4. Többváltozós függvények

4.1. Többváltozós függvények alapfogalmak

Tanulási cél: Az egyváltozós függvények után célunk megismerkedni a többváltozós függvényekkel. Nagy hangsúlyt fektetünk a kétváltozós függvényekre. Elsajátítjuk a szükséges fogalmakat, kialakítjuk a felületek vizsgálatához szükséges szemléletet.

Alapfogalmak, szintvonalak, értelmezési tartomány

Eddigi matematikai tanulmányaink során olyan függvényekkel foglalkoztunk, amelyek valós számokhoz rendeltek valós számokat. Ezeket a valós számokon értelmezett egyváltozós valós értékű függvényeknek neveztük. A valós értékű függvények azonban nem csak ilyenek lehetnek. Vannak olyan függvények is, amelyek rendezett számpárokhoz, általános esetben rendezett szám n-esekhez rendelnek valós számot:

$$f : R^n \to R,\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to y .$$

Az ilyen függvényeket n változós függvényeknek nevezzük. Ilyen n-változós függvény például az a hozzárendelés, amikor minden n komponensű vektorhoz hozzárendeljük a vektor hosszát.

Mi ebben a fejezetben kétváltozós függvényekkel fogunk foglalkozni.

Definíció: Legyen $\mathbf{R}^2$ a valós számokból álló rendezett (x, y) párok halmaza, $D \subset \mathbf{R}^2$ pedig ennek egy részhalmaza. Kétváltozós függvényeknek az

$$f : D \to R,\ (x, y) \to f(x, y)$$

típusú függvényeket nevezzük.

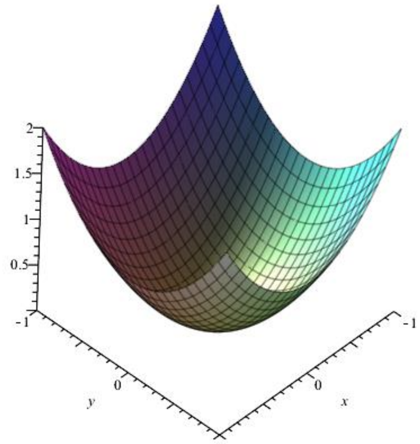
Kétváltozós valós értékű függvényt legtöbbször a hozzárendelési utasítással és az értelmezési tartomány megadásával definiálunk.

Példa: Legyen $f(x, y)$ az a kétváltozós valós függvény, amelyre $D = \left\{(x, y) \in R^2 \,\middle|\, x > 0, y > 0\right\}$ és $(x, y) \in D$ esetén $f(x, y) = x^3 + y^3$. Ekkor a függvény helyettesítési értéke az $(1,3)$ pontban a következőt jelenti:

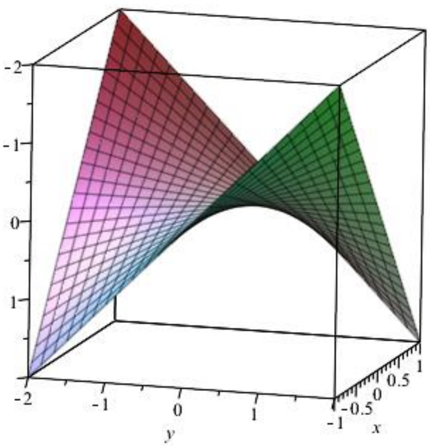
$$f(x = 1, y = 3) = 1^3 + 3^3 = 10 .$$

Egy kétváltozós függvény értelmezési tartománya az XY sík, vagy annak valamely részhalmaza. Természetesen itt is érvényesek az egyváltozós függvények esetében megtanult kikötések, amelyre az adott függvény értelmezve van. Az értelmezési tartományt jelentő síkbeli halmazokat sokszor érdemes grafikusan megadni.

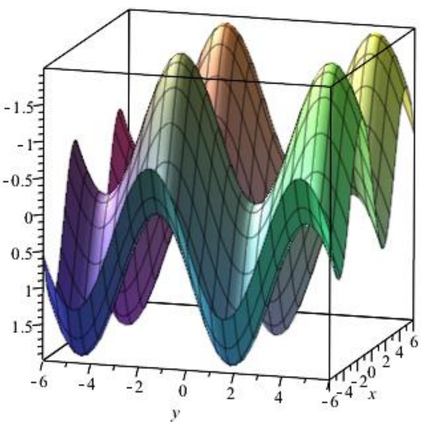
Az $f(x, y)$ értéke adja meg azt a valós számot, amelyet a függvényünk az (x, y) helyen felvesz. Ennek megfelelően a kétváltozós függvények grafikonjai térbeli felületek. Ezeket a felületeket csak számítógépes grafikus programokkal tudjuk szemléltetni.



1. ábra $f(x,y) = x^2 + y^2$



2. ábra $f(x,y) = xy$



3. ábra $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y)$

Az ábrákból látható, hogy viszonylag egyszerű felületekről is meglehetősen nehéz egy szemléletes képet alkotnunk. Ehhez nyújt segítséget a szintvonalak és a rétegvonalak használata.

Szintvonalakat úgy kapunk, hogy a függvényünk grafikonját az *XY* síkkal párhuzamos síkokkal elmetsszük és az így kapott metszésvonalakat levetítjük az *XY* síkra. Szokásos jelölések használatával $z = f(x, y)$ esetén, ha a $z = c$ egyenletű síkkal metszünk, akkor az $f(x, y) = c$ görbe lesz a szintvonal, ahol c tetszőleges értékeket vehet fel.

Rétegvonalakat úgy kapunk, hogy a függvény grafikonját elmetsszük az *XZ* síkkal párhuzamos $y = c$ egyenletű síkokkal, és az így kapott metszésvonalakat levetítjük az *XZ* síkra, vagy az *YZ* síkkal párhuzamos $x = c$ egyenletű síkokkal metszünk, és a metszésvonalakat levetítjük az *YZ* síkra.

Ezek a vonalrendszerek segíthetnek a felületek elképzelésében.

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Tekintsük a következő $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ kétváltozós függvényt:

$$f(x, y) = x^2 y - 2x + y\,.$$

Számoljuk ki az $f(1,3)$, $f(3,-1)$ és $f(0,-2)$ helyettesítési értékeket!

Megoldás

$$f(1,3) = f(x=1, y=3) = 1^2 \cdot 3 - 2\cdot 1 + 3 = 3 - 2 + 3 = 4$$
$$f(3,-1) = f(x=3, y=-1) = 3^2 \cdot (-1) - 2\cdot 3 + (-1) = -9 - 6 - 1 = -16$$
$$f(0,-2) = f(x=0, y=-2) = 0^2 \cdot (-2) - 2\cdot 0 + (-2) = 0 - 0 - 2 = -2\,.$$

2. feladat: Tekintsük a következő $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ kétváltozós függvényt:

$$f(x, y) = \ln(3x - y)\,.$$

Számoljuk ki az $f(0,-1)$, $f\left(\frac{e^2}{3}, 0\right)$, $f(e, 2e)$ és $f(0,1)$ helyettesítési értékeket!

Megoldás

$$f(0,-1) = \ln\left[3\cdot 0 - (-1)\right] = \ln 1 = 0$$
$$f\left(\frac{e^2}{3}, 0\right) = \ln\left(3\cdot\frac{e^2}{3} - 0\right) = \ln e^2 = 2$$
$$f(e, 2e) = \ln(3\cdot e - 2e) = \ln e = 1$$
$$f(0,1) = \ln(3\cdot 0 - 1) = \ln(-1) \text{ nem létezik,}$$

hiszen a logaritmus függvény csak pozitív valós számokra van értelmezve.

3. feladat: Határozzuk meg az $f(x, y) = \sqrt{3x - y - 2}$ függvény értelmezési tartományát!

Megoldás

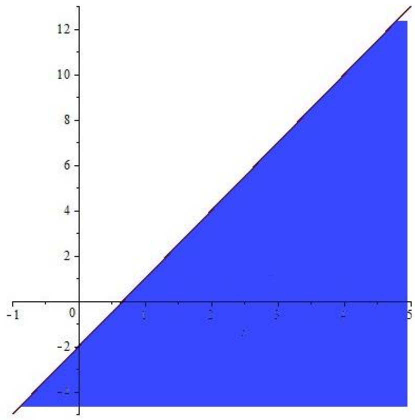
Mivel négyzetgyököt csak nemnegatív számból vonhatunk, így az értelmezési tartomány minden (x, y) pontjára teljesülnie kell, hogy:

$$3x - y - 2 \geq 0 .$$

Ezt az egyenlőtlenséget *y*-ra rendezve:

$$y \leq 3x - 2 .$$

Az $y = 3x - 2$ egy olyan egyenes egyenletét jelenti, ami az *y*-tengelyt a -2 pontban metszi, és a meredeksége 3. Ez az egyenes a teljes *XY* síkot két félsíkra osztja. Az egyik félsíkban olyan pontok találhatóak, amelyekre $y < 3x - 2$, míg a másikban $y > 3x - 2$. Hogy nekünk melyik félsík fog megfelelni, azt egy tetszőleges érték behelyettesítésével választhatjuk ki. Mivel az egyenlőség is meg volt engedve, ezért az egyenes pontjai is a megoldáshoz tartoznak. Az értelmezési tartomány pontjait az alábbi ábra szemlélteti.



4. feladat: Határozzuk meg az $f(x, y) = \ln(x^2 - y - 4)$ függvény értelmezési tartományát!

Megoldás

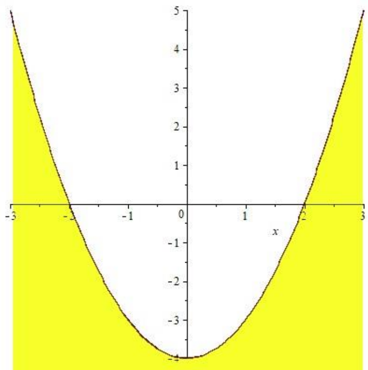
A logaritmus függvény csak pozitív valós értékekre van értelmezve, ezért az értelmezési tartomány minden (x, y) pontjára a következő kikötést tesszük:

$$x^2 - y - 4 > 0 .$$

Ezt *y*-ra rendezve, az

$$y < x^2 - 4$$

egyenlőtlenséghez jutunk, melyet ha ábrázolunk, akkor a megoldás egy parabola alatti terület lesz, melyhez a parabola pontjai nem tartoznak hozzá.



5. feladat: Határozzuk meg az $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-16}}$ függvény értelmezési tartományát!

Megoldás

A feladatban két kikötést kell tennünk. A négyzetgyök alatt csak nemnegatív valós számok állhatnak és a tört nevezőjében nem állhat nulla, azaz

$$x^2+y^2-16\geq 0$$

és

$$\sqrt{x^2+y^2-16}\neq 0.$$

A második kikötésből négyzetre emelés után az

$$x^2+y^2-16\neq 0$$

összefüggéshez jutunk. Figyelembe véve, hogy a két feltételnek egyszerre kell teljesülnie, ezért a megoldandó feladat:

$$x^2+y^2-16>0.$$

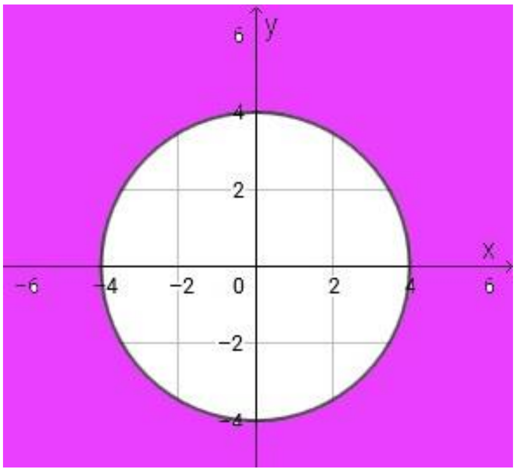
Észrevehetjük, hogy az

$$x^2+y^2=4^2$$

egyenlőség egy origó középpontú, 4 egység sugarú kör pontjaira teljesül. Az

$$x^2+y^2>4^2$$

egyenlőtlenséget pedig azon pontok teljesítik az *xy* síkban, amelyek 4-nél nagyobb távolságra vannak az origótól, azaz az origó középpontú, 4 sugarú körön kívül helyezkednek el.



6. feladat: Határozzuk meg az $f(x,y)=5x+y$ kétváltozós függvény $c=-2,-1,0,1,2$ magasságokhoz tartozó szintvonalait! A kapott eredményt ábrázoljuk koordináta rendszerben!

Megoldás

Tekintsük először a $c=2$ esetet. Ehhez a magassághoz tartozó szintvonal az lesz, amely kielégíti az $f(x,y)=2$ egyenletet, azaz:

$$2=5x+y.$$

Ezt *y*-ra rendezve:

$y = -5x + 2$.

Hasonlóan járunk el a többi c érték esetében is. Ha

$c = 1 \quad \rightarrow \quad y = -5x + 1$

$c = 0 \quad \rightarrow \quad y = -5x$

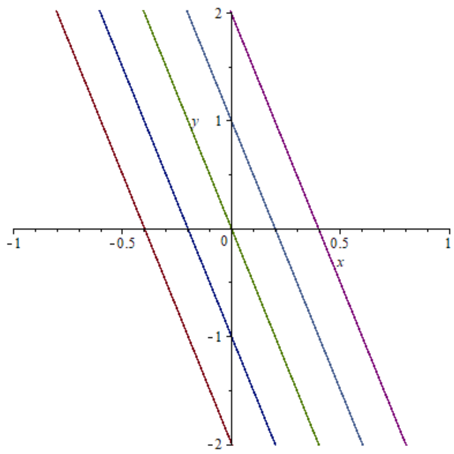
$c = -1 \quad \rightarrow \quad y = -5x - 1$

$c = -2 \quad \rightarrow \quad y = -5x - 2$

Látható, hogy minden esetben egy olyan egyenes egyenletét kapjuk, melynek meredeksége -5 lesz. Általánosan, tetszőleges c értékkel dolgozva:

$y = -5x - c$,

tehát az összes szintvonal -5 meredekségű egyenes lesz, c csak a tengelymetszet helyét befolyásolja. A szintvonalakat az alábbi ábra szemlélteti:



7. feladat: Határozzuk meg az $f(x, y) = 5x + y$ függvény $c = -1, 0, 1,$ rétegvonalait! A kapott eredményt ábrázoljuk koordináta rendszerben!

Megoldás

A rétegvonalak ábrázolása egyszerűbb, mint a szintvonalaké, mivel az $x = c$ és az $y = c$ síkokkal való metszet csak egy-egy behelyettesítést jelent a függvény képletében.

$x = c \quad \rightarrow \quad f(c, y) = 5c + y$.

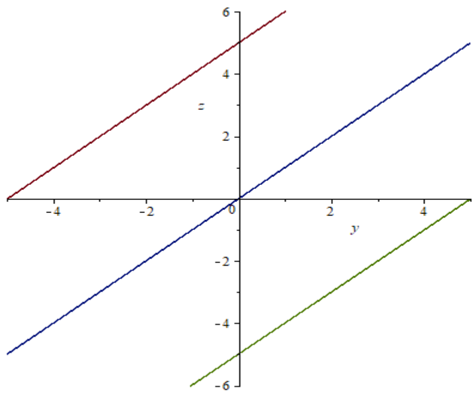
Ha

$c = 1 \quad \rightarrow \quad f(1, y) = 5 + y = y + 5$

$c = 0 \quad \rightarrow \quad f(0, y) = y$

$c = -1 \quad \rightarrow \quad f(-1, y) = -5 + y = y - 5$.

Ezek a rétegvonalak olyan párhuzamos egyenesek, melyek meredeksége 1.



A másik esetben:

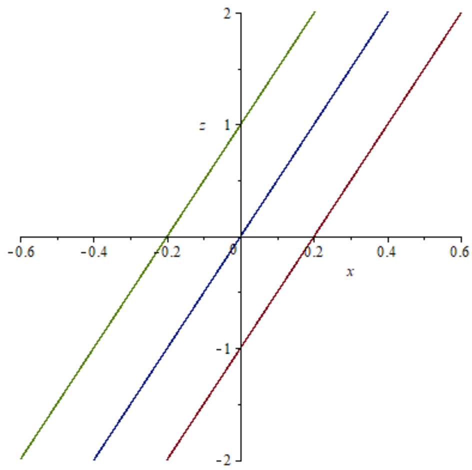
$y = c \quad \rightarrow \quad f(x,c) = 5x + c$

$c = 1 \quad \rightarrow \quad f(x,1) = 5x + 1$

$c = 0 \quad \rightarrow \quad f(x,0) = 5x$

$c = -1 \quad \rightarrow \quad f(x,-1) = 5x - 1$.

Ezek a rétegvonalak olyan párhuzamos egyenesek, melyek meredeksége 5.



Ellenőrző kérdések

1. kérdés: Tekintsük az $f(x,y) = \dfrac{x}{y} - x^2 - y^3$ kétváltozós függvényt. Mivel egyenlő $f(-1,-1)$?

Megoldás

-1
1 (X)
0
1

2. kérdés: Tekintsük a következő $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ kétváltozós függvényt: $f(x,y)=\ln(x-4y)$.
Mivel egyenlő $f(5e+8, e+2)$?

Megoldás

0
nem létezik
-1
1 (X)

3. kérdés: Határozzuk meg az $f(x,y)=\sqrt{-2x^2+y-2}$ függvény értelmezési tartományát!

Megoldás

$y \geq 2x^2+2$ **(X)**
$y > 2x^2+2$
$y \leq 2x^2+2$
$y < 2x^2+2$

4. kérdés: Határozzuk meg az $f(x,y)=\lg(-x+y-2)$ függvény értelmezési tartományát

Megoldás

$y < x+2$
$y \geq x+2$
$y \leq x+2$
$y > x+2$ **(X)**

5. kérdés: Az $f(x,y)=4x-y$ függvény szintvonalai

Megoldás

félegyenesek.
parabolák.
pozitív meredekségű egyenesek. (X)
negatív meredekségű egyenesek.

Összetett feladatok

8. feladat: Határozzuk meg az $f(x,y)=\dfrac{\ln(1-y+x)}{\sqrt{-x^2+y+1}}$ függvény értelmezési tartományát!

Megoldás

Az értelmezési tartomány valamennyi (x,y) pontjára három kikötést is kell tennünk. A logaritmus függvény csak pozitív valós számokra van értelmezve, a négyzetgyök alatt csak nemnegatív valós számok állhatnak, továbbá a nevezőben nem állhat nulla. Ez utóbbi két kikötés összevonható úgy, hogy a gyök alatt csak pozitív valós értékeket engedünk meg. Azaz:

$$1-y+x>0$$

és

$$-x^2+y+1>0.$$

Az első kikötést y-ra rendezve:

$$1+x>y$$

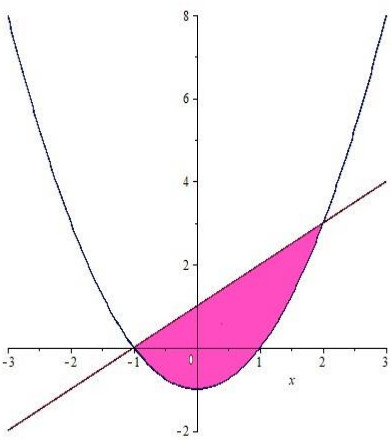
egyenlőtlenséghez jutunk, amely egy egyenes egyenlete. Ha ezt ábrázoljuk, akkor ennek azok a pontok felelnek meg, amelyek az adott egyenes alatt helyezkednek el. Az egyenes pontjai nem tartoznak a megoldáshoz.

A második egyenlőtlenséget is rendezzük:

$$y>x^2-1.$$

Ennek a feltételnek egy felfelé nyitott parabola feletti pontok felelnek meg úgy, hogy a parabola pontjai nem tartoznak a megoldáshoz.

Ahhoz, hogy $f(x,y)$ értelmezve legyen, az előbbi két feltételnek egyszerre kell teljesülnie, tehát csak azok a pontok tartoznak bele $f(x,y)$ értelmezési tartományába, amelyekre mindkét feltétel egyszerre teljesül. A halmazok nyelvén megfogalmazva, $f(x,y)$ értelmezési tartományát a két feltételhez tartozó halmaz metszete adja. Ezt szemlélteti az alábbi ábra.



9. feladat: Határozzuk meg az $f(x,y)=\ln(2-y-x^2)+\sqrt{8-x^2-y^2-2y}$ függvény értelmezési tartományát!

Megoldás

Az értelmezési tartomány valamennyi (x, y) pontjára két kikötést is kell tennünk. A logaritmus függvény csak pozitív valós számokra van értelmezve, a négyzetgyök alatt pedig csak nemnegatív valós számok állhatnak. Ennek megfelelően:

$$2-y-x^2>0$$

és

$$8-x^2-y^2-2y\geq 0.$$

Az első kikötést y-ra rendezve, az

$$y<-x^2+2$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ha ezt ábrázoljuk, akkor egy fordított állású parabola alatti területet kapunk úgy, hogy a parabola pontjai nem tartoznak a megoldáshoz.

A középiskolában megtanultuk, hogy egy kör egyenletének általános alakja:

$$(x-u)^2+(y-v)^2=r^2,$$

ahol az (u,v) adatokkal jellemzett pont a kör középpontja, r pedig a kör sugara. A második kikötést próbáljuk meg kör egyenletté alakítani. A kikötés:

$$8-x^2-y^2-2y\geq 0.$$

Szorozzuk be mindkét oldalt -1-gyel,

$$x^2+y^2+2y-8\leq 0,$$

majd a tagok csoportosítása után alakítsunk ki teljes négyzetet az y-t tartalmazó tagokból:

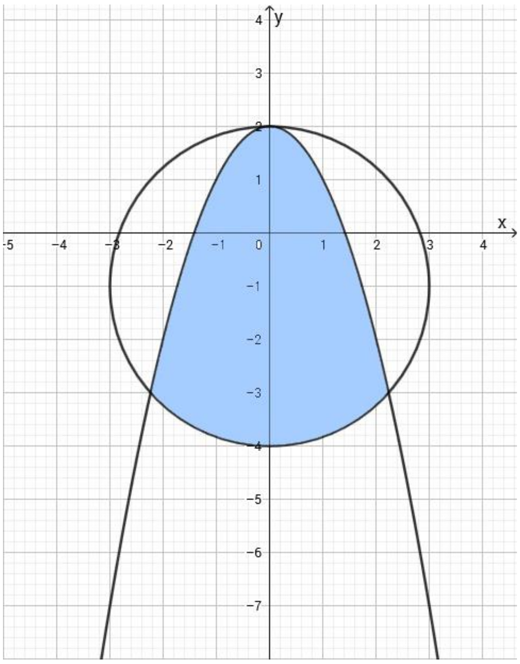
$$x^2+(y+1)^2-1-8\leq 0.$$

Rendezzük:

$$x^2+(y+1)^2\leq 9.$$

Ennek a feltételnek egy olyan kör belső pontjai és a kört határoló pontok tesznek eleget, melynek középpontja a (0,-1) pont, sugara pedig 3 egység.

Ahhoz, hogy $f(x,y)$ értelmezve legyen, az előbbi két feltételnek egyszerre kell teljesülnie, tehát csak azok a pontok tartoznak bele $f(x,y)$ értelmezési tartományába, amelyekre mindkét feltétel egyszerre teljesül. A halmazok nyelvén megfogalmazva, $f(x,y)$ értelmezési tartományát a két feltételhez tartozó halmaz metszete adja. Ezt szemlélteti az alábbi ábra.



10. feladat: Határozzuk meg az $f(x,y)=x^2-y$ függvény $c=-2,-1,0,1,2$ szintvonalait! A kapott eredményt ábrázoljuk koordináta rendszerben!

Megoldás

Tekintsük először a $c=2$ esetet. Ehhez a magassághoz tartozó szintvonal az lesz, amely kielégíti az $f(x,y)=2$ egyenletet, azaz:

$$2=x^2-y.$$

Ezt *y*-ra rendezve:

$$y=x^2-2.$$

Hasonlóan járunk el a többi *c* érték esetében is. Ha

$c=1 \quad \to \quad y=x^2-1$

$c=0 \quad \to \quad y=x^2$

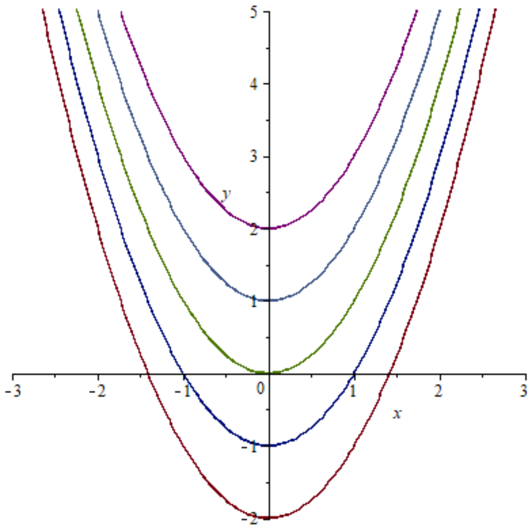
$c=-1 \quad \to \quad y=x^2+1$

$c=-2 \quad \to \quad y=x^2+2$

Látható, hogy a szintvonalak parabolák, melyeket a normál parabolából *y* irányú eltolással származtathatunk. Általánosan, tetszőleges c értékkel dolgozva:

$$y=x^2-c,$$

tehát az összes szintvonal parabola lesz, *c* csak a tengelymetszet helyét befolyásolja. A szintvonalakat az alábbi ábra szemlélteti:



11. feladat: Határozzuk meg az $f(x,y)=x^2+y^2$ függvény szintvonalait és rétegvonalait!

Megoldás

Először a szintvonalakat határozzuk meg. Ekkor az

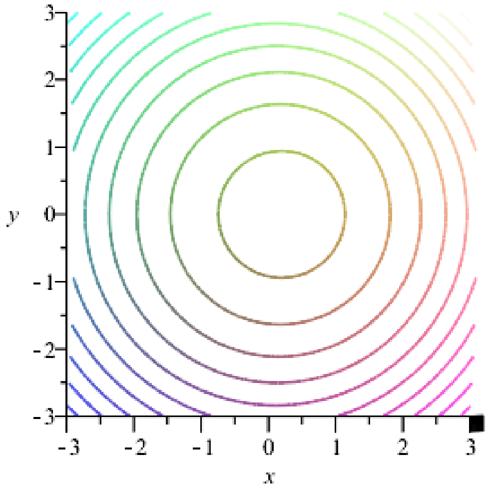
$$f(x,y)=c$$

helyettesítést kell elvégeznünk, így az

$$x^2+y^2=c$$

egyenlethez jutunk. Ennek az egyenletnek nincs megoldása, ha $c<0$.

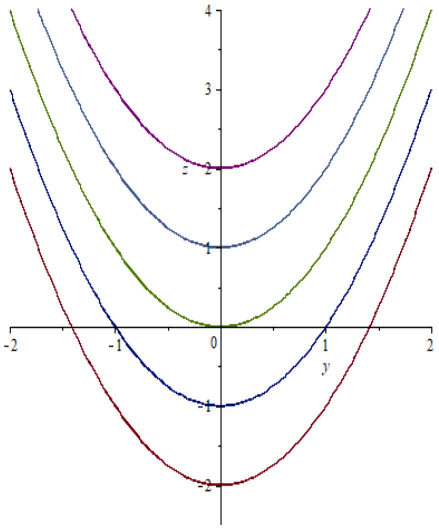
Ha $c=0$, akkor lényegében egy pontot kapunk, mégpedig az origót, azaz $x=0$ és $y=0$, ha pedig $c>0$, akkor origó középpontú és $\sqrt{c}$ sugarú köröket kapunk.



A rétegvonalak meghatározásához először az $x=c$ helyettesítést elvégezve, az

$$x = c \quad \rightarrow \quad f(c,y) = c^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad z = c^2 + y^2$$

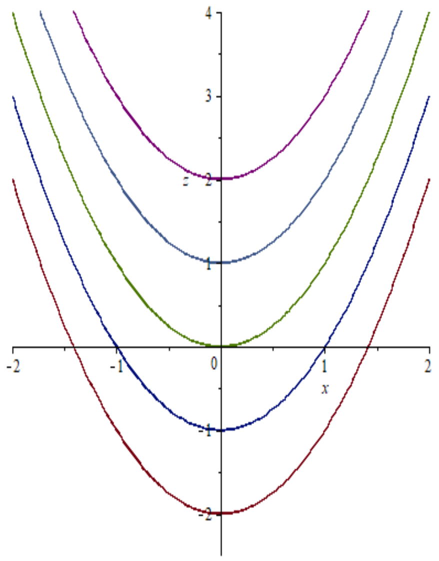
függvénysereget kapjuk, amelyek bármely c érték esetén parabolát adnak.



Hasonlóan az $y = c$ helyettesítésnél:

$$y = c \quad \rightarrow \quad f(x,c) = x^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad z = x^2 + c^2$$

függvénysereg is parabolák serege, amelyek minden c értékre értelmezhetők.



Ellenőrző kérdések

6. kérdés: Az $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$ kétváltozós függvény értelmezési tartománya

Megoldás

az origó középpontú, 5 egység sugarú körön belül lévő pontok (X)
az origó középpontú, 5 egység sugarú körvonalon és a körön belül lévő pontok
az origó középpontú, 25 egység sugarú körön kívül
az origó középpontú, 5 egység sugarú körvonalon lévő pontok

7. kérdés: Az $f(x,y)=x^2+y-\ln(16-y^2)$ kétváltozós függvény értelmezési tartománya

Megoldás

az egész sík, kivéve a $(0,4)$ és a $(0,-4)$ pontokon átmenő vízszintes egyenes pontjai.
az origó középpontú, 4 egység sugarú kör belső pontjai.
a $(0,4)$ és a $(0,-4)$ pontokon átmenő vízszintes egyenesek közötti pontok, az egyenesek pontjait nem számítva bele. (X)
az origótól 4 egységnél távolabb lévő pontok.

8. kérdés: Határozzuk meg az $f(x,y)=\ln(x)\cdot\sqrt{6-x^2-y^2+2x+2y}\cdot\ln(y)$ függvény értelmezési tartományát!

Megoldás

azok a pontok, ahol az $(1,1)$ középpontú 2 egység sugarú kör metszi a koordináta tengelyeket
az $(1,-1)$ középpontú 2 egység sugarú kör 2. síknegyedbe eső pontjai a tengelyek pontjai nélkül
az $(-1,-1)$ középpontú 2 egység sugarú kör 3. síknegyedbe eső pontjai a tengelyek pontjai nélkül
az $(1,1)$ középpontú $\sqrt{8}$ egység sugarú kör 1. síknegyedbe eső pontjai a tengelyek pontjai nélkül (X)

9. kérdés: Határozzuk meg az $f(x,y)=x^2+y$ függvény szintvonalait!

Megoldás

a szintvonalak egyenesek
a szintvonalak koncentrikus körök
a szintvonalak fordított állású parabolák (X)
a szintvonalak hiperbolák

Kétváltozós valós értékű függvények határértéke, folytonossága

Definíció: Legyen (x_0, y_0) egy olyan pont, amelynek bármely környezetében van olyan pont, ami az $f(x, y)$ értelmezési tartományába esik. Ekkor

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

ha bármely $x_n \to x_0$ és $y_n \to y_0$ esetén $f(x_n, y_n) \to A$.

Szemléletesen ez azt jelenti, hogy az $f(x, y)$ kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban a határértéke az A valós szám, ha bármilyen irányból is közelítjük meg az (x_0, y_0) pontot, a helyettesítési értékek konvergálnak az A valós számhoz.

Kétváltozós függvények határértékének meghatározását az teszi különösen nehézzé, hogy nagyon sok irányból és nagyon sokféle módon lehet közelíteni az (x_0, y_0) ponthoz.

Definíció: Legyen $(x_0, y_0) \in D_{f(x,y)}$. Az $f(x, y)$ függvény folytonos az (x_0, y_0) pontban, ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

A viszonylag „egyszerű” függvények általában mindenhol folytonosak, ahol értelmezve vannak. Egyéb többváltozós függvények folytonosságának vizsgálata meglehetősen bonyolult is lehet, ezért ennek vizsgálatára itt külön nem térünk ki.

Kidolgozott feladatok

12. feladat: Határozzuk meg a következő határértékeket:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (4xy - x + y)$$

Megoldás

A függvény egy három tagból álló összeg, összeg határértékét pedig tagonként vehetjük. Tegyük fel, hogy bármely irányból is közelítünk, $x_n \to 1$ és $y_n \to 2$ fennáll, ezért:

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(1,2)} (4x_n y_n - x_n + y_n) = \lim_{(x_n,y_n)\to(1,2)} 4x_n y_n - \lim_{(x_n,y_n)\to(1,2)} x_n + \lim_{(x_n,y_n)\to(1,2)} y_n =$$

$$= 4 \cdot 1 \cdot 2 - 1 + 2 = 9.$$

Tehát a definíció szerint:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (4xy - x + y) = 9.$$

13. feladat: Határozzuk meg a következő határértékeket:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2x - 3y}{xy + y}.$$

Megoldás

Tört határértéke, a határozatlan alakot kivéve, megegyezik a számláló és a nevező határértékének hányadosával. Hasonlóan az előző feladathoz, tegyük fel, hogy $x_n \to 0$ és $y_n \to 1$ teljesül, ezért

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(0,1)} \frac{2x_n - 3y_n}{x_n y_n + y_n} = \frac{2\cdot 0 - 3\cdot 1}{0\cdot 1 + 1} = \frac{-3}{1} = -3.$$

Tehát:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2x-3y}{xy+y} = -3.$$

14. feladat: Határozzuk meg a következő határértékeket:

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} y\sqrt{x^3 - 2y + 1}.$$

Megoldás

Szorzat határértéke a tényezők határértékének szorzata, feltéve, ha a tényezők között egyidejűleg nem szerepel a nulla és a végtelen. Mivel ebben a feladatban ez nem áll fenn, így hasonlóan az előző feladathoz, tegyük fel, hogy $x_n \to 2$ és $y_n \to -1$ teljesül, ezért

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(2,-1)} y_n\sqrt{x_n^3 - 2y_n + 1} = -1\cdot\sqrt{2^3 - 2\cdot(-1) + 1} = -1\cdot\sqrt{11} = -\sqrt{11}.$$

Tehát

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} y\sqrt{x^3 - 2y + 1} = -\sqrt{11}.$$

15. feladat: Határozzuk meg a következő határértékeket:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+2}{x^2+y^2}.$$

Megoldás

Hasonlóan az előző feladathoz, tegyük fel, hogy $x_n \to 0$ és $y_n \to 0$ teljesül, ezért

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x_n+2}{x_n^2+y_n^2} = \frac{0+2}{0+0} = \left(\frac{2}{0}\right) = \infty.$$

A számláló határértéke 2. A nevező határértéke ugyan 0, de pozitív számokon keresztül tart a nullához. Ezért ha a kettőbe tartó számlálót a nullához tartó, egyre kisebb pozitív számmal osztjuk, akkor a tört határértéke végtelen lesz.

16. feladat: Folytonos-e az $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$ függvény az $(1,2)$ pontban?

Megoldás

Egy kétváltozós függvény akkor folytonos az értelmezési tartomány (x_0, y_0) pontjában, ha bármely $x_n \to x_0$ és $y_n \to y_0$ sorozat esetén a helyettesítési értékek sorozata tart $f(x_0, y_0)$-hoz, azaz $f(x_n, y_n) \to f(x_0, y_0)$.

Ez egyenértékű azzal, hogy

$$\left| f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0) \right| \to 0.$$

A mi feladatunkban a függvény helyettesítési értéke:

$$f(1,2)=1^2+2\cdot 1\cdot 2-2^2=1+4-4=1.$$

Tehát azt kell bebizonyítanunk, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2+2xy-y^2=1.$$

Ha $x_n \to 1$ és $y_n \to 2$, akkor

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(1,2)} x_n^2+2x_ny_n-y_n^2=1.$$

Tehát azt kaptuk, hogy $f(x,y)$ függvénynek létezik határértéke (1,2) pontban és ez éppen megegyezik a határértékkel, így $f(x,y)$ folytonos a vizsgált pontban.

Megjegyzés: Az egyváltozós függvényekhez hasonlóan most is igaz, hogy ha $f(x,y)$ egy (x_0,y_0) pontban folytonos kétváltozós függvény, akkor az $f(x,y)$ határértéke az (x_0,y_0) pontban épp a helyettesítési értékével egyenlő.

Ellenőrző kérdések

10. kérdés $\lim_{(x,y)\to(-1,-2)}(xy^2-x-y)=$

Megoldás

1

-1 (X)

7

0

11. kérdés $\lim_{(x,y)\to(-4,-2)} 3^{x-y^2}=$

Megoldás

$\frac{1}{3^8}$ (X)

0

3^8

1

Összetett feladatok

17. feladat: Számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2x-y}{4x^2-y^2}$$

Megoldás

Az $(1,2)$ pontban a függvényünk nincs értelmezve. Tegyük fel újra, hogy $x_n \to 1$ és $y_n \to 2$.

Ekkor egy $\frac{0}{0}$ típusú határértéket kapunk, ezért a feladat megoldásához még kell más ötlet is.

Vegyük észre, hogy a nevezőt szorzattá bonthatjuk

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(1,2)} \frac{2x_n - y_n}{4x_n^2 - y_n^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x_n,y_n)\to(1,2)} \frac{2x_n - y_n}{(2x_n - y_n)(2x_n + y_n)}.$$

Egyszerűsítés után már tudunk határértéket számolni:

$$= \lim_{(x_n,y_n)\to(1,2)} \frac{1}{2x_n + y_n} = \frac{1}{2\cdot 1 + 2} = \frac{1}{4}.$$

Tehát

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2x - y}{4x^2 - y^2} = \frac{1}{4}.$$

18. feladat: Számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x + y}{2x - y}.$$

Megoldás

Olyan pontban vizsgálódunk, ahol a függvényünk határértéke $\frac{0}{0}$ típusú, és algebrai átalakításra sincs lehetőségünk. Ilyenkor más megoldást kell keresnünk. Közelítsünk egy $x_n \to 0$ és $y_n = 3x_n \to 0$ sorozattal. Ekkor

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} \frac{x_n + y_n}{2x_n - y_n} = \lim_{(x_n,3x_n)\to(0,0)} \frac{x_n + y_n}{2x_n - y_n} = \lim_{x_n\to 0} \frac{x_n + 3x_n}{2x_n - 3x_n} = \lim_{x_n\to 0} \frac{4x_n}{-x_n} = -4.$$

Próbáljunk ki egy másik közelítést is. Legyen $x_n \to 0$ tetszőleges módon, és $y_n = x_n \to 0$. Ekkor

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} \frac{x_n + y_n}{2x_n - y_n} = \lim_{(x_n,x_n)\to(0,0)} \frac{x_n + y_n}{2x_n - y_n} = \lim_{x_n\to 0} \frac{x_n + x_n}{2x_n - x_n} = \lim_{x_n\to 0} \frac{2x_n}{x_n} = 2.$$

A határérték létezésének feltétele, hogy tetszőleges sorozattal (tetszőleges irányból) tartva az adott pontba, mindig ugyanazt a határértéket kell kapnunk. Ez nem teljesül erre a függvényre, mert két különböző irányból közelítve két különböző eredményt kaptunk. Tehát a vizsgált határérték nem létezik.

19. feladat: Számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}.$$

Megoldás

Megint egy olyan pontban keresünk határértéket, ahol a függvény nincs értelmezve. Az előző feladat alapján az a sejtésünk, hogy ebben az esetben sem létezik határérték. Próbálkozzunk most is speciális sorozatokkal.

Ha olyan sorozatokat választunk, ahol $x_n \to 0$ tetszőleges módon, és $y_n = x_n$ alakú, akkor ugyanúgy a (0,0) pontba tartunk, akkor ebben az esetben

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} = \lim_{x_n\to 0} \frac{x_n^2 \cdot x_n^2}{x_n^4 + x_n{}^4} = \lim_{x_n\to 0} \frac{x_n^4}{x_n^4} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Közelítsünk most olyan sorozattal, ahol $x_n \to 0$ tetszőleges módon, de $y_n = 2x_n$ alakú. Ekkor ugyanúgy a (0,0) pontba tartunk, csak speciális módon, azaz

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} = \lim_{x_n\to 0} \frac{x_n^2 \cdot (2x_n)^2}{x_n^4 + (2x_n)^4} = \lim_{x_n\to 0} \frac{x_n^4}{x_n^4} \frac{4}{1+16} = \frac{4}{17}.$$

A határérték tehát nem létezik, mert különböző irányokból közelítve különböző eredményt kaptunk.

Ellenőrző kérdések

12. kérdés $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{9x^2-y^2}{3x-y} =$

Megoldás

3
0
nem létezik
6 (X)

13. kérdés: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y} =$

Megoldás

0
végtelen
nem létezik (X)
1

14. kérdés: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} =$

Megoldás

1
0
végtelen
nem létezik (X)