5. Lineáris algebra

5.1. Mátrixok, determinánsok

Tanulási cél

Ebben a modulban megismerkedünk a lineáris algebra legfontosabb fogalmaival. Ezek közül a legalapvetőbb a mátrix fogalma. A lineáris algebra egyik központi problémája a lineáris egyenletrendszerek megoldása. Kiderült, hogy itt a mátrixok és determinánsok nagyon hatékonyan felhasználhatók. A lineáris algebra másik fontos területe a lineáris transzformációk tanulmányozása. Ebben ismét csak a mátrixok játszanak kulcsszerepet a sajátértékek és sajátvektorok mellet.

A modul fő célja az itt említett fogalmak megismertetése, és a velük kapcsolatos legfontosabb számítások begyakoroltatása.

Elméleti összefoglaló

Számadatokat sokszor célszerű táblázatos formába rendezni. Az ilyen táblázatokat hívjuk **mátrixoknak**. Mi csak olyan mátrixokkal fogunk foglalkozni, amelyek valós számokból épülnek fel.

Ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak n sora és m oszlopa van, akkor azt mondjuk, hogy a mátrix $n \times m$ **típusú**, és ezt így fogjuk jelölni: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Az $\mathbf{A}$ mátrix elemeire kettős indexeléssel hivatkozunk: $a_{i,j}$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrix i -edik sorának j -edik elemét.

Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrix 2×3 típusú, és $a_{2,3} = 6$. Szokás a két index közötti vesszőt nem kiírni, ha nem kell félreértéstől tartani.

Két mátrix **egyenlő**, ha azonos a típusuk, és az azonos indexű elemeik egyenlők.

A mátrixok körében műveleteket definiálhatunk, amelyek segítségével adott mátrixokból újabbakat készíthetünk.

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, és $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám. Ekkor az $\mathbf{A}$ mátrix α **-szorosa** az a $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A}$ szintén $n \times m$ típusú mátrix, amelyre $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ minden $1 \le i \le n$ és $1 \le j \le m$ esetén.
Tehát egy mátrixot úgy szorzunk meg egy számmal, hogy minden elemét megszorozzuk a számmal.

Legyen $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{n\times m}$. (Azaz legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két tetszőleges $n\times m$ típusú mátrix.) Ekkor $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ **összege** az a $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ szintén $n\times m$ típusú mátrix, amelyre $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ minden $1\le i\le n$ és $1\le j\le m$ esetén. Tehát azonos típusú mátrixok összeadhatók, és az összeg elemeit úgy kapjuk, hogy rendre összeadjuk az azonos indexű elemeket.

Legyen $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{n\times m}$. Ekkor $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ **különbsége** az a $\mathbf{C}=\mathbf{A}-\mathbf{B}$ szintén $n\times m$ típusú mátrix, amelyre $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$ minden $1\le i\le n$ és $1\le j\le m$ esetén.
Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-1)\mathbf{B}$.

A számmal szorzásra és az összeadásra érvényesek a következő tételek. Ezeket, és a későbbi tételeket is, mindig úgy kell érteni, hogy, ha az összefüggések egyik oldalán álló műveleteket el lehet végezni, akkor elvégezhetők a másik oldalon álló műveletek is, és az eredményül kapott mátrixok egyenlők.

Tétel. Legyen $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Ekkor

$\alpha(\beta\mathbf{A})=\beta(\alpha\mathbf{A})=(\alpha\beta)\mathbf{A}$.
$(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$.
$\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$, azaz **a számmal szorzás disztributív az összeadásra nézve**.
$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$, azaz **az összeadás kommutatív**.
$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$, azaz **az összeadás asszociatív**.

A mátrixok szorzásának definíciója kicsit bonyolultabb az eddigi műveletek definíciójától.

Legyen $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times k}$ és $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{k\times m}$, vagyis az $\mathbf{A}$ mátrixnak legyen k oszlopa, a $\mathbf{B}$ mátrixnak pedig k sora. Ekkor $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ **szorzata** az a $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$ mátrix, amelynek típusa $n\times m$ és

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}$$

minden $1\le i\le n$ és $1\le j\le m$ esetén.
Tehát a szorzat mátrix i -edik sorának j -edik elemét úgy kapjuk, hogy az elöl álló $\mathbf{A}$ mátrix i -edik sorának az elemeit rendre megszorozzuk a hátul álló $\mathbf{B}$ mátrix j -dik oszlopának elemeivel, és ezeket a szorzatokat összeadjuk.

Azt a feltételt, hogy szorzáskor az elöl álló mátrixnak annyi oszlopa kell, hogy legyen, mint ahány sora a hátul álló mátrixnak van, **kompatibilitási feltételnek** hívjuk.

Például legyen $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ és $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$. Ekkor az $\mathbf{A}$ mátrix típusa $2\times\boxed{2}$, a $\mathbf{B}$ mátrix típusa $\boxed{2}\times 3$, teljesül tehát a kompatibilitási feltétel, (a két bekeretezett szám egyenlő). Létezik tehát a $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$ szorzatmátrix, amelynek típusa 2×3. Sorra kiszámoljuk a $\mathbf{C}$ elemeit.

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=2\cdot 3+(-3)\cdot 1=3,$$
$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}=2\cdot 2+(-3)\cdot(-2)=10,$$
$$c_{13}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}=2\cdot 1+(-3)\cdot 3=-7,$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 1\cdot 3 + 4\cdot 1 = 7,$$
$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1\cdot 2 + 4\cdot(-2) = -6,$$
$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} = 1\cdot 1 + 4\cdot 3 = 13.$$

Vagyis azt kaptuk, hogy

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 10 & -7 \\ 7 & -6 & 13 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{BA}$ szorzat ebben az esetben nem létezik, mert a típusok rendre $2\times\boxed{3}$ és $\boxed{2}\times 2$, és a bekeretezett számok nem egyenlők, nem teljesül a kompatibilitási feltétel.

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Ekkor $\mathbf{A}$ **transzponáltja** az az $\mathbf{A}^T$ mátrix, amelynek típusa $m\times n$, és $a_{ij}^T = a_{ji}$ minden $1 \le i \le m$ és $1 \le j \le n$ esetén.
Tehát a transzponálás során az eredeti mátrix első sora lesz a transzponált első oszlopa, második sora a transzponált második oszlopa, és így tovább. A transzponálás felcseréli a sorokat és az oszlopokat.

Az előbbi szorzás során szerepelt $\mathbf{B}$ mátrix esetén

$$B^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

A következő tétel a szorzással és a transzponálttal kapcsolatos azonosságokat foglalja össze.

Tétel. Feltéve, hogy a formulákban szükséges kompatibilitási feltételek mind teljesülnek

$(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB})$,
$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, **a szorzás nem kommutatív,**
$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{ABC}$, **a szorzás asszociatív,**
$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$, és $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, **a szorzás disztributív az összeadásra,**
$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$,
$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ típusú mátrixokat **négyzetes mátrixoknak** hívjuk. Egy négyzetes mátrixnak tehát annyi sora van ahány oszlopa.

Minden négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixhoz hozzá lehet rendelni egy számot, a mátrix determinánsát, amit $|\mathbf{A}|$ fog jelölni.

Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ típusú mátrix determinánsát megkapjuk, ha az i -edik sor minden elemét megszorozzuk az elemhez tartozó előjeles aldeterminánssal, és az így kapott szorzatokat összeadjuk. Az i -edik sor j -edik eleméhez (azaz a_{ij} -hez) tartozó előjeles aldeterminánst úgy kapjuk, hogy töröljük az $\mathbf{A}$ mátrix i -edik sorát és j -edik oszlopát, és a kapott $(n-1)\times(n-1)$ típusú mátrix determinánsát megszorozzuk $(-1)^{i+j}$ -vel.

Ezt hívjuk az i -edik **sor szerinti kifejtésnek**. A kifejtésben szereplő $(n-1)\times(n-1)$ típusú mátrixok determinánsát ugyanígy valamelyik soruk szerint kifejtve még eggyel kisebb méretű determinánsokat kapunk, és így tovább. Végül csupa 2×2 típusú mátrix determinánsát kapjuk. Az $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix determinánsa pedig

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\,.$$

Ugyanilyen módon egy determinánst bármelyik oszlopa szerint is ki lehet fejteni.
Példaként kiszámoljuk az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsát úgy, hogy kifejtjük a $3.$ sora szerint.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 3\cdot 1\cdot(2\cdot 4 - 1\cdot 3) + (-2)\cdot(-1)\cdot(1\cdot 4 - 2\cdot 3) + 2\cdot 1\cdot(1\cdot 1 - 2\cdot 2) =$$
$$= 15 + 2\cdot(-2) + 2\cdot(-3) = 5\ .$$

Ugyanennek a mátrixnak a determinánsa kifejtve az első oszlopa szerint

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= 1\cdot 1\cdot(1\cdot 2 - 4\cdot(-2)) + 2\cdot(-1)\cdot(2\cdot 2 - 3\cdot(-2)) + 3\cdot 1\cdot(2\cdot 4 - 3\cdot 1) =$$
$$10 - 20 + 15 = 5\,.$$

A két végeredmény természetesen ugyanaz.

Egy 4×4 típusú mátrix determinánsát először vissza kell vezetni 4 darab 3×3 méretű mátrix determinánsára, és azokat a fenti módon kiszámítani. Látható, hogy ez igen fáradságos. Ezért nagy jelentősége van az olyan tételeknek, amelyekkel ezt az eljárást egyszerűsíteni lehet. Ezek közül a legfontosabb az alábbi.

Tétel. Legyen $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ típusú mátrix. Tekintsük az $\mathbf{A}$ mátrix i -edik és j -edik sorát, ahol $i\neq j$. Ha az i -edik sort elemenként megszorozzuk tetszőleges α számmal és azt elemenként hozzáadjuk a j -edik sorhoz, a többi sort pedig változatlanul hagyjuk, akkor az így kapott új mátrixnak ugyanannyi a determinánsa, mint az eredetinek. Ezt az átalakítást így fogjuk jelölni: $(\alpha)\cdot\boxed{i.}+\boxed{j.}\to\boxed{j.}$.

Ennek a tételnek az ismételt alkalmazásával elérhető, hogy az eredeti mátrixot átalakítsuk úgy, hogy egy általunk kiválasztott oszlopának egy kivételével minden eleme nullává váljon, és a determináns értéke mégsem változik. Ha ezután a determinánst kifejtjük ezen oszlopa szerint csak egy darab eggyel kisebb méretű determinánst kell kiszámolnunk, a többi ugyanis a kifejtésben úgyis nullával szorzódna.

Például, ha az előbbi $\mathbf{A}$ mátrix első sorának mínusz kétszeresét hozzáadjuk a második sorhoz, akkor ezt kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

és itt a jobb oldalon álló mátrixnak ugyanannyi a determinánsa, mint $\mathbf{A}$ -nak. Ha most a jobb oldali mátrix első sorának mínusz háromszorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz a kapott mátrixnak ismét annyi marad a determinánsa, mint az eredeti $\mathbf{A}$ -nak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-3)\cdot\boxed{1.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -8 & -7 \end{bmatrix}.$$

Erről könnyen meggyőződhetünk, hiszen ha az utolsó mátrix determinánsát úgy számoljuk ki, hogy kifejtjük az első oszlopa szerint, akkor

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -8 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -8 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot\big((-3)\cdot(-7)-(-8)\cdot(-2)\big) = 21-16 = 5.$$

Kidolgozott feladatok

1. feladat. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, és $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Számoljuk ki a $\mathbf{C} = 3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$ mátrixot.

Megoldás: Mindkét mátrix 2×2 típusú, és ilyen minden számszorosuk is, tehát a kijelölt műveletek elvégezhetők. A számmal való szorzás és az összeadás definíciójából következik, hogy ezeket a műveleteket elemenként kell elvégezni. Például

$$c_{21} = 3a_{21} - 2b_{21} = 3\cdot 2 - 2\cdot 3 = 0.$$

hasonlóan számolva a többi elemet

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. feladat. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, és $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Számítsuk ki a $\mathbf{C} = \mathbf{BA}$ mátrixot.

Megoldás: Mint az előbb, most is azzal kezdünk, hogy ellenőrizzük, hogy a kívánt műveleteket el lehet-e végezni. Most a szorzatban az elöl álló mátrix, a $\mathbf{B}$, típusa $2\times\boxed{3}$, a hátul álló mátrixé

$\boxed{3}\times 2$, tehát teljesül a kompatibilitási feltétel, a két mátrix ebben a sorrendben szorozható, és a szorzat típusa 2×2. A mátrixok szorzásának definíciója alapján például

$$c_{12} = b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32} = 2\cdot(-3)+1\cdot 1+2\cdot 2 = -1 \ .$$

Hasonlóan számolva a többi elemet

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. feladat. Az előző feladatban megadott $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrix esetén számoljuk ki a $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$ szorzatot is.

Megoldás: Ez a szorzat is létezik, mert most az elöl álló mátrix típusa $3\times\boxed{2}$, a hátul állóé $\boxed{2}\times 3$, teljesül a kompatibilitási feltétel, és a szorzat mátrix típusa 3×3. Például a

$$d_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} = 3\cdot 1+2\cdot 2 = 7\,.$$

Hasonlóan számolva a többi elemet

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. feladat. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. Számoljuk ki az $\mathbf{A}^2$ mátrixot.

Megoldás: Az $\mathbf{A}^2$ persze azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$-t önmagával szorozzuk: $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$. Mivel $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix, ez a szorzás elvégezhető, és $\mathbf{A}^2$ is 3×3 típusú. A szorzást úgy a legbiztonságosabb elvégezni, hogy először egymás mellé leírjuk a szorzatban szereplő sorrendben a mátrixokat.
Ezután az elöl álló mátrix első sorát és a hátul álló mátrix első oszlopát elemenként szorozva és a szorzatokat összeadva kapjuk a szorzat első sorának első elemét.
Az elöl álló mátrix első sorát és a hátul álló mátrix második oszlopát elemenként szorozva és a szorzatokat összeadva kapjuk a szorzat első sorának második elemét. És így tovább.

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & 17 \\ 16 & -3 & 18 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

5. feladat. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, és $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Számoljuk ki a $\mathbf{B}^T\mathbf{A} - (\mathbf{AB})^T$ mátrixot.

Megoldás: Az egyik lehetséges számolási mód a következő: először kiszámoljuk $\mathbf{B}^T\mathbf{A}$-t, majd $(\mathbf{AB})^T$, és a megfelelő sorrendben kivonjuk ezeket egymásból. Mivel $\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{B}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

Ezután, felhasználva, hogy $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$, és így $(\mathbf{AB})^T = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{B}^T\mathbf{A} - (\mathbf{AB})^T = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

A másik lehetőség, hogy a műveleti azonosságokat felhasználva átalakítjuk a kiszámolandó formulát. Ekkor

$$\mathbf{B}^T\mathbf{A} - (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A} - \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{B}^T\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right).$$

Ennek az átalakításnak az az előnye, hogy így csak egy szorzást kell végrehajtani. Felhasználva, hogy $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, kapjuk, hogy

$$\mathbf{B}^T\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

A végeredmény persze ugyanaz, mint az előbb.

6. feladat. Számoljuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát.

Megoldás: Tudjuk, hogy egy determináns bármelyik sora vagy oszlopa szerint kifejthető. Kifejtjük most a második sora szerint. Ekkor

$$|\mathbf{A}| = 2\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)\cdot 0 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1) = -1.$$

7. feladat. Számoljuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát.

Megoldás: Átalakítjuk úgy a mátrixunkat, hogy a determinánsa ne változzon, de az első oszlopában az első elemen kívül minden elem nulla legyen. Tudjuk az említett tételből, hogy ennek érdekében az első sor mínusz kétszeresét kell a második sorhoz hozzáadni, illetve az első sor mínusz egyszeresét kell a harmadik sorhoz hozzáadni. Ez a két átalakítás egy lépésben is elvégezhető.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}]{(-2)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Ha az átalakítást jelképező nyílra több átalakítást is írunk, akkor a végrehajtás sorrendje fölülről lefelé értendő.) A jobb oldali mátrixot az első oszlopa szerint kifejtve

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\big(0\cdot 0 - 1\cdot(-1)\big) = 1.$$

8. feladat. Tekintsük az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & x & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Hogyan kell az x valós szám értékét megválasztani, hogy a kapott mátrix determinánsa -14 legyen?

Megoldás: Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix egyik eleme függ x -től, a determinánsa is függ x-től. Mivel az első sorban már van egy nulla elem, most célszerű a determinánst az első sora szerint kifejteni. (Ez jobb, mint a harmadik oszlop szerinti kifejtés, mert abban az oszlopban nagyobb számok állnak.)

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & x & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(5x-6) + 1\cdot(-10-12) = 10x - 12 - 22 = 10x - 34\,.$$

Mivel azt az x számot keressük, amire a determináns -14, megoldjuk a

$$10x - 34 = -14$$

egyenletet, amiből $x = 2$. Tehát az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsa -14 .

9. feladat. Tekintsük az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & x \\ 1 & x & 2 \end{bmatrix}$. Hogyan kell az x valós szám értékét megválasztani, hogy a kapott mátrix determinánsa -12 legyen?

Megoldás: Kifejtjük a determinánst az első sora szerint.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & x \\ 1 & x & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & x \\ x & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} =$$

$$= 3\left(-2-x^2\right) - 2\cdot(4-x) + (2x+1) = -6 - 3x^2 - 8 + 2x + 2x + 1 =$$

$$= -3x^2 + 4x - 13\,.$$

A $-3x^2+4x-13=-12$, azaz rendezés után a $3x^2-4x+1=0$ másodfokú egyenletből az $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=1$ adódik. Tehát az $\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}$ és az $\mathbf{A}_2=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixok determinánsa egyaránt -12 .

Ellenőrző kérdések

1. kérdés. Legyen $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Ekkor a $3\mathbf{A}-4\mathbf{B}$ mátrix

$\begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 5 & -18 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 10 & -19 \\ 5 & -19 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 10 & -19 \\ 5 & -18 \end{bmatrix}$. (x)

$\begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 5 & -19 \end{bmatrix}$.

2. kérdés. Legyen $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Ekkor a $\left(2\mathbf{A}^T+3\mathbf{B}\right)^T$ mátrix

$\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 15 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$. (x)

$\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 15 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 8 & 15 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 25 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$.

3. kérdés. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. Ekkor az $\mathbf{AB}$ mátrix

$\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} -8 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$. (x)

$\begin{bmatrix} -8 & -5 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$.

4. kérdés. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Ekkor az $\mathbf{A}^2$ mátrix

$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 8 & 9 & 11 \\ -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 8 & 9 & 11 \\ -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$. (x)

$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 8 & 9 & 11 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 8 & 9 & 11 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$.

5. kérdés. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$. Ekkor az $\mathbf{A}^3 - 2\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}$ mátrix

$\begin{bmatrix} 24 & 28 \\ -42 & -46 \end{bmatrix}$. (x)

$\begin{bmatrix} 24 & 26 \\ -42 & -46 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 26 & 28 \\ -42 & -46 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 24 & 28 \\ -44 & -46 \end{bmatrix}$.

6. kérdés. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa

-12. (x)
-11.
-13.
-10.

7. kérdés. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor az $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ mátrix determinánsa

0. (x)
-1.
1.
2.

8. kérdés. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor az $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ mátrix determinánsa

2.
3.
4. (x)
1.

9. kérdés. Mennyinek kell választani az x szám értékét, hogy az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & x & x \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsa 1 legyen?

$x = -4$. (x)
$x = 4$.
$x = 3$.
$x = -3$.

10. kérdés. Mennyi legyen az x szám értéke, hogy az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & x \\ -1 & x & 2 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsa -11 legyen?

$x=-1$ vagy $x=-12$. (x)
$x=-1$ vagy $x=12$.
$x=1$ vagy $x=-12$.
$x=1$ vagy $x=12$.