet meglökjük lefelé $v_0=0.5\dfrac{m}{s}$ kezdősebességgel. Adjuk meg a test elmozdulását az idő függvényében, ha a légellenállás elhanyagolható. Tekintsük a felfelé mutató irányt pozitívnak.
Megoldás: Visszakanyarodtunk a lecke elején megismert motivációs példához, amit akkor nem oldottunk meg. Azonban akkor eljutottunk odáig, hogy ezen fizikai példa során lényegében az $\ddot{y}+\dfrac{D}{m}y=0$, $y(0)=0$, $\dot{y}=-0.5$ kezdeti érték feladatot kell megoldanunk.
Ebben a kezdeti érték feladatban egy másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet szerepel, és az ilyen egyenletek megoldásával foglalkoztunk az előző feladatokban. A differenciálegyenletet paraméteresen oldjuk meg, s majd csak a kapott megoldásba fogjuk behelyettesíteni a konkrét adatokat.
Amint a korábbiakban, most is írjuk fel a karakterisztikus egyenletet, amit oldjunk is meg.

$$\lambda^2+\frac{D}{m}=0 \Rightarrow \lambda^2=-\frac{D}{m} \Rightarrow \lambda=\sqrt{-\frac{D}{m}} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=\sqrt{\dfrac{D}{m}}\,i\\ \lambda_2=-\sqrt{\dfrac{D}{m}}\,i\end{cases}$$

Azért kapunk komplex gyököket, mert D és m pozitív, s ezért $-\dfrac{D}{m}$ negatív. Ezáltal negatív valós számból kell négyzetgyököt vonnunk, aminek eredményei komplexek. Így amint az előző két feladatban, úgy most is az $y=e^{\alpha x}\left(c_1\sin\beta x+c_2\cos\beta x\right)$ képletbe helyettesítve kapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását. Figyeljünk oda, a független változó viszont most nem x hanem t lesz, hisz az idő függvényében írjuk le a mozgást. Olvassuk ki a valós és képzetes részt a gyökökből: $\alpha=0$ és $\beta=\sqrt{\dfrac{D}{m}}$.
A differenciálegyenlet általános megoldása így a következő:

$$y = e^{0\cdot x}\left(c_1 \sin\sqrt{\frac{D}{m}}t + c_2 \cos\sqrt{\frac{D}{m}}t\right) = c_1 \sin\sqrt{\frac{D}{m}}t + c_2 \cos\sqrt{\frac{D}{m}}t$$

Ezután helyettesítsük be az adatokat. Most is figyeljünk, a tömeg nem SI alapegységben van, át kell váltanunk, $m = 0.1kg$.

$$y = c_1 \sin\sqrt{\frac{10}{0.1}}t + c_2 \cos\sqrt{\frac{10}{0.1}}t = c_1 \sin 10t + c_2 \cos 10t$$

A megoldásban szereplő konstansokat a kezdeti feltételekből határozzuk meg. Ehhez vegyük az általános megoldás deriváltját.

$$\dot{y} = \left(c_1 \sin 10t + c_2 \cos 10t\right)' = c_1 \cos 10t \cdot 10 + c_2\left(-\sin 10t\right)\cdot 10 = 10c_1 \cos 10t - 10c_2 \sin 10t$$

Helyettesítsük az általános megoldásba és deriváltjába a kezdeti feltételekben megadott értékeket.

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = c_1 \sin(10\cdot 0) + c_2 \cos(10\cdot 0) \;\Rightarrow\; c_2 = 0$$

$$\dot{y} = -0.5 \;\Rightarrow\; -0.5 = 10c_1 \cos(10\cdot 0) - 10c_2 \sin(10\cdot 0) \;\Rightarrow\; -0.5 = 10c_1 \;\Rightarrow\; c_1 = -0.05$$

Ezeket helyettesítsük az általános megoldásba, így megkapjuk, hogy a test kitérését az $y_0 = -0.05 \sin 10t$ írja le.

Megjegyzés: Amikor differenciálegyenletekkel modellezzük a valóságban lejátszódó folyamatokat, akkor a differenciálegyenlet megoldása csak az első lépés. Miután megkapjuk a jelenséget leíró függvényt, azután azt ki kell elemeznünk. Jelen esetben is több információt hordoz magában a megoldás. Az nyilvánvaló, hogy időben periodikusan változik a kitérés, hiszen a szinusz függvény pediodikus. Persze ez nem meglepő, hiszen már korábban is megjegyeztük, hogy a tapasztalatok szerint a rugóra akasztott test rezgőmozgást végez. Kiolvasható a megoldásból a test legnagyobb kitérése, azaz a rezgés amplitúdója, ami most $A = 0.05m = 5cm$. Ez pedig azt jelenti, hogy valóban kialakul a harmonikus rezgőmozgás. Amikor ráakasztjuk a testet a rugóra, akkor annak megnyúlása $\Delta l = \frac{mg}{D} = \frac{0.1\cdot 10}{10}m = 0.1m = 10cm$ lesz. Mivel a rezgés amplitúdója ennél kisebb, így a mozgás során végig feszített állapotban lesz a rugó. Ha nagyobbat löktünk volna kezdetben a testen, akkor nyilván nagyobb amplitúdójú rezgés alakul ki. De ha az amplitúdó már nagyobb lenne a rugó kezdeti megnyúlásánál, akkor a felfelé mozgás során már össze kellene nyomódnia a rugónak, de az inkább meghajlana, s így nem alakulna ki harmonikus rezgés.
A megoldásból meghatározható a rezgés periódusideje is. Mivel a szinusz függvény periódusa 2π , és a periódusidő elteltével pontosan egy rezgés megy végbe, ezért teljesülni kell a $2\pi = 10T$ egyenlőségnek, amiből $T = \frac{\pi}{5}s$.

Ez a példa jól mutatja, hogy a matematika nem csak önmagáért van, hanem fontos szerepet játszik a valós életben lejátszódó jelenségek leírásában.

Ellenőrző kérdések

9. kérdés: Mi az általános megoldása az $y'' - 3y' - 10y = 0$ differenciálegyenletnek?

$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{5x}$ (X)

$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x}$

$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-5x}$

$y = c_1e^{2x} + c_2e^{5x}$

10. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $y'' - 4y' = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 4$ kezdeti érték feladat megoldása?

$y = 5 - e^{-4x}$

$y = 5 + e^{-4x}$

$y = 3 - e^{4x}$

$y = 3 + e^{4x}$ (X)

11. kérdés: Melyik függvény az általános megoldása az $y'' + 14y' + 49y = 0$ differenciálegyenletnek?

$y = c_1 e^{7x} + c_2 x e^{7x}$

$y = c_1 e^{-7x} + c_2 x e^{7x}$

$y = c_1 e^{7x} + c_2 x e^{-7x}$

$y = c_1 e^{-7x} + c_2 x e^{-7x}$ (X)

12. kérdés: Mi az $y'' - 8y' + 16y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$ kezdeti érték feladat megoldása?

$y = 3e^{4x} + 2xe^{4x}$

$y = 3e^{4x} - 7xe^{4x}$ (X)

$y = 3e^{-4x} + 2xe^{-4x}$

$y = 3e^{-4x} - 7xe^{-4x}$

13. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $y'' + 4y' + 53y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása?

$y = e^{2x}(c_1 \sin 7x + c_2 \cos 7x)$

$y = e^{7x}(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)$

$y = e^{-2x}(c_1 \sin 7x + c_2 \cos 7x)$ (X)

$y = e^{-7x}(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)$

14. kérdés: Melyik függvény az $y'' + 36y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -18$ kezdeti érték feladat megoldása?

$y = -3\sin 6x + 2\cos 6x$ (X)

$y = -2\sin 6x + 3\cos 6x$

$y = -3\sin 6x - 2\cos 6x$

$y = -2\sin 6x - 3\cos 6x$

Elméleti összefoglaló

Az $y'' + py' + qy = b(x)$, $p, q \in \mathbb{R}$ alakú, vagy ilyen alakra hozható differenciálegyenleteket, melyekben $b(x)$ nem a konstans 0 függvény, másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenleteknek nevezzük.

Ha az egyenlet jobb oldalán álló $b(x)$ zavaró függvény egy polinom, vagy $e^{\alpha x}$, vagy $\sin\beta x$, vagy $\cos\beta x$, vagy ezek konstans szorosainak összege, vagy szorzata, akkor az ilyen differenciálegyenletek ugyanolyan módon oldhatók meg mint a hasonló elsőrendű differenciálegyenletek, melyek megoldási módszerét a lecke első részében tárgyaltuk. Ismételjük most át nagy vonalakban az eljárást.
Először megoldjuk az egyenlethez tartozó homogén egyenletet a korábbiakban ismertetett módon.
Az egyenletben szereplő zavaró függvény alapján felírunk egy ugyanolyan szerkezetű próbafüggvényt határozatlan együtthatókkal.
Előállítjuk ennek a függvénynek az egyenletben szereplő deriváltjait, és behelyettesítünk az egyenletbe. Mivel a másodrendű egyenletekben az ismeretlen függvény második deriváltja is szerepel, ezért a próbafüggvény második deriváltjára is szükségünk lesz.
Az így kapott egyenletet egyenletrendszerré alakítjuk, felírva az azonos típusú függvényt tartalmazó tagok együtthatóinak egyenlőségét.
Az egyenletrendszer megoldásával megkapjuk a határozatlan együtthatók értékét, melyekből felírjuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását. Az inhomogén egyenlet általános megoldását ezután a homogén egyenlet általános megoldásának, és az előzőekben meghatározott partikuláris megoldásnak az összegeként kapjuk.

Kidolgozott feladatok

16. feladat: Oldjuk meg az $y''+y'-2y=2x^2-3$, $y(0)=1$, $y'(0)=6$ kezdeti érték feladatot!
Megoldás: Elsőként írjuk fel, és oldjuk meg a karakterisztikus egyenletet.

$$\lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-2\end{cases}$$

A homogén egyenlet általános megoldása tehát: $y_h=c_1e^x+c_2e^{-2x}$.
A következő lépésben felírjuk a próbafüggvényt. Mivel a zavaró függvény egy másodfokú polinom, így a próbafüggvény is másodfokú polinom lesz, azaz $y_p=Ax^2+Bx+C$.
Állítsuk elő ennek első és második deriváltját.
$y_p'=2Ax+B$, $y_p''=2A$
Helyettesítsük be ezeket és y_p -t az eredeti inhomogén differenciálegyenletbe.

$$y''+y'-2y=2x^2-3 \Rightarrow 2A+(2Ax+B)-2\left(Ax^2+Bx+C\right)=2x^2-3$$

Rendezzünk x hatványai szerint a bal oldalon.

$$-2Ax^2+(2A-2B)x+(2A+B-2C)=2x^2-3$$

Írjuk fel az egyforma függvényt tartalmazó tagok együtthatóinak egyenlőségéből az egyenletrendszert.
$-2A=2$ (a másodfokú tagok egyenlősége)
$2A-2B=0$ (az elsőfokú tagok egyenlősége)
$2A+B-2C=-3$ (a konstans tagok egyenlősége)
Az egyenletrendszer megoldása: $A=-1,\ B=-1,\ C=0$. (A megoldást nem részletezzük.)
Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása így $y_p=-x^2-x$ lesz.

A differenciálegyenlet általános megoldása pedig a következő:
$y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2e^{-2x} - x^2 - x$.
A kezdeti érték feladat megoldásához vegyük ennek deriváltját.
$$y' = \left(c_1e^x + c_2e^{-2x} - x^2 - x\right)' = c_1e^x + c_2e^{-2x}\cdot(-2) - 2x - 1 = c_1e^x - 2c_2e^{-2x} - 2x - 1$$
Helyettesítsük be y -ba és y' -ba a kezdeti feltételek adatait.
$y(0)=1 \Rightarrow 1 = c_1e^0 + c_2e^{-2\cdot 0} - 0^2 - 0 \Rightarrow 1 = c_1 + c_2$
$y'(0)=6 \Rightarrow 6 = c_1e^0 - 2c_2e^{-2\cdot 0} - 2\cdot 0 - 1 \Rightarrow 7 = c_1 - 2c_2$
Így két egyenletből álló egyenletrendszert kaptunk c_1 -re és c_2 -re. Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $c_1 = 3$, $c_2 = -2$.
A kezdeti érték feladat megoldása tehát: $y = 3e^x - 2e^{-2x} - x^2 - x$.

17. feladat: Határozzuk meg az $y'' + 2y' + 2y = 17\cos 3x$ differenciálegyenlet általános megoldását!
Megoldás: Kezdjük a karakterisztikus egyenlet felírásával és megoldásával.
$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -1 + i \\ \lambda_2 = -1 - i \end{cases}$$
A homogén egyenlet általános megoldása: $y_h = e^{-x}\left(c_1 \sin x + c_2 \cos x\right)$.
Írjuk fel ezután a próbafüggvényt. Ugyan a zavaró függvényben csak $\cos 3x$ van, de a próbafüggvényben $\sin 3x$ -nek és $\cos 3x$ -nek is szerepelni kell, ebből következően
$y_p = A\sin 3x + B\cos 3x$.
Határozzuk meg ennek első és második deriváltját.
$$y_p' = \left(A\sin 3x + B\cos 3x\right)' = A\cos 3x\cdot 3 + B(-\sin 3x)\cdot 3 = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x$$
$$y_p'' = \left(3A\cos 3x - 3B\sin 3x\right)' = 3A(-\sin 3x)\cdot 3 - 3B\cos 3x\cdot 3 = -9A\sin 3x - 9B\cos 3x$$
Helyettesítsünk az eredeti egyenletben y'' , y' és y helyére.
$y'' + 2y' + 2y = 17\cos 3x \Rightarrow$
$(-9A\sin 3x - 9B\cos 3x) + 2(3A\cos 3x - 3B\sin 3x) + 2(A\sin 3x + B\cos 3x) = 17\cos 3x$
Csoportosítsuk a tagokat aszerint, hogy milyen függvényt tartalmaznak.
$(-7A - 6B)\sin 3x + (6A - 7B)\cos 3x = 17\cos 3x$
Az egyenletet alakítsuk egyenletrendszerré, felírva az egyforma függvények együtthatóinak egyenlőségét.
$-7A - 6B = 0$ (a $\sin 3x$ -es tagok egyenlősége)
$6A - 7B = 17$ (a $\cos 3x$ -es tagok egyenlősége)
Az első egyenletből fejezzük ki B -t, és helyettesítsük a második egyenletbe, s megkapjuk A értékét, majd B -t is.
$$-7A - 6B = 0 \Rightarrow B = -\frac{7}{6}A \Rightarrow 6A - 7\left(-\frac{7}{6}A\right) = \frac{85}{6}A = 17 \Rightarrow A = \frac{6}{5} \Rightarrow B = -\frac{7}{5}$$
Ebből az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása: $y_p = \frac{6}{5}\sin 3x - \frac{7}{5}\cos 3x$.
Az általános megoldás pedig a következő:
$$y = y_h + y_p = e^{-x}\left(c_1 \sin x + c_2 \cos x\right) + \frac{6}{5}\sin 3x - \frac{7}{5}\cos 3x \ .$$

18. feladat: Határozzuk meg az $y''-3y'-4y=6e^{2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=-18$ kezdeti érték feladat megoldását!

Megoldás: Írjuk fel a karakterisztikus egyenletet, majd oldjuk meg.

$$\lambda^2-3\lambda-4=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}=\begin{cases}\lambda_1=4\\ \lambda_2=-1\end{cases}$$

Így a homogén egyenlet általános megoldása: $y_h=c_1e^{-x}+c_2e^{4x}$.

Következik a próbafüggvény felírása. A zavaró függvény egy exponenciális, ezért a próbafüggvény is exponenciális lesz, azaz $y_p=Ae^{2x}$.

Vegyük ennek első és második deriváltját.

$y_p'=2Ae^{2x},\ y_p''=4Ae^{2x}$

Helyettesítsünk az inhomogén egyenletben y'' , y' és y helyére.

$$y''-3y'-4y=6e^{2x} \Rightarrow 4Ae^{2x}-3\left(2Ae^{2x}\right)-4Ae^{2x}=6e^{2x} \Rightarrow -6Ae^{2x}=6e^{2x} \Rightarrow A=-1$$

(Csak egyetlen határozatlan együtthatónk volt, ezért most nem kellett egyenletrendszert felírni és megoldani.)

A partikuláris megoldás ebből: $y_p=-e^{2x}$.

A differenciálegyenlet általános megoldása pedig: $y=y_h+y_p=c_1e^{-x}+c_2e^{4x}-e^{2x}$.

Határozzuk meg ennek deriváltját, mert a kezdeti érték feladat megoldásához ez is szükséges.

$y'=-c_1e^{-x}+4c_2e^{4x}-2e^{2x}$

Helyettesítsük be a kezdeti feltételekben megadott értékeket y -ba és y' -ba.

$$y(0)=0 \Rightarrow 0=c_1e^0+c_2e^{4\cdot0}-e^{2\cdot0} \Rightarrow 0=c_1+c_2-1$$

$$y'(0)=-18 \Rightarrow -18=-c_1e^0+4c_2e^{4\cdot0}-2e^{2\cdot0} \Rightarrow -18=-c_1+4c_2-2$$

Két egyenletből álló egyenletrendszert kaptunk, melyben c_1 és c_2 az ismeretlenek. Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $c_1=4$ és $c_2=-3$.

A kezdeti érték feladat megoldása tehát az $y_0=4e^{-x}-3e^{4x}-e^{2x}$ függvény lesz.

19. feladat: Oldjuk meg az $y''-y'-2y=2e^{3x}-4x^2+8x$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Először határozzuk meg a karakterisztikus egyenlet gyökeit.

$$\lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\begin{cases}\lambda_1=2\\ \lambda_2=-1\end{cases}$$

Ebből a homogén egyenlet általános megoldása: $y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$.

A zavaró függvény egy exponenciális és egy másodfokú polinom összege, így a próbafüggvényt is két ilyen függvény összegeként kell felírnunk. Bár az egyenleten belül a polinomban nincs konstans tag, a próbafüggvényben ilyen tagnak is kell lennie.

$y_p=Ae^{3x}+Bx^2+Cx+D$

Vegyük ennek a függvénynek első és második deriváltját.

$y_p'=3Ae^{3x}+2Bx+C$, $y_p''=9Ae^{3x}+2B$

Helyettesítsük be y_p'' -t, y_p' -t és y_p -t az eredeti egyenletbe.

$y''-y'-2y=2e^{3x}-4x^2+8x \Rightarrow$

$$\left(9Ae^{3x}+2B\right)-\left(3Ae^{3x}+2Bx+C\right)-2\left(Ae^{3x}+Bx^2+Cx+D\right)=2e^{3x}-4x^2+8x$$

Csoportosítsuk a tagokat a bennük szereplő függvények szerint.

$$4Ae^{3x}-2Bx^2+\left(-2B-2C\right)x+\left(2B-C-2D\right)=2e^{3x}-4x^2+8x$$

Írjuk fel az azonos függvényt tartalmazó tagok együtthatóinak egyenlőségét, s ezzel bontsu az egyenletet több egyenletre.

$4A=2$ (az e^{3x} -es tagok egyenlősége)
$-2B=-4$ (a másodfokú tagok egyenlősége)
$-2B-2C=8$ (az elsőfokú tagok egyenlősége)
$2B-C-2D=0$ (a konstans tagok egyenlősége)

Az egyenletrendszer megoldása: $A=\frac{1}{2},\ B=2,\ C=-6,\ D=5$.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása: $y_p=\frac{1}{2}e^{3x}+2x^2-6x+5$.

Végül a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y=y_h+y_p=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{2}e^{3x}+2x^2-6x+5\ .$$

20. feladat: Határozzuk meg az $y''+9y=13xe^{2x}$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Szokás szerint a karakterisztikus egyenlet felírásával és megoldásával kezdünk.

$$\lambda^2+9=0\ \Rightarrow\ \lambda^2=-9\ \Rightarrow\ \lambda=\sqrt{-9}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\lambda_1=3i\\ \lambda_2=-3i\end{cases}$$

A komplex gyökökben $\alpha=0$ és $\beta=3$. Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_h=e^{0\cdot x}\left(c_1\sin 3x+c_2\cos 3x\right)=c_1\sin 3x+c_2\cos 3x$$

Az egyenlet jobb oldalán a zavaró függvény most egy exponenciális és egy elsőfokú polinom szorzata, így ugyanilyen típusú próbafüggvényt írunk fel. Először végezzük el a szorzást két ilyen függvény között úgy, hogy minden együttható 1 .

$$e^{2x}\left(x+1\right)=xe^{2x}+e^{2x}$$

Ebbe a függvénybe írunk határozatlan együtthatókat, így kapjuk a próbafüggvényt.

$$y_p=Axe^{2x}+Be^{2x}$$

Határozzuk meg ennek első és második deriváltját.

$$y_p'=A\cdot 1\cdot e^{2x}+Axe^{2x}\cdot 2+Be^{2x}\cdot 2=Ae^{2x}+2Axe^{2x}+2Be^{2x}$$

$$y_p''=Ae^{2x}\cdot 2+2A\cdot 1\cdot e^{2x}+2Axe^{2x}\cdot 2+2Be^{2x}\cdot 2=4Ae^{2x}+4Axe^{2x}+4Be^{2x}$$

Helyettesítsünk a differenciálegyenletben az ismeretlen függvény és második deriváltja helyére.

$$y''+9y=13xe^{2x}\ \Rightarrow\ \left(4Ae^{2x}+4Axe^{2x}+4Be^{2x}\right)+9\left(Axe^{2x}+Be^{2x}\right)=13xe^{2x}$$

Osszuk az egyenletet az exponenciálissal és rendezzünk x hatványai szerint.

$$\left(4A+4Ax+4B\right)+9\left(Ax+B\right)=13x\ \Rightarrow\ 13Ax+\left(4A+13B\right)=13x$$

Az azonos fokszámú tagok együtthatóinak egyenlőségéből alakítsuk ezt egyenletrendszerré.

$13A=13$ (az elsőfokú tagok egyenlősége)
$4A+13B=0$ (a konstans tagok egyenlősége)

Ennek megoldása: $A=1,\ B=-\frac{4}{13}$.

A keresett partikuláris megoldás tehát $y_p = xe^{2x} - \frac{4}{13}e^{2x}$.

A differenciálegyenlet általános megoldása pedig:

$$y = y_h + y_p = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x + xe^{2x} - \frac{4}{13}e^{2x} \ .$$

21. feladat: Mi az általános megoldása az $y'' + 2y' + y = 5e^x \sin x$ differenciálegyenletnek?

Megoldás: Írjuk fel, és oldjuk meg a karakterisztikus egyenletet.

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$, azaz $\lambda = -1$

Most csak egy valós gyököt kaptunk, így a homogén egyenlet általános megoldása:

$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$.

Következik a próbafüggvény. Mivel a zavaró függvény egy exponenciális és egy szinusz szorzata, a próbafüggvény a hozzájuk tartozó próbafüggvények szorzata lesz. Az egyik tényező exponenciális, a másik pedig a szinusz és a koszinusz összege lesz. Először végezzük el a szorzást 1 együtthatókkal.

$e^x (\sin x + \cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x$

Ebbe a függvénybe írjunk határozatlan együtthatókat a próbafüggvény előállításához.

$y_p = Ae^x \sin x + Be^x \cos x$

Határozzuk meg y_p' -t és y_p'' -t.

$$y_p' = Ae^x \sin x + Ae^x \cos x + Be^x \cos x - Be^x \sin x = (A - B)e^x \sin x + (A + B)e^x \cos x$$

$$y_p'' = (A - B)e^x \sin x + (A - B)e^x \cos x + (A + B)e^x \cos x - (A + B)e^x \sin x \Rightarrow$$

$$y_p'' = -2Be^x \sin x + 2Ae^x \cos x$$

Helyettesítsünk a differenciálegyenletben az ismeretlen függvény és deriváltjai helyére.

$y'' + 2y' + y = 5e^x \sin x \Rightarrow$

$$-2Be^x \sin x + 2Ae^x \cos x + 2\left((A - B)e^x \sin x + (A + B)e^x \cos x\right) + Ae^x \sin x + Be^x \cos x = 5e^x \sin x$$

Osszuk el az egyenletet az exponenciális függvénnyel, majd csoportosítsuk a tagokat a bennük szereplő függvények szerint.

$$-2B \sin x + 2A \cos x + 2\left((A - B)\sin x + (A + B)\cos x\right) + A \sin x + B \cos x = 5 \sin x$$

$$(3A - 4B)\sin x + (4A + 3B)\cos x = 5 \sin x$$

Írjuk fel az egyforma függvényt tartalmazó tagok együtthatóinak egyenlőségét, s ezzel bontsuk az egyenletet két egyenletre.

$3A - 4B = 5$ (a $\sin x$ -es tagok egyenlősége)

$4A + 3B = 0$ (a $\cos x$ -es tagok egyenlősége)

Az egyenletrendszer megoldása: $A = \frac{3}{5}$ és $B = -\frac{4}{5}$.

A differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása: $y_p = \frac{3}{5}e^x \sin x - \frac{4}{5}e^x \cos x$.

Az általános megoldás: $y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{3}{5}e^x \sin x - \frac{4}{5}e^x \cos x$.

Ellenőrző kérdések

15. kérdés: Az alább függvények közül melyik az $y''+6y'+10y=10x^2-8x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

$y=e^{-3x}\left(c_1\sin x+c_2\cos x\right)+x^2+2x+1$

$y=e^{-3x}\left(c_1\sin x+c_2\cos x\right)+x^2+2x-1$

$y=e^{-3x}\left(c_1\sin x+c_2\cos x\right)+x^2-2x+1$ (X)

$y=e^{-3x}\left(c_1\sin x+c_2\cos x\right)+x^2-2x-1$

16. kérdés: Mi az $y''-5y'+4y=5\sin 3x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

$y=c_1e^{4x}+c_2e^{x}+\frac{1}{10}\sin 3x+\frac{3}{10}\cos 3x$

$y=c_1e^{4x}+c_2e^{x}-\frac{1}{10}\sin 3x+\frac{3}{10}\cos 3x$ (X)

$y=c_1e^{4x}+c_2e^{x}+\frac{3}{10}\sin 3x+\frac{1}{10}\cos 3x$

$y=c_1e^{4x}+c_2e^{x}-\frac{3}{10}\sin 3x+\frac{1}{10}\cos 3x$

17. kérdés: Melyik függvény az $y''-4y'+4y=3e^{5x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$ kezdeti érték feladat megoldása?

$y=\frac{1}{3}e^{2x}+xe^{2x}+\frac{1}{3}e^{5x}$

$y=\frac{1}{3}e^{2x}-xe^{2x}+\frac{1}{3}e^{5x}$

$y=-\frac{1}{3}e^{2x}+xe^{2x}+\frac{1}{3}e^{5x}$

$y=-\frac{1}{3}e^{2x}-xe^{2x}+\frac{1}{3}e^{5x}$ (X)

18. kérdés: Mi az $y''-2y'+10y=3e^{2x}+5x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

$y=e^{x}\left(c_1\sin 3x+c_2\cos 3x\right)+\frac{1}{10}e^{2x}+\frac{3}{2}x+\frac{7}{10}$

$y=e^{x}\left(c_1\sin 3x+c_2\cos 3x\right)+\frac{1}{10}e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}$

$y=e^{x}\left(c_1\sin 3x+c_2\cos 3x\right)+\frac{3}{10}e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}$ (X)

$y=e^{x}\left(c_1\sin 3x+c_2\cos 3x\right)+\frac{3}{10}e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{7}{10}$

19. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $y''+4y=25xe^{x}$ differenciálegyenlet általános megoldása?

$y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x+5xe^{x}+2e^{x}$

$y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x+5xe^{x}-2e^{x}$ (X)

$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x - 5xe^x + 2e^x$

$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x - 5xe^x - 2e^x$

20. kérdés: Melyik függvény az $y'' - 2y' + y = 2e^x \cos x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

$y = c_1 e^x + c_2 xe^x + e^x \cos x$

$y = c_1 e^x + c_2 xe^x + 2e^x \cos x$

$y = c_1 e^x + c_2 xe^x - e^x \cos x$

$y = c_1 e^x + c_2 xe^x - 2e^x \cos x$ (X)