2. Integrálszámítás

2.1. Racionális törtfüggvények integrálása

Tanulási cél

Megismerkedni a racionális törtfüggvények integrális módszerével, és az eljárás alkalmazásával feladatokban.

Elméleti összefoglaló

Racionális törtfüggvénynek nevezzük olyan törteket, melyekben polinomot osztunk polinommal. A számláló és a nevező fokszáma szerint, nagyon sokféle ilyen függvény van. Mi az olyanokkal foglalkozunk, amikor a nevező magasabb fokú mint a számláló. Ezeket hívjuk valódi racionális törteknek. Tegyük fel tovább, hogy a számlálónak és a nevezőnek nincs közös gyöktényezője, azaz nem lehet egyszerűsíteni a törtet. Az ilyen törteket mindig egyértelműen felbonthatjuk úgynevezett résztörtek, vagy más néven parciális törtek összegére, melyeket tudunk integrálni. Elsőként azon törtek integrálásával ismerkedünk meg, amelyek előfordulhatnak résztörtként a bonyolultabb törtek felbontásában. Az ilyen törtek típusai a következők:

1: A számláló konstans, a nevező elsőfokú. Az ilyen törtek integrálása általánosan az alábbi.

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{1}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + c$$

2: A számláló konstans, a nevező egy elsőfokú kifejezés hatványa. Az ilyen törtek integrálása általánosan a következő.

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = A\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = A\int (x-a)^{-n}\,dx = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + c =$$

$$= \frac{A}{(1-n)(x-a)^{1-n}} + c, \quad n \neq 1$$

3: A számláló konstans, a nevező valós gyökkel nem rendelkező másodfokú. Ha egy másodfokú polinomnak nincs valós gyöke, akkor az nem bontható szorzattá. Ilyenkor irreducibilis másodfokú polinomnak is nevezzük. Az ilyen törtek általános alakja az alábbi.

$\dfrac{A}{x^2+ax+b}$, ahol $a^2-4b<0$

Az ilyen törtek integrálásakor először teljes négyzetté alakítjuk a nevezőt, majd alkalmas konstans kiemelésével $\dfrac{1}{1+t^2}$ típusúvá alakítjuk, melyet integrálva $\operatorname{arctg} t + c$ -t kapunk. Az ilyen függvények integrálását részletesen majd példákon keresztül mutatjuk be.

4: A számláló elsőfokú, a nevező valós gyökkel nem rendelkező másodfokú. Az ilyen törteket feldaraboljuk két tört összegére úgy, hogy az egyik tört $\dfrac{f'}{f}$ típusú legyen, a másik számlálója pedig konstans. Az $\frac{f'}{f}$ típusú tört integrálásakor $\ln|f|+c$ -t kapunk, a másik törtet pedig az előbb ismertetett módon integráljuk, hiszen az **3.** típusú tört lesz. Az ilyen törtek integrálását is példákon keresztül mutatjuk majd meg részletesen.

Kidolgozott feladatok

1. feladat: $\int \frac{4}{x-5}dx$

Megoldás: Egy **1.** típusba tartozó törtet kell integrálnunk. Emeljük ki a számlálóban álló konstanst, így egy elsőfokú polinom reciprokát kapjuk, aminek integrálja az elsőfokú polinom abszolút értékének logaritmusa lesz.

$$\int \frac{4}{x-5}dx = 4\int \frac{1}{x-5}dx = 4\ln|x-5|+c$$

2. feladat: $\int \frac{3}{7-2x}dx$

Megoldás: A feladat ugyanolyan típusú mint az előző. Most azonban ne csak a számlálóból emeljünk ki, hanem a nevezőből is az x együtthatóját, azaz -2 -t. Utána ugyanúgy járjunk el, mint az előző feladatban.

$$\int \frac{3}{7-2x}dx = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{x-\frac{7}{2}}dx = -\frac{3}{2}\ln\left|x-\frac{7}{2}\right|+c$$

Az integrálást úgy is végrehajthatjuk, hogy a nevezőből nem emelünk ki. Ekkor hivatkoznunk kell a korábban megismert $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a}+c$ integrálási szabályra, amely szerint ha olyan összetett függvényt kell integrálnunk, melynek belső függvénye lineáris, akkor integráljuk a külső függvényt, s összetételt alkotunk az eredeti belső függvénnyel, valamint osztunk a belső függvényből x együtthatójával. Most a külső függvény az $\frac{1}{x}$, aminek integrálja $\ln|x+c|$, a belső pedig $7-2x$. Alkalmazva a szabályt a következőt kapjuk.

$$\int \frac{3}{7-2x}dx = 3\int \frac{1}{7-2x}dx = 3\frac{\ln|7-2x|}{-2}+c = -\frac{3}{2}\ln|7-2x|+c$$

Ez megegyezik az előző eredménnyel, ami a következő módon igazolható.

$$-\frac{3}{2}\ln|7-2x|+c = -\frac{3}{2}\ln\left|-2\left(x-\frac{7}{2}\right)\right|+c = -\frac{3}{2}\ln\left(|-2|\left|x-\frac{7}{2}\right|\right)+c = -\frac{3}{2}\ln\left(2\left|x-\frac{7}{2}\right|\right)+c$$

Használjuk a szorzat logaritmusára vonatkozó azonosságot.

$$-\frac{3}{2}\ln\left(2\left|x-\frac{7}{2}\right|\right)+c = -\frac{3}{2}\left(\ln 2+\ln\left|x-\frac{7}{2}\right|\right)+c = -\frac{3}{2}\ln\left|x-\frac{7}{2}\right|-\frac{3}{2}\ln 2+c$$

Mivel c tetszőleges valós értéket felvehet, így ha egy konstanst hozzáadunk vagy kivonunk belőle, ugyanúgy csak egy konstanst kapunk, ami tetszőleges valós értéket felvehet. Felesleges tehát $-\frac{3}{2}\ln 2+c$ -t írnunk, helyette egyszerűen c szerepelhet. A $-\frac{3}{2}\ln 2$ -t magába olvasztja a c integrációs konstans.

$$-\frac{3}{2}\ln\left|x-\frac{7}{2}\right|-\frac{3}{2}\ln 2+c=-\frac{3}{2}\ln\left|x-\frac{7}{2}\right|+c$$

Ezzel megkaptuk az eredményt abban a formában, amit az első megoldásban kaptunk.

3. feladat: $\int\frac{8}{(x+3)^5}dx$

Megoldás: Most egy **2.** típusba tartozó törtet kell integrálnunk. Emeljük ki a számlálóból a konstanst, a törtet pedig írjuk negatív kitevős hatványként. Ezután a hatványt integráljuk.

$$\int\frac{8}{(x+3)^5}dx=8\int\frac{1}{(x+3)^5}dx=8\int(x+3)^{-5}dx=8\frac{(x+3)^{-4}}{-4}+c=-2\frac{1}{(x+3)^4}+c$$

4. feladat: $\int\frac{5}{(2x-1)^3}dx$

Megoldás: A feladat ugyanolyan típusú mint az előző. Nyilván kiemeljük a számlálóból a konstanst, de most emeljük ki a nevezőből is x együtthatóját. Vigyázzunk, mert a zárójelben x előtt 2 az együttható, de ezt is hatványozni kell. Ezért kiemelni, már ennek harmadik hatványát, azaz 8-at fogunk.

$$\int\frac{5}{(2x-1)^3}dx=\int\frac{5}{\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^3}dx=\int\frac{5}{8\left(x-\frac{1}{2}\right)^3}dx=\frac{5}{8}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^3}dx=$$

Írjuk át a törtet negatív kitevős hatvánnyá, és integráljuk a hatványt.

$$\frac{5}{8}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^3}dx=\frac{5}{8}\int\left(x-\frac{1}{2}\right)^{-3}dx=\frac{5}{8}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{-2}}{-2}+c=-\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}+c$$

Az integrálást végrehajthatjuk úgy is. Hogy nevezőből nem emelünk ki. Ekkor hivatkoznunk kell az $\int f(ax+b)dx=\frac{F(ax+b)}{a}+c$ integrálási szabályra. A külső függvény ekkor $\frac{1}{x^3}=x^{-3}$, aminek integrálja $\frac{x^{-2}}{-2}=-\frac{1}{2x^2}$, a belső függvény pedig $2x-1$. Alkalmazva a szabályt a következőt kapjuk.

$$\int\frac{5}{(2x-1)^3}dx=5\int(2x-1)^{-3}dx=5\frac{-\frac{1}{2(2x-1)^2}}{2}+c=-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(2x-1)^2}+c$$

Ez megegyezik a korábbi megoldás során kapott eredménnyel. Ennek belátásához elegendő a nevezőből kiemelni x együtthatóját.

5. feladat: $\int\frac{1}{x^2+6x+10}dx$

Megoldás: Most egy **3.** típusba tartozó törtet kell integrálnunk. A nevezőnek nincs valós gyöke $\left(D=6^2-4\cdot 10=-4<0\right)$, így nem alakítható szorzattá. Alakítsunk teljes négyzetté a nevezőben.

$x^2+6x+10=x^2+6x+9+1=\left(x+3\right)^2+1$

Írjuk ezt be az integrálba.

$$\int \frac{1}{x^2+6x+10}dx=\int \frac{1}{\left(x+3\right)^2+1}dx$$

Azt láthatjuk, hogy lényegében az $\frac{1}{1+x^2}$ függvényt kaptuk, csak az x szerepét az $x+3$ vette át. Olyan összetett függvényt kell tehát integrálnunk, aminek külső függvénye az $\frac{1}{1+x^2}$ függvény, aminek integrálja: $\operatorname{arctg} x+c$, a belső függvény most $x-3$.

Alkalmazzuk az $\int f(ax+b)dx=\frac{F(ax+b)}{a}+c$ szabályt.

$$\int \frac{1}{\left(x+3\right)^2+1}dx=\frac{\operatorname{arctg}\left(x+3\right)}{1}+c=\operatorname{arctg}\left(x+3\right)+c$$

6. feladat: $\int \frac{1}{x^2-4x+13}dx$

Megoldás: Most is **3.** típusba tartozó törtet kell integrálnunk. A nevezőnek nincs valós gyöke $\left(D=\left(-4\right)^2-4\cdot 13=-36<0\right)$, így nem alakítható szorzattá. Alakítsunk teljes négyzetté a nevezőben.

$x^2-4x+13=x^2-4x+4+9=\left(x-2\right)^2+9$

Írjuk ezt be az integrálba.

$$\int \frac{1}{x^2-4x+13}dx=\int \frac{1}{\left(x-2\right)^2+9}dx$$

Emeljünk ki a nevezőből 9 -et, hogy az integrandus $\frac{1}{1+x^2}$ típusú legyen.

$$\int \frac{1}{\left(x-2\right)^2+9}dx=\frac{1}{9}\int \frac{1}{\frac{\left(x-2\right)^2}{9}+1}dx$$

A nevezőben az $\frac{\left(x-2\right)^2}{9}$ törtet írjuk inkább $\left(\frac{x-2}{3}\right)^2$ alakban.

$$\frac{1}{9}\int \frac{1}{\frac{\left(x-2\right)^2}{9}+1}dx=\frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}dx$$

Így látható, hogy olyan összetett függvényt kell integrálnunk, aminek külső függvénye $\frac{1}{1+x^2}$, a belső függvénye pedig $\frac{x-2}{3}$. Alkalmazzuk az $\int f(ax+b)dx=\frac{F(ax+b)}{a}+c$ szabályt.

$$\frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}dx=\frac{1}{9}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}}{\frac{1}{3}}+c=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+c$$

7. feladat: $\int \frac{1}{x^2+16}dx$

Megoldás: A feladat most is **3.** típusú tört integrálása, azonban a nevezőben nincs elsőfokú tag, így nem kell teljes négyzetté alakítanunk, hanem rögtön kiemelhetjük az ott lévő 16 -ot.

$$\int \frac{1}{x^2+16}dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{\frac{x^2}{16}+1}dx$$

Írjunk ezután az $\frac{x^2}{16}$ helyett $\left(\frac{x}{4}\right)^2$ -t.

$$\frac{1}{16}\int \frac{1}{\frac{x^2}{16}+1}dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1}dx$$

Így már egyértelmű, hogy megint olyan összetett függvényt kell integrálnunk, amiben $\frac{1}{1+x^2}$ a külső függvény, aminek integrálja $\operatorname{arctg} x + c$, a belső függvénye pedig $\frac{x}{4}$.

Alkalmazzuk az $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a}+c$ szabályt.

$$\frac{1}{16}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1}dx = \frac{1}{16}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{4}}{\frac{1}{4}}+c = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+c$$

8. feladat: $\int \frac{6x-5}{x^2+9}dx$

Megoldás: A számláló most elsőfokú, a nevező pedig valós gyök nélküli másodfokú, tehát **4.** típusú törtet kell integrálnunk. A törtet most egy $\frac{f'}{f}$ típusú és egy **3.** típusú tört összegére kell darabolnunk. Ehhez állítsuk elő a nevező deriváltját.

$$\left(x^2+9\right)' = 2x$$

Látjuk, hogy a számlálóban lévő $6x$ ennek konstans szorosa, ezért daraboljuk fel két tört összegére a törtet. Ezután külön integrálhatjuk a törteket. Az integrálokból emeljük ki a konstans szorzókat, ügyelve arra, hogy az első tört $\frac{f'}{f}$ típusú legyen.

$$\int \frac{6x-5}{x^2+9}dx = \int \frac{6x}{x^2+9} - \frac{5}{x^2+9}dx = 3\int \frac{2x}{x^2+9}dx - 5\int \frac{1}{x^2+9}dx$$

A két integrálást ezután külön végezzük el. Az elsőnél hivatkozunk a korábban megismert $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+c$ integrálási szabályra.

$$3\int \frac{2x}{x^2+9}dx = 3\ln\left|x^2+9\right|+c$$

A második rész ugyanolyan 3. típusú tört, mint amilyen az előző feladatban szerepelt, így ugyanúgy járunk el mint ott.

$$5\int \frac{1}{x^2+9}dx=\frac{5}{9}\int \frac{1}{\frac{x^2}{9}+1}dx=\frac{5}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}dx=\frac{5}{9}\frac{arc\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{3}}{\frac{1}{3}}+c=\frac{5}{3}arc\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{3}+c$$

A részletekből rakjuk össze az eredeti tört integrálját.

$$\int \frac{6x-5}{x^2+9}dx=3\int \frac{2x}{x^2+9}dx-5\int \frac{1}{x^2+9}dx=3\ln\left|x^2+9\right|-\frac{5}{3}arc\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{3}+c$$

9. feladat: $\int \frac{5x-2}{x^2-2x+26}dx=$

Megoldás: Ismét 4. típusú törtet kell integrálnunk, hiszen a számláló elsőfokú, a nevező pedig valós gyök nélküli másodfokú polinom. Állítsuk elő a nevező deriváltját.

$$\left(x^2-2x+26\right)'=2x-2$$

Emelünk ki a számlálóból úgy, hogy x együtthatója megegyezzen a nevező deriváltjában x együtthatójával.

$$\int \frac{5x-2}{x^2-2x+26}dx=\frac{5}{2}\int \frac{2x-\frac{4}{5}}{x^2-2x+26}dx$$

Alakítsuk ki megfelelő konstans hozzáadásával és kivonásával a számlálón belül a nevező deriváltját.

$$\frac{5}{2}\int \frac{2x-\frac{4}{5}}{x^2-2x+26}dx=\frac{5}{2}\int \frac{2x-2+2-\frac{4}{5}}{x^2-2x+26}dx=\frac{5}{2}\int \frac{2x-2+\frac{6}{5}}{x^2-2x+26}dx$$

Ezután daraboljuk fel a törtet két törtre, amelyeket integráljunk külön.

$$\frac{5}{2}\int \frac{2x-2+\frac{6}{5}}{x^2-2x+26}dx=\frac{5}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+26}+\frac{\frac{6}{5}}{x^2-2x+26}dx=$$

$$=\frac{5}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+26}dx+\frac{5}{2}\int \frac{\frac{6}{5}}{x^2-2x+26}dx=\frac{5}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+26}dx+3\int \frac{1}{x^2-2x+26}dx$$

Végezzük el a két integrálást. Az elsőnél használjuk az $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|\,f(x)\,|+c$ szabályt.

$$\frac{5}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+26}dx=\frac{5}{2}\ln\left|x^2-2x+26\right|+c$$

Mivel a másodikban egy 3. típusú törtet kell integrálni, járjunk el az arra vonatkozóak szerint. Alakítsunk teljes négyzetté, és kiemeléssel hozzunk létre $\frac{1}{1+x^2}$ külső függvényű összetett függvényt.

$$3\int \frac{1}{x^2-2x+26}dx=3\int \frac{1}{(x-1)^2+25}dx=\frac{3}{25}\int \frac{1}{\frac{(x-1)^2}{25}+1}dx=\frac{3}{25}\int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{5}\right)^2+1}dx$$

Alkalmazzuk az $\int f(ax+b)dx=\frac{F(ax+b)}{a}+c$ szabályt.

$$\frac{3}{25}\int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{5}\right)^2+1}dx = \frac{3}{25}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x-1}{5}}{\frac{1}{5}}+c = \frac{3}{5}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{5}+c$$

A két részeredményből írjuk fel az eredeti tört integrálját.

$$\int \frac{5x-2}{x^2-2x+26}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+26}dx + 3\int \frac{1}{x^2-2x+26}dx =$$

$$= \frac{5}{2}\ln\left|x^2-2x+26\right| + \frac{3}{5}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{5}+c$$

Ellenőrző kérdések

1. kérdés: $\int \frac{7}{5x-4}dx$

$-\frac{7}{5}\ln\left|x-\frac{4}{5}\right|+c$

$\frac{7}{5}\ln\left|x-\frac{4}{5}\right|+c$ (X)

$-\frac{7}{4}\ln\left|\frac{5}{4}x-1\right|+c$

$\frac{7}{4}\ln\left|\frac{5}{4}x-1\right|+c$

2. kérdés: $\int \frac{2}{8-3x}dx$

$-2\ln\left|8-3x\right|+c$

$\frac{2}{3}\ln\left|8-3x\right|+c$

$\frac{2}{3}\ln\left|x-\frac{8}{3}\right|+c$

$-\frac{2}{3}\ln\left|x-\frac{8}{3}\right|+c$ (X)

3. kérdés: $\int \frac{9}{(x-4)^5}dx$

$\frac{-9}{4(x-4)^4}+c$ (X)

$\frac{9}{4(x-4)^4}+c$

$\frac{-9}{6(x-4)^{-6}}+c$

$\frac{9}{6(x-4)^{-6}}+c$

4. kérdés: $\int \frac{4}{(3x+5)^2}dx$

$\frac{-4}{3x+5}+c$

$\frac{4}{3(3x+5)}+c$

$\frac{-4}{9\left(x+\frac{5}{3}\right)}+c$ (X)

$\frac{4}{3\left(x+\frac{5}{3}\right)}+c$

5. kérdés: $\int \frac{1}{x^2+36}dx$

$\frac{1}{36}\operatorname{arctg}\frac{x}{6}+c$

$\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{6}+c$ (X)

$\frac{1}{36}\operatorname{arctg}\frac{x}{36}+c$

$\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{36}+c$

6. kérdés: $\int \frac{3}{x^2-4x+20}dx$

$3\operatorname{arctg}\frac{x-2}{4}+c$

$\frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{4}+c$ (X)

$3\operatorname{arctg}\frac{x-4}{2}+c$

$\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{2}+c$

7. kérdés: $\int \frac{10x+3}{x^2+4}dx$

$10\ln\left|x^2+4\right|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+c$

$10\ln\left|x^2+4\right|+\frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+c$

$5\ln\left|x^2+4\right|+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+c$ (X)

$5\ln\left|x^2+4\right|+\frac{3}{4}\mathrm{arctg}\frac{x}{4}+c$

8. kérdés: $\int\frac{3x+4}{x^2+8x+80}dx=$

$\frac{3}{2}\ln\left|x^2+8x+80\right|-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+8}{4}+c$

$\frac{3}{2}\ln\left|x^2+8x+80\right|-\mathrm{arctg}\frac{x+8}{4}+c$

$\frac{3}{2}\ln\left|x^2+8x+80\right|-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+4}{8}+c$

$\frac{3}{2}\ln\left|x^2+8x+80\right|-\mathrm{arctg}\frac{x+4}{8}+c$ (X)

Elméleti összefoglaló

Ha egy racionális tört nem tartozik azon négy típus egyikébe sem, amelyekkel az előzőekben foglalkoztunk, akkor integrálás előtt résztörtek összegére kell bontani, és a résztörteket külön kell integrálni. Az eljárás során először szorzattá bontjuk a nevezőt amennyire csak lehet. Egy polinomot mindig felbonthatunk legfeljebb másodfokú tényezők szorzatára. A szorzattá bontást vagy kiemeléssel hajtjuk végre, vagy meghatározzuk a nevező gyökeit, és felírjuk a gyöktényezős alakot.
Ezután a számlálókban paramétereket használva felírjuk, hogy milyen típusú résztörtekre bontható a tört. Ismerkedjünk meg a résztörtek felírásának szabályaival. A résztörtek nevezőiben azok a szorzótényezők állnak, amikre a nevezőt sikerült felbontani. Ha például a nevező $(x+4)(x-3)$, akkor két résztört lesz, melyek közül az egyik nevezője $x+4$, a másiké pedig $x-3$. Ha egy résztört nevezője elsőfokú, akkor számlálója konstans, amit még nem ismerünk, ezért egy ismeretlent írunk a számlálóba. Természetesen a konstansok a törtekben különbözhetnek, így az ismeretleneket különböző betűvel jelöljük a különböző helyeken. Ha például az $\frac{x-7}{(x+4)(x-3)}$ törtet bontjuk résztörtekre, akkor az egyik tört $\frac{A}{x+4}$, a másik $\frac{B}{x-3}$ lesz.
Ha a nevezőben egy tényezőnek magasabb kitevőjű hatványa fordul elő, akkor annyi résztört tartozik hozzá, ahányadik hatványon a tényező áll. Az első résztört nevezőjében a tényező első hatványa áll, a másodikban a második hatványa stb. Ha például egy tört nevezőjében $(x-1)^3$ is szerepel, akkor a nevező ezen részéhez 3 résztört tartozik majd. Az első nevezője $x-1$ lesz, a másodiké $(x-1)^2$, a harmadiké pedig $(x-1)^3$ lesz. Ha egy résztört nevezője elsőfokú, vagy egy elsőfokú polinom hatványa, akkor a számlálóban csak egy konstans áll, azaz oda egyetlen ismeretlent írunk. Ha például az $\frac{x^2-4x+9}{(x-1)^3}$ törtet bontjuk résztörtekre, akkor a három résztört $\frac{A}{x-1}$, $\frac{B}{(x-1)^2}$ és $\frac{C}{(x-1)^3}$ lesz.

Ha egy tört nevezőjében szorzattá nem bontható másodfokú tényező is áll, akkor a nevező ezen tényezőjéhez olyan résztört tartozik, aminek számlálója elsőfokú polinom. Ebben az esetben a számlálóban egyszerre két ismeretlen is szerepel, mert egyik az elsőfokú tagban x együtthatója, a másik pedig a konstans tag. Ha például a nevező egyik tényezője x^2+1, aminek nincs valós gyöke, így nem bontható szorzattá, akkor a hozzá tartozó résztört $\frac{Ax+B}{x^2+1}$ lesz. Ha egy tört nevezőjének szorzattá bontott alakjában több tényező áll, akkor a fentiek szerint minden tényezőhöz felírjuk hozzá tartozó résztörtet vagy résztörteket.
A következő lépésben meghatározzuk a számlálókban álló ismeretlenek értékét. Ehhez közös nevezőre hozzuk az ismeretleneket tartalmazó törteket. A közös nevező mindig megegyezik az eredeti tört nevezőjével. Mivel a nevezők egyenlők, ezért a számlálóknak is egyenlőnek kell lenni. Ezután már csak azt írjuk fel egy egyenletben, hogy az eredeti tört számlálója megegyezik a közös nevezőre hozás utáni számlálóval. Ez két polinom egyenlősége, ami csak úgy teljesülhet, ha a két oldalon az azonos fokú tagok együtthatói minden fokszám esetén megegyeznek. Ezzel a két polinom egyenlőségét annyi egyenletre bontjuk fel, ahány fajta tag szerepel az egyenletben. Ha például másodfokú polinomok egyenlősége szerepel, akkor 3 egyenletet kapunk. Az elsőt a négyzetes tagok együtthatóinak egyenlőségéből, a másodikat az elsőfokú tagok együtthatóinak egyenlőségéből, a harmadikat pedig a konstans tagok egyenlőségéből. Mindig eggyel több egyenletet kapunk, mint a polinomok fokszáma. Így mindig pontosan annyi egyenletünk lesz, mint ahány ismeretlenünk van. A kapott egyenletrendszert megoldjuk, és az eredményt behelyettesítjük az ismeretlenek helyére. Az így kapott törteket pedig az előzőekben ismertetett módon integráljuk. Az eljárás így leírva elég bonyolultnak tűnik, de ha konkrét feladatokban látjuk az alkalmazását, akkor érthetőbbé válik majd.

Kidolgozott feladatok

10. feladat: Írjuk fel, milyen típusú résztörtek összegére bontjuk fel az $\frac{x^2-3x+7}{x^3-3x^2-10x}$ törtet!
(Csak a törtek típusát írjuk fel, a számlálókban az ismeretleneket nem kell meghatározni.)
Megoldás: Bontsuk szorzattá a nevezőt. Első lépésként kiemelhetünk x -et.

$$x^3-3x^2-10x=x\left(x^2-3x-10\right)$$

Ha a másodfokú tényezőnek vannak valós gyökei, akkor határozzuk meg azokat, és írjuk fel a gyöktényezős alakot.

$$x^2-3x-10=0 \Rightarrow \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-10)}}{2\cdot1}=\begin{cases}5\\-2\end{cases}$$

$$x^2-3x-10=(x-5)\left(x-(-2)\right)=(x-5)(x+2)$$

Ezután felírhatjuk a nevező teljesen szorzattá bontott alakját.

$$x^3-3x^2-10x=x(x-5)(x+2)$$

Mivel a nevezőt három elsőfokú tényező szorzatára sikerült bontanunk, így három résztörtet kell felírnunk, melyek számlálójában egy-egy ismeretlen konstans áll majd, nevezőjükben pedig a szorzótényezők lesznek. A résztörtekre bontott alak tehát a következő:

$$\frac{x^2-3x+7}{x^3-3x^2-10x}=\frac{x^2-3x+7}{x(x-5)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-5}+\frac{C}{x+2}\ .$$

11. feladat: Írjuk fel, milyen típusú résztörtek összegére bontjuk fel az $\dfrac{x^2+2x-1}{x^5-4x^4+4x^3}$ törtet! (Csak a törtek típusát írjuk fel, a számlálókban az ismeretleneket nem kell meghatározni.)

Megoldás: Most is bontsuk szorzattá a nevezőt. Először kiemelhetünk x^3 -t.

$x^5-4x^4+4x^3=x^3\left(x^2-4x+4\right)$

A megmaradt másodfokú tényezőben felismerhető $\left(x-2\right)^2$. Ezután felírhatjuk a teljesen szorzattá bontott alakot.

$x^5-4x^4+4x^3=x^3\left(x-2\right)^2$

A nevezőben két elsőfokú tényezőnek valamilyen magasabb kitevőjű hatványa áll. Mivel az elsőben 3. hatvány van, így ehhez három résztört tartozik majd. A nevezőkben x egyre nagyobb hatványai lesznek, a számlálókban pedig konstansok. A másodikban négyzet áll, így ahhoz két résztört tartozik majd. A nevezőkben $x-2$ egyre nagyobb hatványai lesznek, a számlálókban pedig konstansok. Ezek alapján a résztörtekre bontott alak a következő:

$$\frac{x^2+2x-1}{x^5-4x^4+4x^3}=\frac{x^2+2x-1}{x^3\left(x-2\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-2}+\frac{E}{\left(x-2\right)^2}\ .$$

12. feladat: Írjuk fel, milyen típusú résztörtek összegére bontjuk fel az $\dfrac{x^2+x-1}{x^3+6x^2+10x}$ törtet! (Csak a törtek típusát írjuk fel, a számlálókban az ismeretleneket nem kell meghatározni.)

Megoldás: Bontsuk szorzattá a nevezőt. Emeljünk ki x -et.

$x^3+6x^2+10x=x\left(x^2+6x+10\right)$

Vizsgáljuk meg, van-e valós gyöke a másodfokú tényezőnek. Írjuk fel a diszkriminánst.

$D=6^2-4\cdot1\cdot10=-4<0$

Mivel a diszkrimináns negatív, így $x^2+6x+10$ -nek nincs valós gyöke, tehát nem bontható szorzattá. A fenti szorzattal tehát a nevezőt már annyira szorzattá bontottuk, amennyire csak lehet. Felírhatjuk a résztörteket. Az első tényező elsőfokú kifejezés, a hozzá tartozó résztört számlálója egy konstans. A második tényező egy szorzattá nem bontható másodfokú kifejezés, a hozzá tartozó résztört számlálója elsőfokú lesz, tehát két ismeretlen szerepel majd benne. Ezek után a résztörtekre bontott alak a következő:

$$\frac{x^2+x-1}{x^3+6x^2+10x}=\frac{x^2+x-1}{x\left(x^2+6x+10\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+6x+10}\ .$$

13. feladat: $\displaystyle\int\frac{5x-6}{x^2-3x}\,dx$

Megoldás: Egy racionális törtet kell integrálnunk, ami valódi tört, hiszen a számláló elsőfokú, a nevező pedig másodfokú, azaz a számláló alacsonyabb fokú mint a nevező. Az is látható, hogy a nevezőt szorzattá lehet bontani, mert x kiemelhető.

$x^2-3x=x\left(x-3\right)$

Mivel a nevezőt két elsőfokú tényező szorzatára sikerült felbontani, így a tört két olyan résztört összegére bontható, amelyeknek számlálója konstans, nevezőjükben pedig szorzótényezők állnak.

$$\frac{5x-6}{x^2-3x}=\frac{5x-6}{x\left(x-3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}$$

Az ismeretlen A és B számok meghatározásához hozzuk közös nevezőre a két törtet.

$$\frac{5x-6}{x(x-3)}=\frac{A(x-3)+Bx}{x(x-3)}$$

Mivel a nevezők megegyeznek, a számlálóknak is egyenlőknek kell lenni.

$$5x-6=A(x-3)+Bx$$

A jobb oldalt rendezzük x hatványai szerint.

$$5x-6=A(x-3)+Bx=Ax-3A+Bx=(A+B)x-3A$$

Egyenlőség csak úgy lehet, ha az azonos fokszámú tagok együtthatói megegyeznek a két oldalon. Így az egyenletet két egyenletből álló egyenletrendszerre bontjuk.

$5=A+B$ (az elsőfokú tagok együtthatóinak egyenlősége)

$-6=-3A$ (a konstans tagok egyenlősége)

Oldjuk meg az egyenletrendszert. A második egyenletből $A=2$, amit behelyettesítve az első egyenletbe $B=3$ -at kapunk. Ebből a résztörtekre bontott alak az alábbi:

$$\frac{5x-6}{x^2-3x}=\frac{2}{x}+\frac{3}{x-3}$$

Térjünk vissza az integráláshoz. Írjuk be, hogy a tört milyen résztörtekre bontható, majd integráljuk a résztörteket.

$$\int\frac{5x-6}{x^2-3x}\,dx=\int\frac{2}{x}+\frac{3}{x-3}\,dx=2\ln|x|+3\ln|x-3|+c$$

14. feladat: $\int\frac{2x^2-10x+2}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$

Megoldás: Egy valódi racionális törtet kell integrálnunk, mert a számláló másodfokú a nevező pedig harmadfokú, tehát a számláló alacsonyabb fokú mint a nevező. A nevező szorzattá bontását x kiemelésével kezdhetjük.

$$2x^3+3x^2-2x=x\left(2x^2+3x-2\right)$$

A második tényezőnek határozzuk meg a gyökeit, ha van valós gyök.

$$2x^2+3x-2=0\;\Rightarrow\;\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot(-2)}}{2\cdot2}=\begin{cases}\frac{1}{2}\\-2\end{cases}$$

Írjuk fel a gyöktényezős alakot.

$$2x^2+3x-2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-(-2))=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)$$

Írjuk fel a nevező teljesen szorzattá bontott alakját.

$$2x^3+3x^2-2x=2x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)$$

Írjuk ezt be az integrálandó törtbe, és egyszerűsítsük a törtet.

$$\frac{2x^2-10x+2}{2x^3+3x^2-2x}=\frac{2x^2-10x+2}{2x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)}=\frac{2\left(x^2-5x+1\right)}{2x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)}=\frac{x^2-5x+1}{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)}$$

Bontsuk a törtet résztörtekre. Mivel három elsőfokú tényező van a nevezőben, így három törtet kapunk, melyek számlálója egy-egy konstans lesz.

$$\frac{x^2-5x+1}{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-\frac{1}{2}}+\frac{C}{x+2}$$

Hozzuk közös nevezőre a törteket, és a számlálót rendezzük x hatványai szerint.

$$\frac{x^2-5x+1}{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)}=\frac{A\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)+Bx(x+2)+Cx\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)}=$$

$$=\frac{A\left(x^2+\frac{3}{2}x-1\right)+B\left(x^2+2x\right)+C\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)}{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)}=\frac{(A+B+C)x^2+\left(\frac{3}{2}A+2B-\frac{1}{2}C\right)x-A}{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)}$$

Mivel a nevezők megegyeznek, így a számlálók is egyenlők.

$$x^2-5x+1=(A+B+C)x^2+\left(\frac{3}{2}A+2B-\frac{1}{2}C\right)x-A$$

Ezt az egyenletet 3 egyenletre bonthatjuk az azonos fokszámú tagok együtthatóinak egyenlőségét felírva.

$1=A+B+C$ (a másodfokú tagok együtthatóinak egyenlősége)

$-5=\frac{3}{2}A+2B-\frac{1}{2}C$ (a elsőfokú tagok együtthatóinak egyenlősége)

$1=-A$ (a konstans tagok egyenlősége)

A harmadik egyenletből $A=-1$, amit behelyettesítünk az első két egyenletbe. A második egyenletet célszerű 2 -vel megszorozni.

$1=-1+B+C \Rightarrow 2=B+C$

$-5=\frac{3}{2}\cdot(-1)+2B-\frac{1}{2}C \Rightarrow -\frac{7}{2}=2B-\frac{1}{2}C \Rightarrow -7=4B-C$

Az első egyenletből $C=2-B$. Ezt helyettesítsük a második egyenletbe.

$-7=4B-(2-B)=5B-2 \Rightarrow B=-1 \Rightarrow C=3$

Térjünk most vissza az integráláshoz, és írjuk fel, milyen résztörtekre bontható az integrálandó tört, majd integráljuk a résztörteket.

$$\int\frac{2x^2-10x+2}{2x^3+3x^2-2x}dx=\int\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x-\frac{1}{2}}+\frac{3}{x+2}dx=-\ln|x|-\ln\left|x-\frac{1}{2}\right|+3\ln|x+2|+c$$

15. feladat: $\int\frac{4x^2+18x+15}{(x+2)^3}dx$

Megoldás: Az integrálandó törtben másodfokút osztunk egy elsőfokú harmadik hatványával, tehát harmadfokúval, így valódi törtet kell integrálnunk. A nevezőt nem kell szorzattá bontanunk, hiszen eleve szorzatként van megadva. Így rögtön felírhatjuk, milyen résztörtekre kel bontanunk az integrálandó törtet. Mivel a nevező egy elsőfokú polinom 3. hatványa, ezért három résztört lesz, melyek számlálója egy-egy konstans, nevezőjükben pedig $x+2$ egyre magasabb hatványai állnak majd.

$$\frac{4x^2+18x+15}{(x+2)^3}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{(x+2)^3}$$

Hozzunk közös nevezőre, és számlálót rendezzük x hatványai szerint. A közös nevezőre hozásnál nem kell szorozni az összes nevezőt, mert van közös tényezőjük, hanem csak a legkisebb közös többszörösüket kell megkeresnünk. Ez mindig az eredeti tört nevezője lesz.

$$\frac{4x^2+18x+15}{(x+2)^3}=\frac{A(x+2)^2+B(x+2)+C}{(x+2)^3}=\frac{A(x^2+4x+4)+B(x+2)+C}{(x+2)^3}=$$

$$=\frac{Ax^2+(4A+B)x+(4A+2B+C)}{(x+2)^3}$$

Írjuk fel a számlálók egyenlőségét.

$4x^2+18x+15=Ax^2+(4A+B)x+(4A+2B+C)$

Bontsuk ezt egyenletrendszerré x hatványai szerint.

$4=A$

$18=4A+B$

$15=4A+2B+C$

Az első egyenletből $A=4$, amit a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $B=2$. Mindkettőt helyettesítve a harmadik egyenletbe adódik, hogy $C=-5$.

Térjünk vissza az integráláshoz. Írjuk be a résztörteket, majd integráljuk őket. Mivel most olyan törteket is kapunk, amelyekben konstanst osztunk elsőfokú hatványával, így integrálás előtt ezeket felírjuk negatív kitevő hatványként.

$$\int\frac{4x^2+18x+15}{(x+2)^3}dx=\int\frac{4}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}-\frac{5}{(x+2)^3}dx=$$

$$=\int\frac{4}{x+2}+2(x+2)^{-2}-5(x+2)^{-3}dx=4\ln|x+2|+2\frac{(x+2)^{-1}}{-1}-5\frac{(x+2)^{-2}}{-2}+c=$$

$$=4\ln|x+2|-\frac{2}{x+2}+\frac{5}{2(x+2)^2}+c$$

16. feladat: $\int\frac{6x^2-35x+32}{x^3-8x^2+16x}dx$

Megoldás: Mivel másodfokút osztunk harmadfokúval, így valódi törtet kell integrálnunk. A nevezőben x kiemelhető.

$x^3-8x^2+16x=x(x^2-8x+16)$

A második tényezőben felismerhető $x-4$ négyzete. Így a nevező szorzat alakja az alábbi:

$x^3-8x^2+16x=x(x-4)^2$

A nevező tehát olyan szorzat, aminek egyik tényezője elsőfokú, a másik pedig egy elsőfokú négyzete. Az elsőhöz egyetlen résztört tartozik, melynek számlálója egy konstans, a másikhoz két résztört tartozik, amiknek számlálója szintén konstans, s egyik nevezője $x-4$, a másiké pedig $(x-4)^2$. A résztörtekre bontott alak így a következő:

$$\frac{6x^2-35x+32}{x(x-4)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{(x-4)^2}$$

Hozzunk közös nevezőre, és számlálót rendezzük x hatványai szerint. A közös nevezőre hozásnál nem kell szorozni az összes nevezőt, mert van közös tényezőjük, hanem csak a legkisebb közös többszörösüket kell megkeresnünk. Ez az eredeti tört nevezője lesz.

$$\frac{6x^2-35x+32}{x(x-4)^2}=\frac{A(x-4)^2+Bx(x-4)+Cx}{x(x-4)^2}=\frac{A(x^2-8x+16)+B(x^2-4x)+Cx}{x(x-4)^2}=$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-8A-4B+C)x+16A}{x(x-4)^2}$$

A számlálók egyenlőségét bontsuk egyből egyenletekre.

$6=A+B$

$-35=-8A-4B+C$

32=16A

Az utolsó egyenletből $A=2$, amit az elsőbe helyettesítve kapjuk, hogy $B=4$. Mindkettőt helyettesítve a középső egyenletbe $C=-3$ adódik.

Írjuk be a résztörteket az integrálba, és hajtsuk végre az integrálást.

$$\int\frac{6x^2-35x+32}{x^3-8x^2+16x}dx=\int\frac{2}{x}+\frac{4}{x-4}-\frac{3}{(x-4)^2}dx=\int\frac{2}{x}+\frac{4}{x-4}-3(x-4)^{-2}dx=$$

$$=2\ln|x|+4\ln|x-4|-3\frac{(x-4)^{-1}}{-1}+c=2\ln|x|+4\ln|x-4|+\frac{3}{x-4}+c$$

17. feladat: $\int\frac{5x^2-3x+20}{x^3+4x}dx$

Megoldás: Ismét valódi törtet kell integrálnunk, s a nevezőből most is kiemelhetünk x -et.

$x^3+4x=x(x^2+4)$

A x^2+4 másodfokú tényezőnek nincs valós gyöke, így nem bontható szorzattá, ezért a résztörtek felírásával folytathatjuk. Az első tényező miatt lesz egy tört, aminek számlálója konstans, a második tényező miatt pedig egy olyan résztört, aminek számlálója elsőfokú, így abban két ismeretlen szerepel majd.

$$\frac{5x^2-3x+20}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

Hozzunk közös nevezőre, és számlálóban rendezzünk x hatványai szerint.

$$\frac{5x^2-3x+20}{x(x^2+4)}=\frac{A(x^2+4)+(Bx+C)x}{x(x^2+4)}=\frac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x(x^2+4)}$$

Írjuk fel az egyenletrendszert a számlálókban az azonos fokszámú tagok egyenlősége alapján.

$5=A+B$

$3=C$

$20=4A$

Két ismeretlen értéke rögtön megvan, mert a második és harmadik egyenletből $A=5$ és $C=3$. Az első egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $B=0$.

Térjünk vissza az integrálhoz. Írjuk be a résztörteket, és integráljuk őket.

$$\int\frac{5x^2-3x+20}{x^3+4x}dx=\int\frac{5}{x}+\frac{0\cdot x+3}{x^2+4}dx=\int\frac{5}{x}dx+\int\frac{3}{x^2+4}dx$$

Az első tört integrálása egyszerű, hiszen

$$\int\frac{5}{x}dx=5\ln|x|+c\ .$$

A második kicsit érdekesebb. Itt emeljünk ki a számlálóból 3 -at, a nevezőből pedig 4 -et, majd a nevezőben így keletkező $\frac{x^2}{4}$ törtet írjuk inkább $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ alakban. Így tudjuk elérni, hogy olyan összetett függvény alakuljon ki, aminek külső függvénye $\frac{1}{1+x^2}$. Ezután már tudunk integrálni.

$$\int \frac{3}{x^2+4}dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{\frac{x^2}{4}+1}dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \frac{3}{4}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}+c = \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+c$$

A részeredményekből rakjuk össze az eredeti tört integrálját.

$$\int \frac{5x^2-3x+20}{x^3+4x}dx = \int \frac{5}{x}dx + \int \frac{3}{x^2+4}dx = 5\ln|x| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+c$$

18. feladat: $\int \frac{x^2+10x+26}{x^3+6x^2+13x}dx$

Megoldás: A számláló alacsonyabb fokú mint a nevező, tehát e tört valódi, így szorzattá bontjuk a nevezőt. Első lépésként kiemelünk x -et.

$$x^3+6x^2+13x = x\left(x^2+6x+13\right)$$

A második tényezőről el kell döntenünk, hogy bontható-e tovább szorzattá. Ehhez írjuk fel a diszkriminánst.

$$D = 6^2 - 4\cdot 1\cdot 13 = -16 < 0$$

Mivel a diszkrimináns negatív, ennek a tényezőnek nincs valós gyöke, így nem bontható tovább szorzattá.

Írjuk fel a résztörteket. Amint az előző feladatban, most is egy elsőfokú és egy szorzattá nem bontható másodfokú tényező áll nevezőben. Így lesz egy tört, aminek számlálója konstans, és egy másik, aminek számlálója elsőfokú.

$$\frac{x^2+10x+26}{x\left(x^2+6x+13\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+13}$$

A szokott módon hozzunk közös nevezőre, s a számlálóban rendezzünk x hatványai szerint.

$$\frac{x^2+10x+26}{x\left(x^2+6x+13\right)} = \frac{A\left(x^2+6x+13\right)+\left(Bx+C\right)x}{x\left(x^2+6x+13\right)} = \frac{\left(A+B\right)x^2+\left(6A+C\right)x+13A}{x\left(x^2+6x+13\right)}$$

A számlálók azonos fokszámú tagjainak egyenlőségéből írjuk fel az egyenletrendszert.

$$1 = A+B$$
$$10 = 6A+C$$
$$26 = 13A$$

Az utolsó egyenletből $A=2$, amit a másik két egyenletbe helyettesítünk. Így kapjuk, hogy $B=-1$ és $C=-2$.

A kapott eredménnyel térjünk vissza az eredeti integrálhoz, és a résztörteket külön integráljuk.

$$\int \frac{x^2+10x+26}{x^3+6x^2+13x}dx = \int \frac{2}{x} + \frac{(-1)x-2}{x^2+6x+13}dx = \int \frac{2}{x}dx - \int \frac{x+2}{x^2+6x+13}dx$$

Az első tört integrálása egyszerű.

$$\int \frac{2}{x}dx = 2\ln|x| + c$$

A második törtet el kell vágnunk két részre, egy $\frac{f'}{f}$ típusú törtre, és egy olyanra, amiben konstanst osztunk másodfokúval.

Állítsuk elő a nevező deriváltját.

$$\left(x^2+6x+13\right)'=2x+6$$

Megfelelő konstanssal szorozva érjük el, hogy a számlálóban $2x$ álljon, amennyi a nevező deriváltjában van. Természetesen az integrál előtt kompenzálunk a szorzó reciprokával.

$$\int\frac{x+2}{x^2+6x+13}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+6x+13}dx$$

Most megfelelő konstans hozzáadásával és levonásával alakítsuk ki a számlálóban a nevező deriváltját.

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+6x+13}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4+2-2}{x^2+6x+13}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+6-2}{x^2+6x+13}dx$$

Ezután vágjuk a törtet két részre. A második részben egyszerűsítsünk.

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x+6-2}{x^2+6x+13}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+6}{x^2+6x+13}dx-\frac{1}{2}\int\frac{2}{x^2+6x+13}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+6}{x^2+6x+13}dx-\int\frac{1}{x^2+6x+13}dx$$

Az első rész már integrálható, hiszen $\frac{f'}{f}$ típusú.

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x+6}{x^2+6x+13}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+13\right|+c$$

A második részben alakítsuk teljes négyzetté a nevezőt.

$$\int\frac{1}{x^2+6x+13}dx=\int\frac{1}{\left(x+3\right)^2+4}dx$$

Emeljünk ki a nevezőből 4 -et, majd a keletkező $\frac{\left(x+3\right)^2}{4}$ törtet írjuk $\left(\frac{x+3}{2}\right)^2$ alakban. Így elérjük, hogy az integrálandó összetett függvényben $\frac{1}{1+x^2}$ lesz a külső függvény, s tudunk integrálni.

$$\int\frac{1}{\left(x+3\right)^2+4}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\frac{\left(x+3\right)^2}{4}+1}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2+1}dx=\frac{1}{4}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}}{\frac{1}{2}}+c=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+c$$

Utolsó lépésként a részeredményekből rakjuk össze az eredeti tört integrálját.

$$\int\frac{x^2+10x+26}{x^3+6x^2+13x}dx=\int\frac{2}{x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{2x+6}{x^2+6x+13}dx+\int\frac{1}{x^2+6x+13}dx=$$

$$=2\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+13\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+c$$

Ellenőrző kérdések

9. kérdés: Írjuk fel, milyen típusú résztörtek összegére bontjuk fel az $\frac{5x-3}{x^3-2x^2}$ törtet! (Csak a törtek típusát írjuk fel, a számlálókban az ismeretleneket nem kell meghatározni.)

$\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x-2}$

$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}$ (X)

$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2-2x}$

$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-2x}$

10. kérdés: Írjuk fel, milyen típusú résztörtek összegére bontjuk fel az $\frac{1}{x^3+4x}$ törtet! (Csak a törtek típusát írjuk fel, a számlálókban az ismeretleneket nem kell meghatározni.)

$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2+4}$

$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}$

$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$ (X)

$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+4}$

11. kérdés: $\int \frac{5}{x^2-3x-4}\,dx$

$5\ln\left|x^2-3x-4\right|+c$

$\ln|x+4|-\ln|x-1|+c$

$5\ln|x-2|-5\ln|x+2|+c$

$\ln|x-4|-\ln|x+1|+c$ (X)

12. kérdés: $\int \frac{3x+1}{(x+2)^2}\,dx$

$3\ln|x+2|+\frac{5}{x+2}+c$ (X)

$3\ln|x+2|-\frac{5}{x+2}+c$

$3\ln|x+2|+\frac{7}{x+2}+c$

$3\ln|x+2|-\frac{7}{x+2}+c$

13. kérdés: $\int \frac{3x^2+4x+4}{x^3+2x^2+x}\,dx$

$4\ln|x|-\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}+c$

$4\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{3}{x+1}+c$ (X)

$4\ln|x|+\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}+c$

$4\ln|x|+\ln|x+1|+\frac{3}{x+1}+c$

14. kérdés: $\int\frac{2x^2-7x+18}{x^3+9x}dx$

$2\ln|x|+7\ln|x+3|-7\ln|x-3|+c$

$2\ln|x|-7\ln|x^2+9|+c$

$2\ln|x|-\frac{7}{9}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+c$

$2\ln|x|-\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+c$ (X)

15. kérdés: $\int\frac{6x^2-29x+50}{x^3-6x^2+10x}dx$

$5\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x^2-6x+10|+4\operatorname{arctg}(x-3)+c$ (X)

$5\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x^2-6x+10|+7\operatorname{arctg}(x-3)+c$

$5\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x^2-6x+10|-4\operatorname{arctg}(x-3)+c$

$5\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x^2-6x+10|-7\operatorname{arctg}(x-3)+c$