5. Lineáris algebra

5.2. Lineáris egyenletrendszerek

Elméleti összefoglaló

A lineáris egyenletrendszerek a matematikában és az alkalmazásaiban is fontos szerepet játszanak. A közelítő számítások során gyakran kell nagyméretű lineáris egyenletrendszereket megoldani.

Tekintsük az $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ismeretleneket. Egy ezekre az ismeretlenekre vonatkozó **lineáris egyenlet** úgy keletkezik, hogy minden ismeretlent megszorzunk egy tetszőleges számmal, ezeket a szorzatokat összeadjuk, és az összeget egyenlővé tesszük egy számmal.

Egy **lineáris egyenletrendszer** ugyanazokra az ismeretlenekre kirótt néhány lineáris egyenlet együttese.

Például az alábbi az x_1, x_2, x_3 ismeretlenekre vonatkozó egyik lehetséges lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}.$$

Ebben a leckében a lineáris egyenletrendszerek Gauss-eliminációra alapuló megoldásával fogunk foglalkozni.

Minden lineáris egyenletrendszer leírható mátrixok segítségével. Tegyük fel, hogy a lineáris egyenletrendszer n ismeretlenre vonatkozik és m egyenletből áll. Első lépésként, ha nem úgy lenne eleve, minden egyenletben az ismeretlenek indexeinek természetes sorrendje szerint rendezzük az egyenletek bal oldalán a tagokat. Az ismeretlenek együtthatóira kettősindexek segítségével lehet célszerű jelölést bevezetni: a_{ij} azt fogja jelölni, hogy az i -edik egyenletben mennyi a j -edik ismeretlen együtthatója. Az egyenletek jobb oldalán álló számokat is index segítségével jelöljük: b_i az i -edik egyenletben a jobb oldalon álló számot fogja jelölni. Ekkor a lineáris egyenletrendszer a következő alakú:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22} & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}.$$

Ekkor az $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $m\times n$ típusú mátrixot **együttható mátrixnak**, a $\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ $m\times 1$ típusú mátrixot **eredmény mátrixnak**, az $\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $n\times 1$ típusú mátrixot az **ismeretlenek mátrixának** hívjuk. Ezzel a jelöléssel, a mátrixok szorzásának és egyenlőségének definíciója alapján a fenti lineáris egyenletrendszer így írható:

$$\mathbf{AX}=\mathbf{b}\ .$$

Bevezetjük még az $\tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ $m\times(n+1)$ típusú **kibővített mátrixot** is.

Vegyük észre, hogy a kibővített mátrix teljesen meghatározza az egyenletrendszert, hiszen az mindegy, hogy az ismeretleneket milyen betűvel jelöljük.

A lineáris egyenletrendszer egy **megoldását** úgy kapjuk, hogy minden ismeretlennek egy olyan értéket adunk, hogy az összes egyenlet egyszerre teljesül.

A lineáris egyenletrendszerek megoldhatóság szempontjából háromféleképpen viselkedhetnek: egyértelmű megoldás van, végtelen sok megoldás van, végül egyáltalán nincs megoldás.

Ahhoz, hogy a megoldhatóságról szóló tételt megfogalmazhassuk, szükség van a mátrix rangjának fogalmára.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ egy $m\times n$ típusú mátrix. Ennek egy $k\times k$ típusú **minor mátrixát** úgy kapjuk, hogy kiválasztjuk az $\mathbf{A}$ mátrix k darab sorát és k darab oszlopát, és tekintjük az ezek kereszteződésében álló k^2 elemből álló $k\times k$ típusú mátrixot. Nyilván $1\le k\le m$ és $1\le k\le n$.

Az $\mathbf{A}$ **mátrix rangja** k , ha van olyan $k\times k$ típusú minor mátrixa, amelynek a determinánsa nem nulla, de minden $(k+1)\times(k+1)$ típusú minor mátrixának a determinánsa már nulla, vagy nem létezik $(k+1)\times(k+1)$ típusú minor mátrix, mert a k értéke már elérte az m és n számok közül a kisebbik értékét.

A lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságáról szóló alaptétel ezután a következő.

Tétel. Legyen az egyenletrendszer kibővített mátrixa az $\tilde{\mathbf{A}}$ $m\times(n+1)$ típusú mátrix. Jelölje $\rho(\mathbf{A})$ az együttható mátrix rangját, $\rho(\tilde{\mathbf{A}})$ a kibővített mátrix rangját. Ekkor a lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha az együttható mátrix rangja egyenlő a kibővített mátrix rangjával: $\rho(\mathbf{A})=\rho(\tilde{\mathbf{A}})$. Ha ez a közös rang egyenlő az ismeretlenek számával, azaz $\rho(\mathbf{A})=\rho(\tilde{\mathbf{A}})=n$, akkor egyértelmű megoldás van. Ha a közös rang kisebb, mint az ismeretlenek száma, azaz $\rho(\mathbf{A})=\rho(\tilde{\mathbf{A}})<n$, akkor végtelen sok megoldás van.

Az alaptétel semmit nem mond arról, hogy ha a lineáris egyenletrendszer megoldható, akkor hogyan lehet a megoldást megkapni.

Vannak speciális szerkezetű lineáris egyenletrendszerek, amelyek megoldása könnyen megtalálható. Tekintsük például az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\ & & & & 3x_3 & = & 6 \end{array}$$

A harmadik egyenletből $x_3=2$. Az x_3 ismeretében a második egyenlet $3x_2+4=7$ alakot ölt, amiből $x_2=1$. Ezeket az első egyenletbe helyettesítve $x_1+2-2=1$, amiből $x_1=1$.

A fenti egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ez egy úgynevezett **felső háromszög mátrix**, mert a főátló alatt minden elem nulla. A főátlót azok az elemek alkotják, amelyeknek a két indexe megegyezik: a_{11}, a_{22}, a_{33} és így tovább, ha vannak még sorok.

A **Gauss-elimináció** lényege, hogy, ha a kibővített mátrix nem felső háromszög mátrix, akkor az egyenletrendszer ekvivalens átalakításaival érjük el, hogy az legyen.

Egy lineáris egyenletrendszer **ekvivalens átalakítása** egy olyan átalakítás, amelyik nem változtatja meg a megoldást.

A következő ekvivalens átalakításokat fogjuk használni:

az i -edik és a j -edik egyenlet felcserélése, ezt $\boxed{i.}\leftrightarrow\boxed{j.}$ fogja jelölni;

az i -edik egyenlet megszorzása tetszőleges nullától különböző α számmal, ezt $(\alpha)\cdot\boxed{i.}$ fogja jelölni;

az i -dik egyenlet tetszőleges α számszorosának hozzáadása a j -edik egyenlethez, és a j -edik egyenlet helyére ezt az új egyenletet írjuk, a többi egyenletet pedig változatlanul hagyjuk, ezt $(\alpha)\cdot\boxed{i.}+\boxed{j.}\to\boxed{j.}$ fogja jelölni.

Megmutatható, hogy ezek ismételt alkalmazásával a kibővített mátrix mindig felső háromszög mátrix alakra transzformálható. Az átalakítás lépéseit és a megoldás leolvasását feladatokon keresztül mutatjuk be.

Kidolgozott feladatok

1. **feladat.** Oldjuk meg az $\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \\ -x_1 & + & x_2 & = & 1 \end{array}$ lineáris egyenletrendszert. Mennyi a megoldásban szereplő számok szorzata?

Megoldás: Felírjuk az egyenletrendszer kibővített mátrixát, miután az egyenletben az indexek természetes sorrendje szerint rendeztük az ismeretleneket, ez legtöbbször eleve így is van. Most

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

A kibővített mátrixra ilyenkor nem vezetünk be jelölést, és az együttható mátrixot egy függőleges vonallal elválasztjuk az eredmény mátrixtól. Mivel a főátló alatt most egyetlen elem van, a -1 , annyi a dolgunk, hogy ekvivalens átalakítással nullává tegyük az ebbe a pozícióba kerülő elemet. Könnyű észrevenni, hogy ennek érdekében az egyszeresét kell a második sorhoz adni. Ezt, és az eredményül kapott új egyenletrendszer kibővített mátrixát így fogjuk leírni:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right].$$

Elértük, hogy a kibővített mátrix felső háromszög mátrix alakúvá vált. Ennek a kibővített mátrixnak az utolsó sora a $3x_2 = 6$ egyenletet jelenti, amiből $x_2 = 2$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve $x_1 + 4 = 5$, ahonnan $x_1 = 1$. A megoldás tehát $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$. A megoldás helyességéről helyettesítéssel könnyen meg lehet győződni. Ennek elvégzését az olvasóra bízzuk. A megoldásban szereplő számok szorzata $x_1x_2 = 2$.

2. **feladat.** Oldjuk meg az $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \end{array}$ lineáris egyenletrendszert. Mennyi a megoldásban szereplő számok összege?

Megoldás: Felírjuk a kibővített mátrixot, és megjelöljük a főátló alatti elemeket:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ \boxed{-1} & 1 & 3 & 6 \\ \boxed{1} & \boxed{5} & -2 & 2 \end{array}\right].$$

A megjelölt elemeket kell kinullázni. Ezt úgy érdemes csinálni, hogy első lépésben a megjelölt elemek első oszlopát nullázzuk ki az első sor felhasználásával. Könnyen látható, hogy ennek érdekében az első sor egyszeresét kell a második sorhoz hozzáadni, és az első sor mínusz egyszeresét kell a harmadik sorhoz hozzáadni. Ekkor kapjuk, hogy:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ \boxed{-1} & 1 & 3 & 6 \\ \boxed{1} & \boxed{5} & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}]{(1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ \hdashline 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & \boxed{3} & -1 & 1 \end{array}\right].$$

(A nyílra írt átalakítások sorrendje, mint a determinánsok kiszámításánál is volt, felülről lefelé halad.)

A pontozott vonallal leválasztottuk az úgynevezett **maradék egyenletrendszert**. A további kinullázásokat ezzel végezzük, annak érdekében, hogy ne rontsuk le az eddig elért kinullázásokat. (Például a még bekeretezve maradt 3 -at kinullázhatnánk úgy is, hogy az első sor mínusz másfélszeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz, de akkor a harmadik sor első nullája elveszne, ami nem jó nekünk.)

A maradék egyenletrendszert használva a második sor mínusz egyszeresét kell a harmadik sorhoz adni, hogy a keretezett elem kinullázódjon.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ \hdashline 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & \boxed{3} & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\cdot\boxed{2.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right].$$

Elértük, hogy a kibővített mátrix felső háromszög mátrix alakot öltött, a megoldás innen már sorozatos visszahelyettesítéssel megkapható.

Az utolsó kibővített mátrix sora a $-3x_3 = -6$ egyenletet jelenti, amiből $x_3 = 2$. Ezt behelyettesítve az utolsó kibővített mátrix második sora által megadott egyenletbe a $3x_2 + 4 = 7$ egyenletet kapjuk, amiből $x_2 = 1$. A két kiszámolt értéket behelyettesítve az utolsó kibővített mátrix első sora által megadott egyenletbe, ami amúgy az eredeti első egyenlet, az $x_1 + 2 - 2 = 1$ egyenletet kapjuk, ahonnan $x_1 = 1$. A megoldás tehát

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}.$$

A megoldásban szereplő számok összege $x_1 + x_2 + x_3 = 4$.

3. **feladat.** Oldjuk meg a $\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$ lineáris egyenletrendszert.

Megoldás: A kibővített mátrix, megjelölve a kinullázandó elemeket:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{-1} & 2 & 1 & 1 & -3 \\ \boxed{3} & \boxed{1} & 1 & 3 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{-1} & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Ha most az első sor $\frac{1}{2}$ szeresét hozzáadnánk a második sorhoz, kinullázódna a második sor első pozícióján álló -1, de törtekkel kéne számolni. Ezt, hacsak lehet, kerüljük el.

Ezért felcseréljük az első és a negyedik egyenletet. Így az első sor első pozíciójába 1 kerül, amivel a legkönnyebb az alatta lévő elemeket kinullázni. Ha sorcserét hajtunk végre, akkor abban a lépésben csak az legyen az egyetlen átalakítás.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{-1} & 2 & 1 & 1 & -3 \\ \boxed{3} & \boxed{1} & 1 & 3 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{-1} & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\boxed{1.}\leftrightarrow\boxed{4.}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \boxed{-1} & 2 & 1 & 1 & -3 \\ \boxed{3} & \boxed{1} & 1 & 3 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Megtekintve a kinullázandó elemek első oszlopát könnyű felírni és végrehajtani a kinullázás első fázisát:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \boxed{-1} & 2 & 1 & 1 & -3 \\ \boxed{3} & \boxed{1} & 1 & 3 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-2)\cdot\boxed{1.}+\boxed{4.}\to\boxed{4.}]{\substack{(1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.} \\ (-3)\cdot\boxed{1.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{-2} & 4 & 6 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & \boxed{3} & 3 & 1 \end{array}\right].$$

Csak a maradék egyenletrendszerrel dolgozva felcseréljük a második és negyedik sort.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{-2} & 4 & 6 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & \boxed{3} & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\boxed{2.}\leftrightarrow\boxed{4.}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 4 & 6 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & \boxed{0} & 0 & -3 \end{array}\right].$$

A második fázisban kinullázzuk a **még megmaradt** kinullázandó elemek első oszlopát.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 4 & 6 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & \boxed{0} & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[(3)\cdot\boxed{2.}+\boxed{4.}\to\boxed{4.}]{(-1)\cdot\boxed{2.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{9} & 9 & 0 \end{array}\right].$$

Ismét csak az **új** maradék egyenletrendszerrel dolgozva megszorozzuk a negyedik egyenletet $\frac{1}{9}$ -el, azaz elosztjuk kilenccel, majd felcseréljük a harmadik és negyedik sort. Ezeket két lépésben hajtjuk végre.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{9} & 9 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\left(\frac{1}{9}\right)\cdot\boxed{4.}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\boxed{3.}\leftrightarrow\boxed{4.}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & -2 \end{array}\right].$$

Utolsó fázis a kinullázásban: a harmadik sor kétszeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)\cdot\boxed{3.}+\boxed{4.}\to\boxed{4.}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right].$$

Itt amúgy az utolsó kibővített mátrix, ami már felső háromszög mátrix, az alábbi egyenletrendszert jelenti

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 2x_4 & = & -2 \end{array}.$$

Az utolsó sor miatt $2x_4 = -2$, amiből $x_4 = -1$. A harmadik sorból $x_3 - 1 = 0$, amiből $x_3 = 1$. A második sorból $-x_2 + 3 - 3 = 1$, innen $x_2 = -1$. Végül az első sorból $x_1 - 1 - 1 + 1 = 0$, amiből $x_1 = 1$. A megoldás tehát $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$.

4. **feladat.** Oldjuk meg a $\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -5 \\ 5x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 5 \end{array}$ lineáris egyenletrendszert.

Megoldás: Most is a kibővített mátrix felírásával kezdünk.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ \boxed{-3} & 2 & 4 & -5 \\ \boxed{5} & \boxed{-1} & -1 & 5 \end{array}\right].$$

Láttuk, hogy előnyös volna, ha az első sor első eleme ± 1 lenne. Ezt most sorcserékkel nem lehet elérni. De hozzáadhatjuk a második sort az elsőhöz.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ \boxed{-3} & 2 & 4 & -5 \\ \boxed{5} & \boxed{-1} & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)\cdot\boxed{2.}+\boxed{1.}\to\boxed{1.}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & -4 \\ \boxed{-3} & 2 & 4 & -5 \\ \boxed{5} & \boxed{-1} & -1 & 5 \end{array}\right].$$

Most már könnyű a kinullázás első fázisa.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & -4 \\ \boxed{-3} & 2 & 4 & -5 \\ \boxed{5} & \boxed{-1} & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[(5)\cdot\boxed{1.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}]{(-3)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & -4 \\ \hdashline 0 & -7 & -17 & 7 \\ 0 & \boxed{14} & 34 & -15 \end{array}\right].$$

Szerencsés a maradék egyenletrendszer, a nullázás utolsó fázisának végrehajtásához elég a második sor kétszeresét hozzáadni a harmadikhoz.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & -4 \\ \hdashline 0 & -7 & -17 & 7 \\ 0 & \boxed{14} & 34 & -15 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)\cdot\boxed{2.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & -7 & -17 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

A kibővített mátrix felső háromszög mátrix, véget ért az eliminálás folyamata. Hátra van a megoldás leolvasása. Az utolsó sor most a

$$0 \cdot x_3 = -1$$

egyenletet jelenti, ami nyilván ellentmondás. Ez azt jelenti, hogy ennek az egyenletrendszernek nincs megoldása. Általában is az, hogy az egyenletrendszernek nincs megoldása úgy derül ki, hogy a Gauss-eliminálás folyamata során keletkezik egy sor, amelyben az együttható mátrix részen csupa nulla áll, de a sor utolsó eleme nem nulla.

5. **feladat.** Oldjuk meg az $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 8 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$ lineáris egyenletrendszert. Van-e olyan megoldása az egyenletrendszernek, amelyben mindhárom ismeretlen pozitív?

Megoldás: A kibővített mátrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ \boxed{-1} & 1 & 2 & 7 \\ \boxed{2} & \boxed{1} & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Első fázis:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ \boxed{-1} & 1 & 2 & 7 \\ \boxed{2} & \boxed{1} & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-2)\cdot\boxed{1.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}]{(1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ \hline 0 & 3 & 3 & 15 \\ 0 & \boxed{-3} & -3 & -15 \end{array}\right].$$

Most könnyű a második fázis is:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ \hline 0 & 3 & 3 & 15 \\ 0 & \boxed{-3} & -3 & -15 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)\cdot\boxed{2.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A kibővített mátrix felső háromszög mátrix, véget ért az eliminálás folyamata. Az utolsó sor most a $0=0$ igaz egyenletet jelenti. A második sorhoz tartozó egyenlet

$$3x_2+3x_3=15.$$

Ebből sem az x_2, sem az x_3 nem számolható ki egyértelműen. Akármilyen értéket adunk az egyik ismeretlennek, a másik ismeretlen már egyértelműen meghatározható úgy, hogy teljesüljön az egyenlet. Ha például $x_3=2$, akkor $x_2=3$. Ha bevezetjük az $x_3=t$, $t\in\mathbb{R}$ paramétert, amely tetszőleges értéket felvehet, akkor $x_2=5-t$, és teljesül az egyenlet. Ha ezeket behelyettesítjük az első sor által kódolt egyenletbe, akkor azt kapjuk, hogy

$$x_1+2(5-t)+t=8,$$

amiből

$$x_1=-2+t.$$

Azt kaptuk tehát, hogy tetszőleges $t\in\mathbb{R}$ -re az $x_1=-2+t$, $x_2=5-t$, $x_3=t$ három olyan szám, amelyekre mindhárom egyenlet teljesül. Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, és ez kényelmesen az

$$\begin{cases} x_1=-2+t \\ x_2=5-t \quad , \; t\in\mathbb{R} \\ x_3=t \end{cases}$$

formában adható meg.

Például, ha $t=0$, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy az $x_1=-2$, $x_2=5$, $x_3=0$ számhármas egy megoldás. Ha $t=1$, akkor az $x_1^*=-1$, $x_2^*=4$, $x_3^*=1$ számhármas egy másik megoldás, és így tovább.

x_1 akkor lesz pozitív, ha $t > 2$, x_2 akkor pozitív, ha $t < 5$. Ha tehát $t \in (2,5)$, akkor mindhárom ismeretlen pozitív lesz, például az $x_1^{**} = 1$, $x_2^{*} = 2$, $x_3^{*} = 3$ számhármas egy ilyen megoldás.

Vegyük észre, hogy a megoldás felfogható egy egyenes paraméteres egyenletrendszerének is.

Valóban, az eredeti egyenletek tekinthetők három sík egyenletének, csak most nem x,y,z jelöli a pontok koordinátáit, hanem x_1,x_2,x_3. A végeredményünk azt jelenti, hogy ez a három sík átmegy egy egyenesen, ennek az egyenesnek minden pontja kielégíti mindhárom sík egyenletét, tehát megoldása az egyenletrendszernek. Az összes megoldás a metszésvonal pontjainak halmaza, ami egy egyenes, és amit a paraméteres egyenletrendszerével lehet megadni.

Az előző feladatban kapott eredmény, az, hogy az egyenletrendszernek nincs megoldása, geometriailag azt jelenti, hogy az egyenletek által megadott síkok között van két párhuzamos.

A második kidolgozott feladat egyértelmű megoldása pedig azt jelenti geometriailag, hogy a három sík átmegy a megoldásban megadott koordinátájú ponton.

6. **feladat.** Oldjuk meg a
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 8 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & 1 \end{array}$$
lineáris egyenletrendszert.

Megoldás: A kibővített mátrix, megjelölve a kinullázandó elemeket:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{-1} & 3 & 3 & 8 \\ \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{1} & -4 & 1 \end{array}\right].$$
Első fázis:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{-1} & 3 & 3 & 8 \\ \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{1} & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{(-1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{4.}\to\boxed{4.}}]{\substack{(-1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.} \\ (-3)\cdot\boxed{1.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & -3 & -1 \\ 0 & \boxed{4} & \boxed{0} & -6 & -2 \end{array}\right].$$
Második fázis:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & -3 & -1 \\ 0 & \boxed{4} & \boxed{0} & -6 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[(-2)\cdot\boxed{2.}+\boxed{4.}\to\boxed{4.}]{(-1)\cdot\boxed{2.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \end{array}\right].$$
Szerencsés módon a harmadik fázisban kinullázandó elem már nulla, a harmadik fázisra nincs szükség. Mivel nincs olyan sor, ami ellentmondást jelentene és a kibővített mátrix felső háromszög mátrix, csak a megoldás felírása van hátra. Alulról felfelé haladva, mint mindig, az alsó két sor nem mond semmit az ismeretlenekről. A második sor szerint
$$2x_2 - 3x_4 = -1.$$

Az x_4 helyére bevezetve a v paramétert, ebből

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}v .$$

Az x_2 és x_4 paraméterrel kifejezett értékét az első sor által kódolt egyenletbe beírva kapjuk, hogy

$$x_1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}v\right) + x_3 + 2v = 3 .$$

Rendezve

$$x_1 + x_3 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}v .$$

Ebből sem x_1, sem x_3 nem fejezhető ki egyértelműen, egyik helyére egy **új** paramétert kell bevezetni. Legyen $x_3 = u$. Ekkor

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}v - u .$$

A megoldás tehát

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}v - u \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}v \\ x_3 = u \\ x_4 = v \end{array} \right. , \quad \begin{array}{l} u \in \mathbb{R} \\ v \in \mathbb{R} \end{array} .$$

Például, ha $u = 1$, $v = 1$, akkor kapjuk az $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$ megoldást, amit könnyű ellenőrizni.

Elméleti összefoglaló

A lineáris egyenletrendszerek alkalmazása során többször előfordul, hogy olyan egyenletrendszereket kel megoldani, amelyeknek ugyanaz az együttható mátrixa.

Az eddigiekből láthatjuk, hogy a Gauss-eliminációt kizárólag az együttható mátrix vezérli, az eredmény mátrix csak abba szól bele, hogy van-e megoldás, és a megoldás felírásakor van szerepe.

Ebből az következik, hogy az ilyen egyenletrendszereket egyszerre, **szimultán módon** lehet megoldani.

Azt az $n \times n$ típusú mátrixot, amelynek főátlójában minden elem 1, a főátlóján kívül pedig minden elem 0 $n \times n$ típusú **egységmátrixnak** hívjuk és $\mathbf{I}_n$-el jelöljük. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tetszőleges. Ekkor könnyen igazolható, hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A} .$$

Az egységmátrix tehát szorzás szempontjából úgy viselkedik, mint a számok körében az 1 szám.

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az $\mathbf{A}^{-1}$ szintén $n \times n$ típusú mátrixot az $\mathbf{A}$ mátrix inverzének hívjuk, ha

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n .$$

Nincs minden $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak inverze.

Tétel. Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $|\mathbf{A}| \neq 0$, illetve pontosan akkor van inverze, ha a rangja n.

Az inverz mátrix, ha létezik, a Gauss-elimináció segítségével meghatározható. Tekintsük az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

mátrixot, és tegyük fel, hogy van inverze. Ezt az egyelőre még ismeretlen inverzet akarjuk meghatározni. Azaz keressük azt az $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$ mátrixot, amelyre $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_3$.

Részletesen kiírva ezt a mátrix egyenletet

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A mátrixok szorzásának definíciójából következik, hogy a bal oldali szorzat első sorának első eleme $a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31}$. A fenti egyenlőségből pedig az, hogy $a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} = 1$. Hasonlóan a szorzat második sorának első eleme $a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31}$, és teljesülni kell, hogy $a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} = 0$. A szorzat harmadik sorának első eleme $a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31}$, és teljesülni kell az egyenlőség miatt annak, hogy $a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} = 0$. Ha ezeket összegyűjtjük a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} &= 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} &= 0 \, . \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} &= 0 \end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása tehát megadja az inverz mátrix első oszlopát. Ugyanígy az

$$\begin{aligned} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{32} &= 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{32} &= 1 \\ a_{31}x_{12} + a_{32}x_{22} + a_{33}x_{32} &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása megadja az inverz mátrix második oszlopát. Végül az

$$\begin{aligned} a_{11}x_{13} + a_{12}x_{23} + a_{13}x_{33} &= 0 \\ a_{21}x_{13} + a_{22}x_{23} + a_{23}x_{33} &= 0 \\ a_{31}x_{13} + a_{32}x_{23} + a_{33}x_{33} &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása megadja az inverz mátrix harmadik oszlopát.

De ennek a három egyenletrendszernek ugyanaz az együttható mátrixa, az $\mathbf{A}$ mátrix, ezek az egyenletrendszerek szimultán megoldhatók.

Az eljárás menetét példákon mutatjuk be.

7. **feladat.** Oldjuk meg az

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \end{array},$$

és

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -3 \end{array}$$

lineáris egyenletrendszereket.

Megoldás: Vegyük észre, hogy a két egyenletrendszernek ugyanaz az együttható mátrixa. A kibővített mátrix most

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 6 \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & -3 & 0 & -3 \end{array}\right].$$

A Gauss-eliminálás első fázisa

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 6 \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & -3 & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[(1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}]{(-2)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ \hdashline 0 & -1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & -2 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Második fázis

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ \hdashline 0 & -1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)\cdot\boxed{2.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -5 \end{array}\right].$$

Az együttható mátrix felső háromszög mátrix, leolvashatjuk a megoldásokat.

A bal oldali (első) eredménymátrixot figyelembe véve

$$\begin{array}{l} -5x_3 = 5 \Rightarrow x_3 = -1 \\ -x_2 - (-1) = 2 \Rightarrow x_2 = -1 \\ x_1 - 1 - 1 = -1 \Rightarrow x_1 = 1 \end{array}.$$

Az első egyenletrendszer megoldása tehát $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -1 \end{cases}.$

A jobb oldali (második) eredménymátrixot figyelembe véve

$$\begin{array}{l} -5x_3 = -5 \Rightarrow x_3 = 1 \\ -x_2 - 1 = -2 \Rightarrow x_2 = 1 \\ x_1 + 1 + 1 = 4 \Rightarrow x_1 = 2 \end{array}.$$

Az második egyenletrendszer megoldása tehát $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$.

8. **feladat.** Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét. Mennyi az inverz második oszlopában álló elemek összege?

Megoldás: Látható, hogy a determináns 1, ami azt jelenti, hogy van inverz. Az ismeretlen inverz mátrixra a $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ jelölést bevezetve, figyelembe véve a

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix egyenletet, megoldjuk szimultán módon az

$$\begin{array}{ccccc} 2x_{11} & + & x_{21} & = & 1 \\ 5x_{11} & + & 3x_{21} & = & 0 \end{array},$$

és a

$$\begin{array}{ccccc} 2x_{12} & + & x_{22} & = & 0 \\ 5x_{12} & + & 3x_{22} & = & 1 \end{array}$$

egyenletrendszereket. A kibővített mátrix

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{5} & 3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

A bekeretezett pozíción álló számot több módon is nullává tehetjük. Például egy lehetséges út az lenne, hogy az első sor kétszeresét kivonjuk a második sorból. Ekkor az 5 helyére 1 kerül. Ezután felcserélve a két sort, az első sor első eleme lenne 1, amivel könnyen kinullázható lenne az alatta álló elem.

Most azonban máshogy fogunk eljárni. Megszorozzuk az első sort öttel, a másodikat kettővel, így mindkét sor első eleme tíz lesz.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{5} & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(2)\cdot\boxed{2.}]{(5)\cdot\boxed{1.}} \left[\begin{array}{cc|cc} 10 & 5 & 5 & 0 \\ \boxed{10} & 6 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Az eliminálás első fázisa ezután

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 10 & 5 & 5 & 0 \\ \boxed{10} & 6 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\left(\frac{1}{5}\right)\cdot\boxed{1.}]{(-1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right].$$

Figyeljük meg, hogy a kinullázás után a felszorzott első sort egyből vissza is osztottuk, hiszen a felszorzást csak a kényelmes kinullázás miatt csináltuk. Az együttható mátrix felső háromszögmátrix. Az első, (bal oldali) eredmény mátrixot tekintve, és az első egyenletrendszer ismeretlenjeire bevezetett jelölést használva

$$\begin{array}{l} x_{21} = -5 \\ 2x_{11} + (-5) = 1 \Rightarrow x_{11} = 3 \end{array}.$$

Az inverz mátrix első oszlopa tehát $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$. A második, (jobb oldali) eredmény mátrixot tekintve, és a második egyenletrendszer ismeretlenjeire bevezetett jelölést használva

$$x_{22} = 2$$
$$2x_{12} + 2 = 0 \Rightarrow x_{12} = -1 .$$

Az inverz mátrix második oszlopa tehát $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Egymás mellé rakva ezt a két oszlop mátrixot az inverz mátrix tehát $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.
A második oszlopban álló elemek összege 1.

A szorzás elvégzésével könnyen ellenőrizhetjük az $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ egyenlőségeket.

9. **feladat.** Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét Gauss-Jordan elimináció használatával.

Megoldás: Mátrixok inverzét célszerű az úgynevezett **Gauss-Jordan elimináció** alkalmazásával meghatározni. Ennek lényege, hogy a felírt szimultán egyenletrendszer esetén az eliminálást nem csak addig folytatjuk, míg az együttható mátrix felső háromszögmátrix alakot ölt, hanem addig, amíg az egységmátrix lesz belőle. Ha létezik az inverz, akkor ez mindig elérhető. Ha ezt elértük a megoldás meghatározása sorozatos visszahelyettesítésekkel elmarad, egyszerűen le lehet olvasni az ismeretlenek értékét.

Kiindulunk tehát a

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{5} & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

kibővített mátrixból. Az előbb mondottak alapján eliminációkat végzünk, amíg a bal oldalon álló eredeti $\mathbf{A}$ mátrixból az egységmátrix lesz. Amivé ezen folyamat közben a jobb oldalon álló egységmátrix átalakul az az $\mathbf{A}$ mátrix inverze.

Az eliminálást mindig több úton lehet végrehajtani, most szándékosan más lépéseket használunk, mint az előbb. A nyilakra írt átalakítások egyértelműen mutatják az eliminálás lépéseit.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{5} & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\boxed{1.}\leftrightarrow\boxed{2.}]{(-2)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(-2)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\cdot\boxed{2.}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\cdot\boxed{2.}+\boxed{1.}\to\boxed{1.}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right].$$

A bal oldalon álló mátrix már az egységmátrix, a jobb oldalon látható mátrix az $\mathbf{A}$ inverze.

10. **feladat.** Határozzuk meg az $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&2\\1&2&1\\1&3&3\end{bmatrix}$ mátrix inverzét Gauss-Jordan elimináció használatával. Hány darab negatív eleme van az inverznek?

Megoldás: Ismét a nyilakra írt átalakítások mutatják a lépéseket.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\ \boxed{1}&2&1&0&1&0\\ \boxed{1}&3&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[(-1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}]{(-1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&0&-1&-1&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&0&-1&-1&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\boxed{2.}\leftrightarrow\boxed{3.}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&1&-1&0&1\\0&0&-1&-1&1&0\end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\boxed{2}&2&1&0&0\\0&1&1&-1&0&1\\0&0&-1&-1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{(-2)\cdot\boxed{2.}+\boxed{1.}\to\boxed{1.}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&0&-2\\0&1&1&-1&0&1\\0&0&-1&-1&1&0\end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&0&-2\\0&1&1&-1&0&1\\0&0&-1&-1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{(-1)\cdot\boxed{3.}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&0&-2\\0&1&1&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&0&-2\\0&1&\boxed{1}&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right]\xrightarrow{(-1)\cdot\boxed{3.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&0&-2\\0&1&0&-2&1&1\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right].$$

Mivel a bal oldalon megjelent az egységmátrix, a jobb oldali mátrix az inverz, azaz

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}3&0&-2\\-2&1&1\\1&-1&0\end{bmatrix}.$$

Szorzással érdemes ellenőrzést végezni. Az inverznek három darab negatív eleme van.

11. **feladat.** Határozzuk meg az $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&3\\-1&3&2\\-3&4&2\end{bmatrix}$ mátrix inverzét Gauss-Jordan elimináció használatával.

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&3&1&0&0\\-1&3&2&0&1&0\\-3&4&2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{(1)\cdot\boxed{2.}+\boxed{1.}\to\boxed{1.}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&5&1&1&0\\-1&3&2&0&1&0\\-3&4&2&0&0&1\end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{-1} & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{-3} & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(3)\cdot\boxed{1.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}]{(1)\cdot\boxed{1.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 16 & 17 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 16 & 17 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(4)\cdot\boxed{2.}]{(7)\cdot\boxed{1.}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 28 & 35 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 28 & 28 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 16 & 17 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & \boxed{28} & 35 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 28 & 28 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 16 & 17 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\boxed{2.}]{(-1)\cdot\boxed{2.}+\boxed{1.}\to\boxed{1.}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 16 & 17 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 16 & 17 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(7)\cdot\boxed{3.}]{(16)\cdot\boxed{2.}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 112 & 112 & 16 & 32 & 0 \\ 0 & 112 & 119 & 21 & 21 & 7 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 112 & 112 & 16 & 32 & 0 \\ 0 & \boxed{112} & 119 & 21 & 21 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[\left(\frac{1}{16}\right)\cdot\boxed{2.}]{(-1)\cdot\boxed{2.}+\boxed{3.}\to\boxed{3.}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & -11 & 7 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & \boxed{7} & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & \boxed{7} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & -11 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)\cdot\boxed{3.}+\boxed{1.}\to\boxed{1.}]{(-1)\cdot\boxed{3.}+\boxed{2.}\to\boxed{2.}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & -2 & 10 & -7 \\ 0 & 7 & 0 & -4 & 13 & -7 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & -11 & 7 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & -2 & 10 & -7 \\ 0 & 7 & 0 & -4 & 13 & -7 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & -11 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\left(\frac{1}{7}\right)\cdot\boxed{1.} \\ \left(\frac{1}{7}\right)\cdot\boxed{2.} \\ \left(\frac{1}{7}\right)\cdot\boxed{3.}}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{10}{7} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} & \frac{13}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & 1 \end{array}\right].$$

Az utolsó táblázatból kiolvasható, hogy

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{10}{7} & -1 \\ -\frac{4}{7} & \frac{13}{7} & -1 \\ \frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & 1 \end{bmatrix}.$$

Ennek helyességét úgy érdemes ellenőrizni, hogy kiemelünk $\mathbf{A}^{-1}$-ből $\frac{1}{7}$-et:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 10 & -7 \\ -4 & 13 & -7 \\ 5 & -11 & 7 \end{bmatrix},$$

és azt ellenőrizzük le, hogy teljesül-e az

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 10 & -7 \\ -4 & 13 & -7 \\ 5 & -11 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

egyenlőség. Ezt már az olvasóra bízzuk.

Az eliminálás során ügyelni kell arra, hogy mindig „előre” haladjuk, az újabb lépés során ne rontsuk le azt, amit már korábban kialakítottunk. Például az inverz mátrix meghatározásának a folyamatát 4×4 típusú mátrix esetén így lehet összefoglalni.

A kiinduló kibővített mátrixban bal oldalon az eredeti mátrix áll, jobb oldalon a megfelelő méretű egységmátrix.

Első fázis: esetleges sorcsere után kinullázni a csillaggal jelölt elemmel a bekeretezett pozíciókat. Az egyes pozíciók kinullázása érdekében a csillaggal jelölt elemet tartalmazó sort lehet, hogy fel kell szorozni egy alkalmas konstanssal, de a kinullázás elvégzése után a felszorzott sort rögtön visszaosztjuk ezzel a konstanssal.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} * & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \square & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \square & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \square & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{array}\right].$$

Második fázis: ugyanez az eljárás az előbbi fázis után kapott alábbi kibővített mátrixra.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \times & \square & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & * & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \square & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \square & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{array}\right].$$

Harmadik fázis: ugyanez az eljárás az előbbi fázis után kapott alábbi kibővített mátrixra.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \times & 0 & \square & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \square & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & * & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \square & \times & \times & \times & \times & \times \end{array}\right].$$

Negyedik fázis: ugyanez az eljárás az előbbi fázis után kapott alábbi kibővített mátrixra.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \times & 0 & 0 & \square & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & 0 & \square & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \square & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & * & \times & \times & \times & \times \end{array}\right].$$

Ezek után az alábbi szerkezetű kibővített mátrixhoz jutunk:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \times & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times \end{array}\right].$$

Ha itt a baloldalon az egyes sorokban az $\times$ -el jelölt elem nem 1, akkor a sort végigosztjuk $\times$ értékével. Ezután a jobb oldalon álló mátrix az eredeti mátrix inverze.

Ellenőrző kérdések

1. kérdés. Az $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$ egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van.
Mennyi a megoldásban szereplő számok szorzata?

-24 . (x)
24 .
22 .
-22 .

2. kérdés. Az $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & & & + & x_3 & = & -1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$ egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van.
Mennyi a megoldásban szereplő számok összege?

9 . (x)
10 .
11 .
12 .

3. kérdés. Az $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$ egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van.
Mennyi a megoldásban szereplő számok reciprokainak összege?

$\frac{9}{2}$.
$-\frac{7}{2}$.
$\frac{7}{2}$.
$-\frac{9}{2}$. (x)

4. kérdés. Tekintsük az $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array}$ és az $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array}$ egyenletrendszereket. Mindkettőnek egyértelmű megoldása van. Ha az első egyenletrendszer megoldásainak összegéből kivonjuk a második megoldásainak összegét, akkor az eredmény

-1 .
1 . (x)
0 .
2 .

5. feladat. A $\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 5x_2 & + & 10x_3 & = & 4 \end{array}$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Tekintsük az alábbi állításokat:

a) van olyan megoldás, amelyben $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_3 > 0$;
b) van olyan megoldás, amelyben $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_3 < 0$;
c) van olyan megoldás, amelyben $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $x_3 < 0$.

Ezek közül pontosan

0 igaz.
1 igaz. (x)
2 igaz.
3 igaz.

6. feladat. A $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Tekintsük az alábbi állításokat:

a) van olyan megoldás, amelyben $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$;
b) van olyan megoldás, amelyben $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_3 > 0$;
c) van olyan megoldás, amelyben $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_3 < 0$.

Ezek közül pontosan

0 igaz.(x)
1 igaz.
2 igaz.
3 igaz.

7. feladat. A $\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & - & 7x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Tekintsük az alábbi állításokat:

a) van olyan megoldás, amelyben $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_3 < 0$;
b) van olyan megoldás, amelyben $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$;

c) van olyan megoldás, amelyben $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$.

Ezek közül pontosan

0 igaz.
1 igaz.
2 igaz. (x)
3 igaz.

8. feladat. Tekintsük az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixot. Ekkor az $\mathbf{A}^{-1}$ negatív elemeinek száma pontosan

1 .
2 .
3 .
4 . (x)

9. feladat. Tekintsük az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ mátrixot. Ekkor az $\mathbf{A}^{-1}$ harmadik oszlopában álló elemek összege

-4 .
-5 .
-6 . (x)
-7 .

10. feladat. Tekintsük az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixot. Ekkor az $\mathbf{A}^{-1}$ első sorában álló elemek szorzata

4 .
-4 .
6 . (x)
-6 .