4. Többváltozós függvények
4.2. Kétváltozós valós értékű függvények differenciálszámítása

Tanulási cél: A kétváltozós függvények differenciálszámítása és annak gyakorlati alkalmazásával való megismerkedés.

Elméleti összefoglaló
A parciális derivált fogalma

Definíció: Legyen (x_0, y_0) az $f(x,y)$ függvény értelmezési tartományának egy pontja. Az $f(x,y)$ függvény x szerint parciálisan differenciálható az (x_0, y_0) pontban, ha a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

határérték létezik és véges. Ekkor ezt a véges határértéket az $f(x,y)$ függvény (x_0, y_0) pontban vett x szerint parciális deriváltjának nevezzük. Jelölés:

$$f'_x(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}.$$

Definíció: Legyen (x_0, y_0) az $f(x,y)$ függvény értelmezési tartományának egy pontja. Az $f(x,y)$ függvény y szerint parciálisan differenciálható az (x_0, y_0) pontban, ha a

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

határérték létezik és véges. Ekkor ezt a véges határértéket az $f(x,y)$ függvény (x_0, y_0) pontban vett y szerint parciális deriváltjának nevezzük. Jelölés:

$$f'_y(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

Definíció: Azt az új függvényt, amelynek értelmezési tartománya az $f(x,y)$ függvény értelmezési tartományának azon pontjaiból áll, ahol az $f(x,y)$ függvény *x* szerint parciálisan deriválható, és értéke minden ilyen pontban megegyezik az adott ponthoz tartozó *x* szerinti parciális derivált értékével, az $f(x,y)$ függvény *x* szerinti parciális deriváltjának nevezzük. Jele:

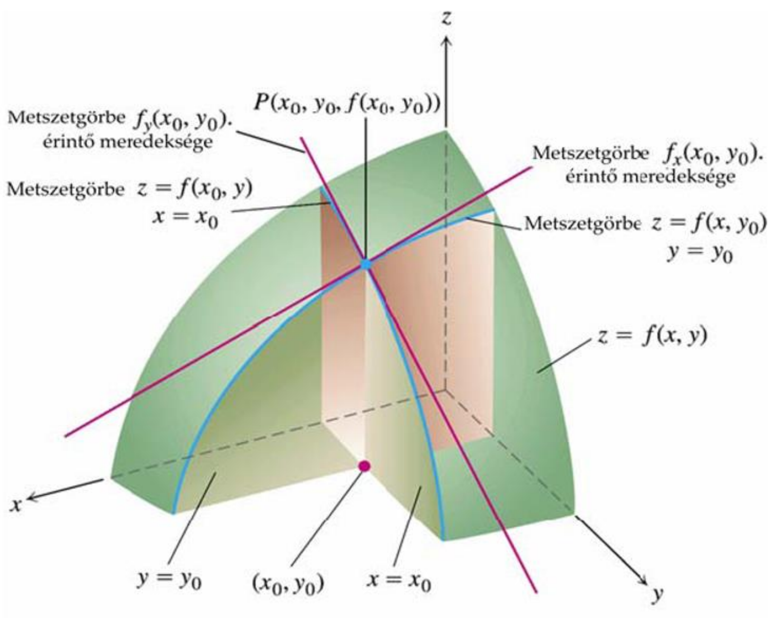
$$f'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Definíció: Azt az új függvényt, amelynek értelmezési tartománya az $f(x,y)$ függvény értelmezési tartományának azon pontjaiból áll, ahol az $f(x,y)$ függvény *y* szerint parciálisan deriválható, és értéke minden ilyen pontban megegyezik az adott ponthoz tartozó *y* szerinti parciális derivált értékével, az $f(x,y)$ függvény y szerinti parciális deriváltjának nevezzük. Jele:

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

A definícióból következik, hogy a parciális deriváltfüggvények meghatározásakor az egyváltozós függvények deriválási szabályai használhatók úgy, hogy amikor az egyik változó szerinti parciális deriváltfüggvényt állítjuk elő, akkor a másik változót konstansnak kell tekinteni.

Megjegyzés: A parciális deriváltak lényegében a rétegvonalak deriváltjai. Geometriai jelentésüket az ábra mutatja.



Az elsőrendű parciális deriváltak maguk is kétváltozós függvények. Ha ezeket újra deriváljuk, akkor kapjuk a másodrendű parciális deriváltakat. Ezeket úgy jelöljük, hogy sorban leírjuk azokat a változókat, amelyek szerint deriválunk. Eszerint másodrendű parciális deriváltból négy létezik. Ezek a következők:

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$$

azt jelenti, hogy az $f(x,y)$ függvényt először x szerint, majd másodszor is x szerint deriváljuk parciálisan.

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$$

azt jelenti, hogy az $f(x,y)$ függvényt először y szerint, majd másodszor is y szerint deriváljuk parciálisan.

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

azt jelenti, hogy az $f(x,y)$ függvényt először x szerint, majd másodszor y szerint deriváljuk parciálisan.

$$f''_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

azt jelenti, hogy az $f(x,y)$ függvényt először y szerint, majd másodszor x szerint deriváljuk parciálisan.

Az $f''_{xx}(x,y)$ és $f''_{yy}(x,y)$ függvények a tiszta, míg az $f''_{xy}(x,y)$ és $f''_{yx}(x,y)$ függvények a vegyes másodrendű parciális deriváltak.

A Young-tétel kimondja, hogy kétszer folytonosan deriválható függvényekre a magasabbrendű parciális deriváltak függetlenek a deriválás sorrendjétől, azaz

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y).$$

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Legyen $f(x,y)=3x^2y-2xy^4$. Számítsuk ki az $f'_x(1,-2)$ és $f'_y(1,-2)$ értékeket! Képezzük az összes másodrendű parciális deriváltat is!

Megoldás:

A feladat megoldásához először el kell végeznünk a parciális deriválást az adott változók szerint, majd következik a behelyettesítés. Parciális deriválásnál csak azt a változót tekintjük változónak, ami szerint éppen deriválunk. A másik változó pedig rögzített konstansként viselkedik. Azaz:

$$f'_x(x,y)=3\cdot 2xy-2\cdot 1\cdot x^0y^4=6xy-2y^4,$$

mivel x^2 deriváltja $2x$, az x deriváltja pedig 1. Ezt követően elvégezve a behelyettesítést:

$$f'_x(1,-2)=6\cdot 1\cdot(-2)-2\cdot(-2)^4=-12-32=-44.$$

$f'_y(x,y)$ kiszámítása hasonlóan történik, most y szerint deriválunk, és az x-et tekintjük konstansnak:

$$f'_y(x,y)=3x^2\cdot 1\cdot y^0-2x\cdot 4\cdot y^3=3x^2-8xy^3.$$

Elvégezve a behelyettesítést:

$$f'_y(1,-2)=3\cdot 1^2-8\cdot 1\cdot(-2)^3=3+64=67.$$

Ha az elsőrendű parciális deriváltakat újra deriváljuk, akkor kapjuk a másodrendű parciális deriváltakat. Ezek meghatározása következik.

$$f''_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(6xy-2y^4\right)=6y$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(6xy-2y^4\right)=6x-8y^3$$

$$f''_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2-8xy^3\right)=6x-8y^3$$
$$f''_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2-8xy^3\right)=-24xy^2.$$

Látható, hogy a vegyes másodrendű parciális deriváltak valóban megegyeznek egymással.

2. feladat: Legyen $f(x,y)=x^3e^{5y}$. Határozzuk meg az elsőrendű és a másodrendű parciális deriváltakat!

Megoldás:

Ha *x* szerint deriválunk, akkor *y* és ezzel együtt az e^{5y} is konstansnak tekintendő, ezért

$$f'_x(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=e^{5y}\frac{\partial}{\partial x}x^3=3x^2e^{5y}.$$

Ha *y* szerint deriválunk, akkor az *x* és ezzel együtt az x^3 is konstansnak tekintendő, ezért

$$f'_y(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x^3\frac{\partial}{\partial y}e^{5y}=x^3\cdot 5\cdot e^{5y}=5x^3e^{5y}.$$

Itt a deriválásnál ne felejtsük el, hogy az e^{5y} egy összetett függvény.

$$f''_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2e^{5y}\right)=e^{5y}\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2\right)=e^{5y}\cdot 6x=6xe^{5y}$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2e^{5y}\right)=3x^2\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{5y}\right)=3x^2\cdot 5\cdot e^{5y}=15x^2e^{5y}$$

$$f''_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(5x^3e^{5y}\right)=5e^{5y}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\right)=5e^{5y}\cdot 3x^2=15x^2e^{5y}$$

$$f''_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(5x^3e^{5y}\right)=5x^3\frac{\partial}{\partial y}e^{5y}=5x^3\cdot 5\cdot e^{5y}=25x^3e^{5y}.$$

3. feladat: Legyen $f(x,y)=\sin(2x+3y)$. Határozzuk meg az elsőrendű és a másodrendű parciális deriváltakat!

Megoldás:

Ha a függvényre *x* függvényeként tekintünk, akkor egy összetett függvényt látunk. Ugyanez lesz a helyzet akkor is, ha majd az *y*-t tekintjük változónak, az *x*-et pedig konstansnak. Ennek megfelelően a parciális deriváltak meghatározásánál figyelembe kell venni az egyváltozós összetett függvények deriválásánál megtanult deriválási szabályt.

$$f'_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin(2x+3y)\right)=\underbrace{\cos(2x+3y)}_{\text{külső deriváltja}}\cdot\underbrace{2}_{\text{belső deriváltja}}=2\cos(2x+3y)$$

$$f'_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sin(2x+3y)\right)=\underbrace{\cos(2x+3y)}_{\text{külső deriváltja}}\cdot\underbrace{3}_{\text{belső deriváltja}}=3\cos(2x+3y)$$

$$f''_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\big(2\cos(2x+3y)\big)=\underbrace{2\cdot(\text{-}\sin(2x+3y))}_{\text{külső deriváltja}}\cdot\underbrace{2}_{\text{belső deriváltja}}=\text{-}4\sin(2x+3y)$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\big(2\cos(2x+3y)\big)=\underbrace{2\cdot(\text{-}\sin(2x+3y))}_{\text{külső deriváltja}}\cdot\underbrace{3}_{\text{belső deriváltja}}=\text{-}6\sin(2x+3y)$$

$$f''_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\big(3\cos(2x+3y)\big)=\underbrace{3\cdot(\text{-}\sin(2x+3y))}_{\text{külső deriváltja}}\cdot\underbrace{2}_{\text{belső deriváltja}}=\text{-}6\sin(2x+3y)$$

$$f''_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\big(3\cos(2x+3y)\big)=\underbrace{3\cdot(\text{-}\sin(2x+3y))}_{\text{külső deriváltja}}\cdot\underbrace{3}_{\text{belső deriváltja}}=\text{-}9\sin(2x+3y).$$

4. feladat: Legyen $f(x,y)=e^{x^2-2y^3}$. Határozzuk meg az elsőrendű és a másodrendű parciális deriváltakat!

Megoldás:

Ez is egy összetett függvény, ennek megfelelően a parciális deriváltak a következő módon alakulnak:

$$f'_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(e^{x^2-2y^3})=\underbrace{e^{x^2-2y^3}}_{\text{külső deriváltja}}\cdot\underbrace{(2x-0)}_{\text{belső deriváltja}}=2x\cdot e^{x^2-2y^3}$$

$$f'_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(e^{x^2-2y^3})=\underbrace{e^{x^2-2y^3}}_{\text{külső deriváltja}}\cdot\underbrace{(0-6y^2)}_{\text{belső deriváltja}}=-6y^2\cdot e^{x^2-2y^3}.$$

A másodrendű deriváltak meghatározásánál emlékezni kell az egyváltozós függvények szorzatának deriválási szabályára, amely a következő:

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

Ezt felhasználva a másodrendű parciális deriváltak a következők lesznek:

$$f''_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(2x\cdot e^{x^2-2y^3}\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\big(2x\big)\cdot e^{x^2-2y^3}+2x\cdot\frac{\partial}{\partial x}e^{x^2-2y^3}=$$

$$=2\cdot e^{x^2-2y^3}+2x\cdot e^{x^2-2y^3}\cdot 2x=e^{x^2-2y^3}\cdot(2+4x^2)$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\Big(2x\cdot e^{x^2-2y^3}\Big)=2x\cdot\frac{\partial}{\partial y}e^{x^2-2y^3}=2x\cdot e^{x^2-2y^3}\cdot(-6y^2)=-12xy^2\cdot e^{x^2-2y^3}$$

$$f''_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(-6y^2\cdot e^{x^2-2y^3}\Big)=-6y^2\cdot\frac{\partial}{\partial x}e^{x^2-2y^3}=-6y^2\cdot e^{x^2-2y^3}\cdot 2x=-12xy^2\cdot e^{x^2-2y^3}$$

$$f''_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\Big(-6y^2\cdot e^{x^2-2y^3}\Big)=\frac{\partial}{\partial y}(-6y^2)\cdot e^{x^2-2y^3}+(-6y^2)\cdot\frac{\partial}{\partial y}e^{x^2-2y^3}=$$

$$=(-12y)\cdot e^{x^2-2y^3}+(-6y^2)\cdot e^{x^2-2y^3}\cdot(-6y^2)=e^{x^2-2y^3}\cdot(-12y+36y^4).$$

5. feladat: Legyen $f(x,y)=\ln(2xy+3y^4)$. Határozzuk meg az elsőrendű és a másodrendű parciális deriváltakat!

Megoldás:

Ez a függvény is egy összetett függvény, ezért a parciális deriváltak meghatározásánál figyelembe kell venni az egyváltozós függvények esetében megtanult összetett függvények deriválására vonatkozó szabályt is.

$$f'_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(2xy+3y^4)\right)=\underbrace{\frac{1}{2xy+3y^4}}_{\text{külső deriváltja}}\cdot\underbrace{(2y)}_{\text{belső deriváltja}}=\frac{2y}{2xy+3y^4}$$

$$f'_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(2xy+3y^4)\right)=\underbrace{\frac{1}{2xy+3y^4}}_{\text{külső deriváltja}}\cdot\underbrace{(2x+12y^3)}_{\text{belső deriváltja}}=\frac{2x+12y^3}{2xy+3y^4}$$

A másodrendű parciális deriváltak meghatározásánál az egyváltozós függvények esetében megtanult törtek deriválására vonatkozó szabályra kell emlékezni, amely a következő volt:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Ezt felhasználva képezzük a másodrendű parciális deriváltakat:

$$f''_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{2xy+3y^4}\right)=\frac{0\cdot(2xy+3y^4)-2y(2y+0)}{(2xy+3y^4)^2}=\frac{-4y^2}{(2xy+3y^4)^2}$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{2xy+3y^4}\right)=\frac{2\cdot(2xy+3y^4)-2y(2x+12y^3)}{(2xy+3y^4)^2}=\frac{6y^2-24y^4}{(2xy+3y^4)^2}$$

$$f''_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x+12y^3}{2xy+3y^4}\right)=\frac{(2+0)\cdot(2xy+3y^4)-(2x+12y^3)\cdot(2y+0)}{(2xy+3y^4)^2}=\frac{-18y^4}{(2xy+3y^4)^2}$$

$$f''_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x+12y^3}{2xy+3y^4}\right)=\frac{(0+36y^2)\cdot(2xy+3y^4)-(2x+12y^3)\cdot(2x+12y^3)}{(2xy+3y^4)^2}=\frac{24xy^3-36y^6-4x^2}{(2xy+3y^4)^2}$$

6. feladat: Állítsuk elő a következő háromváltozós függvény elsőrendű parciális deriváltjait:

$$f(x,y,z)=xy^2z^3+2x-3y^2+4\sqrt{z}.$$

Megoldás:

Az $f(x,y,z)$ függvénynek most három változója van, így három elsőrendű parciális deriváltat tudunk megadni. Kezdjük az *x* szerinti deriválással. Ilyenkor az *y*-t és *z*-t konstansnak kell tekinteni.

$$f'_x(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}(xy^2z^3+2x-3y^2+4\sqrt{z})=y^2z^3+2.$$

Ha *y* szerint deriválunk, akkor az *x*-et és a *z*-t tekintjük konstansnak:

$$f'_y(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}(xy^2z^3+2x-3y^2+4\sqrt{z})=2xyz^3-6y.$$

Ha *z* szerint deriválunk, akkor az *x*-et és az *y*-t tekintjük konstansnak:

$$f_z'(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}(xy^2z^3+2x-3y^2+4\sqrt{z})=3xy^2z^2+4\cdot\frac{1}{2\sqrt{z}}=3xy^2z^2+\frac{2}{\sqrt{z}}.$$

Ellenőrző kérdések

1. kérdés: Legyen $f(x,y)=3x^2y^3-2x+5y^2$. Számítsuk ki az $f_x'(1,-1)$ és $f_y'(1,-1)$ értékeket!

Megoldás

$f_x'(1,-1)=-1$ és $f_y'(1,-1)=-8$

$f_x'(1,-1)=9$ és $f_y'(1,-1)=-3$

$f_x'(1,-1)=-8$ és $f_y'(1,-1)=-1$ (X)

$f_x'(1,-1)=-3$ és $f_y'(1,-1)=5$

2. kérdés: Legyen $f(x,y)=\frac{4}{x}+x^2y+\frac{y}{4}$. Mivel egyenlő $f_x'(x,y)+f_y'(x,y)$?

Megoldás

$x^2-\frac{4}{x^2}+2xy+\frac{1}{4}$ **(X)**

$x^2-\frac{4}{x^2}+2xy+\frac{y}{4}$

$x^2-\frac{4}{x^2}+2xy$

$x^2-\frac{4}{x^2}+xy+\frac{y}{4}$

3. kérdés: Legyen $f(x,y)=\frac{4}{x}+x^2y+\frac{y}{4}$. Mivel egyenlő $f_{xy}''(x,y)$ és $f_{yy}''(x,y)$?

Megoldás

$f_{xy}''(x,y)=2x$ és $f_{yy}''(x,y)=0$ (X)

$f_{xy}''(x,y)=0$ és $f_{yy}''(x,y)=\frac{1}{4}$

$f_{xy}''(x,y)=2x+\frac{y}{4}$ és $f_{yy}''(x,y)=\frac{4}{x}+x^2$

$f_{xy}''(x,y)=2x$ és $f_{yy}''(x,y)=\frac{1}{4}$

4. kérdés: Legyen $f(x,y)=\cos(8x-4y)$. Mivel egyenlő $f_y'(x,y)$ és $f_{yx}''(x,y)$?

Megoldás

$f_y'(x,y)=-8\sin(8x-4y)$ és $f_{yx}''(x,y)=-64\cos(8x-4y)$

$f_y'(x,y)=4\sin(8x-4y)$ és $f_{yx}''(x,y)=-16\cos(8x-4y)$

$f_y'(x,y)=-4\sin(8x-4y)$ és $f_{yx}''(x,y)=16\cos(8x-4y)$

$f'_y(x,y) = 4\sin(8x-4y)$ és $f''_{yx}(x,y) = 32\cos(8x-4y)$ (X)

5. kérdés: Legyen $f(x,y) = e^{x^3+3y^2}$. Határozza meg a tiszta másodrendű parciális deriváltakat!

Megoldás

$f''_{xx}(x,y) = e^{x^3+3y^2}(6xy+9x^4)$ és $f''_{yy}(x,y) = e^{x^3+3y^2}(6x^2+36y^2)$

$f''_{xx}(x,y) = 6x^2 e^{x^3+3y^2}$ és $f''_{yy}(x,y) = 6e^{x^3+3y^2}$

$f''_{xx}(x,y) = e^{x^3+3y^2}(6x+9x^4)$ és $f''_{yy}(x,y) = e^{x^3+3y^2}(6+36y^2)$ (X)

$f''_{yy}(x,y) = e^{x^3+3y^2}(6x^2+36y^2)$ és $f''_{yy}(x,y) = 6e^{x^3+3y^2}$

6. kérdés: Legyen $f(x,y) = \ln(4x^2+9y^3)$. Határozza meg az $f'_y(x,y)$ és $f''_{xy}(x,y)$ függvényeket!

Megoldás

$f'_y(x,y) = \dfrac{27y^2}{4x^2+9y^3}$ és $f''_{xy}(x,y) = -\dfrac{216xy^2}{(4x^2+9y^3)^2}$ (X)

$f'_y(x,y) = \dfrac{1}{4x^2+9y^3}$ és $f''_{xy}(x,y) = -\dfrac{8x}{(4x^2+9y^3)^2}$

$f'_y(x,y) = \dfrac{27y^2}{4x^2+9y^3}$ és $f''_{xy}(x,y) = -\dfrac{729y^5}{(4x^2+9y^3)^2}$

$f'_y(x,y) = \dfrac{27y^2}{4x^2+9y^3}$ és $f''_{xy}(x,y) = \dfrac{54y}{4x^2+27y}$

A gradiensvektor

Definíció: Legyen az $f(x,y)$ függvény differenciálható az (x_0,y_0) pontban. Ekkor az $f(x,y)$ függvény gradiensvektora (röviden gradiense) az (x_0,y_0) pontban az alábbi vektor:

$$grad\ f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)=\left(f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0)\right).$$

Megjegyzés: Egy pontban a gradiens vektor az a vektor, amelynek irányába a függvény a leggyorsabban nő, az ezzel ellentétes irányba pedig a függvény a leggyorsabban csökken. A gradiensre merőleges két irányba a függvény a leglassabban változik.
A gradiensvektor merőleges a pontban átmenő szintvonalra!

Az iránymenti derivált

Definíció: Legyen az $f(x,y)$ függvény differenciálható az (x_0,y_0) pontban és legyen $\mathbf{v}(v_1,v_2)$ egy tetszőleges, nem nulla vektor. Ekkor az $f(x,y)$ függvény $\mathbf{v}$ irányú deriváltja az (x_0,y_0) pontban:

$$f'_{\mathbf{v}}(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}+f'_y(x_0,y_0)\frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}=\left\langle grad\ f(x_0,y_0),\mathbf{v_e}\right\rangle,$$

ahol $\|\mathbf{v}\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$ a $\mathbf{v}$ vektor hossza, $\mathbf{v_e}$ pedig a $\mathbf{v}$ irányú egységvektor.

Megjegyzés: Ez lényegében a parciális derivált általánosítása. Az *x* szerinti parciális derivált a $\mathbf{v}(1,0)$ irányú, az *y* szerinti parciális derivált pedig a $\mathbf{v}(0,1)$ irányú iránymenti deriváltnak felel meg.

Az érintősík

Definíció: Legyen az $f(x,y)$ kétváltozós függvény deriválható az (x_0,y_0) pontban. Ekkor a felületet az (x_0,y_0,z_0) pontban olyan sík érinti, melynek normálvektora $\mathbf{n}=\left(f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0),\ -1\right)$, így az érintősík egyenlete:

$$f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)-1\cdot(z-z_0)=0\,.$$

Megjegyzés: Ha ezt a formulát z-re rendezzük, akkor ez a sík tekinthető egy kétváltozós függvény grafikonjának. Hasonlóan az egyváltozós esethez, ez a sík az érintési pont közelében nagyon jól közelíti az eredeti függvényt, ezért tekinthető az $f(x,y)$ függvény (x_0,y_0)-beli linearizáltjának.

7. feladat: Határozzuk meg az $f(x,y)=2x^2y+3x-4\sqrt{y}$ függvény gradiensét az $(1,9)$ pontban!

Megoldás

Először meg kell határoznunk a parciális deriváltak értékét az $(1,9)$ pontban.

$f'_x(x,y)=4xy+3\quad\to f'_x(1,9)=4\cdot1\cdot9+3=39$

$f'_y(x,y)=2x^2-4\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y}}=2x^2-\dfrac{2}{\sqrt{y}}\quad\to f'_y(1,9)=2\cdot1^2-\dfrac{2}{\sqrt{9}}=2-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}.$

Ezek ismeretében már fel tudjuk írni a gradienst:

$grad\, f(1,9) = \left(39, \frac{4}{3}\right).$

8. feladat: Határozzuk meg az $f(x,y) = x\ln(x-y)$ függvény gradiensét a $(2e,e)$ pontban!

Megoldás

$$f'_x(x,y) = 1\cdot\ln(x-y) + x\cdot\frac{1}{x-y}\cdot 1 = \ln(x-y) + \frac{x}{x-y} \quad \to f'_x(2e,e) = \ln(2e-e) + \frac{2e}{2e-e} = 1+2 = 3$$

$$f'_y(x,y) = x\cdot\frac{1}{x-y}\cdot(-1) = -\frac{x}{x-y} \quad \to f'_y(2e,e) = -\frac{2e}{2e-e} = -\frac{2e}{e} = -2\,.$$

$grad\, f(2e,e) = (3,-2)$.

9. feladat: Számítsuk ki az $f(x,y) = 2xy^3 - 3x + y$ függvény $\mathbf{v}(1,2)$ irányú iránymenti deriváltját az $(1,0)$ pontban!

Megoldás

Először határozzuk meg a függvény gradiensét ebben a pontban.

$f'_x(x,y) = 2y^3 - 3 \quad \to f'_x(1,0) = 0-3 = -3$

$f'_y(x,y) = 6xy^2 + 1 \quad \to f'_y(1,0) = 0+1 = 1$

$grad\, f(1,0) = (-3,1)$.

Szükségünk van a $\mathbf{v}(1,2)$ irányú egységvektorra:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5} \quad \to \quad \mathbf{v_e}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Minden szükséges adat a rendelkezésünkre áll ahhoz, hogy az iránymenti deriváltat ki tudjuk számolni:

$$f'_{\mathbf{v}}(1,0) = \left\langle (-3,1), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle = -\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

10. feladat: Számítsuk ki az $f(x,y) = xe^y - ye^x$ függvény $\mathbf{v}(3,-4)$ irányú iránymenti deriváltját az $(1,-1)$ pontban!

Megoldás

Először határozzuk meg a függvény gradiensét az adott pontban.

$$f'_x(x,y) = e^y - ye^x \quad \to f'_x(1,-1) = e^{-1} - (-e) = \frac{1}{e} + e$$

$$f'_y(x,y) = xe^y - e^x \quad \to f'_y(1,-1) = 1\cdot e^{-1} - e = \frac{1}{e} - e\,.$$

$$grad\, f(1,-1) = \left(\frac{1}{e}+e, \frac{1}{e}-e\right).$$

Szükségünk lesz a $\mathbf{v}(3,-4)$ irányú egységvektorra:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \quad \to \quad \mathbf{v_e}\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right).$$

A keresett iránymenti derivált:

$$f'_{\mathbf{v}}(1,-1) = \left\langle \left(\frac{1}{e} + e, \frac{1}{e} - e\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right) \right\rangle = \frac{3}{5e} + \frac{3}{5}e - \frac{4}{5e} + \frac{4}{5}e = -\frac{1}{5e} + \frac{7}{5}e \approx 3,73\,.$$

11. feladat: Írjuk fel az $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + y$ függvény érintősíkjának egyenletét a $(-1,1)$ pontban!

Megoldás

Először határozzuk meg az érintési pont $z_0 = f(x_0, y_0)$ harmadik koordinátáját:

$$z_0 = f(-1,1) = 2\cdot(-1)^2 + 2\cdot 1^2 + 1 = 2 + 2 + 1 = 5\,.$$

Most határozzuk meg a parciális deriváltak értékeit az adott pontban:

$$f'_x(x,y) = 4x \quad \to f'_x(-1,1) = -4$$

$$f'_y(x,y) = 4y + 1 \quad \to f'_y(-1,1) = 4 + 1 = 5\,.$$

Eszerint olyan síkot keresünk, amelynek ismert pontja és normálvektora a következő:

$$P_0(-1,1,5) \quad \mathbf{n}(-4,5,-1)\,.$$

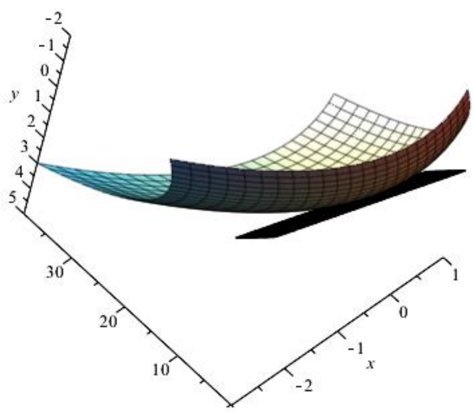
Így a keresett sík egyenlete:

$$-4(x+1) + 5(y-1) - 1(z-5) = 0\,.$$

Rendezve a szokásos alakra:

$$-4x + 5y - z = 4\,.$$

A feladat megoldását az ábra mutatja. A térbeli koordináta rendszer egy kicsit el van forgatva azért, hogy jobban látható legyen az érintősík.



Ellenőrző kérdések

7. kérdés Határozzuk meg az $f(x,y) = 2\sqrt[3]{x}\,y + \frac{3}{x}y$ függvény gradiensét az $(8,1)$ pontban!

Megoldás

$grad\ f(8,1) = \left(-\frac{56}{3}, 5\right)$

$grad\ f(8,1) = \left(\frac{23}{192}, 5\right)$

$grad\ f(8,1) = \left(\frac{23}{192}, \frac{35}{8}\right)$ **(X)**

$grad\ f(8,1) = \left(-\frac{56}{3}, \frac{35}{8}\right)$

8. kérdés: Határozzuk meg az $f(x,y) = y\ln(4x-5y)$ függvény gradiensét a $(-e,-e)$ pontban!

Megoldás

$grad\ f(-e,-e) = (4,-6)$

$grad\ f(-e,-e) = (4,6)$

$grad\ f(-e,-e) = (6,1)$

$grad\ f(-e,-e) = (-4,6)$ **(X)**

9. kérdés: Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2y^3 + 2y - x$ függvény $\mathbf{v}(-8,15)$ irányú iránymenti deriváltját a $(-1,0)$ pontban!

Megoldás

$f'_v = \frac{38}{17}$ **(X)**

$f'_v = \frac{22}{17}$

$f'_v = -\frac{8}{17}$

$f'_v = \frac{30}{17}$

10. kérdés: Írjuk fel az $f(x,y) = \sqrt{x} - 3x\sqrt{y}$ függvény érintősíkjának egyenletét az $(1,1)$ pontban!

Megoldás

$5x - 3y + 2z = 4$

$3x + 5y + 2z = 4$

$5x + 3y + 2z = 4$ **(X)**

$2x + 3y + 2z = 4$

11. kérdés: Írjuk fel az $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ függvény érintősíkjának egyenletét az $(1,1)$ pontban!

Megoldás

$x+y-z=1$
$-x-y+z=-1$
$x-y+z=-1$
$x-y-z=-1$ **(X)**

Kétváltozós függvények lokális szélsőértékeinek meghatározása

A kétváltozós függvények értelmezési tartományának belső pontjaiba eső szélsőértékeinek meghatározásával foglalkozunk, és azt is feltételezzük, hogy a függvények egy-egy ilyen pontban akárhányszor differenciálhatók.

Definíció: Legyen (x_0, y_0) az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartományának egy belső pontja. Az (x_0, y_0) lokális maximum hely, ha van olyan (x_0, y_0) középpontú körlap, hogy ennek minden pontjában $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.

Definíció: Legyen (x_0, y_0) az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartományának egy belső pontja. Az (x_0, y_0) lokális minimum hely, ha van olyan (x_0, y_0) középpontú körlap, hogy ennek minden pontjában $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$.

A lokális maximum helyet és a lokális minimum helyet összefoglalva lokális szélsőérték helynek hívjuk. A lokális maximum helyen felvett értéket lokális maximumnak, a lokális minimum helyen felvett értéket pedig lokális minimumnak, a kettőt együtt lokális szélsőértéknek hívjuk.

Definíció: Az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartományának azon pontjait, ahol mindkét parciális derivált nulla az *f* függvény stacionárius pontjainak nevezzük.

Tétel: Legyen (x_0, y_0) az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartományának egy belső pontja. Ha az $f(x, y)$ függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke van, és itt mindkét változó szerint parciálisan deriválható, akkor

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) &= 0 \\ f'_y(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}.$$

Megjegyzés: Lokális szélsőérték hely csak stacionárius pont lehet. De nem minden stacionárius pont lesz lokális szélsőérték hely!

Ahhoz, hogy a stacionárius pontok közül ki tudjuk választani a szélsőérték helyeket, szükségünk lesz a Hesse mátrix ismeretére.

Definíció: Az $f(x, y)$ kétváltozós függvény Hesse mátrixának a következő 2x2-es mátrixot nevezzük:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{pmatrix}.$$

A Hesse mátrix mindig egy szimmetrikus mátrix. Ha kiszámoljuk a Hesse mátrix determinánsát, akkor a következő kifejezéshez jutunk:

$$D(x, y) = f''_{xx}(x, y) f''_{yy}(x, y) - f''_{xy}(x, y) f''_{yx}(x, y).$$

Tétel: Legyen (x_0, y_0) az $f(x, y)$ függvény egy stacionárius pontja. Ekkor

- ha $D(x_0, y_0) > 0$ és $f''_{xx}(x, y) > 0$, akkor (x_0, y_0) lokális minimum hely,

- ha $D(x_0, y_0) > 0$ és $f''_{xx}(x, y) < 0$, akkor (x_0, y_0) lokális maximum hely.
- ha $D(x_0, y_0) < 0$, akkor (x_0, y_0) nyeregpont,
- ha $D(x_0, y_0) = 0$, akkor az (x_0, y_0) pontról nem tudunk semmiféle megállapítást tenni.

12. feladat: Határozzuk meg az $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 + 2xy + 6$ függvény lokális szélsőérték helyeit!

Megoldás

Függvényünk mindenhol értelmezve van és mindenhol kétszer parciálisan deriválható is.

Első lépésként meg kell határozni az elsőrendű parciális deriváltakat.

$$f'_x(x, y) = 2x + 2y$$

$$f'_y(x, y) = 8y + 2x .$$

Utána ezeket egyenlővé téve nullával, meg kell oldani az így kapott egyenletrendszert. Az egyenletrendszer megoldásai adják a stacionárius pontokat, amelyek a lehetséges szélsőérték helyek. Azaz:

$$\left.\begin{aligned} 4x + 2y &= 0 \\ 8y + 2x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Ha az első egyenletből kivonjuk a második egyenlet kétszeresét, akkor

$$2y - 16y = 0 \quad \to \quad y = 0 \to \quad x = 0$$

Tehát most egyetlen egy stacionárius pontot kaptunk: $P(0,0)$.

Most el kell döntenünk, hogy ez a stacionárius pont szélsőérték hely lesz-e. Ehhez előállítjuk a másodrendű parciális deriváltakat, majd felírjuk a Hesse mátrix determinánsát.

$$f''_{xx}(x, y) = 4$$

$$f''_{xy}(x, y) = 2$$

$$f''_{yx}(x, y) = 2$$

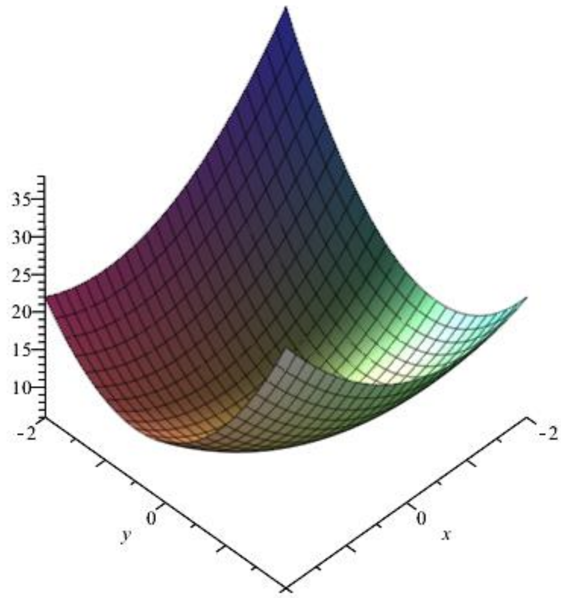
$$f''_{yy}(x, y) = 8 .$$

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \to \quad D(x, y) = 4 \cdot 8 - 2 \cdot 2 = 28 > 0 .$$

Mivel a determináns pozitív és $f''_{xx}(0,0) = 4 > 0$, ezért a $P(0,0)$ egy lokális minimum hely. A minimum értéke ebben a pontban:

$$f(0,0) = 6 .$$

A függvény grafikonja:



13. feladat: Határozzuk meg az $f(x,y)=3x^2-30x+y^3-6xy-15y+8$ függvény lokális szélsőérték helyeit!

Megoldás

Első lépés az elsőrendű parciális deriváltak előállítása:

$$f'_x(x,y)=6x-30-6y$$

$$f'_y(x,y)=3y^2-6x-15$$

Második lépésként stacionárius pontokat keresünk az alábbi egyenletrendszert megoldva:

$$\left.\begin{array}{l} 6x-30-6y=0 \\ 3y^2-6x-15=0 \end{array}\right\}.$$

Az első egyenletből fejezzük ki *x*-et**:**

$$6x-30-6y=0 \quad \rightarrow \quad x=5+y\,.$$

Az így kapott kifejezést helyettesítsük be a második egyenletbe, majd rendezzünk:

$$3y^2-6(5+y)-15=0 \quad \rightarrow 3y^2-6y-45=0 \quad \rightarrow \quad y^2-2y-15=0\,.$$

Egy másodfokú egyenlethez jutunk. A megoldóképletből $y_1=5$ és $y_2=-3$ értékeket kapjuk. Mindegyikhez kiszámoljuk a neki megfelelő x értéket is. Eszerint két stacionárius pontot kapunk: $P_1(10,5)$ és $P_1(2,-3)$.

Előállítjuk a másodrendű parciális deriváltakat és a Hesse mátrixot:

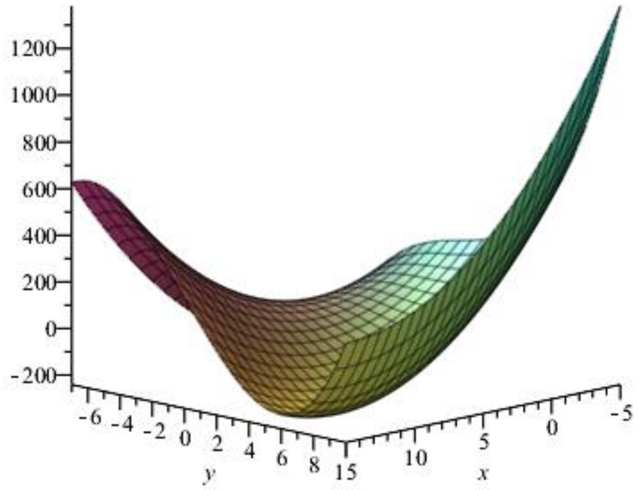
$$f''_{xx}=6 \quad f''_{xy}=-6 \quad f''_{yx}=-6 \quad f''_{yy}=6y\,.$$

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad D(x,y)=36y-36\,.$$

A stacionárius pontokat egyenként megvizsgáljuk, hogy el tudjuk róluk dönteni, hogy szélsőértéke helyek-e vagy sem.

$D(10,5) = 36 \cdot 5 - 36 = 144 > 0$ és $f''_{xx} = 6 > 0$, ezért a $P_1(10,5)$ lokális minimum hely.

$D(2,-3) = 36 \cdot (-3) - 36 = -144 < 0$, ezért a $P_1(2,-3)$ pont nyeregpont.



14. feladat: Keressük meg az $f(x,y) = 2 + xy - x^3 - y^2$ függvény lokális szélsőérték helyeit!

Megoldás

Ugyanazt az utat követjük, mint az előző feladatban. Először a stacionárius pontok megkereséséhez előállítjuk az elsőrendű parciális deriváltakat.

$$f'_x(x,y) = y - 3x^2$$
$$f'_y(x,y) = x - 2y\,.$$

Második lépésként stacionárius pontokat keresünk az alábbi egyenletrendszert megoldva:

$$\left.\begin{aligned} y - 3x^2 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{aligned}\right\}.$$

A második egyenletből kifejezzük az x változó, majd ezt a kifejezést az első egyenletbe visszahelyettesítve, a kapott másodfokú egyenletet megoldjuk:

$$x = 2y \quad \rightarrow \quad y - 3(2y)^2 = 0 \quad \rightarrow y - 12y^2 = 0$$

Ez egy hiányos másodfokú egyenlet, amit szorzattá alakítással oldunk meg, kihasználva, hogy egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

$$y - 12y^2 = 0 \quad \rightarrow y(1-12y) = 0 \quad \rightarrow y_1 = 0 \quad y_2 = \frac{1}{12}\,.$$

Eszerint két stacionárius pontot kapunk:

$$y_1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \rightarrow \quad P_1(0,0)$$
$$y_2 = \frac{1}{12} \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{6} \quad \rightarrow \quad P_1\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right).$$

Most meg kell vizsgálnunk, hogy ezen stacionárius pontok valóban szélsőérték helyek-e. Ehhez szükségünk lesz a másodrendű parciális deriváltakra.

$$f''_{xx}(x,y) = -6x$$

$$f''_{xy}(x,y) = 1$$

$$f''_{yx}(x,y) = 1$$

$$f''_{yy}(x,y) = -2$$

A másodrendű deriváltakból felírjuk a Hesse mátrixot:

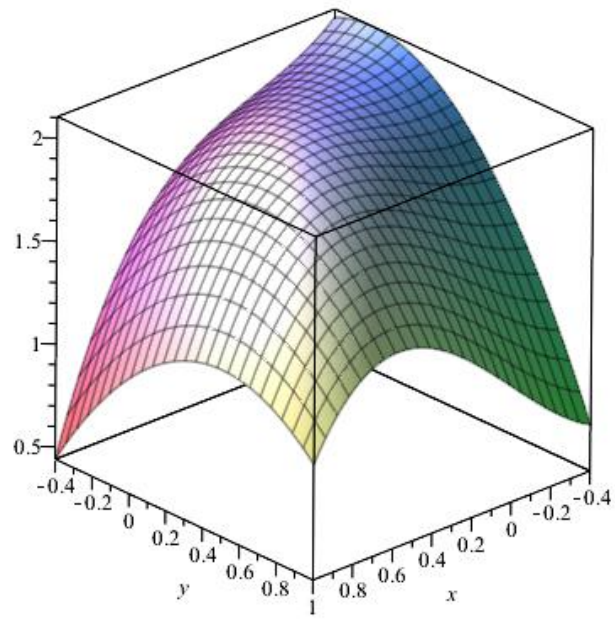
$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad D(x,y) = 12x - 1.$$

A stacionárius pontokat egyenként megvizsgáljuk, hogy el tudjuk róluk dönteni, hogy szélsőértéke helyek-e vagy sem.

$D(0,0) = 12 \cdot 0 - 1 = -1 < 0$, ezért a $P_1(0,0)$ pont nyeregpont.

$D\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = 12 \cdot \frac{1}{6} - 1 = 1 > 0$ és $f''_{xx} = -1 < 0$, ezért a $P_1\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ lokális maximum hely. Ebben a pontban a függvény értéke:

$$f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = 2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{865}{432}.$$



Ellenőrző kérdések

12. kérdés: Keressük meg az $f(x,y) = 3(x+2)^2 + 4(y-1)^2$ függvény lokális szélsőérték helyeit!

Megoldás

$P(-2,1)$ lokális minimum hely (X)
$P(-2,1)$ lokális maximum hely
$P(-2,1)$ nyeregpont
nincs lokális szélsőértéke.

13. kérdés: Keressük meg az $f(x,y)=x^3-3xy-y^3$ függvény lokális szélsőérték helyeit!

Megoldás

$P(0,0)$ lokális maximum hely
$P(0,0)$ lokális minimum hely
$P(-1,1)$ lokális maximum hely (X)
$P(-1,1)$ nyeregpont

14. kérdés: Az $f(x,y)=x^3-12x+y^3-12y$ függvénynek

Megoldás

két stacionárius pontja van.
három stacionárius pontja van.
két lokális minimuma van.
egy lokális minimuma és egy lokális maximuma van. (X)

15. kérdés Az $f(x,y)=6-2xy-x^3-y^3$ függvénynek

Megoldás

1 stacionárius pontja van.
2 lokális minimuma van.
1 lokális maximuma van. (X)
nincs szélsőértéke.

Összetett feladatok

15. feladat: Számítsuk ki az alábbi kétváltozós függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit:

$$f(x,y)=(4x^2y-3^x)\cdot\ln(2x^2-5y)\,.$$

Megoldás

Ebben a feladatban egy szorzatot kell parciálisan deriválni, ráadásul a második tényező összetett függvény.

Alkalmazva az egyváltozós függvényeknél a szorzat deriváltjára tanult szabályt:

$$f'_x(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}(4x^2y-3^x)\right)\cdot\ln(2x^2-5y)+(4x^2y-3^x)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(2x^2-5y)\right)=$$

$$(8xy-3^x\cdot\ln 3)\cdot\ln(2x^2-5y)+(4x^2y-3^x)\cdot\frac{1}{2x^2-5y}\cdot 4x\,.$$

$$f'_y(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial y}(4x^2y-3^x)\right)\cdot\ln(2x^2-5y)+(4x^2y-3^x)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(2x^2-5y)\right)=$$

$$4x^2\cdot\ln(2x^2-5y)+(4x^2y-3^x)\cdot\frac{1}{2x^2-5y}\cdot(-5)\,.$$

16. feladat: Számítsuk ki az alábbi kétváltozós függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit:

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{2xy^2-4y^2}}{x^2y^3+x}\,.$$

Megoldás

Ebben a feladatban egy törtet kell parciálisan deriválni, ráadásul a számláló egy összetett függvény.

Alkalmazva az egyváltozós függvényeknél a hányados deriváltjára tanult szabályt:

$$f'_x=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{2xy^2-4y^2}\right)\cdot(x^2y^3+x)-\sqrt{2xy^2-4y^2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3+x)\right)}{(x^2y^3+x)^2}=$$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{2xy^2-4y^2}}\cdot(2y^2)\cdot(x^2y^3+x)-\sqrt{2xy^2-4y^2}\cdot(2xy^3+1)}{(x^2y^3+x)^2}\,.$$

$$f'_y=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\left(\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{2xy^2-4y^2}\right)\cdot(x^2y^3+x)-\sqrt{2xy^2-4y^2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3+x)\right)}{(x^2y^3+x)^2}=$$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{2xy^2-4y^2}}\cdot(4xy-8y)\cdot(x^2y^3+x)-\sqrt{2xy^2-4y^2}\cdot(3x^2y^2)}{(x^2y^3+x)^2}\,.$$

17. feladat: Határozzuk meg az $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ függvény gradiensét a $(-4,3)$ pontban!

Megoldás

Végezzünk algebrai átalakításokat a deriválás előtt.

$$f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\,.$$

Most kiszámolva a parciális deriváltak értékeit:

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x=\frac{x}{x^2+y^2}\to f'_x(-4,3)=\frac{-4}{(-4)^2+3^2}=-\frac{4}{25}$$

$$f'_y(x,y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y=\frac{y}{x^2+y^2}\to f'_y(-4,3)=\frac{3}{(-4)^2+3^2}=\frac{3}{25}\,.$$

A parciális deriváltak értékeiből már elő tudjuk állítani a gradienst:

$$grad\, f(-4,3)=\left(-\frac{4}{25},\frac{3}{25}\right).$$

18. feladat: Határozzuk meg az $f(x,y)=xe^{y-x}$ függvény gradiensét a $(2,1)$ pontban!

Megoldás

Először a parciális deriváltakat kell kiszámolni. A deriválás során használnunk kell a szorzatra és az összetett függvényre vonatkozó deriválási szabályokat is:

$$f'_x(x,y)=1\cdot e^{y-x}+x\cdot e^{y-x}\cdot(-1)=e^{y-x}(1-x)\to f'_x(2,1)=e^{1-2}(1-2)=-e^{-1}=-\frac{1}{e}$$

$$f'_y(x,y)=x\cdot e^{y-x}\cdot 1=x\,e^{y-x}\to f'_y(2,1)=2\cdot e^{1-2}=2e^{-1}=\frac{2}{e}\,.$$

Ezek ismeretében már elő tudjuk állítani a gradienst a $(2,1)$ pontban:

$$grad\ f(2,1)=\left(-\frac{1}{e},\frac{2}{e}\right).$$

19. feladat: Számítsuk ki az $f(x,y)=xe^{2x}+ye^{-2y}$ függvény $\mathbf{v}(5,12)$ irányú iránymenti deriváltját az $(1,2)$ pontban!

Megoldás

Először meg kell határoznunk a gradiens vektort az adott pontban. A parciális deriváltak meghatározásánál alkalmaznunk kell a szorzat függvény és az összetett függvény deriválási szabályát:

$$f'_x(x,y)=e^{2x}+2xe^{2x}\quad\to f'_x(1,2)=e^2+2\cdot 1\cdot e^2=3e^2$$

$$f'_y(x,y)=e^{-2y}-2ye^{-2y}\quad\to f'_y(1,2)=e^{-4}-2\cdot 2\cdot e^{-4}=-3e^{-4}\,.$$

Eszerint a gradiens vektor az $(1,2)$ pontban:

$$grad\ f(1,2)=\left(3e^2,-3e^{-4}\right).$$

Szükségünk van a $\mathbf{v}(5,12)$ irányú egységvektorra:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} = 13 \quad \to \quad \mathbf{v_e}\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right).$$

Minden szükséges adat a rendelkezésünkre áll ahhoz, hogy az iránymenti deriváltat ki tudjuk számolni:

$$f'_{\mathbf{v}}(1,2) = \left\langle \left(3e^2, -3e^{-4}\right), \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right) \right\rangle = \frac{15}{13}e^2 - \frac{36}{13}e^{-4} \approx 8,48.$$

20. feladat: Számítsuk ki az $f(x,y) = (2x+y)^4$ függvény $\mathbf{v}(3,-4)$ irányú iránymenti deriváltját a $(2,1)$ pontban!

Megoldás

Első lépés a gradiens előállítása az adott pontban:

$$f'_x(x,y) = 4\cdot(2x+y)^3\cdot 2 = 8(2x+y)^3 \quad \to f'_x(2,1) = 8(4+1)^3 = 1000$$

$$f'_y(x,y) = 4\cdot(2x+y)^3\cdot 1 = 4(2x+y)^3 \quad \to f'_y(2,1) = 4(4+1)^3 = 500$$

$$grad\ f(2,1) = (1000, 500).$$

Szükségünk van a $\mathbf{v}(3,-4)$ irányú egységvektorra:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \quad \to \quad \mathbf{v_e}\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

Ekkor a keresett iránymenti derivált:

$$f'_{\mathbf{v}}(2,1) = \left\langle (1000, 500), \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \right\rangle = 600 - 400 = 200.$$

21. feladat: Írjuk fel az $f(x,y) = \sqrt{64-x^2-4y}$ függvény érintősíkjának egyenletét a $(6,3)$ pontban!

Megoldás

Elsőként határozzuk meg az érintési pont $z_0 = f(x_0, y_0)$ harmadik koordinátáját:

$$z_0 = f(6,3) = \sqrt{64-6^2-4\cdot 3} = \sqrt{16} = 4.$$

Most számítsuk ki a parciális deriváltak értékeit a $(6,3)$ pontban. A függvény mindkét változója szerint összetett függvény.

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{64-x^2-4y}}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{64-x^2-4y}} \quad \to f'_x(6,3) = -\frac{6}{\sqrt{64-6^2-4\cdot 3}} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{64-x^2-4y}}\cdot(-4) = -\frac{2}{\sqrt{64-x^2-4y}} \quad \to f'_y(6,3) = -\frac{2}{\sqrt{64-6^2-4\cdot 3}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Eszerint olyan síkot keresünk, amelynek ismert pontja és normálvektora a következő:

$P_0(6,3,4)$ $\mathbf{n}\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$.

Tehát a keresett sík egyenlete:

$$-\frac{3}{2}(x-6)-\frac{1}{2}(y-3)-1(z-4)=0\,.$$

Rendezve a szokásos alakra:

$$-3x-y-2z=-29\,.$$

22. feladat: Keressük meg az $f(x,y)=4x^2e^y-2x^4-e^{4y}$ függvény lokális szélsőérték helyeit!

Megoldás

Az $f(x,y)$ függvény ebben a feladatban is folytonos második deriváltakkal rendelkezik, és értelmezési tartománya a teljes sík, így szélsőértéke csak a stacionárius pontokban lehet. A stacionárius pontokat meghatározó elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y)=8xe^y-8x^3$$

$$f'_y(x,y)=4x^2e^y-4e^{4y}\,.$$

A stacionárius pontokat megadó egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned}8xe^y-8x^3&=0\\4x^2e^y-4e^{4y}&=0\end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenletet alakítsuk szorzattá:

$$8x(e^y-x^2)=0\,.$$

Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, tehát első esetben:

$$8x=0 \quad\to\quad x=0\,.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe:

$$4\cdot 0\cdot e^y-4e^{4y}=0 \quad\to\quad 4e^{4y}=0\,,$$

ami soha nem teljesül, mivel *e*-t bármire is emeljük, mindig pozitív számot kapunk eredményül. Tehát ezen az ágon az egyenletrendszernek megoldása nincs.

Második esetben a szorzat második tényezője legyen nulla:

$$e^y-x^2=0 \quad\to\quad e^y=x^2\,.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe:

$$4x^2\cdot x^2-4(x^2)^4=0 \quad\to 4x^4-4x^8=0 \quad\to x=\pm1\,.$$

Az egyenletből még az $x=0$ eredmény is kiszámolható, de azt már az előző részben láttuk, hogy nem lesz megoldás.

Visszahelyettesítve a kapott eredményt:

$$x=\pm1 \quad\to\quad e^y=1 \quad\to\quad y=0\,.$$

Eszerint két stacionárius pont van:

$P_1(1,0)$ és $P_2(-1,0)$.

Következő lépésben előállítjuk a másodrendű parciális deriváltakat és a Hesse mátrixot.

$f''_{xx}(x,y) = 8e^y - 24x^2$

$f''_{xy}(x,y) = 8xe^y$

$f''_{yx}(x,y) = 8xe^y$

$f''_{yy}(x,y) = 4x^2e^y - 16e^{4y}$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 8e^y - 24x^2 & 8xe^y \\ 8xe^y & 4x^2e^y - 16e^{4y} \end{pmatrix} \rightarrow D(x,y) = \left(8e^y - 24x^2\right)\left(4x^2e^y - 16e^{4y}\right) - \left(8xe^y\right)^2.$$

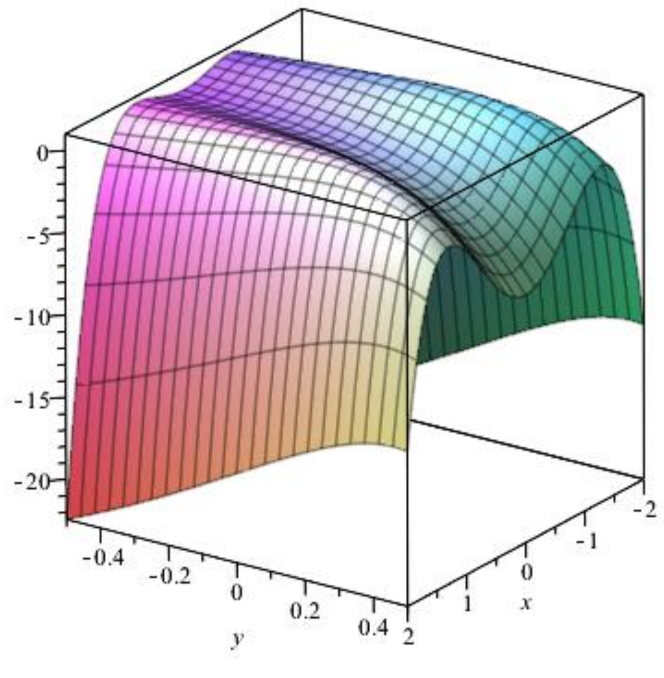
Most a stacionárius pontok vizsgálata következik:

$D(1,0) = (8-24)(4-16) - (8)^2 = 128 > 0$ és $f''_{xx}(1,0) = -16 < 0$,

ezért a $P_1(1,0)$ pontban maximum hely van. A maximum értéke: $f(1,0) = 1$.

$D(-1,0) = (8-24)(4-16) - (-8)^2 = 128 > 0$ és $f''_{xx}(-1,0) = -16 < 0$

ezért a $P_2(-1,0)$ pontban is maximum hely van. A maximum értéke: $f(-1,0) = 1$.



23. feladat: Határozza meg az $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy}$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás

Mivel a függvény nevezőjében szerepel *x* és *y*, ezért az értelmezési tartomány a teljes sík, kivéve a két koordináta tengely pontjai. Ahol a függvény értelmezve van, ott a parciális deriváltjai is léteznek.

$f'_x(x,y) = 2x - \dfrac{2}{x^2 y}$

$f'_y(x,y) = 2y - \dfrac{2}{xy^2}$.

Meg kell oldani az alábbi egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} 2x - \frac{2}{x^2 y} = 0 \\ 2y - \frac{2}{xy^2} = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenletből $y = \dfrac{1}{x^3}$ kapható, ezt behelyettesítve a második egyenletbe:

$$2\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x \cdot \frac{1}{x^6}} = 0 \quad \to \quad \frac{2}{x^3} - 2x^5 = 0 \quad \to \quad x^8 = 1$$

egyenlethez jutunk. Ennek két valós gyöke van, az $x_1 = 1$ és az $x_2 = -1$. A megfelelő y értékek rendre: $y_1 = 1$ és $y_2 = -1$. Ennek megfelelően két stacionárius pont van:

$P_1(1,1)$ és $P_2(-1,-1)$.

Következnek a másodrendű parciális deriváltak és a Hesse mátrix:

$f''_{xx}(x,y) = 2 + \dfrac{4}{x^3 y}$

$f''_{xy}(x,y) = \dfrac{2}{x^2 y^2}$

$f''_{yx}(x,y) = \dfrac{2}{x^2 y^2}$

$f''_{yy}(x,y) = 2 + \dfrac{4}{xy^3}$.

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{4}{x^3 y} & \frac{2}{x^2 y^2} \\ \frac{2}{x^2 y^2} & 2 + \frac{4}{xy^3} \end{pmatrix} \quad \to \quad D(x,y) = \left(2 + \frac{4}{x^3 y}\right)\left(2 + \frac{4}{xy^3}\right) - \left(\frac{2}{x^2 y^2}\right)^2.$$

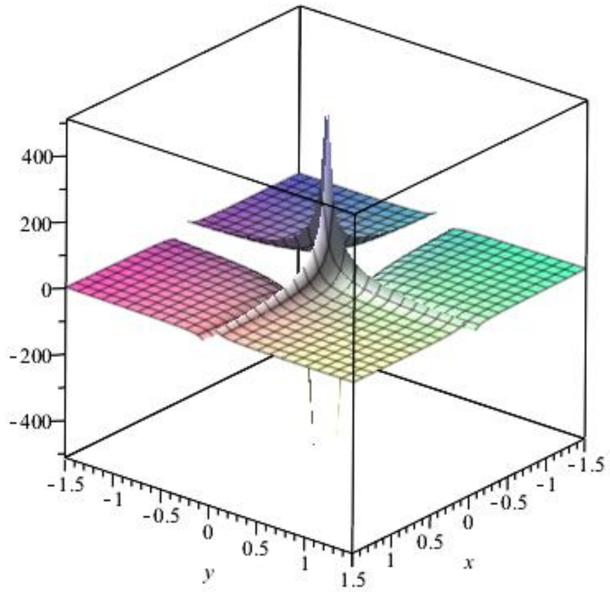
A stacionárius pontok vizsgálata:

$D(1,1) = (2+4)(2+4) - (2)^2 = 32 > 0$ és $f''_{xx}(1,1) = 6 > 0$,

ezért a $P_1(1,1)$ pont minimum hely. A minimum értéke $f(1,1) = 4$.

$D(-1,-1) = (2+4)(2+4) - (2)^2 = 32 > 0$ és $f''_{xx}(-1,-1) = 6 > 0$,

ezért a $P_2(-1,-1)$ pont is minimum hely. A minimum értéke: $f(-1,-1) = 4$.



24. feladat: Bontsa fel a 12-t három részre úgy, hogy a kapott számok szorzata maximális legyen!

Megoldás

Legyen a keresett három rész: x, y és $12-x-y$. Képezzük ezek szorzatát, mivel ezek szorzatának maximumát keressük. Az így kapott szorzat valójában egy kétváltozós függvény.

$$f(x,y)=x\cdot y\cdot(12-x-y)=12xy-x^2y-xy^2.$$

A szélsőérték meghatározása a szokásos módon történik.

$$f'_x(x,y)=12y-2xy-y^2$$

$$f'_y(x,y)=12x-x^2-2xy.$$

$$\left.\begin{array}{l}12y-2xy-y^2=0\\12x-x^2-2xy=0\end{array}\right\}$$

Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat, majd alakítsunk szorzattá:

$$12y-12x-y^2+x^2=0 \quad\to\quad -12(x-y)+(x-y)(x+y)=0 \quad\to\quad (x-y)(x+y-12)=0$$

Szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, azaz

$$x-y=0 \quad\to\quad x=y$$

vagy

$$x+y-12=0 \quad\to\quad x=12-y$$

Ha $x=y$, akkor ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$12y-2y^2-y^2=0 \quad\to\quad 12y-3y^2=0 \quad\to y_1=0,\ y_2=4.$$

A kapott értékeket visszahelyettesítve:

$y_1 = 0 \quad \to \quad x_1 = 0$
$y_2 = 4 \quad \to \quad x_2 = 4$

Tehát ezen az ágon két stacionárius pontot kaptunk:

$P_1(0,0) \quad P_2(4,4)$

Ha $x = 12 - y$, akkor ezt behelyettesítve az első egyenletbe:

$12y - 2(12 - y)y - y^2 = 0 \quad \to \quad y^2 - 12y = 0$.

Megoldva a kapott másodfokú egyenletet, majd a kapott eredményt visszahelyettesítve:

$y_3 = 0 \quad \to \quad x_3 = 12$
$y_4 = 12 \quad \to \quad x_4 = 0$.

Ezen az ágon további két stacionárius pontot kaptunk:

$P_3(12,0) \quad P_4(0,12)$

Írjuk fel a Hesse mátrixot.

$f''_{xx}(x,y) = -2y$

$f''_{xy}(x,y) = 12 - 2x - 2y$

$f''_{yx}(x,y) = 12 - 2x - 2y$

$f''_{yy}(x,y) = -2x$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 12 - 2x - 2y \\ 12 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix} \quad \to \quad D(x,y) = 4xy - (12 - 2x - 2y)^2 .$$

A stacionárius pontokat egyenként megvizsgáljuk, hogy el tudjuk róluk dönteni, hogy szélsőérték helyek-e vagy sem.

$D(0,0) = 4 \cdot 0 \cdot 0 - (12 - 0 - 0)^2 = -144 < 0$, ezért a $P_1(0,0)$ pont nyeregpont.

$D(4,4) = 4 \cdot 4 \cdot 4 - (12 - 4 - 4)^2 = 64 - 16 = 48 > 0$ és $f''_{xx}(x,y) = -8 < 0$, ezért a $P_2(4,4)$ pont lokális maximum hely.

$D(12,0) = 4 \cdot 12 \cdot 0 - (12 - 2 \cdot 12 - 0)^2 = -144 < 0$, ezért a $P_3(12,0)$ pont nyeregpont.

$D(0,12) = 4 \cdot 0 \cdot 12 - (12 - 0 - 24)^2 = -144 < 0$, ezért a $P_4(0,12)$ pont is nyeregpont.

Tehát a keresett három rész: 4, 4 és 4, azaz a 12-t három egyenlő részre kell osztani ahhoz, hogy ezek szorzata maximális legyen.

Ellenőrző kérdések

16. kérdés: Legyen $f(x,y) = e^{x^2 y} \cdot \ln(xy)$. Mivel egyenlő $f'_x(x,y)$?

Megoldás

$e^{x^2y} \cdot \left(2xy \cdot \ln(xy) + \frac{1}{x} \right)$ (X)

$e^{x^2y} \cdot \left(2x \cdot \ln(xy) + \frac{1}{x} \right)$

$e^{x^2y} \cdot \left(2xy \cdot \ln(xy) + \frac{1}{y} \right)$

$e^{x^2y} \cdot \left(2x \cdot \ln(xy) + \frac{1}{x} \right)$

17. kérdés: Legyen $f(x,y) = x\sin(2x+5y) + y\cos(x-y)$. Mivel egyenlő $f'_x(x,y)$?

Megoldás

$\cos(2x+5y) - y\sin(x-y)$

$\sin(2x+5y) + 2x\cos(2x+5y) - \sin(x-y)$

$\sin(2x+5y) + 2x\cos(2x+5y) - y\sin(x-y)$ **(X)**

$\sin(2x+5y) + 2x\cos(2x+5y) + y\sin(x-y)$

18. kérdés: Legyen $f(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy)$. Határozzuk meg a gradiens értékét a $\left(\frac{\pi}{2}, 1 \right)$ pontban?

Megoldás

$grad\ f\left(\frac{\pi}{2}, 1 \right) = \left(0, -\frac{\pi}{2} \right)$

$grad\ f\left(\frac{\pi}{2}, 1 \right) = \left(-1, -\frac{\pi}{2} \right)$ **(X)**

$grad\ f\left(\frac{\pi}{2}, 1 \right) = \left(1, -\frac{\pi}{2} \right)$

$grad\ f\left(\frac{\pi}{2}, 1 \right) = (-1, 0)$

19. kérdés: Számítsuk ki az $f(x,y) = \sqrt{4x + 3y^2}$ függvény $\mathbf{v}(1,-1)$ irányú iránymenti deriváltját az $(1,1)$ pontban!

Megoldás

$-\frac{1}{\sqrt{14}}$ (X)

$\frac{1}{\sqrt{14}}$

$\frac{5}{\sqrt{7}}$

$\frac{5}{\sqrt{14}}$

20. kérdés: Írjuk fel az $f(x,y)=e^{x^2-y^3}$ függvény érintősíkjának egyenletét a $(1,1)$ pontban!

Megoldás

$2x+3y+z=2$
$2x-3y=1$
$2x-3y-z=-2$ **(X)**
$2x-3y+z=-2$

21. kérdés::Írjuk fel az $f(x,y)=\dfrac{2x+y}{x-2y}$ függvény érintősíkjának egyenletét az $(-1,1)$ pontban!

Megoldás

$5x+5y+9z=3$ **(X)**
$5x-5y+9z=0$
$5x+5y-9z=-3$
$5x-5y+9z=3$

22. kérdés: Az $f(x,y)=2x^3y+2xy-3y^2$ függvénynek

Megoldás

2 stacionárius pontja van.
2 lokális maximuma van.
1 lokális maximuma van.
nyeregpontja van. **(X)**