

# Végeselem analízis (óravázlat)

Készítette: Dr. Pere Balázs

Széchenyi István Egyetem  
Alkalmazott Mechanika Tanszék

2013. február 17.

Copyright ©2012 Dr. Pere Balázs. Minden jog fenntartva.

Ez a dokumentum szabadon másolható és terjeszthető. Módosítása és kereskedelmi forgalomba kerülése csak a szerző írásbeli engedélyével lehetséges. (e-mail: pere.balazs@sze.hu)

# Tartalomjegyzék

<b>1. Rugalmasságtani alapok</b>	<b>5</b>
1.1. Deformálható test kinematikája	5
1.1.1. Az elmozdulások leírása	5
1.1.2. Az alakváltozások leírása	6
1.1.3. Kompatibilitási egyenlet	12
1.2. Feszültségi állapot	13
1.2.1. Test egyensúlya	13
1.2.2. Belső erők (Cauchy-hipotézis)	14
1.2.3. Feszültség tenzor	15
1.2.4. Egyensúlyi egyenletek	17
1.3. Anyagegyenlet	19
1.3.1. Hooke-törvény	19
1.4. A rugalmasságtani feladat kitűzése	20
1.4.1. Skaláris egyenletek	20
1.4.2. Ismeretlen függvények	21
1.4.3. Peremfeltételek	21
<b>2. A rugalmasságtani feladat közelítő megoldása</b>	<b>22</b>
2.1. Alapfogalmak	22
2.1.1. Kinematikailag lehetséges elmozdulásmező	22
2.1.2. Statikailag lehetséges feszültségmező	23
2.1.3. Virtuális elmozdulásmező	23
2.1.4. Az elmozdulásmező variációja	24
2.2. A rugalmasságtan energia elvei	24
2.2.1. A virtuális munka elve	24
2.2.2. Virtuális elmozdulás elve	27
2.2.3. Potenciális energia minimuma elv	28
2.2.4. Lagrange-féle variációs elv	31
2.3. A Ritz-módszer	34
<b>3. Elmozdulásmezőn alapuló végeelem módszer felépítése</b>	<b>41</b>
3.1. Végeelem csomópontjainak lokális sorszámozása	41
3.2. Lineáris közelítő függvények	41
3.2.1. Négy csomópontú elem	41
3.2.2. Nyolc csomópontú elem	41
3.3. Az elmozdulásmező közelítése egy végeelemen	43
3.4. Az alakváltozások közelítése egy végeelemen	44
3.5. A feszültségmező közelítése egy végeelemen	47
3.6. Az alakváltozási energia közelítése egy végeelemen	48
3.7. Külső erők munkájának közelítése egy végeelemen	50
3.7.1. Felületi erők munkája	50
3.7.2. Térfogati erők munkája	51
3.7.3. Külső erők munkája	52
3.8. Egy végeelem potenciális energiája	52
3.9. Csomópontok globális sorszámozása	52

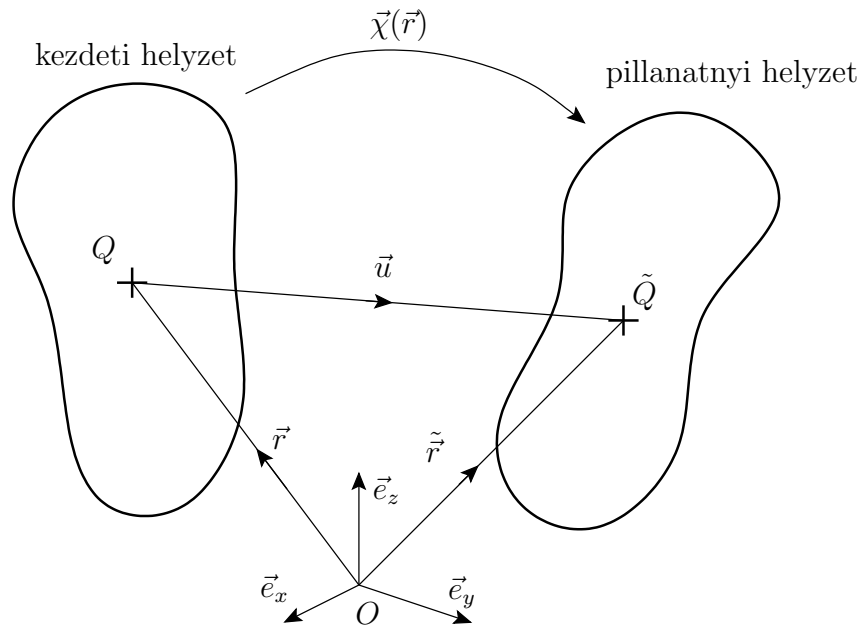
3.10. A teljes szerkezet csomóponti elmozdulásvektora . . . . .	53
3.11. A teljes szerkezet merevségi mátrixa és tehervektora . . . . .	53
3.12. Kinematikai peremfeltételek figyelembevétele . . . . .	56
3.12.1. Megfогások . . . . .	56
3.12.2. Kinematikai terhelés . . . . .	58
3.13. A csomóponti elmozdulásvektor meghatározása . . . . .	59
<b>4. Kiegészítések: numerikus integrálás</b>	<b>59</b>
4.1. Numerikus integrálás, Gauss-kvadratúra . . . . .	59
<b>5. Mechanikai modellek a végeelem módszerben</b>	<b>59</b>
5.1. Speciális terhelések . . . . .	59
5.1.1. Rugalmas ágyazás . . . . .	59
5.1.2. Hőmérséklet-változásból származó terhelés . . . . .	59
5.2. Rúdszerkezetek . . . . .	59
5.2.1. Bernoulli-féle rúdelmélet . . . . .	59
5.2.2. Elmozdulás állapot . . . . .	60
5.2.3. Alakváltozás állapot . . . . .	60
5.2.4. Feszültségi állapot . . . . .	61
5.2.5. Anyagtörvény . . . . .	61
5.2.6. Húzott-nyomott hajlított-nyírt és csavart rúd-végelem . . . . .	62
5.2.7. Csomóponti elmozdulás vektor . . . . .	63
5.2.8. Alakfüggvények meghatározása . . . . .	63
5.2.9. Egy végeelem alakváltozási energiája . . . . .	66
5.2.10. Külső erők munkája egy végeelemen . . . . .	69
5.2.11. Végelemek összekapcsolása . . . . .	76
5.2.12. A teljes szerkezet potenciális energiája . . . . .	76
5.3. A rugalmasságtan 2D-s feladatai . . . . .	79
5.3.1. Sík alakváltozás feladat . . . . .	79
5.3.2. Általánosított síkfeszültség feladat . . . . .	79
5.3.3. Tengelyszimmetrikus feladat . . . . .	79

# 1. Rugalmasságtani alapok

## 1.1. Deformálható test kinematikája

### 1.1.1. Az elmozdulások leírása

A kinematika a testek mozgását, alakváltozását írja le, és nem keresi a mozgást vagy alakváltozást létrehozó okokat. Olyan alapvető kinematikai összefüggéseket próbálunk megfogalmazni a matematika eszközeivel, amelyek alkalmazásánál teljesen lényegtelen a vizsgált test mérete és alakja. Tekintsünk egy tetszőleges felületekkel határolt testet, amely a kezdeti helyzetéhez képest elmozdult, alakja megváltozott (lásd 1. ábra). Az ábrán az alábbi jelöléseket használtuk:



1. ábra. Test pontjainak elmozdulása

$\vec{r}$  — a deformálatlan test pontjaiba mutató vektor

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$\vec{\tilde{r}}$  — a deformált test pontjaiba mutató vektor

$$\vec{\tilde{r}} = \tilde{x}\vec{e}_x + \tilde{y}\vec{e}_y + \tilde{z}\vec{e}_z$$

ahol

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x, y, z)$$

$$\tilde{y} = \tilde{y}(x, y, z)$$

$$\tilde{z} = \tilde{z}(x, y, z)$$

$\vec{u}$  — elmozdulás vektor, a deformálatlan test egy anyagi pontjából ( $Q$ ) a deformált test ugyanazon anyagi pontjába ( $\tilde{Q}$ ) mutató vektor.

$$\vec{u} = \tilde{\vec{r}} - \vec{r} = (\tilde{x} - x)\vec{e}_x + (\tilde{y} - y)\vec{e}_y + (\tilde{z} - z)\vec{e}_z = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$$

ahol

$$u = u(x, y, z)$$

$$v = v(x, y, z)$$

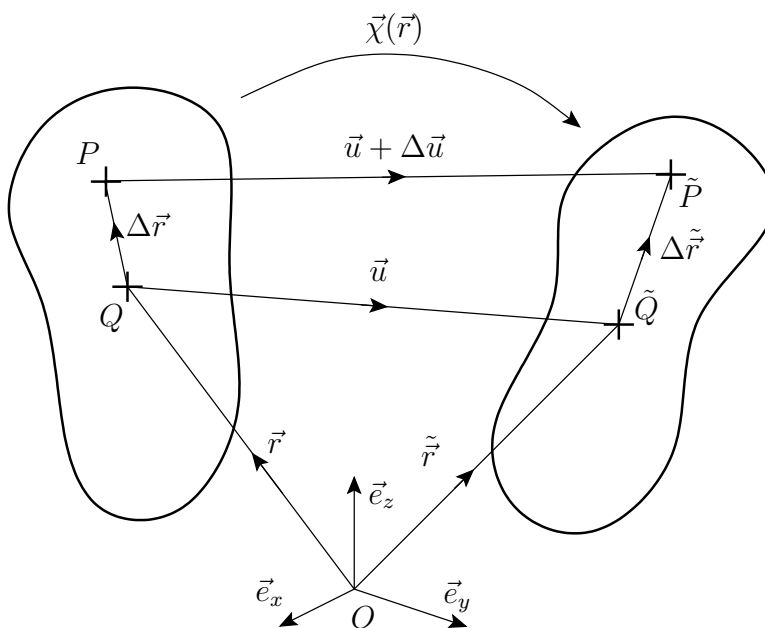
$$w = w(x, y, z)$$

$\vec{\chi}(\vec{r})$  — egy vektor-vektor függvény, amely megadja a deformálatlan test pontjainak leképezését a deformált test pontjaira. Ez a függvény nem feltétlenül lineáris!

$$\vec{\chi}(\vec{r}) = \vec{\chi}(x, y, z) = \tilde{\vec{r}}$$

Megjegyzés: a vektor-vektor függvény egy vektort egy másik vektorra képez le.

### 1.1.2. Az alakváltozások leírása



2. ábra. A test alakváltozása

#### Az alakváltozás értelmezése

$\Delta\vec{r}$  — A deformálatlan testen értelmezett vektor, a  $Q$  pontból a  $Q$  pont elemi környezetében lévő  $P$  pontba mutató vektor

$\Delta\tilde{\vec{r}}$  — A deformált testen értelmezett vektor, a  $\tilde{Q}$  pontból a  $\tilde{Q}$  pont elemi környezetében lévő  $\tilde{P}$  pontba mutató vektor, ahol a  $Q$  és  $\tilde{Q}$  valamint a  $P$  és  $\tilde{P}$  ugyanannak az anyagi pontnak a helyét jelöli a deformálatlan és deformált testeken.

Például:

$$\vec{\chi}(\vec{r}_P) = \tilde{\vec{r}}_{\tilde{P}}$$

vagy ugyan ez másként

$$\vec{\chi}(\vec{r}_Q + \Delta\vec{r}) = \vec{r}_Q + \Delta\vec{r}$$

Kérdés: Mekkora a  $\Delta\vec{u}$ , ha  $\vec{r}$  és  $\Delta\vec{r}$  tetszőleges? Az 2. ábrából leolvasható, hogy

$$\begin{aligned} \vec{r} + \Delta\vec{r} + (\vec{u} + \Delta\vec{u}) &= \vec{r} + \Delta\vec{r} \\ \vec{r} + \Delta\vec{r} + (\vec{u} + \Delta\vec{u}) &= \underbrace{\vec{\chi}(\vec{r})}_{\vec{r}} + \underbrace{[\vec{\chi}(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - \vec{\chi}(\vec{r})]}_{\Delta\vec{r}} \\ \underbrace{\vec{r} + \vec{u}}_{\vec{r}} + \Delta\vec{r} + \Delta\vec{u} &= \vec{\chi}(\vec{r} + \Delta\vec{r}) \end{aligned}$$

Sorfejtés a lineáris tagokig bezárólag

$$\vec{r} + \Delta\vec{r} + \Delta\vec{u} \approx \underbrace{\vec{\chi}(\vec{r})}_{\vec{r}} + \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial z}\Delta z + \dots$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy az alakváltozást elegendő lesz a lineáris tagokig bezárólag leírni. Ez azt jelenti, hogy az egymástól távolabb lévő pontok alakváltozása nem befolyásolja egymást. Emiatt a közelítőleg egyenlő ( $\approx$ ) jelet elhagyva egyszerűen csak egyenlőséget írunk.

$$\begin{aligned} \Delta\vec{r} + \Delta\vec{u} &= \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial z}\Delta z = \\ &= \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial x}(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x)\Delta x + \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial y}(\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y)\Delta y + \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial z}(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z)\Delta z = \\ &= \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x \Delta x + \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y \Delta y + \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \Delta z = \\ &= \left(\frac{\partial\vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x\right) \cdot \vec{e}_x \Delta x + \left(\frac{\partial\vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y\right) \cdot \vec{e}_y \Delta y + \left(\frac{\partial\vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z\right) \cdot \vec{e}_z \Delta z \end{aligned}$$

**1. feladat.** Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x\right) \cdot \vec{e}_x \Delta x + \left(\frac{\partial\vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y\right) \cdot \vec{e}_y \Delta y + \left(\frac{\partial\vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z\right) \cdot \vec{e}_z \Delta z &= \\ = \left(\frac{\partial\vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z\right) \cdot (\Delta x \vec{e}_x + \Delta y \vec{e}_y + \Delta z \vec{e}_z) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Delta\vec{r} + \Delta\vec{u} &= \left(\frac{\partial\vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial\vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z\right) \cdot (\Delta x \vec{e}_x + \Delta y \vec{e}_y + \Delta z \vec{e}_z) = \\ &= \underbrace{\downarrow}_{\nabla} \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z\right) \cdot \underbrace{(\Delta x \vec{e}_x + \Delta y \vec{e}_y + \Delta z \vec{e}_z)}_{\Delta\vec{r}} = \downarrow_{\nabla} \vec{\chi} \circ \nabla \cdot \Delta\vec{r} \end{aligned}$$

ahol a  $\vec{\chi} \circ \nabla$  a  $\vec{\chi}$  vektormező gradiense<sup>1</sup>. Mivel  $\vec{\chi}(\vec{r}) = \vec{r}$

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} + \Delta\vec{u} &= \vec{r} \circ \nabla \cdot \Delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\vec{r}} \cdot \Delta\vec{r} = \frac{\partial}{\partial\vec{r}}(\vec{r} + \vec{u}) \cdot \Delta\vec{r} = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vec{r}} + \frac{\partial\vec{u}}{\partial\vec{r}}\right) \cdot \Delta\vec{r} = \\ &= \underbrace{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vec{r}} \cdot \Delta\vec{r}}_{\underline{I}} + \frac{\partial\vec{u}}{\partial\vec{r}} \cdot \Delta\vec{r} = \Delta\vec{r} + \frac{\partial\vec{u}}{\partial\vec{r}} \cdot \Delta\vec{r}\end{aligned}$$

azaz

$$\Delta\vec{r} + \Delta\vec{u} = \Delta\vec{r} + \frac{\partial\vec{u}}{\partial\vec{r}} \cdot \Delta\vec{r}$$

Az egyszerűsítés után marad a

$$\Delta\vec{u} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial\vec{r}} \cdot \Delta\vec{r}$$

**1. definíció.** Az elmozdulás függvény gradiensét deriválttenzornak nevezzük.

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial\vec{r}} = \vec{u} \circ \nabla = \underline{\underline{D}}$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{D}} &= \frac{\partial\vec{u}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial\vec{u}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial\vec{u}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \\ [\underline{\underline{D}}]_{(xyz)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Az  $\underline{\underline{D}}$  felbontása szimmetrikus és ferdén szimmetrikus részre.

$$\underline{\underline{D}} = \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T)}_{\underline{\underline{A}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T)}_{\underline{\underline{\Psi}}}$$

**1. tétel** (bizonyítás nélkül). Ha  $u, v, w \ll 1$ , azaz az elmozdulások nagyon kicsik, akkor az  $\underline{\underline{A}}$  jó közelítéssel az alakváltozást írja le, a  $\underline{\underline{\Psi}}$  pedig a tengely körüli szögelfordulást.

–  $\underline{\underline{A}}$  az alakváltozási tenzor,

–  $\underline{\underline{\Psi}}$  a forgató tenzor.

## A deriválttenzor szemléltetése

$$\Delta\vec{u} = \underline{\underline{D}} \cdot \Delta\vec{r} = \underline{\underline{A}} \cdot \Delta\vec{r} + \underline{\underline{\Psi}} \cdot \Delta\vec{r}$$

A  $\Delta\vec{r}$  helyére írjuk be a Q pont elemi környezetében lévő  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  és  $\vec{e}_z$  egymásra páronként merőleges egységvektorokat (lásd 3. ábra).

$$\Delta\vec{u}_x = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{e}_x + \underline{\underline{\Psi}} \cdot \vec{e}_x = \vec{\alpha}_x + \vec{\beta}_x$$

<sup>1</sup>Egy  $\vec{v}$  vektormező gradiensére szokásos jelölések még a

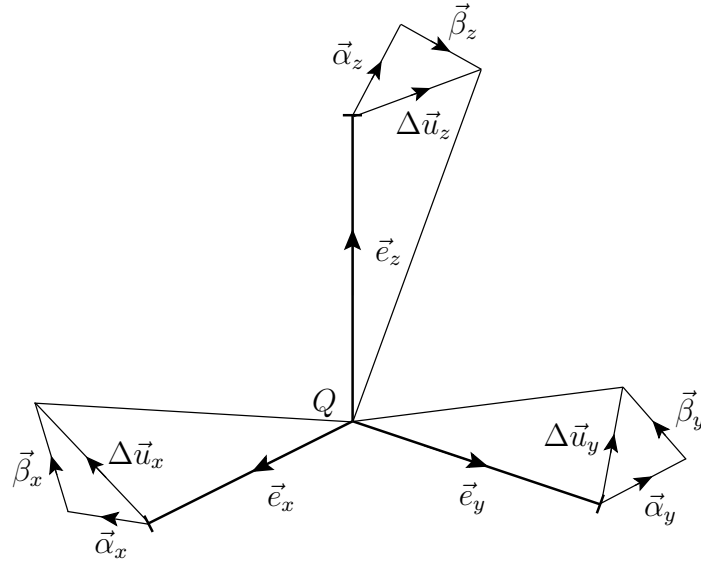
$$\text{grad}\vec{v} = \vec{v} \circ \nabla = \frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}}.$$



$$\Delta \vec{u}_y = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{e}_y + \underline{\underline{\Psi}} \cdot \vec{e}_y = \vec{\alpha}_y + \vec{\beta}_y$$

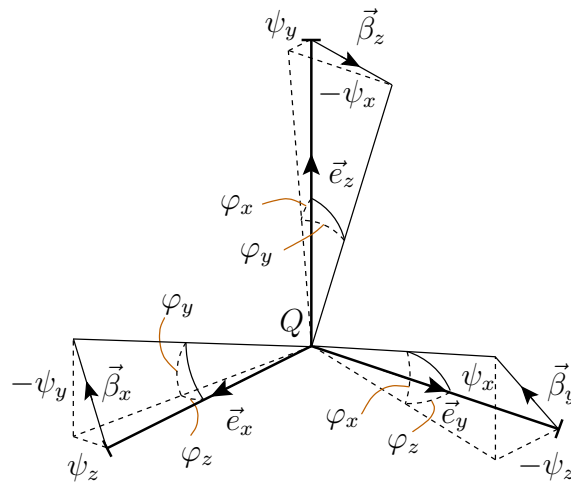
$$\Delta \vec{u}_z = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{e}_z + \underline{\underline{\Psi}} \cdot \vec{e}_z = \vec{\alpha}_z + \vec{\beta}_z$$

A  $\Delta \vec{u}_x$ ,  $\Delta \vec{u}_y$  és  $\Delta \vec{u}_z$  vektorok az  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  és  $\vec{e}_z$  egységvektorok végpontjainak elmozdulását jelentik.



3. ábra. Deriválttenszor szemléltetése: egységvektorok végpontjainak elmozdulása

**A forgás szemléltetése** A merev test szerű elfordulás nem befolyásolja sem a testen belül ébredő belső erőket (lásd a (9) Hooke-törvényt), sem a test alakváltozási energiáját (lásd 3. tétel). Szemléltessük a tengely körüli forgást.



4. ábra. Forgás szemléltetése

Egy  $Q$  pontból induló tetszőleges  $\vec{n}$  irányú egységvektor végpontjának elmozdulása a forgásból adódóan

$$\vec{\beta}_n = \underline{\underline{\Psi}} \cdot \vec{n},$$

ahol

$$\underline{[\Psi]}_{(xyz)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\psi_z & \psi_y \\ \psi_z & 0 & -\psi_x \\ -\psi_y & \psi_x & 0 \end{bmatrix}$$

Könnyen belátható, hogy

$$\vec{\beta}_n = \underline{\underline{\Psi}} \cdot \vec{n} = \vec{\psi} \times \vec{n}.$$

Amennyiben a kezdeti  $xyz$  és a test egy anyagi pontjának elemi környezetével együtt forgó  $x'y'z'$  koordináta-rendszerek tengelyei csak kicsit térnek el egymástól, azaz

$$\psi_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \ll 1$$

$$\psi_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \ll 1$$

$$\psi_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \ll 1$$

akkor

$$\psi_x = \sin(\varphi_x) \approx \varphi_x$$

$$\psi_y = \sin(\varphi_y) \approx \varphi_y$$

$$\psi_z = \sin(\varphi_z) \approx \varphi_z$$

vagyis

$$\vec{\beta}_n \approx \vec{\varphi} \times \vec{n}$$

ahol

$$\vec{\varphi} = \varphi_x \vec{e}_x + \varphi_y \vec{e}_y + \varphi_z \vec{e}_z$$

a merevtest szerű elfordulást leíró vektor. A  $\vec{\varphi}$  abszolút értéke a szögelfordulás nagyságát adja meg

$$\varphi = |\vec{\varphi}|$$

**Az alakváltozások szemléltetése** A továbbiakban csak az alakváltozásokkal foglalkozunk.

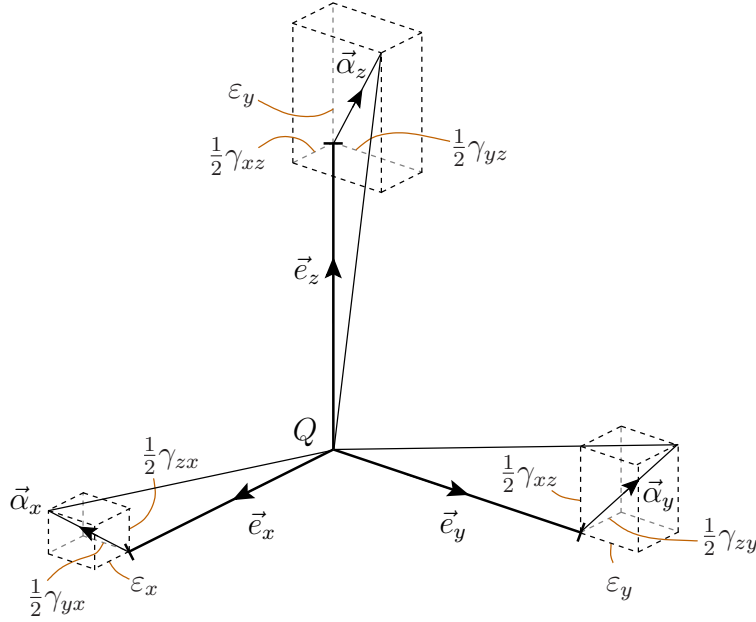
$$\underline{[A]}_{(xyz)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

vagy tömörebben

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}) \quad (1)$$

Ezt az egyenletet szokás kinematikai vagy geometriai egyenletnek is nevezni. Ez az egyenlet teremt kapcsolatot az elmozdulások és az alakváltozások között.

Szemléltessük az alakváltozásokat.



5. ábra. Alakváltozás szemléltetése

Ha a kezdetben egységnyi hosszúságú szakaszok hossza csak kis mértékben változik meg és a koordináta-tengelyek kezdetben kilencven fokos szöge csak kis mértékben csökken vagy növekszik, azaz

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} \ll 1 \quad \frac{\partial w}{\partial z} \ll 1$$

és

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \ll 1 \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \ll 1 \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \ll 1$$

akkor a fajlagos nyúlások az

$$\varepsilon_x \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y \approx \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z \approx \frac{\partial w}{\partial z}$$

összefüggésekkel, a szögtorzulások pedig a

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{yx} = \arctg \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{zy} = \arctg \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{zx} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \arctg \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

összefüggésekkel kaphatók.

$$\underline{[A]}_{(xyz)} \approx \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Mivel az általunk vizsgált esetekben mindig kis alakváltozások fognak előfordulni, a „ $\approx$ ” közelítőleg egyenlő jel helyett az „=” egyenlőség jelet használjuk.

$$\underline{\underline{A}}_{(xyz)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

**2. feladat.** *Ismerjük egy test pontjainak elmozdulását leíró  $\vec{\chi}(\vec{r})$  függvényt.*

$$\vec{\chi}(\vec{r}) = (x + \gamma y) \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

ahol  $\gamma$  egy skalár paraméter.

1. Szemléltesse az elmozdulást egy egységnyi oldalú kockán. Rajzolja meg a deformálatlan és deformált kockát elől-, oldalt- és felülnézetben. (Segítség: legyen a kocka egyik csúcsa a koordinátarendszer origója, három ebből a csúcsból induló éle pedig legyen a koordinátarendszer három tengelye.
2. Határozza meg az alakváltozási tenzort és írja fel az  $xyz$  koordinátarendszerben a tenzor mátrixát. Milyen összefüggés található a  $\gamma$  paraméter és a szögtorzulások között?
3. Határozza meg a forgató tenzort és írja fel az  $xyz$  koordinátarendszerben a tenzor mátrixát. Milyen összefüggés található a  $\gamma$  paraméter és a merev test szerű elmozdulást leíró  $\varphi$  szög között?



### 1.1.3. Kompatibilitási egyenlet

Szorozzuk meg a kinematikai egyenletet jobbról és balról is vektoriálisan a nabla operátorral

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla &= \nabla \times \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}) \times \nabla = \\ &= \frac{1}{2} \left( \nabla \times \vec{u} \circ \underbrace{\nabla \times \nabla}_{\vec{0}} + \underbrace{\nabla \times \nabla}_{\vec{0}} \circ \vec{u} \times \nabla \right) = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

Az

$$\nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla = \underline{\underline{0}} \quad (2)$$

egyenletet kompatibilitási egyenletnek nevezzük. Az alakváltozási mező kompatibilis, ha teljesíti a kompatibilitási egyenletet.

Az (1) kinematikai egyenlettel előállított alakváltozási mező mindig kompatibilis, azaz a (2) kompatibilitási feltétel automatikusan teljesül.

*Megjegyzés:* Az euklideszi teret az jellemzi, hogy benne egy test párhuzamos eltolása (transzláció) független az útvonaltól. Ha nem-euklideszi térben próbálnánk az alakváltozásokból visszaállítani az elmozdulásokat, nem kapnánk egyértelmű eredményt. Ezért nem engedjük meg, hogy a tér, amelyben az elmozdulásokat és alakváltozásokat leírjuk nem-euklideszi legyen. Ezt a feltételt a kompatibilitási egyenlettel tudjuk biztosítani.

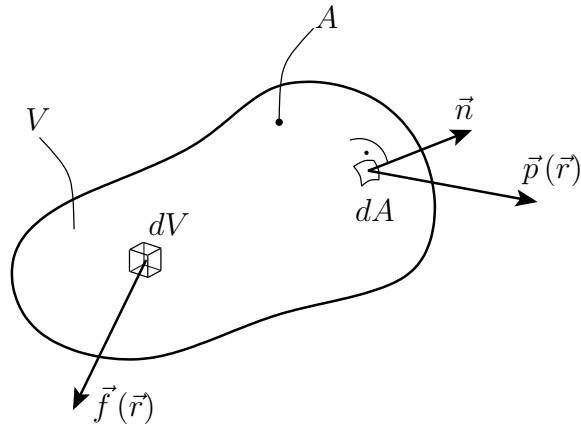
## 1.2. Feszültségi állapot

### 1.2.1. Test egyensúlya

**Erők egyensúlya** Nyugalom esetén a testre ható erők egyensúlyban vannak, azaz eredőjük nulla.

$$\vec{F} = \vec{0}$$

A testre ható erőket két csoportra lehet osztani (lásd: 6. ábra). Az egyik csoportba azok az erők



6. ábra. Test felületi és térfogati terhelése.

tartoznak, amelyek a testre a felületén keresztül hatnak. Ezek a koncentrált, vonal mentén és felületen megoszló terhelések. Mivel a valóságban a pontszerű és vonal mentén megoszló terhelések mindig a pont és a vonal kis környezetében fellépő felületen megoszló terhelések mechanikai modelljei (eredői), mondhatjuk hogy a test felületére ható erők mind felület mentén megoszló erőt jelentenek.

$$\vec{F}_A = \int_{(A)} \vec{p}(\vec{r}) dA$$

ahol  $\vec{p}(\vec{r})$  az  $\vec{r}$  helyvektorú egységnyi felületre jutó terhelés (felület mentén megoszló terhelés intenzitása),  $A$  a test felülete. A másik csoportot a térfogati terhelések jelentik, amikor az erő nem a test felületén, hanem közvetlenül a test belsejében hat.

$$\vec{F}_V = \int_{(V)} \vec{f}(\vec{r}) dV$$

ahol  $\vec{f}(\vec{r})$  az  $\vec{r}$  helyvektorú egységnyi térfogatra jutó terhelés (térfogaton megoszló terhelés intenzitása),  $V$  a test térfogata. Ilyen például a gravitációs erő, vagy a tehetetlenségi erők. Az egyensúlyt matematikailag a

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_V = \int_{(A)} \vec{p}dA + \int_{(V)} \vec{f}dV = \vec{0} \quad (3)$$

képlettel tudjuk leírni, amit tekinthetünk az egyensúlyi egyenlet integrál alakjának is.

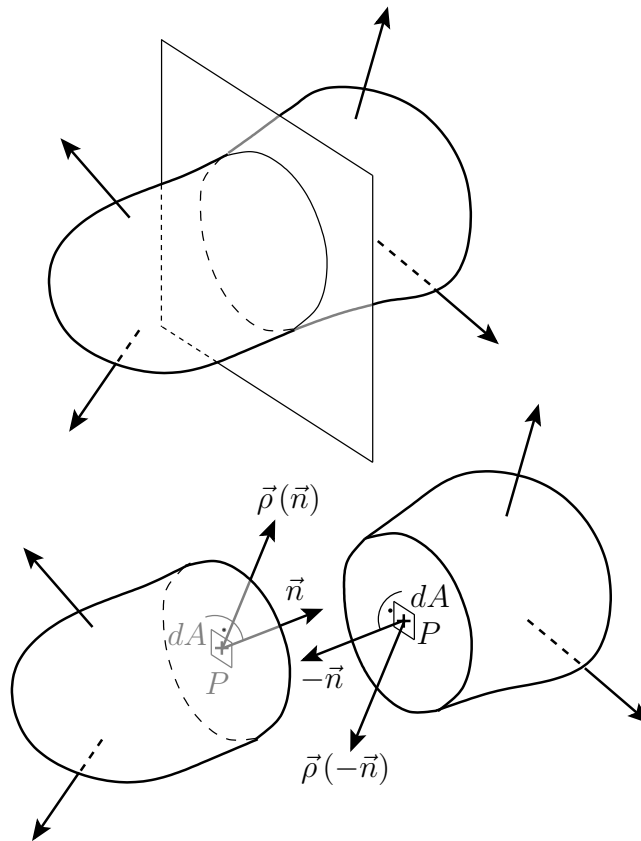
**Nyomatékok egyensúlya** Ha egy test egyensúlyban van, akkor a testre ható erőknek a tér egy tetszőleges  $P$  pontjára felírt nyomatéka nulla. Az egyszerűség kedvéért legyen most a tetszőleges pont az  $O$  origó.

$$\vec{M}_O = \int_{(A)} \vec{r} \times \vec{p} dA + \int_{(V)} \vec{r} \times \vec{f} dV = \vec{0} \quad (4)$$

Ezt tekinthetjük úgy mint a nyomatékok egyensúlyának integrális alakja.

### 1.2.2. Belső erők (Cauchy-hipotézis)

Egy testet, amelyre külső erők hatnak, képzeletben vágjunk ketté egy tetszőleges  $\vec{n}$  normálisú,  $P$  anyagi ponton átmenő síkkal (lásd 7. ábra). Vizsgáljuk meg a kettévágás után kapott két rész egyensúlyát. Belátható, hogy az elmetszett felületen fellépő erők nagysága és iránya függ az elmetszett felület normálisától. Ha az egész test egyensúlyban volt, akkor az egyes részei is



7. ábra.

egyensúlyban vannak, azaz az egész testre ható erők és az egyes részekre ható erők összege külön-külön is nulla. Ebből következik, hogy az elmetszett felületen az egyik és a másik testre ható erők összege nulla.

$$\int_{(A_s)} \vec{\rho}(\vec{r}, \vec{n}) dA + \int_{(A_s)} \vec{\rho}(\vec{r}, -\vec{n}) dA = \vec{0} \quad (5)$$

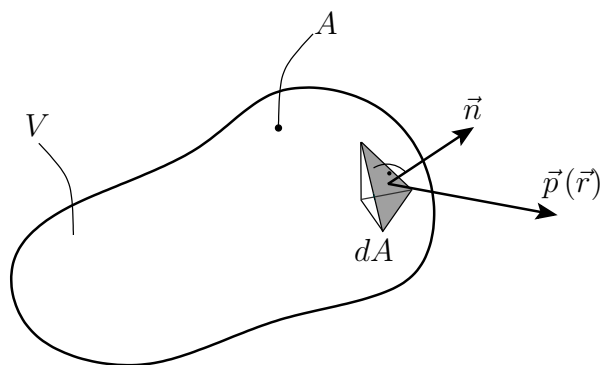
ahol a  $\vec{\rho}(\vec{r}, \vec{n})$  vagy egyszerűbb jelöléssel  $\vec{\rho}_n(\vec{r})$  az egységnyi felületen fellépő belső erőt jelenti. Mivel az egyes részek egyensúlyban vannak, azaz a testeket alkotó összes anyagi pont is egyensúlyban

van, az (5) összefüggésnek minden egyes, az  $A_s$  felületen lévő anyagi pontra is teljesülnie kell.

$$\int_{(A_s)} (\vec{\rho}(\vec{r}, \vec{n}) + \vec{\rho}(\vec{r}, -\vec{n})) dA = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\rho}(\vec{r}, \vec{n}) = -\vec{\rho}(\vec{r}, -\vec{n})$$

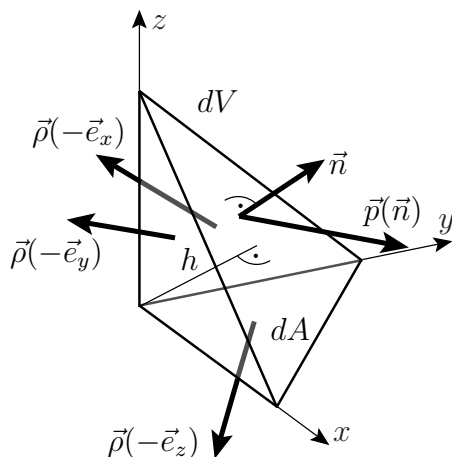
### 1.2.3. Feszültség tenzor

Most nézzük meg, hogy egy test egy elemi térfogatának egyensúlya milyen feltételekkel teljesül. Továbbra is mondhatjuk, hogyha egy test egyensúlyban van, akkor az őt alkotó elemi térfogatok is külön-külön egyensúlyban vannak. Metszünk ki a testből egy elemi térfogatot úgy, hogy az elemi térfogat felületének egy része legyen a test külső felülete. A számítások elvégzéséhez célszerű úgy megválasztani az elemi térfogatot, hogy az tetraéder alakú legyen (8. ábra). Írjuk fel az elemi



8. ábra.

térfogatra ható külső és belső erők egyensúlyát (lásd 9. ábra).



9. ábra.

$$\vec{p} dA + \vec{\rho}(-\vec{e}_x) dA_x + \vec{\rho}(-\vec{e}_y) dA_y + \vec{\rho}(-\vec{e}_z) dA_z + \vec{f} dV = \vec{0}$$

$$\vec{p} dA - \vec{\rho}(\vec{e}_x) dA_x - \vec{\rho}(\vec{e}_y) dA_y - \vec{\rho}(\vec{e}_z) dA_z + \vec{f} dV = \vec{0}$$

Az egyszerűség kedvéért használjuk a következő jelöléseket:

$$\vec{\rho}_x := \vec{\rho}(\vec{e}_x) \quad \vec{\rho}_y := \vec{\rho}(\vec{e}_y) \quad \vec{\rho}_z := \vec{\rho}(\vec{e}_z)$$

$$\vec{p} dA - \vec{\rho}_x \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{e}_x) dA}_{dA_x} - \vec{\rho}_y \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{e}_y) dA}_{dA_y} - \vec{\rho}_z \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{e}_z) dA}_{dA_z} + \vec{f} dV = \vec{0}$$

$$\vec{p} dA - \vec{\rho}_x \underbrace{(\vec{e}_x \cdot \vec{n}) dA}_{dA_x} - \vec{\rho}_y \underbrace{(\vec{e}_y \cdot \vec{n}) dA}_{dA_y} - \vec{\rho}_z \underbrace{(\vec{e}_z \cdot \vec{n}) dA}_{dA_z} + \vec{f} dV = \vec{0}$$

$$\vec{p} dA - \vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x \cdot \vec{n} dA - \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y \cdot \vec{n} dA - \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z \cdot \vec{n} dA + \vec{f} dV = \vec{0}$$

$$\vec{p} dA - (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{n} dA + \vec{f} dV = \vec{0}$$

A  $dV$  elemi térfogatot ki tudjuk fejezni a  $dA$  elemi felület és a tetraéder  $h$  magasságának a segítségével

$$dV = dA \frac{h}{3}$$

Ezzel az elemi térfogat egyensúlya így írható

$$\vec{p} dA - (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{n} dA + \vec{f} \frac{h}{3} dA = \vec{0}$$

Osszuk el mindkét oldalt a  $dA$  elemi felülettel ( $dA \neq 0$ )

$$\vec{p} - (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{n} + \vec{f} \frac{h}{3} = \vec{0}$$

Tartsunk a tetraéder  $h$  magasságával nullához:  $h \rightarrow 0$ . Ami marad:

$$\vec{p} - \underbrace{(\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z)}_{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

ahol  $\underline{\underline{F}}$  a feszültségi tenzor.

$$\underline{\underline{F}} = \vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z$$

vagy

$$\underline{\underline{F}}(\vec{r}) = \vec{\rho}_x(\vec{r}) \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y(\vec{r}) \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z(\vec{r}) \circ \vec{e}_z$$

vagyis a feszültségi tenzor a hely függvénye. Az elemi  $dA$  felületre ható terhelés így kifejezhető a feszültségi tenzonnal

$$\vec{p}(\vec{r}) = \underline{\underline{F}}(\vec{r}) \cdot \vec{n} \quad (6)$$

**Feszültségtenzor szemléltetése** Szorozzuk meg az  $\underline{\underline{F}}$  feszültségtenzort rendre az  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  és  $\vec{e}_z$  egységvektorokkal.



### 1.2.4. Egyensúlyi egyenletek

Térjünk vissza ismét az erők egyensúlyának (3) integrál alakjához

$$\int_{(A)} \vec{p} dA + \int_{(V)} \vec{f} dV = \vec{0}$$

Helyettesítsük be ebbe a feszültségi tenzorra kapott (6) összefüggést

$$\int_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA + \int_{(V)} \vec{f} dV = \vec{0}$$

Alkalmazzuk az első tagra a Gauss-tételt

$$\int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV + \int_{(V)} \vec{f} dV = \int_{(V)} (\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f}) dV = \vec{0}$$

Mivel az integrálási tartomány tetszőleges, az integrál csak akkor lehet nulla, ha a zárójeles kifejezés mindig nullával egyenlő.

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} = \vec{0} \quad (7)$$

Ezt nevezzük az erőkre vonatkozó egyensúlyi egyenletnek.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} &= (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) + (f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y + f_z \vec{e}_z) = \\ &= \frac{\partial \vec{\rho}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\rho}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial z} + f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y + f_z \vec{e}_z = \\ &= \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \vec{e}_y + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \vec{e}_z \right) + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \vec{e}_x + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \vec{e}_z \right) + \\ &\quad + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \vec{e}_y + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \vec{e}_z \right) + f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y + f_z \vec{e}_z = \\ &= \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y \right) \vec{e}_y + \\ &\quad + \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z \right) \vec{e}_z = \vec{0} \end{aligned}$$

Ez egyenértékű a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned}$$

skalár egyenletrendszerrel.

Most vizsgáljuk meg a nyomatékok (4) egyensúlyát.

$$\int_{(A)} \vec{r} \times \vec{p} dA + \int_{(V)} \vec{r} \times \vec{f} dV = \vec{0}$$

Szintén helyettesítsük be a (6) összefüggést

$$\int_{(A)} \vec{r} \times \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA + \int_{(V)} \vec{r} \times \vec{f} dV = \vec{0}$$

és alkalmazzuk a Gauss-tételt

$$\int_{(V)} \vec{r} \times \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV + \int_{(V)} \vec{r} \times \vec{f} dV = \int_{(V)} \left( \vec{r} \times \underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{r} \times \vec{f} \right) dV = \vec{0}$$

Mivel az integrálási tartomány tetszőleges, az integrál csak akkor lehet nulla, ha a zárójeles kifejezés mindig nullával egyenlő.

$$\vec{r} \times \underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{r} \times \vec{f} = \vec{0}$$

Alakítsuk át az első tagot a szorzat deriválási szabályának felhasználásával

$$\vec{r} \times \underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{r} \times \underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{r} \times \vec{f} = \vec{0}$$

Emeljük ki az  $\vec{r}$  vektorral történő vektoriális szorzást

$$\vec{r} \times \underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{r} \times \underbrace{\left( \underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} \right)}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

A zárójeles kifejezés a (7) egyenletnek megfelelően nulla. Alakítsuk tovább a maradék egyenletet

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \underline{\underline{F}} \cdot \nabla &= \overline{(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)} \times (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) = \\ &= \vec{e}_x \times \vec{\rho}_x \circ \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}_1 + \vec{e}_y \times \vec{\rho}_x \circ \underbrace{\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y}_1 + \vec{e}_z \times \vec{\rho}_x \circ \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z}_1 = \vec{e}_x \times \vec{\rho}_x + \vec{e}_y \times \vec{\rho}_x + \vec{e}_z \times \vec{\rho}_x = \\ &= \vec{e}_x \times (\sigma_x \vec{e}_x + \tau_{yx} \vec{e}_y + \tau_{zx} \vec{e}_z) + \vec{e}_y \times (\tau_{xy} \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \tau_{zy} \vec{e}_z) + \vec{e}_z \times (\tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z) = \\ &= (\tau_{yx} \vec{e}_z - \tau_{zx} \vec{e}_y) + (-\tau_{xy} \vec{e}_z + \tau_{zy} \vec{e}_x) + (\tau_{xz} \vec{e}_y - \tau_{yz} \vec{e}_x) = \\ &= (\tau_{zy} - \tau_{yz}) \vec{e}_x + (\tau_{xz} - \tau_{zx}) \vec{e}_y + (\tau_{yx} - \tau_{xy}) \vec{e}_z = \vec{0} \end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned} \tau_{zy} &= \tau_{yz} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \\ \tau_{yx} &= \tau_{xy} \end{aligned}$$

Ez egyben azt is jelenti, hogy a feszültségi tenzor szimmetrikus. A nyomatékok egyensúlyának differenciális alakját ezek alapján az

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^T \quad (8)$$

egyenlőséggel fejezhetjük ki.

## 1.3. Anyagegyenlet

### 1.3.1. Hooke-törvény

Az anyagegyenlet a szilárd test külső behatásokkal szembeni viselkedését írja le. Itt csak mechanikai hatásokat tárgyaljuk. Legyen olyan az anyagegyenlet, hogy:

- a vizsgált test viselkedése legyen izotrop,
- az anyagtörvény csak kis alakváltozások mellett adja meg kellő pontossággal a testben keletkezett feszültségeket,
- az alakváltozások és belső erők (feszültségek) között a kapcsolatot írja le lineáris függvény.

A fenti tulajdonságokat a Hooke-féle anyagtörvény teljesíti

**2. tétel** (bizonyítás nélkül). *Ha egy anyag izotrop tulajdonságú, csak kis alakváltozásoknak van kitéve ( $\varepsilon \ll 1$  és  $\gamma \ll 1$ ) és a keletkezett feszültség arányos az alakváltozással, akkor az alakváltozási tenzor és a feszültségi tenzor kapcsolatát a*

$$\underline{\underline{F}} = \frac{E}{1 + \nu} \left( \underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} A_I \underline{\underline{I}} \right) \quad (9)$$

*un. Hooke-törvény adja meg, ahol  $E$  az anyag rugalmassági- vagy Young-modulusza,  $\nu$  a Poisson-tényező,  $A_I$  az alakváltozási tenzor első skalárinvariánsa,  $\underline{\underline{I}}$  pedig az egységtenzor.*

Írjuk fel a Hooke-törvényt derékszögű Descartes-féle koordinátarendszerben.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{xy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{1 + \nu} \left( \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Ha a vizsgált test egyensúlyban van, akkor a feszültségi tenzor (8) miatt csak 6 db független skalár koordinátát jelent.

$$\sigma_x = \frac{E}{1 + \nu} \left( \varepsilon_x + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 + \nu} \left( \varepsilon_y + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1 + \nu} \left( \varepsilon_z + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{yz}$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{zx}$$

## 1.4. A rugalmasságtani feladat kitűzése

A rugalmasságtani peremérték feladat kitűzéséhez az alábbi egyenletekre van szükség:

- Kinematikai egyenlet

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u})$$

- Egyensúlyi egyenletek

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} = \vec{0}$$
$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^T$$

- Anyagegyenlet (Hooke-törvény)

$$\underline{\underline{F}} = \frac{E}{1 + \nu} \left( \underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} A_I I \underline{\underline{I}} \right)$$

### 1.4.1. Skaláris egyenletek

Nézzük meg a fenti egyenletek skalár koordinátáit.

- Kinematikai egyenletek

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$
$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

- Egyensúlyi egyenletek

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$$

– Anyagtörvény

$$\sigma_x = \frac{E}{1 + \nu} \left( \varepsilon_x + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 + \nu} \left( \varepsilon_y + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1 + \nu} \left( \varepsilon_z + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{yz}$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{zx}$$

Összesen 15 db skalár egyenlet.

### 1.4.2. Ismeretlen függvények

Elmozdulás koordináták

$$u(x, y, z), \quad v(x, y, z), \quad w(x, y, z),$$

fajlagos nyúlások

$$\varepsilon_x(x, y, z), \quad \varepsilon_y(x, y, z), \quad \varepsilon_z(x, y, z),$$

szögtorzulások

$$\gamma_{xy}(x, y, z), \quad \gamma_{yz}(x, y, z), \quad \gamma_{zx}(x, y, z),$$

normálfeszültségek

$$\sigma_x(x, y, z), \quad \sigma_y(x, y, z), \quad \sigma_z(x, y, z),$$

csúsztató feszültségek

$$\tau_{xy}(x, y, z), \quad \tau_{yz}(x, y, z), \quad \tau_{zx}(x, y, z).$$

Összesen 15 db skalás függvény.

### 1.4.3. Peremfeltételek

Osszuk fel a vizsgált test felületét két részre (lásd 10. ábra). Az egyik felületen ( $A_u$ ) legyen adott az elmozdulás, míg a másik felületen ( $A_p$ ) legyen ismert a terhelés. A két felületre történő felosztás legyen olyan, hogy  $A_u \cup A_p = A$  és  $A_u \cap A_p = \emptyset$ .

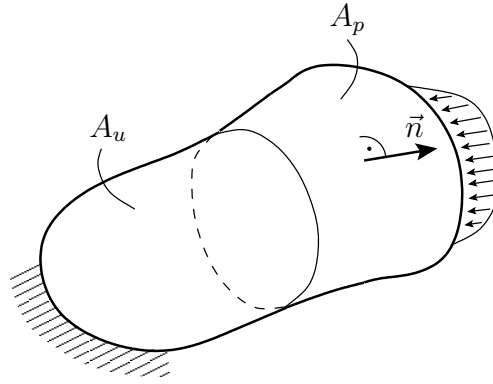
A peremfeltételeket a felosztásnak megfelelően tudjuk előírni:

– Kinematikai peremfeltétel

$$\underline{\vec{u}}(\vec{r}) = \underline{\vec{u}}_0(\vec{r}) \quad \vec{r} \in A_u$$

– Dinamikai peremfeltétel

$$\underline{\underline{F}}(\vec{r}) \cdot \vec{n} = \underline{\underline{p}}_0(\vec{r}) \quad \vec{r} \in A_p$$



10. ábra. Peremfeltételek

## 2. A rugalmasságtani feladat közelítő megoldása

### 2.1. Alapfogalmak

#### 2.1.1. Kinematikailag lehetséges elmozdulásmező

**2. definíció.** *Egy elmozdulásmezőt kinematikailag lehetségesnek nevezünk, ha*

- folytonos függvény,
- elegendően sokszor deriválható a hely szerint a test  $V$  térfogatán,
- kielégíti a kinematikai peremfeltételeket a test  $A_u$  felületén.

*Jele:*  $\vec{u}^* = \vec{u}^*(\vec{r}) = \vec{u}^*(x, y, z)$

Kinematikailag lehetséges alakváltozás:

$$\underline{\underline{A}}^* = \frac{1}{2} (\vec{u}^* \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}^*)$$

Peremfeltételek:

$$\vec{u}^* = \vec{u}_0 \quad \vec{r} \in A_u$$

Kinematikailag lehetséges feszültségmező:

$$\underline{\underline{F}}^* = \frac{E}{1 + \nu} \left( \underline{\underline{A}}^* + \frac{\nu}{1 - 2\nu} A_I^* I \underline{\underline{I}} \right)$$

A kinematikailag lehetséges feszültségmező az egyensúlyi egyenleteket és a dinamikai peremfeltételt általában nem elégíti ki. A  $V$  térfogaton általában:

$$\underline{\underline{F}}^* \cdot \nabla + \vec{f} \neq \vec{0}$$

és az  $A_p$  felületen általában:

$$\underline{\underline{F}}^* \cdot \vec{n} \neq \vec{p}_0.$$

Ha az egyensúlyi egyenletek és a dinamikai peremfeltétel is kielégülnek, akkor az  $\vec{u}^*$  a tényleges megoldás ( $\vec{u}^* = \vec{u}$ ). Egy peremérték feladatnál végtelen sok kinematikailag lehetséges elmozdulásmező állítható elő, azonban ezek közül csak egy van, amely a peremérték feladat tényleges megoldását adja.

### 2.1.2. Statikailag lehetséges feszültségmező

**3. definíció.** Egy feszültségmezőt statikailag lehetségesnek nevezünk, ha

– kielégíti az egyensúlyi egyenleteket a test  $V$  térfogatán

– kielégíti a dinamikai peremfeltételeket a test  $A_p$  felületén

$$\text{Jele: } \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(\vec{r}) = \underline{\underline{F}}(x, y, z)$$

Peremfeltételek:

$$\underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0$$

Az egyensúlyi egyenlet:

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$$

Statikailag lehetséges alakváltozási mező:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1 + \nu}{E} \left( \underline{\underline{F}} - \frac{\nu}{1 + \nu} \bar{F}_I \underline{\underline{I}} \right)$$

A statikailag lehetséges alakváltozási mező és a belőle számítható statikailag lehetséges elmozdulásmező a kompatibilitási egyenleteket és a kinematikai peremfeltételeket általában nem elégíti ki.

$$\nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla \neq \underline{\underline{0}}$$

és

$$\vec{u} \neq \vec{u}_0$$

Ha a kompatibilitási egyenlet és a kinematikai peremfeltételek is teljesülnek, akkor  $\underline{\underline{F}}(x, y, z) = \underline{\underline{F}}(x, y, z)$  a feladat tényleges megoldása. Egy peremérték feladatnál végtelen sok statikailag lehetséges feszültségmező állítható elő. Ezek közül csak egy van, amely a peremérték feladatnak a tényleges megoldása.

### 2.1.3. Virtuális elmozdulásmező

**4. definíció.** Legyen  $\vec{u}_1^*$  és  $\vec{u}_2^*$  két kinematikailag lehetséges elmozdulásmező. Virtuális elmozdulásmezőnek nevezzük a

$$\delta \vec{u} := \vec{u}_1^* - \vec{u}_2^*$$

különbséggel definiált függvényt.

A 2. definícióból következően a virtuális elmozdulásmező az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik

- folytonos függvény,
- elegendően sokszor deriválható,
- a kinematikai peremen az értéke nulla.

### 2.1.4. Az elmozdulásmező variációja

**5. definíció.** Legyen  $\vec{u}$  a rugalmasságtani feladat egzakt megoldása és  $\vec{u}^*$  egy kinematikailag lehetséges elmozdulásmező. Az elmozdulásmező variációjának nevezzük a

$$\delta\vec{u} := \vec{u}^* - \vec{u}$$

különbséggel definiált függvényt.

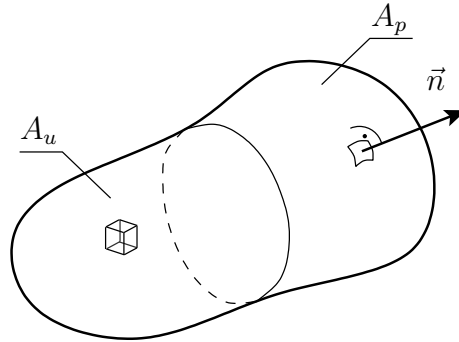
A 2. definícióból következően az elmozdulásmező variációja az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik

- folytonos függvény,
- elegendően sokszor deriválható,
- a kinematikai peremen az értéke nulla.

## 2.2. A rugalmasságtan energia elvei

### 2.2.1. A virtuális munka elve

Az  $\underline{\underline{F}}$  statikailag lehetséges feszültségmező a definíciójából adódóan kielégíti az egyensúlyi egyen-



11. ábra. A rugalmas test peremfeltételei: megfogások és terhelések.

letet:

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} = \vec{0}$$

Szorozzuk meg ezt az egyenletet az  $\vec{u}^*$  kinematikailag lehetséges elmozdulásmezővel, majd integráljuk a test V térfogatán.

$$\int_{(V)} \left( \vec{u}^* \cdot \overset{\downarrow}{\underline{\underline{F}}} \cdot \nabla + \vec{u}^* \cdot \vec{f} \right) dV = 0$$

ahol lefelé mutató nyíllal jelöltük, hogy a nabla operátor melyik tagra hat. A szorzat deriválási szabályának felhasználásával, azaz hogy

$$\vec{u}^* \cdot \overset{\downarrow}{\underline{\underline{F}}} \cdot \nabla = \overset{\downarrow}{\vec{u}^*} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{u}^* \cdot \overset{\downarrow}{\underline{\underline{F}}} \cdot \nabla$$



a fenti integrál átalakítható.

$$\int_{(V)} \left( \underline{\vec{u}}^* \cdot \underline{\vec{F}} \cdot \nabla - \underline{\vec{u}}^* \cdot \underline{\vec{F}} \cdot \nabla + \underline{\vec{u}}^* \cdot \underline{\vec{f}} \right) dV = 0$$

Végezzük el a középső tagon a deriválást

$$\begin{aligned} \underline{\vec{u}}^* \cdot \underline{\vec{F}} \cdot \nabla &= \underline{\vec{u}}^* \cdot (\bar{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \bar{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \bar{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) = \\ &= \frac{\partial \underline{\vec{u}}^*}{\partial x} \cdot (\bar{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \bar{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \bar{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial \underline{\vec{u}}^*}{\partial y} \cdot (\bar{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \bar{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \bar{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_y + \\ &\quad + \frac{\partial \underline{\vec{u}}^*}{\partial z} \cdot (\bar{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \bar{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \bar{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z = \\ &= \frac{\partial \underline{\vec{u}}^*}{\partial x} \cdot \bar{\rho}_x + \frac{\partial \underline{\vec{u}}^*}{\partial y} \cdot \bar{\rho}_y + \frac{\partial \underline{\vec{u}}^*}{\partial z} \cdot \bar{\rho}_z \end{aligned}$$

Az utolsó sor egyszerűbb felírása érdekében egy új szorzás műveletet definiálunk

**6. definíció.** *Tenzorok kétszeres skaláris szorzásán a következő műveletet értjük<sup>2</sup>:*

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} := \text{tr} (\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{B}})$$

**Következmény.**

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \text{tr} (\underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{A}}) = \text{tr} (\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{B}}) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$$

**Következmény.**

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \text{tr} (\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{B}}) = \text{tr} (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}^T) = \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{B}}^T$$

**Következmény.**

$$\begin{aligned} (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot (\vec{c} \circ \vec{d}) &= \text{tr} \left( (\vec{b} \circ \vec{a}) \cdot (\vec{c} \circ \vec{d}) \right) = \text{tr} \left( \vec{b} \circ (\vec{a} \cdot \vec{c}) \circ \vec{d} \right) = \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \text{tr} (\vec{b} \circ \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) (\vec{b} \cdot \vec{d}) \end{aligned}$$

**Következmény.** *Ha*

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [\underline{\underline{B}}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

*akkor*

$$\begin{aligned} [\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}] &= \text{tr} (\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{B}}) = \\ &= \text{tr} \left( \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{21}b_{23} + a_{31}b_{33} \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31} & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32} & a_{12}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{32}b_{33} \\ a_{13}b_{11} + a_{23}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{13}b_{12} + a_{23}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{13}b_{13} + a_{23}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{bmatrix} \right) = \end{aligned}$$

<sup>2</sup>A  $\text{tr}(\dots)$  (trace) tenzorokon értelmezett függvény a tenzor főátlójában lévő elemeinek összegét adja meg. Például  $\text{tr}(\underline{\underline{A}}) = A_I$ .

$$= a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32} + a_{13}b_{13} + a_{23}b_{23} + a_{33}b_{33}$$

vagyis a két mátrix azonos helyein lévő elemeit összeszorozzuk, és a szorzatokat összeadjuk. Ez a számítási módszer hasonló a vektorok skaláris szorzásánál használt eljáráshoz.<sup>3</sup>

Ezek alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial x} \cdot \vec{\rho}_x + \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial y} \cdot \vec{\rho}_y + \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial z} \cdot \vec{\rho}_z = \\ & = \left( \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial x} \cdot \vec{\rho}_x \right) (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x) + \left( \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial y} \cdot \vec{\rho}_y \right) (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y) + \left( \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial z} \cdot \vec{\rho}_z \right) (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z) = \\ & = \left( \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial x} \cdot \vec{\rho}_x \right) (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x) + \left( \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial y} \cdot \vec{\rho}_y \right) (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y) + \left( \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial z} \cdot \vec{\rho}_z \right) (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z) + \\ & + \left( \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial x} \cdot \vec{\rho}_y \right) (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y) + \left( \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial y} \cdot \vec{\rho}_z \right) (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z) + \left( \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial z} \cdot \vec{\rho}_x \right) (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x) + \\ & + \left( \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial y} \cdot \vec{\rho}_x \right) (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x) + \left( \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial z} \cdot \vec{\rho}_y \right) (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_y) + \left( \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial x} \cdot \vec{\rho}_z \right) (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z) = \\ & = \left( \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) = \\ & = \underline{\underline{D}}^* \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{D}}^* \end{aligned}$$

Az  $\underline{\underline{D}}^*$  kinematikailag lehetséges deriválttenzor felbontható egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus részre.

$$\underline{\underline{D}}^* = \underline{\underline{A}}^* + \underline{\underline{\Psi}}^*$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{D}}^* = \underline{\underline{F}} \cdot (\underline{\underline{A}}^* + \underline{\underline{\Psi}}^*) = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{A}}^* + \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\Psi}}^*$$

A második tagban használjuk ki hogy  $\underline{\underline{F}}$  szimmetrikus,  $\underline{\underline{\Psi}}^*$  pedig ferdén szimmetrikus

$$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\Psi}}^* = \underline{\underline{F}}^T \cdot (\underline{\underline{\Psi}}^*)^T = -\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\Psi}}^*$$

Ha egy skalár szám egyenlő saját maga mínusz egyszeresével, akkor ez a skalár szám a nulla, vagyis

$$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\Psi}}^* = 0$$

Ezek alapján

$$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{D}}^* = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{A}}^*$$

Visszatérve a virtuális munka elvéhez írhatjuk, hogy

$$\int_{(V)} \left( \vec{u}^* \cdot \vec{\underline{\underline{F}}} \cdot \nabla - \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{A}}^* + \vec{u}^* \cdot \vec{f} \right) dV = 0$$

<sup>3</sup>Szokásos a vektorok közötti (egyszeres) skaláris szorzást és a tenzorok (mátrixok) közötti kétszeres skaláris szorzást „belső szorzat”-nak is nevezni.

Bontsuk fel a zárójelet

$$\int_{(V)} \overline{\underline{\underline{u}}}^* \cdot \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \nabla dV - \int_{(V)} \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \cdot \underline{\underline{A}}^* dV + \int_{(V)} \overline{\underline{\underline{u}}}^* \cdot \vec{f} dV = 0$$

Alkalmazzuk az első tagra a Gauss-tételt

$$\int_{(A)} \overline{\underline{\underline{u}}}^* \cdot \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n} dA - \int_{(V)} \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \cdot \underline{\underline{A}}^* dV + \int_{(V)} \overline{\underline{\underline{u}}}^* \cdot \vec{f} dV = 0$$

Ez a virtuális munka elvének általános alakja. Azért *virtuális* munka elv, mert nem egy valódi elmozduláson végzett munkát ad meg.

Alkalmazzuk a virtuális munka elvét a rugalmasságtani peremérték feladatra. A vizsgált test felülete két részből áll: az  $A_u$  felületen az elmozdulás adott, az  $A_p$  felületen pedig a terhelés. Ennek megfelelően bontsuk két részre a felületi integrált.

$$\int_{(V)} \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \cdot \underline{\underline{A}}^* dV - \int_{(A_u)} \overline{\underline{\underline{u}}}_0 \cdot \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n} dA - \int_{(A_p)} \overline{\underline{\underline{u}}}^* \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \overline{\underline{\underline{u}}}^* \cdot \vec{f} dV = 0$$

### 2.2.2. Virtuális elmozdulás elve

Az előzőekben levezetett virtuális munka elvét írjuk fel két különböző kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőre.

$$\int_{(V)} \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \cdot \underline{\underline{A}}_1^* dV - \int_{(A_u)} \overline{\underline{\underline{u}}}_0 \cdot \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n} dA - \int_{(A_p)} \overline{\underline{\underline{u}}}_1^* \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \overline{\underline{\underline{u}}}_1^* \cdot \vec{f} dV = 0$$

$$\int_{(V)} \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \cdot \underline{\underline{A}}_2^* dV - \int_{(A_u)} \overline{\underline{\underline{u}}}_0 \cdot \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n} dA - \int_{(A_p)} \overline{\underline{\underline{u}}}_2^* \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \overline{\underline{\underline{u}}}_2^* \cdot \vec{f} dV = 0$$

majd vonjuk ki őket egymásból.

$$\int_{(V)} \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \cdot (\underline{\underline{A}}_1^* - \underline{\underline{A}}_2^*) dV - \int_{(A_p)} (\overline{\underline{\underline{u}}}_1^* - \overline{\underline{\underline{u}}}_2^*) \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} (\overline{\underline{\underline{u}}}_1^* - \overline{\underline{\underline{u}}}_2^*) \cdot \vec{f} dV = 0$$

ahol

$$\overline{\underline{\underline{u}}}_1^* - \overline{\underline{\underline{u}}}_2^* = \delta \vec{u}$$

a virtuális elmozdulásmező,

$$\underline{\underline{A}}_1^* - \underline{\underline{A}}_2^* = \frac{1}{2} (\overline{\underline{\underline{u}}}_1^* \circ \nabla + \nabla \circ \overline{\underline{\underline{u}}}_1^*) - \frac{1}{2} (\overline{\underline{\underline{u}}}_2^* \circ \nabla + \nabla \circ \overline{\underline{\underline{u}}}_2^*) =$$

$$= \frac{1}{2} ((\overline{\underline{\underline{u}}}_1^* - \overline{\underline{\underline{u}}}_2^*) \circ \nabla + \nabla \circ (\overline{\underline{\underline{u}}}_1^* - \overline{\underline{\underline{u}}}_2^*)) = \frac{1}{2} (\delta \vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \delta \vec{u}) = \delta \underline{\underline{A}}$$

pedig a virtuális alakváltozás. Így a virtuális elmozdulás elve a következő alakú lesz

$$\int_{(V)} \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \cdot \delta \underline{\underline{A}} dV - \int_{(A_p)} \delta \vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \delta \vec{u} \cdot \vec{f} dV = 0$$

Ezt szokás a feladat gyenge alakjának is nevezni<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>A 1.4. fejezetben felírt parciális differenciál-egyenletrendszer pedig az erős alak. A gyenge alakban csak azt követeljük meg, hogy az egyenlet integrál értelemben teljesüljön.

### 2.2.3. Potenciális energia minimuma elv

**7. definíció.** Egy test potenciális energiáján értjük az alakváltozási energiájának és a külső erők munkájának a különbségét.

$$\Pi_p := U - W_k$$

ahol  $U$  az alakváltozási energia,

$W_k$  a külső erők munkája.

**3. tétel** (bizonyítás nélkül). Ha egy  $V$  térfogatú testben csak kis alakváltozások lépnek fel, és test anyaga lineárisan rugalmas, akkor az alakváltozási energia az

$$U = \frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{A}} dV$$

összefüggéssel számítható, ahol  $\underline{\underline{F}}$  a feszültségi tenzor,

$\underline{\underline{A}}$  pedig az alakváltozási tenzor.

**4. tétel.** Ha egy  $V$  térfogatú testben csak kis elmozdulások lépnek fel, akkor a testen a külső erők által végzett munka az alábbi módon számítható

$$W_k = \int_{(A_p)} \vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA + \int_{(V)} \vec{u} \cdot \vec{f} dV$$

ahol  $\vec{p}_0$  az  $A_p$  felület pontjaiban az egységnyi felületre jutó terhelés,

$\vec{f}$  a  $V$  térfogaton belül az egységnyi térfogatra jutó terhelés,

$\vec{u}$  az anyagi pont elmozdulása.

Vagyis

$$\Pi_p = \Pi_p[\vec{u}(\vec{r})] = \frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{A}} dV - \int_{(A_p)} \vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \vec{u} \cdot \vec{f} dV$$

Vegyük észre, hogy a potenciális energia egy másik függvénynek, az  $\vec{u}(\vec{r})$  elmozdulás függvénynek a függvénye, értékészlete pedig a valós számok halmaza. Az olyan függvényeket, amelyek változója egy másik függvény, értékük pedig egy skalár szám, *funkcionálnak* nevezzük. A funkcionálok matematikai vizsgálatával a funkcionál analízis foglalkozik.

**5. tétel.** Az összes kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőt vizsgálva a tényleges megoldás esetében a teljes potenciális energiának minimuma van.

$$\Pi_p[\vec{u}^*] \geq \Pi_p[\vec{u}]$$

*Bizonyítás.* Induljunk ki az virtuális elmozdulásmező definíciójából

$$\delta \vec{u} = \vec{u}_2^* - \vec{u}_1^* \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_2^* = \vec{u}_1^* + \delta \vec{u}$$

Mivel a kinematikailag lehetséges elmozdulásmezők szabadon megválaszthatók, legyen az  $\vec{u}_1^*$  az egzakt megoldás és az  $\vec{u}_2^*$  egy tetszőleges kinematikailag lehetséges elmozdulásmező.

$$\vec{u} = \vec{u}_1^* \quad \text{és} \quad \vec{u}^* = \vec{u}_2^*$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\vec{u}}^* = \underline{\vec{u}} + \delta \underline{\vec{u}}$$

Az így kapott  $\delta \underline{\vec{u}}$  virtuális elmozdulásmező megegyezik az elmozdulásmező variációjával. Az egyezést a későbbiekben fel fogjuk használni. Számítsuk ki a kinematikailag lehetséges alakváltozási tenzort

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}^* &= \frac{1}{2} (\underline{\vec{u}}^* \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\vec{u}}^*) = \frac{1}{2} ((\underline{\vec{u}} + \delta \underline{\vec{u}}) \circ \nabla + \nabla \circ (\underline{\vec{u}} + \delta \underline{\vec{u}})) = \\ &= \frac{1}{2} (\underline{\vec{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\vec{u}}) + \frac{1}{2} (\delta \underline{\vec{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \delta \underline{\vec{u}}) = \underline{\underline{A}} + \delta \underline{\underline{A}} \end{aligned}$$

A  $\delta \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\delta \underline{\vec{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \delta \underline{\vec{u}})$  tagot az alakváltozási tenzor variációjának nevezzük. Határozzuk meg a kinematikailag lehetséges feszültség tenzort a Hooke-törvény segítségével

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}}^* &= \frac{E}{1+\nu} \left( \underline{\underline{A}}^* + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{\underline{I}} \right) = \frac{E}{1+\nu} \left[ \underline{\underline{A}}^* + \frac{\nu}{1-2\nu} (\underline{\underline{A}}^* \cdot \cdot \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{I}} \right] = \\ &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \underline{\underline{A}} + \delta \underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} ((\underline{\underline{A}} + \delta \underline{\underline{A}}) \cdot \cdot \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{I}} \right] = \\ &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\underline{\underline{A}} \cdot \cdot \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{I}} \right] + \frac{E}{1+\nu} \left[ \delta \underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\delta \underline{\underline{A}} \cdot \cdot \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{I}} \right] = \\ &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{\underline{I}} \right] + \frac{E}{1+\nu} \left[ \delta \underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta A_I \underline{\underline{I}} \right] = \underline{\underline{F}} + \delta \underline{\underline{F}} \end{aligned}$$

ahol az  $\delta \underline{\underline{F}} = \frac{E}{1+\nu} (\delta \underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta A_I \underline{\underline{I}})$  a feszültségi tenzor variációja. Helyettesítsük be a kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőt a potenciális energiába

$$\begin{aligned} \Pi_p^* [\underline{\vec{u}}^*] &= \Pi_p^* [\underline{\vec{u}} + \delta \underline{\vec{u}}] = \frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\underline{F}}^* \cdot \cdot \underline{\underline{A}}^* dV - \int_{(A_p)} \underline{\vec{u}}^* \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \underline{\vec{u}}^* \cdot \vec{f} dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_{(V)} (\underline{\underline{F}} + \delta \underline{\underline{F}}) \cdot \cdot (\underline{\underline{A}} + \delta \underline{\underline{A}}) dV - \int_{(A_p)} (\underline{\vec{u}} + \delta \underline{\vec{u}}) \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} (\underline{\vec{u}} + \delta \underline{\vec{u}}) \cdot \vec{f} dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \cdot \underline{\underline{A}} dV - \int_{(A_p)} \underline{\vec{u}} \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \underline{\vec{u}} \cdot \vec{f} dV + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{(V)} (\underline{\underline{F}} \cdot \cdot \delta \underline{\underline{A}} + \delta \underline{\underline{F}} \cdot \cdot \underline{\underline{A}}) dV - \int_{(A_p)} \delta \underline{\vec{u}} \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \delta \underline{\vec{u}} \cdot \vec{f} dV + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{(V)} \delta \underline{\underline{F}} \cdot \cdot \delta \underline{\underline{A}} dV \end{aligned}$$

Alakítsuk át a  $\delta \underline{\underline{F}} \cdot \cdot \underline{\underline{A}}$  szorzatot

$$\delta \underline{\underline{F}} \cdot \cdot \underline{\underline{A}} = \frac{E}{1+\nu} \left( \delta \underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta A_I \underline{\underline{I}} \right) \cdot \cdot \underline{\underline{A}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{E}{1+\nu} \delta \underline{\underline{A}} \cdot \cdot \underline{\underline{A}} + \frac{E}{1+\nu} \frac{\nu}{1-2\nu} \delta A_I \underbrace{I \cdot \cdot \underline{\underline{A}}}_{A_I} = \\
&= \frac{E}{1+\nu} \delta \underline{\underline{A}} \cdot \cdot \underline{\underline{A}} + \frac{E}{1+\nu} \frac{\nu}{1-2\nu} \underbrace{\delta \underline{\underline{A}} \cdot \cdot I}_{\delta A_I} A_I = \\
&= \delta \underline{\underline{A}} \cdot \cdot \frac{E}{1+\nu} \left( \underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} I A_I \right) = \delta \underline{\underline{A}} \cdot \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}} \cdot \cdot \delta \underline{\underline{A}}
\end{aligned}$$

Helyettesítsük be ezt a kinematikailag lehetséges potenciális energia képletébe. Ha megvizsgáljuk az így kapott összefüggést, érdekes dolgot vehetünk észre.

$$\begin{aligned}
\Pi_p^* [\vec{u}^*] &= \Pi_p^* [\vec{u} + \delta \vec{u}] = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \cdot \underline{\underline{A}} dV - \int_{(A_p)} \vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \vec{u} \cdot \vec{f} dV}_{\Pi_p} + \\
&+ \underbrace{\int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \cdot \delta \underline{\underline{A}} dV - \int_{(A_p)} \delta \vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \delta \vec{u} \cdot \vec{f} dV}_{\delta \Pi_p = 0} + \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{(V)} \delta \underline{\underline{F}} \cdot \cdot \delta \underline{\underline{A}} dV}_{\delta^2 \Pi_p}
\end{aligned}$$

Az első sor a potenciális energiát adja az egzakt megoldás esetére. A második sort a *potenciális energia első variációjának* is szokás nevezni, ami tulajdonképpen megegyezik a virtuális elmozdulás elvében szereplő kifejezéssel<sup>5</sup>, ezért az értéke nulla. A harmadik sorban lévő mennyiség a *potenciális energia második variációja* nevet viseli, ugyanis ebben előfordulnak az elmozdulásmező variációjának második hatványai is. Határozzuk meg az előjelét.

$$\begin{aligned}
\delta \underline{\underline{F}} \cdot \cdot \delta \underline{\underline{A}} &= \frac{E}{1+\nu} \left( \delta \underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta A_I I \right) \cdot \cdot \delta \underline{\underline{A}} = \\
&= \frac{E}{1+\nu} \delta \underline{\underline{A}} \cdot \cdot \delta \underline{\underline{A}} + \frac{E}{1+\nu} \frac{\nu}{1-2\nu} \delta A_I \underbrace{I \cdot \cdot \delta \underline{\underline{A}}}_{\delta A_I} = \\
&= \frac{E}{1+\nu} (\delta \vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \delta \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \delta \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \cdot (\delta \vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \delta \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \delta \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z) + \\
&\quad + \frac{E}{1+\nu} \frac{\nu}{1-2\nu} (\delta A_I)^2 = \\
&= \frac{E}{1+\nu} (\delta \vec{\alpha}_x \cdot \delta \vec{\alpha}_x + \delta \vec{\alpha}_y \cdot \delta \vec{\alpha}_y + \delta \vec{\alpha}_z \cdot \delta \vec{\alpha}_z) + \frac{E}{1+\nu} \frac{\nu}{1-2\nu} (\delta A_I)^2
\end{aligned}$$

Látható, hogy ez a kifejezés nagyobb vagy egyenlő mint nulla, amennyiben  $E \geq 0$  és  $0 < \nu < 0,5$ , azaz

$$\delta^2 \Pi_p = \frac{1}{2} \int_{(V)} \delta \underline{\underline{F}} \cdot \cdot \delta \underline{\underline{A}} dV \geq 0$$

<sup>5</sup>Az egzakt (tényleges) feszültségmező egyben statikailag lehetséges feszültségmező is.

Ebből következik, hogy igaz a

$$\Pi_p [\vec{u}^*] \geq \Pi_p [\vec{u}]$$

vagy

$$\Pi_p^* \geq \Pi_p$$

egyenlőtlenség, vagyis a potenciális energiának az egzakt megoldás esetén minimuma van.  $\square$

*Megjegyzés:* A potenciális energia minimuma elv csak abban az esetben használható, ha a vizsgált rendszerben nem lép fel disszipáció.

#### 2.2.4. Lagrange-féle variációs elv

A Lagrange-féle variációs elv a teljes potenciális energia minimuma elv variációs megfogalmazása.

**6. tétel.** *A teljes potenciális energiának az egzakt megoldás esetében szélső értéke (minimuma) van.*

1. *A szélső érték (minimum) létezésének szükséges feltétele a teljes potenciális energia első variációjának eltűnése.*

$$\delta \Pi_p = 0$$

2. *A szélső érték (minimum) létezésének elégséges feltétele az, hogy a teljes potenciális energia második variációja nagyobb mint nulla.*

$$\delta^2 \Pi_p > 0$$

Egy funkcionál első illetve második variációját például a Gâteaux-féle (ejtsd: gató) deriválttal tudjuk kiszámítani. Legyen  $F[f(x)]$  egy funkcionál, amelynek változója az  $f(x)$  függvény. Vegyünk az  $f(x)$  egy kis  $\delta f(x)$  megváltozását (variációját), szorozzuk be az  $\alpha$  valós számmal és adjuk hozzá az  $f(x)$ -hez. Az így kapott függvényt helyettesítsük be a funkcionálba. Ezek után fejtsük sorba az  $F[f(x) + \alpha \delta f(x)]$  funkcionált az  $f(x)$  körül.

$$\begin{aligned} F[f(x) + \alpha \delta f(x)] &= F[f(x) + \alpha \delta f(x)] \Big|_{\alpha=0} + \frac{d}{d(f(x) + \alpha \delta f(x))} F[f(x) + \alpha \delta f(x)] \Big|_{\alpha=0} \alpha \delta f(x) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d^2}{d(f(x) + \alpha \delta f(x))^2} F[f(x) + \alpha \delta f(x)] \Big|_{\alpha=0} \alpha^2 \delta f(x)^2 + \dots = \\ &= F[f(x)] + \frac{d}{d\alpha} F[f(x) + \alpha \delta f(x)] \frac{d\alpha}{d(f(x) + \alpha \delta f(x))} \Big|_{\alpha=0} \alpha \delta f(x) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d}{d(f(x) + \alpha \delta f(x))} \left( \frac{d}{d\alpha} F[f(x) + \alpha \delta f(x)] \frac{d\alpha}{d(f(x) + \alpha \delta f(x))} \right) \Big|_{\alpha=0} \alpha^2 \delta f(x)^2 + \dots = \\ &= F[f(x)] + \frac{d}{d\alpha} F[f(x) + \alpha \delta f(x)] \Big|_{\alpha=0} \alpha + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{d}{d\alpha} F[f(x) + \alpha \delta f(x)] \right) \frac{d\alpha}{d(f(x) + \alpha \delta f(x))} \Big|_{\alpha=0} \alpha^2 \delta f(x) + \dots = \\ &= F[f(x)] + \frac{d}{d\alpha} F[f(x) + \alpha \delta f(x)] \Big|_{\alpha=0} \alpha + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\alpha^2} F[f(x) + \alpha \delta f(x)] \Big|_{\alpha=0} \alpha^2 + \dots \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy

$$\frac{d\alpha}{d(f(x) + \alpha\delta f(x))} = \left( \frac{d(f(x) + \alpha\delta f(x))}{d\alpha} \right)^{-1} = (\delta f(x))^{-1} = \frac{1}{\delta f(x)}$$

**8. definíció.** Egy  $F$  függvény (vagy funkcionál) Gâteaux-féle  $n$ -edik deriváltján a

$$D^n F[x, \delta x] = \frac{d^n}{d\alpha^n} F(x + \alpha\delta x) \Big|_{\alpha=0}$$

kifejezést értjük.

**9. definíció.** Egy  $F$  funkcionál első variációja megegyezik a Gâteaux-féle első deriváltjával.

$$\delta F := DF[x, \delta x] = \frac{d}{d\alpha} F(x + \alpha\delta x) \Big|_{\alpha=0}$$

**10. definíció.** Egy  $F$  funkcionál második variációja megegyezik a Gâteaux-féle második deriváltjával.

$$\delta^2 F := D^2 F[x, \delta x] = \frac{d^2}{d\alpha^2} F(x + \alpha\delta x) \Big|_{\alpha=0}$$

Ezek alapján könnyen belátható, hogy

$$\delta\Pi_p = D\Pi_p[\vec{u}, \delta\vec{u}] = \int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \delta\underline{\underline{A}} dV - \int_{(A_p)} \delta\vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \delta\vec{u} \cdot \vec{f} dV \quad (10)$$

és

$$\delta^2\Pi_p = D^2\Pi_p[\vec{u}, \delta\vec{u}] = \frac{1}{2} \int_{(V)} \delta\underline{\underline{F}} \cdot \delta\underline{\underline{A}} dV \quad (11)$$

**3. feladat.** Számítsuk ki az első és második Gâteaux derivált segítségével a potenciális energia (10) első és (11) második variációját.



A 6. tétel bizonyítása hasonlóan végezhető el, mint a 5. tétel bizonyítása.

Felmerülhet a kérdés, hogy a potenciális energia minimuma elvből kapott megoldás kielégíti-e a rugalmasságtan egyenletrendszerét? A kérdés megválaszolásához alakítsuk át a  $\delta\Pi_p = 0$  kifejezést.

$$\begin{aligned} \delta\Pi_p &= \int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \delta\underline{\underline{A}} dV - \int_{(A_p)} \delta\vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \delta\vec{u} \cdot \vec{f} dV = \\ &= \int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \delta\underline{\underline{D}} dV - \int_{(A_p)} \delta\vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \delta\vec{u} \cdot \vec{f} dV = \\ &= \int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \left( \delta\vec{u} \circ \nabla \right) dV - \int_{(A_p)} \delta\vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \delta\vec{u} \cdot \vec{f} dV = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{(V)} \delta \vec{u} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV - \int_{(A_p)} \delta \vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \delta \vec{u} \cdot \vec{f} dV = \\
&= \int_{(V)} \delta \vec{u} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV - \int_{(V)} \delta \vec{u} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV - \int_{(A_p)} \delta \vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \delta \vec{u} \cdot \vec{f} dV = \\
&= \int_{(A_p)} \delta \vec{u} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA - \int_{(V)} \delta \vec{u} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV - \int_{(A_p)} \delta \vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \delta \vec{u} \cdot \vec{f} dV = \\
&= \int_{(A_p)} \delta \vec{u} \cdot (\underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} - \vec{p}_0) dA - \int_{(V)} \delta \vec{u} \cdot (\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f}) dV = 0
\end{aligned}$$

A számítás során felhasználtunk néhány korábban már elvégzett átalakítást. Mivel a vizsgált test  $V$  térfogata,  $A$  felülete valamint az elmozdulásmező  $\delta \vec{u}$  variációja tetszőleges, a fenti kifejezés csak akkor nulla, ha a zárójelben álló mennyiségek nullával egyenlőek.

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} = \vec{0} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0$$

Ezek alapján megkaptuk, hogy a potenciális energia minimuma elv tartalmazza az egyensúlyi egyenletet és a dinamikai peremfeltételt. Ha a kinematikailag lehetséges elmozdulások közül a szóba jöhető összes függvényt figyelembe vesszük, akkor *egzakt megoldást* kapunk, mert

- A kinematikailag lehetséges elmozdulásmező kielégíti a kinematikai egyenletet és a kinematikai peremfeltételeket.
- A  $\delta \Pi_p = 0$  Lagrange-féle variációs elv pedig tartalmazza az egyensúlyi egyenletet, a dinamikai peremfeltételt, valamint az anyagtörvényt.

Az az  $\vec{u}$ , amelynél a  $\Pi$ -nek minimuma van, kielégíti a rugalmasságtan egyenletrendszerét, tehát egzakt megoldás. Ha a kinematikailag lehetséges elmozdulások közül nem vesszük figyelembe a szóba jöhető összes függvényt, akkor *közelítő megoldást* kapunk. Annál jobb a közelítés, minél több szóba jöhető függvényt vesszünk figyelembe.

\* \* \*

Egy  $f = f(x_1, x_2, x_3, \dots, c_1, c_2, c_3, \dots)$  függvény megváltozásán vagy teljes differenciálján a következőt értjük

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \dots$$

ugyanezen függvény variációja pedig a

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial c_1} \delta c_1 + \frac{\partial f}{\partial c_2} \delta c_2 + \frac{\partial f}{\partial c_3} \delta c_3 + \dots$$

kifejezés, ahol  $x_1, x_2, x_3, \dots$  a függvény változói,  $c_1, c_2, c_3, \dots$  pedig a függvény paraméterei. A függvény differenciálját a változók kis megváltozásával kapjuk, míg a variációt a paraméterek kis megváltoztatásával állíthatjuk elő. Azokban a pontokban, ahol az  $f$  függvény értéke adott, a variációnak el kell tűnnie.

Például a kinematikailag lehetséges elmozdulásmező esetét tekintve

$$\vec{u}^* = \vec{u}_0 \quad \vec{r} \in A_u$$

és

$$\delta \vec{u}^* = 0 \quad \vec{r} \in A_u$$

## 2.3. A Ritz-módszer

A rugalmasságtani feladat egy lehetséges közelítő megoldását kapjuk, ha az  $\vec{u}$  elmozdulásmezőt  $n$  számú paramétertől tesszük függővé.

$$\vec{u}^* = \vec{u}^*(c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$$

Ha  $n$  véges szám, akkor nem biztos hogy az összes szóba jöhető kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőt figyelembe vettük. Ha behelyettesítjük az  $\vec{u}^*$  kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőt a  $\Pi_p$  potenciális energiába, a potenciális energia a  $c_1, c_2, c_3, \dots$  paraméterek függvénye lesz.

$$\Pi_p^* = \Pi_p^*(c_1, c_2, c_3, \dots)$$

Képezzük ezek után a  $\Pi_p^*$  potenciális energia variációját.

$$\delta\Pi_p^* = \frac{\partial\Pi_p^*}{\partial c_1}\delta c_1 + \frac{\partial\Pi_p^*}{\partial c_2}\delta c_2 + \frac{\partial\Pi_p^*}{\partial c_3}\delta c_3 + \dots$$

A Lagrange-féle variációs elv szerint a  $\Pi_p$  potenciális energia első variációja nulla. Ha a  $\Pi_p^*$  kinematikailag lehetséges potenciális energiára írjuk elő azt, hogy az első variációja legyen nulla, akkor az  $\vec{u}^*$  kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőt csak közelítőleg kapjuk meg. Minél több paramétert alkalmazunk, annál jobb lesz ez a közelítés. Mivel a  $c_1, c_2, c_3, \dots$  paraméterek egymástól függetlenek, a

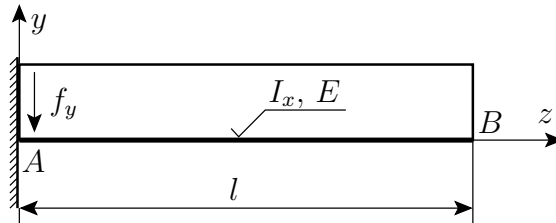
$$\delta\Pi_p^* = 0$$

egyenlet csak úgy áll fenn, ha

$$\frac{\partial\Pi_p^*}{\partial c_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Ez a  $c_1, c_2, c_3, \dots$  paraméterekre egy  $n$  darab egyenletből álló algebrai egyenletrendszert jelent.

**4. feladat.** Határozzuk meg az 12. ábrán látható befogott tartó középvonalának alakját, a nyíróerőt és a hajlítónyomatékot a  $z$  koordináta függvényében másodfokú közelítés alkalmazásával. ( $l, I_x, E$  és  $f_y$  adott)



12. ábra. Befogott tartó alakváltozásának és igénybevételeinek számítása.

Megoldás: Írjuk fel a tartó potenciális energiáját. Az alakváltozási energia kiszámításánál elhanyagoljuk a nyírásból származó tagot (lásd: Mechanika-Szilárdságtan tankönyv).

$$U = \frac{1}{2} \int_{(V)} \sigma_z \varepsilon_z dV = \frac{1}{2} \int_{(V)} \underbrace{\frac{y}{R} E}_{\sigma_z} \underbrace{\frac{y}{R}}_{\varepsilon_z} dV = \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{E}{R^2} \underbrace{\int y^2 dA}_{I_x} dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{(l)} EI_x \kappa^2 dz$$

ahol  $\kappa = \frac{1}{R}$  a rúd görbülete. Geometriából ismert, hogy egy görbe görbülete arányos a görbe ívkoordináta szerinti második deriváltjával. Itt a kérdéses görbe a rúd alakváltozott középvonala lesz, amelyet a  $v = v(z)$  elmozdulás koordinátával tudunk matematikailag leírni, az ív-koordinátának pedig közelítőleg a  $z$  koordináta felel meg. A rúd alakváltozási energiája így írható

$$U = \frac{1}{2} \int_{(l)} EI_x \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz$$

A vonal mentén megoszló terhelés munkájára a

$$W_k = \int_{(l)} \underbrace{(v(z) \vec{e}_z)}_{\vec{u}} \cdot \underbrace{(-f_y \vec{e}_z)}_{\vec{f}_d V} dz = - \int_{(l)} v(z) f_y dz$$

adódik. A támasztó erőnek nincs munkája a befogás miatt ( $v(z=0) = 0$ ). Közelítsük a tartó középvonalának elmozdulását a

$$v^*(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2$$

polinommal. A kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőnek ki kell elégítenie a kinematikai peremfeltételeket, azaz a befogásnál a rúd nem mozdulhat el függőlegesen

$$v^*(z=0) = c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = 0$$

illetve a rúd középvonalának érintője a befogásnál vízszintes kell hogy maradjon

$$\left. \frac{dv^*}{dz} \right|_{z=0} = c_1 + 2c_2 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

Ezek alapján a kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőre

$$v^*(z) = c_2 z^2$$

adódik. Helyettesítsük be ezt a potenciális energiába.

$$\Pi_p^* = U^* - W_k^* = \frac{1}{2} \int_0^l EI_x (2c_2)^2 dz + \int_0^l c_2 z^2 f_y dz$$

A  $c_2$  paramétert abból a feltételből tudjuk meghatározni, hogy a potenciális energia első variációja nulla.

$$\delta \Pi_p^* = 0$$

ami egyenértékű a

$$\frac{d\Pi_p^*}{dc_2} = 0$$

egyenlettel. Végezzük el a kijelölt műveleteket. Mivel a  $c_2$  paraméter és a  $z$  koordináta egymástól függetlenek, a deriválás és az integrálás sorrendje felcserélhető. Célszerűbb előbb a deriválást elvégezni.

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_p^*}{dc_2} &= 2 \int_0^l EI_x 2c_2 dz + \int_0^l z^2 f_y dz = \\ &= 4EI_x c_2 \underbrace{\int_0^l dz}_l + f_y \underbrace{\int_0^l z^2 dz}_{\frac{l^3}{3}} = 4EI_x c_2 l + f_y \frac{l^3}{3} = 0 \end{aligned}$$

Ebből a  $c_2$  kifejezhető.

$$c_2 = -\frac{f_y l^2}{12EI_x}$$

A rúd középvonalának elmozdulása

$$v^*(z) = -\frac{f_y l^2}{12EI_x} z^2$$

Ismert, hogy (lásd: *Mechanika-Statika és Mechanika-Szilárdságtan tankönyvek*)

$$\begin{aligned} \frac{dT_y}{dz} &= f_y & \frac{dM_{hx}}{dz} &= -T_y \\ \frac{M_{hx}}{I_x} &= \frac{E}{R} = E\kappa \end{aligned}$$

A hajlítónyomaték függvényre kapjuk a

$$M_{hx}^*(z) = -EI_x \frac{d^2 v^*}{dz^2} = \frac{f_y l^2}{6}$$

konstans függvényt, ami nyilvánvalóan nem igaz, mivel itt másodfokú függvénynek kellett volna kijönni. A nyíróerőre a

$$T_y^*(z) = -\frac{dM_{hx}^*}{dz} = 0$$

a vonal mentén megoszló terhelésre pedig az

$$f_y^*(z) = \frac{dT_y^*}{dz} = 0$$

azonosan nulla függvényeket kapjuk, pedig az  $f_y \neq 0$  terhelés adott volt. Az igénybevételekre és terhelésre vonatkozó egyenletek azért nem teljesültek, mert az általunk választott másodfokú polinomot tartalmazó kinematikailag lehetséges megoldás nem tartalmazta az egzakt megoldást. Ezért csak közelítő megoldást kaptunk.



**5. feladat.** Oldjuk meg a 4. feladatot harmadfokú közelítéssel! Ábrázoljuk a  $v^*(z)$ ,  $T_y^*(z)$  és  $M_{hx}^*(z)$  függvényt!

Megoldás: A potenciális energia ugyan úgy néz ki, mint a 4. feladatnál.

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_{(l)} EI_x \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz + \int_{(l)} v(z) f_y dz$$

Az elmozdulásmező most harmadfokú polinommal közelítjük.

$$v^*(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3$$

A peremfeltételek miatt

$$v^*(z=0) = c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0^2 + c_3 \cdot 0^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = 0$$

és

$$\left. \frac{dv^*(z)}{dz} \right|_{z=0} = c_1 + 2c_2 \cdot 0 + 3c_3 \cdot 0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

Ezek alapján a kinematikailag lehetséges elmozdulásmező

$$v^*(z) = c_2 z^2 + c_3 z^3$$

Helyettesítsük be ezt a potenciális energiába. Ehhez szükség lesz a kinematikailag lehetséges elmozdulásmező második deriváltjára.

$$\frac{d^2 v^*(z)}{dz^2} = 2c_2 + 6c_3 z$$

Behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_0^l EI_x (2c_2 + 6c_3 z)^2 dz + \int_0^l (c_2 z^2 + c_3 z^3) f_y dz$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket

$$\Pi_p = \int_0^l EI_x (2c_2^2 + 12c_2 c_3 z + 18c_3^2 z^2) dz + \int_0^l (c_2 z^2 + c_3 z^3) f_y dz$$

$$\Pi_p = EI_x [2c_2^2 z + 6c_2 c_3 z^2 + 6c_3^2 z^3]_0^l + \left[ \frac{c_2 z^3}{3} + \frac{c_3 z^4}{4} \right]_0^l f_y$$

$$\Pi_p = EI_x (2c_2^2 l + 6c_2 c_3 l^2 + 6c_3^2 l^3) + \left( \frac{c_2 l^3}{3} + \frac{c_3 l^4}{4} \right) f_y$$

A potenciális energiának szélső értéke van a legjobb közelítés esetén, vagyis

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial c_2} = EI_x (4c_2 l + 6c_3 l^2) + \frac{f_y l^3}{3} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial c_3} = EI_x (6c_2 l^2 + 12c_3 l^3) + \frac{f_y l^4}{4} = 0$$

Ez két algebrai egyenletet ad a  $c_2$  és  $c_3$  paraméterekre. A paramétereket az egyenletrendszer megoldva kaphatjuk meg.

$$c_2 = -\frac{5f_y l^2}{24EI_x} \quad \text{és} \quad c_3 = \frac{f_y l}{12EI_x}$$

vagyis a rúd középvonalának elmozdulását közelítő függvény

$$v^*(z) = -\frac{5f_y l^2}{24EI_x} z^2 + \frac{f_y l}{12EI_x} z^3$$

alakú lesz. A hajlítónyomatéokra az

$$M_{hx}^*(z) = -EI_x \frac{d^2 v^*(z)}{dz^2} = \frac{5f_y l^2}{12} - \frac{f_y l}{2} z$$

függvény, a nyíróerőre a

$$T_y^*(z) = -\frac{dM_{hx}^*(z)}{dz} = \frac{f_y l}{2}$$

a vonal mentén megoszló terhelésre pedig a

$$f_y^*(z) = 0$$

függvény adódik. Lehet látni, hogy a dinamikai peremfeltétel nem teljesül, vagyis a kapott megoldás nem egyezik meg az egzakt megoldással.



**6. feladat.** Oldjuk meg a 4. feladatot negyedfokú közelítéssel! Ábrázoljuk a  $v^*(z)$ ,  $T_y^*(z)$  és  $M_{hx}^*(z)$  függvényt!

Megoldás: A potenciális energia ugyan úgy néz ki, mint a 4. feladatnál.

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_0^l EI_x \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz + \int_0^l v(z) f_y dz$$

Az elmozdulásmezőt most negyedfokú polinommal közelítjük.

$$v^*(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4$$

A peremfeltételek miatt

$$v^*(z=0) = c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0^2 + c_3 \cdot 0^3 + c_4 \cdot 0^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = 0$$

és

$$\left. \frac{dv^*(z)}{dz} \right|_{z=0} = c_1 + 2c_2 \cdot 0 + 3c_3 \cdot 0^2 + 4c_4 \cdot 0^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

Ezek alapján a kinematikailag lehetséges elmozdulásmező

$$v^*(z) = c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4$$

Helyettesítsük be ezt a potenciális energiába. Ehhez szükség lesz a kinematikailag lehetséges elmozdulásmező második deriváltjára.

$$\frac{d^2 v^*(z)}{dz^2} = 2c_2 + 6c_3 z + 12c_4 z^2$$

Behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_0^l EI_x (2c_2 + 6c_3 z + 12c_4 z^2)^2 dz + \int_0^l (c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4) f_y dz$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket

$$\Pi_p = \int_0^l EI_x (2c_2^2 + 18c_3^2 z^2 + 72c_4^2 z^4 + 12c_2 c_3 z + 72c_3 c_4 z^3 + 24c_2 c_4 z^2) dz + \int_0^l (c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4) f_y dz$$

$$\Pi_p = EI_x \left[ 2c_2^2 z + 6c_3^2 z^3 + \frac{72c_4^2 z^5}{5} + 6c_2 c_3 z^2 + 18c_3 c_4 z^4 + 8c_2 c_4 z^3 \right]_0^l + \left[ \frac{c_2 z^3}{3} + \frac{c_3 z^4}{4} + \frac{c_4 z^5}{5} \right]_0^l f_y$$

$$\Pi_p = EI_x \left( 2c_2^2 l + 6c_3^2 l^3 + \frac{72c_4^2 l^5}{5} + 6c_2 c_3 l^2 + 18c_3 c_4 l^4 + 8c_2 c_4 l^3 \right) + \left( \frac{c_2 l^3}{3} + \frac{c_3 l^4}{4} + \frac{c_4 l^5}{5} \right) f_y$$

A potenciális energiának szélső értéke van a legjobb közelítés esetén, vagyis

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial c_2} = EI_x (4c_2 l + 6c_3 l^2 + 8c_4 l^3) + \frac{f_y l^3}{3} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial c_3} = EI_x (12c_3 l^3 + 6c_2 l^2 + 18c_4 l^4) + \frac{f_y l^4}{4} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial c_4} = EI_x \left( \frac{144c_4 l^5}{5} + 18c_3 l^4 + 8c_2 l^3 \right) + \frac{f_y l^5}{5} = 0$$

Ez három algebrai egyenletet ad a  $c_2$ ,  $c_3$  és  $c_4$  paraméterekre. A paramétereket az egyenletrendszert megoldva kaphatjuk meg.

$$c_2 = -\frac{f_y l^2}{4EI_x}, \quad c_3 = \frac{f_y l}{6EI_x} \quad \text{és} \quad c_4 = -\frac{f_y}{24EI_x}$$

vagyis a rúd középvonalának elmozdulását közelítő függvény

$$v^*(z) = -\frac{f_y l^2}{4EI_x} z^2 + \frac{f_y l}{6EI_x} z^3 - \frac{f_y}{24EI_x} z^4$$

alakú lesz. A hajlítónyomatéokra az

$$M_{hx}^*(z) = -EI_x \frac{d^2 v^*(z)}{dz^2} = \frac{f_y l^2}{2} - f_y l z + \frac{f_y}{2} z^2$$

függvény, a nyíróerőre a

$$T_y^*(z) = -\frac{dM_{hx}^*(z)}{dz} = f_y l - f_y z = f_y (l - z)$$

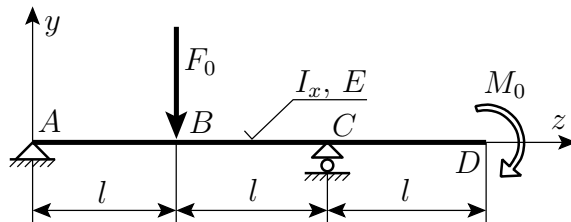
a vonal mentén megoszló terhelésre pedig a

$$f_y^*(z) = -f_y$$

függvény adódik. Lehet látni, hogy a dinamikai peremfeltétel teljesül, vagyis a kapott megoldás megegyezik az egzakt megoldással.



**7. feladat.** Határozzuk meg az 13. ábrán látható kéttámaszú tartó középvonalának alakját, a nyíróerőt és a hajlítónyomatékot a  $z$  koordináta függvényében másod- és harmadfokú (esetleg még magasabb fokú) közelítés alkalmazásával ( $l$ ,  $I_x$ ,  $E$ ,  $F_0$  és  $M_0$  adott). (A nyírásból származó alakváltozási energiát hanyagoljuk el.) Ábrázoljuk mindegyik  $v(z)$ ,  $T_y(z)$  és  $M_{hx}(z)$  függvényt!



13. ábra. Kéttámaszú tartó alakváltozásának és igénybevételeinek számítása.

Megoldás: Másodfokú közelítés

$$v^*(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2$$

A kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőnek ki kell elégítenie a kinematikai peremfeltételeket, azaz a csuklós és görgős támasznál a rúd nem mozdulhat el függőlegesen

$$v^*(z=0) = c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = 0$$

$$v^*(z=2l) = c_1 \cdot 2l + c_2 \cdot 4l^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -2lc_2$$

Ezek alapján a kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőre

$$v^*(z) = c_2(z - 2l)z$$

a keresztmetszetek szögelfordulására pedig a

$$\varphi_x^* \approx -\frac{d}{dz}v^*(z) = -2c_2(z - l)$$

adódik. Az alakváltozási energiát hasonlóan számíthatjuk mint a (4) feladatban.

$$U^* = \frac{1}{2} \int_0^l EI_x (2c_2)^2 dz$$

A külső erők munkáját síkbeli rúdszerkezeteknél általában a

$$W_k = \sum_{i=1}^n F_{yi}v_i + \sum_{j=1}^m M_{xj}\varphi_{xj}$$

összefüggéssel kaphatjuk meg, ahol  $F_{yi}$  az  $i$ -edik erő,  $v_i$  az  $i$ -edik erő támadáspontjának az erő irányával párhuzamos elmozdulása,  $M_{xj}$  a  $j$ -edik koncentrált nyomaték,  $\varphi_{xj}$  a  $j$ -edik koncentrált nyomaték támadáspontjánál a rúd keresztmetszetének szögelfordulása,  $n$  a koncentrált erő száma és  $m$  pedig a koncentrált nyomatékok száma. Behelyettesítve a kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőt a külső erők munkájára az

$$W_k^* = \underbrace{c_2(l-2l)l}_{v_B} \underbrace{(-F_0)}_{F_{By}} \underbrace{-2c_2(3l-l)}_{\varphi_{Dx}} \underbrace{M_0}_{M_{Dx}}$$

mennyiség adódik. Helyettesítsük be az így kapott alakváltozási energiát és külső erők munkáját a potenciális energiába.

$$\Pi_p^* = U^* - W_k^* = \frac{1}{2} \int_0^l EI_x (2c_2)^2 dz + c_2 (l - 2l) l F_0 + 2c_2 (3l - l) M_0$$

A  $c_2$  paramétert abból a feltételből tudjuk meghatározni, hogy a potenciális energia első variációja nulla.

$$\delta \Pi_p^* = 0$$

ami egyenértékű a

$$\frac{d\Pi_p^*}{dc_2} = 0$$

egyenlettel. Végezzük el a kijelölt műveleteket. Mivel a  $c_2$  paraméter és a  $z$  koordináta egymástól függetlenek, a deriválás és az integrálás sorrendje felcserélhető. Célszerűbb előbb a deriválást elvégezni.

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_p^*}{dc_2} &= 2 \int_0^{3l} EI_x 2c_2 dz - l^2 F_0 + 4l M_0 = \\ &= 4EI_x c_2 \underbrace{\int_0^{3l} dz}_{3l} - l^2 F_0 + 4l M_0 = 12EI_x c_2 l - l^2 F_0 + 4l M_0 = 0 \end{aligned}$$

Ebből a  $c_2$  kifejezhető.

$$c_2 = \frac{lF_0 - 4M_0}{12EI_x}$$

A rúd középvonalának elmozdulása

$$v^*(z) = \frac{lF_0 - 4M_0}{12EI_x} (z - 2l) z$$

A hajlítónyomaték függvényre kapjuk a

$$M_{hx}^*(z) = -EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{lF_0 - 4M_0}{6}$$

konstans függvényt, ami nyilvánvalóan nem igaz, mivel itt szakaszonként lineáris függvénynek kellett volna kijönni. A nyíróerőre a

$$T_y^*(z) = -\frac{dM_{hx}}{dz} = 0$$

a vonal mentén megoszló terhelésre pedig az

$$f_y^*(z) = \frac{dT_y}{dz} = 0$$

azonosan nulla „közelítő” függvényeket kapjuk.

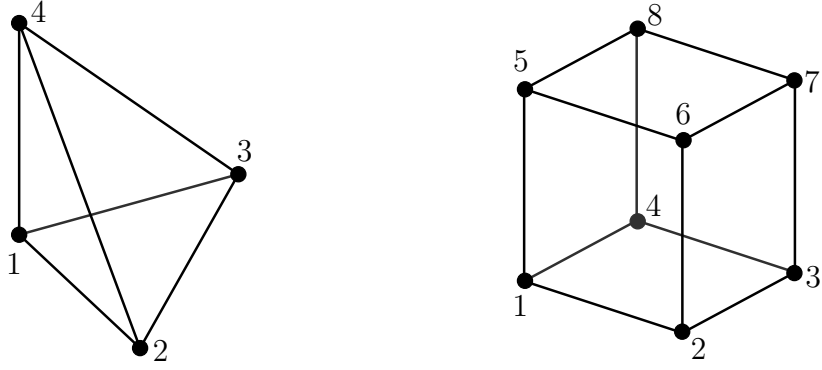
Harmad- és negyedfokú közelítés:...



**8. feladat.** Számítsuk ki  $B$ ,  $C$ ,  $D$  keresztmetszetek súlypontjainak az elmozdulását és a keresztmetszetek szögelfordulását a 4. és 7. feladatoknál a Betti- vagy Castigliano-tétel alkalmazásával! Hasonlítsuk össze az eredményeket a Ritz-módszerrel kapott megoldásokkal!







14. ábra.

### 3. Elmozdulásmezőn alapuló végelem módszer felépítése

#### 3.1. Végelem csomópontjainak lokális sorszámozása

#### 3.2. Lineáris közelítő függvények

Az elmozdulásokat közelítő függvények megválasztásának szempontjai

- Az ismeretlen paraméterek legyenek a csomópontokban lévő elmozdulás koordináták. Ez azt jelenti, hogy annyi függvényt kell előállítani, ahány paraméterünk van. Ezen belül egy függvénynek úgy kell kinézni, hogy egy adott csomópontban az értéke legyen egy, a többiben viszont nulla. Így a hozzá tartozó csomóponti elmozdulás koordináta nem befolyásolja a többi csomópont elmozdulását.
- Ugyanezekkel a függvényekkel legyen leírható a test geometriája is, ahol a paraméterek szerepét a csomópontok koordinátái játsszák (izoparametrikus végelem).
- A közelítő függvények legyenek könnyen (numerikusan) integrálhatók. Az integráláshoz az ún. Gauss-kvadraturát (lásd 4.1. fejezet) fogjuk használni, ami a  $(-1; 1)$  intervallumon megadott függvényekre alkalmazható. Ez azt jelenti, hogy a közelítő függvények értelmezési tartománya is ez az intervallum kell hogy legyen.

##### 3.2.1. Négy csomópontú elem

##### 3.2.2. Nyolc csomópontú elem

Ha a fenti feltételekhez még azt is hozzávesszük, hogy a közelítő függvények legyenek lineárisak, a függvényeket elő tudjuk állítani. Jelöljük az  $i$ -edik csomóponthoz tartozó közelítő függvényt  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ -val. Ha a függvény lineáris, akkor

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = a_{i1} + a_{i2}\xi + a_{i3}\eta + a_{i4}\zeta + a_{i5}\xi\eta + a_{i6}\eta\zeta + a_{i7}\zeta\xi + a_{i8}\xi\eta\zeta$$

alakban írható. A csomópontok legyenek rendre a  $\xi = \pm 1$ ,  $\eta = \pm 1$  és  $\zeta = \pm 1$  koordinátájú pontokban. Nézzük meg példaként a  $\xi = 1$ ,  $\eta = 1$  és  $\zeta = 1$  koordinátájú, nyolcadik csomóponthoz tartozó függvényt. A 3.2. fejezetben megadott feltételeket az alábbi módon tudjuk teljesíteni.

$$N_8(\xi = -1, \eta = -1, \zeta = -1) = a_{81} - a_{82} - a_{83} - a_{84} + a_{85} + a_{86} + a_{87} - a_{88} = 0$$

$$\begin{aligned}
N_8(\xi = 1, \eta = -1, \zeta = -1) &= a_{81} + a_{82} - a_{83} - a_{84} - a_{85} + a_{86} - a_{87} + a_{88} = 0 \\
N_8(\xi = 1, \eta = 1, \zeta = -1) &= a_{81} + a_{82} + a_{83} - a_{84} + a_{85} - a_{86} - a_{87} - a_{88} = 0 \\
N_8(\xi = -1, \eta = 1, \zeta = -1) &= a_{81} - a_{82} + a_{83} - a_{84} - a_{85} - a_{86} + a_{87} + a_{88} = 0 \\
N_8(\xi = -1, \eta = -1, \zeta = 1) &= a_{81} - a_{82} - a_{83} + a_{84} + a_{85} - a_{86} - a_{87} + a_{88} = 0 \\
N_8(\xi = 1, \eta = -1, \zeta = 1) &= a_{81} + a_{82} - a_{83} + a_{84} - a_{85} - a_{86} + a_{87} - a_{88} = 0 \\
N_8(\xi = 1, \eta = 1, \zeta = 1) &= a_{81} + a_{82} + a_{83} + a_{84} + a_{85} + a_{86} + a_{87} + a_{88} = 0 \\
N_8(\xi = -1, \eta = 1, \zeta = 1) &= a_{81} - a_{82} + a_{83} + a_{84} - a_{85} + a_{86} - a_{87} - a_{88} = 1
\end{aligned}$$

Írjuk fel ezt az egyenletrendszert mátrixos alakban.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{81} \\ a_{82} \\ a_{83} \\ a_{84} \\ a_{85} \\ a_{86} \\ a_{87} \\ a_{88} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A megoldás:

$$a_{81} = \frac{1}{8}, a_{82} = -\frac{1}{8}, a_{83} = \frac{1}{8}, a_{84} = \frac{1}{8}, a_{85} = -\frac{1}{8}, a_{86} = \frac{1}{8}, a_{87} = -\frac{1}{8}, a_{88} = -\frac{1}{8}$$

A  $N_8(\xi, \eta, \zeta)$  függvény így írható.

$$N_8(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi + \eta + \zeta - \xi\eta + \eta\zeta - \zeta\xi - \xi\eta\zeta)$$

Kis átalakítás után

$$N_8(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)$$

Hasonló gondolatmenettel kapható a többi függvény is. Itt csak a végeredményt közöljük.

$$N_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)$$

$$N_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)$$

$$N_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)$$

$$N_4(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)$$

$$N_5(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)$$

$$N_6(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)$$

$$N_7(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)$$

$$N_8(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)$$

### 3.3. Az elmozdulásmező közelítése egy végelemen

Első lépésben az elmozdulásmezőt egy elemen közelítjük. A vizsgált elem sorszáma legyen  $e$ , térfogata pedig  $V^e$ . A számítások elvégzéséhez célszerűbb lesz az elmozdulásvektort oszlopmátrixként felírni.

$$\vec{u}(\vec{r}) = u(x, y, z) \vec{e}_x + v(x, y, z) \vec{e}_y + w(x, y, z) \vec{e}_z \quad \vec{r} \in V^e$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{u}}^e(x^e, y^e, z^e) = \underbrace{\begin{bmatrix} u^e(x^e, y^e, z^e) \\ v^e(x^e, y^e, z^e) \\ w^e(x^e, y^e, z^e) \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)}$$

Az egyszerűség és célszerűség kedvéért az elmozdulás leírásához a végelemhez kötött  $\xi\eta\zeta$  koordináta-rendszert fogjuk használni. Ehhez szükségünk lesz az  $xyz$  és  $\xi\eta\zeta$  koordináta-rendszerek közötti transzformáció (átmenet) leírására. Használjuk a leíráshoz a 3.2. fejezetben tárgyalt közelítő függvényeket.

$$x^e(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i^e \quad (12)$$

$$y^e(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i^e \quad (13)$$

$$z^e(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i^e \quad (14)$$

ahol  $x_i^e$ ,  $y_i^e$  és  $z_i^e$  az  $e$ -edik végelem  $i$ -edik csomópontjának  $x$ ,  $y$  és  $z$  koordinátája.

A rugalmasságtani feladat megoldásához valamilyen variációs elvet vagy gyenge alakot fogunk használni, amelyben az elmozdulásmező az elsődleges ismeretlen. Az elmozdulásmezőt szintén a 3.2. fejezetben tárgyalt közelítő függvényekkel írhatjuk le.

$$u^e(x^e, y^e, z^e) = u^e(x^e(\xi, \eta, \zeta), y^e(\xi, \eta, \zeta), z^e(\xi, \eta, \zeta)) = u^e(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) q_{xi}^e$$

$$v^e(x^e, y^e, z^e) = v^e(x^e(\xi, \eta, \zeta), y^e(\xi, \eta, \zeta), z^e(\xi, \eta, \zeta)) = v^e(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) q_{yi}^e$$

$$w^e(x^e, y^e, z^e) = w^e(x^e(\xi, \eta, \zeta), y^e(\xi, \eta, \zeta), z^e(\xi, \eta, \zeta)) = w^e(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) q_{zi}^e$$

ahol  $q_{xi}^e$ ,  $q_{yi}^e$  és  $q_{zi}^e$  az  $e$ -edik végelem  $i$ -edik csomópontjának  $x$ ,  $y$  illetve  $z$  irányú elmozdulása

vagy elmozdulás paramétere. Ezt mátrixos alakban a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u^e \\ v^e \\ w^e \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{u}}^e(\xi, \eta, \zeta)} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{N}}(\xi, \eta, \zeta)} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{x1}^e \\ q_{y1}^e \\ q_{z1}^e \\ q_{x2}^e \\ q_{y2}^e \\ q_{z2}^e \\ \vdots \\ q_{xn}^e \\ q_{yn}^e \\ q_{zn}^e \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{q}}^e}$$

vagy röviden az

$$\underline{\underline{u}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \underline{\underline{N}}(\xi, \eta, \zeta) \underline{\underline{q}}^e$$

kifejezéssel írhatjuk.

### 3.4. Az alakváltozások közelítése egy végeselemen

$$\underbrace{[\underline{\underline{A}}(\vec{r})]}_{(xyz)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \vec{r} \in V^e \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^e(x^e, y^e, z^e) = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x^e(x^e, y^e, z^e) \\ \varepsilon_y^e(x^e, y^e, z^e) \\ \varepsilon_z^e(x^e, y^e, z^e) \\ \gamma_{xy}^e(x^e, y^e, z^e) \\ \gamma_{yz}^e(x^e, y^e, z^e) \\ \gamma_{zx}^e(x^e, y^e, z^e) \end{bmatrix}}_{(6 \times 1)}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \varepsilon_z^e \\ \gamma_{xy}^e \\ \gamma_{yz}^e \\ \gamma_{zx}^e \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}^e(x^e, y^e, z^e)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u^e}{\partial x} \\ \frac{\partial v^e}{\partial y} \\ \frac{\partial w^e}{\partial z} \\ \frac{\partial u^e}{\partial y} + \frac{\partial v^e}{\partial x} \\ \frac{\partial v^e}{\partial z} + \frac{\partial w^e}{\partial y} \\ \frac{\partial w^e}{\partial x} + \frac{\partial u^e}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\partial}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\partial}}} \underbrace{\begin{bmatrix} u^e \\ v^e \\ w^e \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{u}}^e(x^e, y^e, z^e)}$$

Az egyszerűség kedvéért a deriválások jelölésénél elhagytuk az  $x$ ,  $y$  és  $z$  koordináták felső indexét, ami a végeselem sorszámára utalna. Ez nem okoz gondot, mivel ennek a jelölésnek csak a közelítés előállításánál van jelentősége. (Nyilván mindegyik végeselemhez ugyan az a globális koordináta tartozik.) A (12)-(14) transzformációs függvényeket felhasználva fel tudjuk írni az alakváltozásokat

úgy is mint a  $\xi\eta\zeta$  koordináták függvényeit.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \varepsilon_z^e \\ \gamma_{xy}^e \\ \gamma_{yz}^e \\ \gamma_{zx}^e \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}^e(x^e, y^e, z^e)}_{(6 \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \varepsilon_z^e \\ \gamma_{xy}^e \\ \gamma_{yz}^e \\ \gamma_{zx}^e \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi, \eta, \zeta)}_{(6 \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\partial}}}_{(6 \times 3)} \underbrace{\begin{bmatrix} u^e \\ v^e \\ w^e \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{u}}^e(\xi, \eta, \zeta)}_{(3 \times 1)} = \\
 & = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\partial}}}_{(6 \times 3)} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{N}}(\xi, \eta, \zeta)}_{(3 \times 3n)} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{x1}^e \\ q_{y1}^e \\ q_{z1}^e \\ q_{x2}^e \\ q_{y2}^e \\ q_{z2}^e \\ \vdots \\ q_{xn}^e \\ q_{yn}^e \\ q_{zn}^e \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{q}}^e}_{(3n \times 1)} = \\
 & = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta)}_{(6 \times 3n)} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{x1}^e \\ q_{y1}^e \\ q_{z1}^e \\ q_{x2}^e \\ q_{y2}^e \\ q_{z2}^e \\ \vdots \\ q_{xn}^e \\ q_{yn}^e \\ q_{zn}^e \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{q}}^e}_{(3n \times 1)}
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \underline{\underline{\partial}} \underline{\underline{u}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \underline{\underline{\partial}} \underline{\underline{N}}(\xi, \eta, \zeta) \underline{\underline{q}}^e = \underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta) \underline{\underline{q}}^e$$

Az  $\underline{\underline{N}}(\xi, \eta, \zeta)$  mátrix elemeinek  $xyz$  koordináták szerinti deriváltjait a láncszabály alkalmazásával kaphatjuk meg.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial x} &= \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\
 \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial y} &= \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial z} = \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

vagy tömörebben, mátrixok segítségével írva

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

ahol a

$$(\underline{J}^e)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}$$

az un. Jacobi mátrix inverze. Problémát jelenthet, hogy a  $\xi$ ,  $\eta$  és  $\zeta$   $x$ ,  $y$  és  $z$  szerinti deriváltjait közvetlenül nem tudjuk kiszámítani, mivel az  $x(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $y(\xi, \eta, \zeta)$  és  $z(\xi, \eta, \zeta)$  függvényeket ismerjük. (A  $\xi(x, y, z)$ ,  $\eta(x, y, z)$  és  $\zeta(x, y, z)$  függvények egyes esetekben nem biztos hogy felírhatók, ezért ne is vizsgáljuk őket.) Ha az  $xyz$  és  $\xi\eta\zeta$  közötti leképezés nem elfajuló, akkor a Jacobi mátrix invertálható. Bizonyítható, hogy

$$\underline{J}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

**9. feladat.** Számítsa ki a  $\underline{J} \cdot \underline{J}^{-1}$  szorzatot. ♣

A  $\underline{J}^e$  mátrix elemeit az  $e$ -edik végelesen a (12)-(14) képletek felhasználásával ki tudjuk számítani.

$$\frac{\partial x^e(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} x_i^e$$

$$\frac{\partial x^e(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} x_i^e$$

$$\frac{\partial x^e(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} x_i^e$$

$$\frac{\partial y^e(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} y_i^e$$

$$\frac{\partial y^e(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} y_i^e$$

$$\frac{\partial y^e(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} y_i^e$$

$$\frac{\partial z^e(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} z_i^e$$

$$\frac{\partial z^e(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} z_i^e$$



$$= \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_x^e + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_y^e + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_z^e \\ \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_x^e + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_y^e + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_z^e \\ \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_x^e + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_y^e + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_z^e \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy}^e \\ \frac{1}{2} \gamma_{yz}^e \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx}^e \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{C}}^e \\ (6 \times 6)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \varepsilon_z^e \\ \gamma_{xy}^e \\ \gamma_{yz}^e \\ \gamma_{zx}^e \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi, \eta, \zeta) \\ (6 \times 1)}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^e(x, y, z) = \underline{\underline{\sigma}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta) \underline{\underline{q}}^e$$

### 3.6. Az alakváltozási energia közelítése egy végelemen

$$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{A}} = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}$$

valamint

$$\underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}$$

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{(V^e)} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{A}} dV = \frac{1}{2} \int_{(V^e)} (\underline{\underline{\varepsilon}}^e)^T \underline{\underline{\sigma}}^e dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\underline{\underline{q}}^e)^T (\underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta))^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta) \underline{\underline{q}}^e \underbrace{\det(\underline{\underline{J}}^e) d\xi d\eta d\zeta}_{dV} =$$

$$= \frac{1}{2} (\underline{\underline{q}}^e)^T \underbrace{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta))^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta) \det(\underline{\underline{J}}^e) d\xi d\eta d\zeta}_{\underline{\underline{K}}^e} \underline{\underline{q}}^e$$

$$U^e = \frac{1}{2} (\underline{\underline{q}}^e)^T \underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{q}}^e$$

Osszuk a merevségi mátrixot és a csomóponti elmozdulásvektort elemeit blokkokra aszerint, hogy melyik csomópontoz tartoznak.

$$\underline{\underline{q}}^e = \begin{bmatrix} q_{x1}^e \\ q_{y1}^e \\ q_{z1}^e \\ q_{x2}^e \\ q_{y2}^e \\ q_{z2}^e \\ \vdots \\ q_{xn}^e \\ q_{yn}^e \\ q_{zn}^e \end{bmatrix}_{(3n \times 1)} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_1^e \\ \underline{\underline{q}}_2^e \\ \underline{\underline{q}}_3^e \\ \underline{\underline{q}}_4^e \\ \vdots \\ \underline{\underline{q}}_n^e \end{bmatrix}_{(3n \times 1)}$$



ahol

$$\underline{\underline{q}}_i^e = \begin{bmatrix} q_{xi}^e \\ q_{yi}^e \\ q_{zi}^e \end{bmatrix} \quad (3 \times 1)$$

Hasonló jelöléssel a merevségi mátrix is felírható

$$\underline{\underline{K}}^e = \begin{bmatrix} K_{xx11}^e & K_{xy11}^e & K_{xz11}^e & K_{xx12}^e & \cdots & K_{xy1n}^e & K_{xz1n}^e \\ K_{yx11}^e & K_{yy11}^e & K_{yz11}^e & K_{yx12}^e & \cdots & K_{yy1n}^e & K_{yz1n}^e \\ K_{zx11}^e & K_{zy11}^e & K_{zz11}^e & K_{zx12}^e & \cdots & K_{zy1n}^e & K_{zz1n}^e \\ K_{xx21}^e & K_{xy21}^e & K_{xz21}^e & K_{xx22}^e & \cdots & K_{xy2n}^e & K_{xz2n}^e \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_{yxn1}^e & K_{yyn1}^e & K_{yzn1}^e & K_{yxn2}^e & \cdots & K_{yynn}^e & K_{yzn2n}^e \\ K_{zxn1}^e & K_{zyn1}^e & K_{zzn1}^e & K_{zxn2}^e & \cdots & K_{zynn}^e & K_{zznn}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{11}^e & \underline{\underline{K}}_{12}^e & \underline{\underline{K}}_{13}^e & \cdots & \underline{\underline{K}}_{1n}^e \\ \underline{\underline{K}}_{21}^e & \underline{\underline{K}}_{22}^e & \underline{\underline{K}}_{23}^e & \cdots & \underline{\underline{K}}_{2n}^e \\ \underline{\underline{K}}_{31}^e & \underline{\underline{K}}_{32}^e & \underline{\underline{K}}_{33}^e & \cdots & \underline{\underline{K}}_{3n}^e \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\underline{K}}_{n1}^e & \underline{\underline{K}}_{n2}^e & \underline{\underline{K}}_{n3}^e & \cdots & \underline{\underline{K}}_{nn}^e \end{bmatrix} \quad (3n \times 3n)$$

ahol

$$\underline{\underline{K}}_{ij}^e = \begin{bmatrix} K_{xxij}^e & K_{xyij}^e & K_{xzij}^e \\ K_{yxij}^e & K_{yyij}^e & K_{yzij}^e \\ K_{zxij}^e & K_{zyij}^e & K_{zzij}^e \end{bmatrix} \quad (3 \times 3)$$

Ezzel az alakváltozási energia az

$$U^e = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{q}}^e \right)^T \underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{q}}^e = \frac{1}{2} \left[ \left( \underline{\underline{q}}_{-1}^e \right)^T \left( \underline{\underline{q}}_{-2}^e \right)^T \left( \underline{\underline{q}}_{-3}^e \right)^T \left( \underline{\underline{q}}_{-4}^e \right)^T \cdots \left( \underline{\underline{q}}_{-n}^e \right)^T \right] \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{11}^e & \underline{\underline{K}}_{12}^e & \underline{\underline{K}}_{13}^e & \cdots & \underline{\underline{K}}_{1n}^e \\ \underline{\underline{K}}_{21}^e & \underline{\underline{K}}_{22}^e & \underline{\underline{K}}_{23}^e & \cdots & \underline{\underline{K}}_{2n}^e \\ \underline{\underline{K}}_{31}^e & \underline{\underline{K}}_{32}^e & \underline{\underline{K}}_{33}^e & \cdots & \underline{\underline{K}}_{3n}^e \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\underline{K}}_{n1}^e & \underline{\underline{K}}_{n2}^e & \underline{\underline{K}}_{n3}^e & \cdots & \underline{\underline{K}}_{nn}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_{-1}^e \\ \underline{\underline{q}}_{-2}^e \\ \underline{\underline{q}}_{-3}^e \\ \underline{\underline{q}}_{-4}^e \\ \vdots \\ \underline{\underline{q}}_{-n}^e \end{bmatrix}$$

alakban is írható.

### 3.7. Külső erők munkájának közelítése egy végeelemen

#### 3.7.1. Felületi erők munkája

Könnyen

$$\vec{p}_0(\vec{r}) = p_{0x}(x, y, z)\vec{e}_x + p_{0y}(x, y, z)\vec{e}_y + p_{0z}(x, y, z)\vec{e}_z \quad \vec{r} \in A_p$$

↓

$$\underline{p}_{\underline{0}}(x, y, z) = \underbrace{\begin{bmatrix} p_{0x}(x, y, z) \\ p_{0y}(x, y, z) \\ p_{0z}(x, y, z) \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)}$$

belátható, hogy

$$\vec{u} \cdot \vec{p}_0 = up_{0x} + vp_{0y} + wp_{0z}$$

valamint

$$\underline{u}^T \underline{p}_{\underline{0}} = up_{0x} + vp_{0y} + wp_{0z}$$

Tegyük fel, hogy a terhelés a végeelem  $\zeta = 1$  felületén lép fel. A felületi erők munkája

$$\begin{aligned} W_{kp}^e &= \int_{(A_p^e)} \vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA = \int_{(A_p^e)} (\underline{u}^e(x, y, z))^T \underline{p}_{\underline{0}}(x, y, z) dA = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\underline{q}^e)^T (\underline{N}(\xi, \eta, \zeta))^T \underline{p}_{\underline{0}}(\xi, \eta, \zeta) \underbrace{J_A(\xi, \eta, \zeta = 1) d\xi d\eta}_{dA} = \\ &= (\underline{q}^e)^T \underbrace{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\underline{N}(\xi, \eta, \zeta))^T \underline{p}_{\underline{0}}(\xi, \eta, \zeta) J_A(\xi, \eta, \zeta = 1) d\xi d\eta}_{\underline{f}_{\underline{p}}^e} \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} dA &= |d\xi \vec{e}_\xi \times d\eta \vec{e}_\eta| = \left| d\xi \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times d\eta \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta = \\ &= \left| \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \xi} \vec{e}_z \right) \times \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \eta} \vec{e}_z \right) \right| d\xi d\eta = \\ &= \left| \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \vec{e}_z + \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \vec{e}_x \right| d\xi d\eta = \\ &= \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2} d\xi d\eta = \\ &= J_A(\xi, \eta, \zeta = 1) d\xi d\eta \end{aligned}$$

A felületi erők tehervektorát az egyes csomópontokhoz tartozó elemeket csoportosítva szét lehet bontani blokkokra.

$$W_{kp}^e = \int_{(A_p^e)} \vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA = \left( \underline{q}^e \right)^T \underline{f}_{=p}^e = \left[ \left( \underline{q}_{=1}^e \right)^T \left( \underline{q}_{=2}^e \right)^T \left( \underline{q}_{=3}^e \right)^T \left( \underline{q}_{=4}^e \right)^T \cdots \left( \underline{q}_{=n}^e \right)^T \right] \begin{bmatrix} \underline{f}_{=p1}^e \\ \underline{f}_{=p2}^e \\ \underline{f}_{=p3}^e \\ \underline{f}_{=p4}^e \\ \vdots \\ \underline{f}_{=pn}^e \end{bmatrix}$$

### 3.7.2. Térfogati erők munkája

Könnyen

$$\vec{f}(\vec{r}) = f_x(x, y, z) \vec{e}_x + f_y(x, y, z) \vec{e}_y + f_z(x, y, z) \vec{e}_z \quad \vec{r} \in V$$

↓

$$\underline{f}_{=0}(x, y, z) = \underbrace{\begin{bmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)}$$

belátható, hogy

$$\vec{u} \cdot \vec{f} = u f_x + v f_y + w f_z$$

valamint

$$\underline{u}^T \underline{f}_{=0} = u f_x + v f_y + w f_z$$

Ezért a térfogati erők munkája

$$\begin{aligned} W_{kf}^e &= \int_{(V^e)} \vec{u} \cdot \vec{f} dV = \int_{(V^e)} \left( \underline{u}^e(x, y, z) \right)^T \underline{f}_{=0}(x, y, z) dV = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \underline{q}^e \right)^T \left( \underline{N}(\xi, \eta, \zeta) \right)^T \underline{f}_{=0}(\xi, \eta, \zeta) \underbrace{\det(\underline{J}^e) d\xi d\eta d\zeta}_{dV} = \\ &= \left( \underline{q}^e \right)^T \underbrace{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \underline{N}(\xi, \eta, \zeta) \right)^T \underline{f}_{=0}(\xi, \eta, \zeta) \det(\underline{J}^e) d\xi d\eta d\zeta}_{\underline{f}_{=f}^e} \end{aligned}$$

A térfogati erők tehervektorát az egyes csomópontokhoz tartozó elemeket csoportosítva szét lehet

bontani blokkokra.

$$W_{kf}^e = \int_{(V^e)} \vec{u} \cdot \vec{f} dV = (\underline{q}^e)^T \underline{f}_{\underline{p}}^e = \left[ (\underline{q}_{\underline{1}}^e)^T (\underline{q}_{\underline{2}}^e)^T (\underline{q}_{\underline{3}}^e)^T (\underline{q}_{\underline{4}}^e)^T \cdots (\underline{q}_{\underline{n}}^e)^T \right] \begin{bmatrix} \underline{f}_{\underline{f}1}^e \\ \underline{f}_{\underline{f}2}^e \\ \underline{f}_{\underline{f}3}^e \\ \underline{f}_{\underline{f}4}^e \\ \vdots \\ \underline{f}_{\underline{f}n}^e \end{bmatrix}$$

### 3.7.3. Külső erők munkája

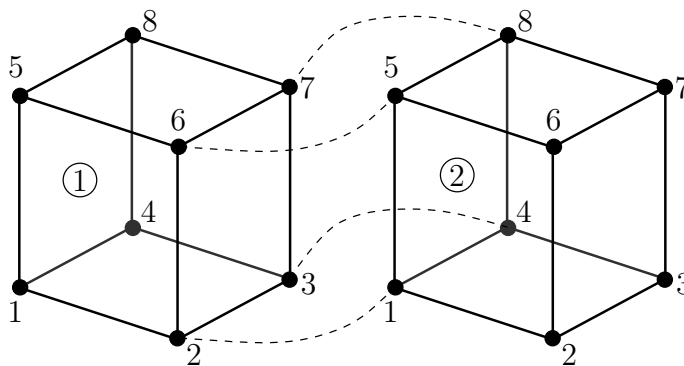
$$\begin{aligned} W_k^e &= \int_{(A_p^e)} \vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA + \int_{(V^e)} \vec{u} \cdot \vec{f} dV = (\underline{q}^e)^T \underline{f}_{\underline{p}}^e + (\underline{q}^e)^T \underline{f}_{\underline{f}}^e = \\ &= (\underline{q}^e)^T \underbrace{(\underline{f}_{\underline{p}}^e + \underline{f}_{\underline{f}}^e)}_{\underline{f}} = (\underline{q}^e)^T \underline{f}_{\underline{f}}^e = \end{aligned}$$

$$= \left[ (\underline{q}_{\underline{1}}^e)^T (\underline{q}_{\underline{2}}^e)^T (\underline{q}_{\underline{3}}^e)^T (\underline{q}_{\underline{4}}^e)^T \cdots (\underline{q}_{\underline{n}}^e)^T \right] \begin{bmatrix} \underline{f}_{\underline{1}}^e \\ \underline{f}_{\underline{2}}^e \\ \vdots \\ \underline{f}_{\underline{3}}^e \\ \underline{f}_{\underline{4}}^e \\ \vdots \\ \underline{f}_{\underline{n}}^e \end{bmatrix}$$

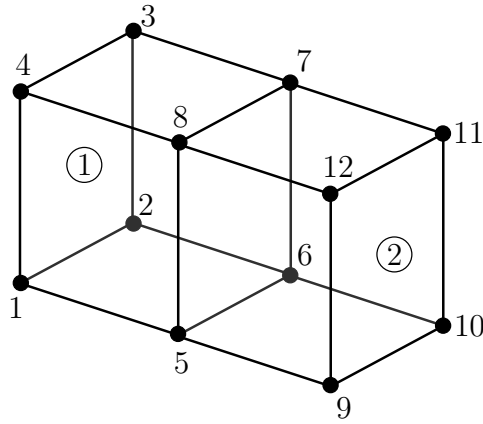
### 3.8. Egy végelem potenciális energiája

$$\Pi_p^e = U^e - W_k^e = \frac{1}{2} (\underline{q}^e)^T \underline{K}^e \underline{q}^e - (\underline{q}^e)^T \underline{f}_{\underline{f}}^e$$

### 3.9. Csomópontok globális sorszámozása



16. ábra.



17. ábra.

### 3.10. A teljes szerkezet csomóponti elmozdulásvektora

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} q_{x1} \\ q_{y1} \\ q_{z1} \\ q_{x2} \\ q_{y2} \\ q_{z2} \\ \vdots \\ q_{x\tilde{n}} \\ q_{y\tilde{n}} \\ q_{z\tilde{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{\underline{=1}} \\ q_{\underline{=2}} \\ \vdots \\ q_{\underline{=\tilde{n}}} \end{bmatrix}$$

ahol  $\tilde{n}$  a teljes szerkezet csomópontjainak száma.

### 3.11. A teljes szerkezet merevségi mátrixa és tehervektora

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^m \Pi_p^e = \frac{1}{2} \underbrace{\left[ \begin{matrix} \left( \underline{q}_{\underline{=1}} \right)^T & \left( \underline{q}_{\underline{=2}} \right)^T & \cdots & \left( \underline{q}_{\underline{=\tilde{n}}} \right)^T \end{matrix} \right]}_{\substack{\underline{q}^T \\ (1 \times 3\tilde{n})}} \underbrace{\left[ \begin{matrix} \sum_{e=1}^m \underline{K}_{\underline{=ii}}^e & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{\underline{=ij}}^e & \cdots & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{\underline{=ik}}^e \\ \sum_{e=1}^m \underline{K}_{\underline{=ji}}^e & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{\underline{=jj}}^e & \cdots & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{\underline{=jk}}^e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{e=1}^m \underline{K}_{\underline{=ki}}^e & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{\underline{=kj}}^e & \cdots & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{\underline{=kk}}^e \end{matrix} \right]}_{\substack{\underline{K} \\ (3\tilde{n} \times 3\tilde{n})}} \underbrace{\left[ \begin{matrix} q_{\underline{=1}} \\ q_{\underline{=2}} \\ \vdots \\ q_{\underline{=\tilde{n}}} \end{matrix} \right]}_{\substack{\underline{q} \\ (3\tilde{n} \times 1)}} -$$



Ennek jelentése: a globális sorszámozás szerinti 1. és 4. csomópontához tartozó merevségi mátrix ( $3 \times 3$ -as méretű almátrix) a lokális (elemhez kötött) számozás szerint az első végelem 1. és 5. csomópontjához tartozik.

$$\underline{\underline{K}}_{56} = \sum_{e=1}^m \underline{\underline{K}}_{ij}^e = \underline{\underline{K}}_{23}^1 + \underline{\underline{K}}_{14}^2$$

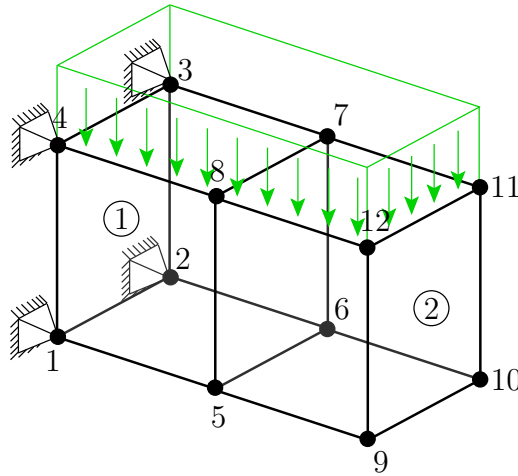
Ennek jelentése: a globális sorszámozás szerinti 5. és 6. csomópontához tartozó merevségi mátrix ( $3 \times 3$ -as méretű almátrix) a lokális (elemhez kötött) számozás szerint az első végelem 2. és 3. valamint a második végelem 1. és 4. csomópontjához tartozó mátrixok összege.

$$\underline{\underline{K}}_{311} = \sum_{e=1}^m \underline{\underline{K}}_{ij}^e = \underline{\underline{0}}$$

Ennek jelentése: a globális sorszámozás szerinti 3. csomópont csak az első elemhez tartozik, a globális sorszámozás szerinti 11. csomópont pedig csak a második elemhez tartozik. Emiatt sem az első, sem a második végelem merevségi mátrixában nem található olyan almátrix, amely egyszerre tartozna a globális számozás szerinti 3. és 11. csomópontához. Ezért a  $\underline{\underline{K}}_{311}$  mátrix értéke nulla ( $3 \times 3$  darab nullát tartalmaz).

♣

**13. feladat.** Írja fel a 18. ábrán látható szerkezet globális tehervektorát.



18. ábra.

Megoldás:

$$\underline{\underline{f}}^T = \left[ \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{f}}_{8}^1 \quad \underline{\underline{f}}_{5}^1 \quad \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{f}}_{7}^1 + \underline{\underline{f}}_{8}^2 \quad \underline{\underline{f}}_{6}^1 + \underline{\underline{f}}_{5}^2 \quad \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{f}}_{7}^2 \quad \underline{\underline{f}}_{6}^2 \right]$$

♣

## 3.12. Kinematikai peremfeltételek figyelembevétele

### 3.12.1. Megfogások

A teljes szerkezet potenciális energiája (lásd 3.11. fejezet)

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^m \Pi_p^e = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{q}_1^T & \underline{q}_2^T & \cdots & \underline{q}_n^T \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{q}^T \\ (1 \times 3\tilde{n})}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{e=1}^m \underline{K}_{ii}^e & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{ij}^e & \cdots & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{ik}^e \\ \sum_{e=1}^m \underline{K}_{ji}^e & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{jj}^e & \cdots & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{jk}^e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{e=1}^m \underline{K}_{ki}^e & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{kj}^e & \cdots & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{kk}^e \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{K} \\ (3\tilde{n} \times 3\tilde{n})}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{q}_2 \\ \vdots \\ \underline{q}_n \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{q} \\ (3\tilde{n} \times 1)}} -$$

$$- \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{q}_1^T & \underline{q}_2^T & \cdots & \underline{q}_n^T \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{q}^T \\ (1 \times 3\tilde{n})}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{e=1}^m \underline{f}_{=i}^e \\ \sum_{e=1}^m \underline{f}_{=j}^e \\ \vdots \\ \sum_{e=1}^m \underline{f}_{=k}^e \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{f} \\ (3\tilde{n} \times 1)}}$$

Legyen

$$\underline{q}_l = \underline{0}$$

vagyis

$$q_{xl} = q_{yl} = q_{zl} = 0$$

Ekkor a potenciális energia így írható

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^m \Pi_p^e = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \cdots & \underline{q}_{l-1}^T & \underline{0} & \underline{q}_{l+1}^T & \cdots \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{q}^T \\ (1 \times 3\tilde{n})}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{e=1}^m \underline{K}_{ii}^e & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{ij}^e & \cdots & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{ik}^e \\ \sum_{e=1}^m \underline{K}_{ji}^e & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{jj}^e & \cdots & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{jk}^e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{e=1}^m \underline{K}_{ki}^e & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{kj}^e & \cdots & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{kk}^e \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{K} \\ (3\tilde{n} \times 3\tilde{n})}} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \underline{q}_{l-1} \\ \underline{0} \\ \underline{q}_{l+1} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{q} \\ (3\tilde{n} \times 1)}} -$$



$$\begin{aligned}
& - \underbrace{\left[ \cdots \quad \underline{q}_{\underline{l-1}}^T \quad \underline{0} \quad \underline{q}_{\underline{l+1}}^T \quad \cdots \right]}_{\substack{\underline{q}^T \\ (1 \times 3\bar{n})}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{e=1}^m \underline{f}_{\underline{i}}^e \\ \sum_{e=1}^m \underline{f}_{\underline{j}}^e \\ \vdots \\ \sum_{e=1}^m \underline{f}_{\underline{k}}^e \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{f} \\ (3\bar{n} \times 1)}} = \\
& = \frac{1}{2} \underbrace{\left[ \cdots \quad \underline{q}_{\underline{l-1}}^T \quad \underline{q}_{\underline{l+1}}^T \quad \cdots \right]}_{\substack{\underline{\tilde{q}}^T \\ (1 \times 3(\bar{n}-1))}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{e=1}^m \underline{K}_{\underline{ii}}^e & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{\underline{ij}}^e & \cdots & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{\underline{ik}}^e \\ \sum_{e=1}^m \underline{K}_{\underline{ji}}^e & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{\underline{jj}}^e & \cdots & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{\underline{jk}}^e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{e=1}^m \underline{K}_{\underline{ki}}^e & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{\underline{kj}}^e & \cdots & \sum_{e=1}^m \underline{K}_{\underline{kk}}^e \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{K} \\ (3(\bar{n}-1) \times 3(\bar{n}-1))}} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \underline{q}_{\underline{l-1}} \\ \underline{q}_{\underline{l+1}} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\tilde{q}} \\ (3(\bar{n}-1) \times 1)}} - \\
& - \underbrace{\left[ \cdots \quad \underline{q}_{\underline{l-1}}^T \quad \underline{q}_{\underline{l+1}}^T \quad \cdots \right]}_{\substack{\underline{\tilde{q}}^T \\ (1 \times 3(\bar{n}-1))}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{e=1}^m \underline{f}_{\underline{i}}^e \\ \sum_{e=1}^m \underline{f}_{\underline{j}}^e \\ \vdots \\ \sum_{e=1}^m \underline{f}_{\underline{k}}^e \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{f} \\ (3(\bar{n}-1) \times 1)}}
\end{aligned}$$

ahol a  $\underline{K}$  merevségi mátrix  $l$ -edik sorát és oszlopát, valamint a  $\underline{q}$  csomóponti elmozdulásvektor és az  $\underline{f}$  tehervektor  $l$ -edik sorát kitöröltük.

**14. feladat.** Írja fel a 18. ábrán látható szerkezet globális merevségi mátrixát és tehervektorát a kinematikai peremfeltételek figyelembevételével.



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \underbrace{\left[ \dots \quad q_{\underline{l-1}}^T \quad q_{\underline{l+1}}^T \quad \dots \right]}_{\substack{\tilde{q}^T \\ (1 \times 3(\tilde{n}-1))}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{e=1}^m K_{\underline{ii}}^e & \sum_{e=1}^m K_{\underline{ij}}^e & \dots & \sum_{e=1}^m K_{\underline{ik}}^e \\ \sum_{e=1}^m K_{\underline{ji}}^e & \sum_{e=1}^m K_{\underline{jj}}^e & \dots & \sum_{e=1}^m K_{\underline{jk}}^e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{e=1}^m K_{\underline{ki}}^e & \sum_{e=1}^m K_{\underline{kj}}^e & \dots & \sum_{e=1}^m K_{\underline{kk}}^e \end{bmatrix}}_{\substack{\tilde{K} \\ (3(\tilde{n}-1) \times 3(\tilde{n}-1))}} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ q_{\underline{l-1}} \\ q_{\underline{l+1}} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\substack{\tilde{q} \\ (3(\tilde{n}-1) \times 1)}} - \\
&- \underbrace{\left[ \dots \quad q_{\underline{l-1}}^T \quad q_{\underline{l+1}}^T \quad \dots \right]}_{\substack{\tilde{q}^T \\ (1 \times 3(\tilde{n}-1))}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{e=1}^m f_{\underline{i}}^e \\ \sum_{e=1}^m f_{\underline{j}}^e \\ \vdots \\ \sum_{e=1}^m f_{\underline{k}}^e \end{bmatrix}}_{\substack{\tilde{f} \\ (3(\tilde{n}-1) \times 1)}} + \underbrace{\left[ \dots \quad q_{\underline{l-1}}^T \quad q_{\underline{l+1}}^T \quad \dots \right]}_{\substack{\tilde{q}^T \\ (1 \times 3(\tilde{n}-1))}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{e=1}^m K_{\underline{il}}^e q_{\underline{l0}} \\ \sum_{e=1}^m K_{\underline{jl}}^e q_{\underline{l0}} \\ \vdots \\ \sum_{e=1}^m K_{\underline{kl}}^e q_{\underline{l0}} \end{bmatrix}}_{\substack{(3(\tilde{n}-1) \times 1)}}
\end{aligned}$$

### 3.13. A csomóponti elmozdulásvektor meghatározása

## 4. Kiegészítések: numerikus integrálás

### 4.1. Numerikus integrálás, Gauss-kvadratúra

## 5. Mechanikai modellek a végeselem módszerben

### 5.1. Speciális terhelések

#### 5.1.1. Rugalmas ágyazás

#### 5.1.2. Hőmérséklet-változásból származó terhelés

### 5.2. Rúdszerkezetek

#### 5.2.1. Bernoulli-féle rúdelmélet

Csak kezdetben egyenes középvonalú rudakat vizsgálunk. Feltételezések (Bernoulli hipotézisek):

- A rúd keresztmetszetei az alakváltozás után is síkok maradnak.
- A rúd keresztmetszetei merőlegesen maradnak a rúd alakváltozott középvonalára.

A Bernoulli-féle rúdelmélet nem veszi figyelembe

- a nyírásból származó alakváltozást.

### 5.2.2. Elmozdulás állapot

A rúd tetszőleges pontjának elmozdulása meghatározható, ha ismerjük a rúd középvonalának elmozdulását

$$\vec{u}_S(\zeta) = u_S(\zeta) \vec{e}_\xi + v_S(\zeta) \vec{e}_\eta + w_S(\zeta) \vec{e}_\zeta \quad (15)$$

és a rúd keresztmetszeteinek szögelfordulását

$$\vec{\varphi}(\zeta) = \varphi_\xi(\zeta) \vec{e}_\xi + \varphi_\eta(\zeta) \vec{e}_\eta + \varphi_\zeta(\zeta) \vec{e}_\zeta \quad (16)$$

ahol

$$\varphi_\xi(\zeta) = -\frac{dv_S(\zeta)}{d\zeta} \quad (17)$$

$$\varphi_\eta(\zeta) = \frac{du_S(\zeta)}{d\zeta} \quad (18)$$

Egymástól független skalár mennyiségek:

$$u_S(\zeta), \quad v_S(\zeta), \quad w_S(\zeta), \quad \varphi_\zeta(\zeta) \quad (19)$$

Tetszőleges pont elmozdulása:

$$\begin{aligned} \vec{u}(\xi, \eta, \zeta) &= \underbrace{(u_S(\zeta) - \varphi_\zeta(\zeta) \eta)}_{u(\eta, \zeta)} \vec{e}_\xi + \underbrace{(v_S(\zeta) + \varphi_\zeta(\zeta) \xi)}_{v(\xi, \zeta)} \vec{e}_\eta + \underbrace{(w_S(\zeta) + \varphi_\xi(\zeta) \eta - \varphi_\eta(\zeta) \xi)}_{w(\xi, \eta, \zeta)} \vec{e}_\zeta = \\ &= u(\eta, \zeta) \vec{e}_\xi + v(\xi, \zeta) \vec{e}_\eta + w(\xi, \eta, \zeta) \vec{e}_\zeta \end{aligned}$$

### 5.2.3. Alakváltozás állapot

A fajlagos nyúlásokat és a szögtorzulásokat a szokásos módon számíthatjuk.

$$\begin{aligned} \varepsilon_\zeta(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{dw_S(\zeta)}{d\zeta} + \frac{d\varphi_\xi(\zeta)}{d\zeta} \eta - \frac{d\varphi_\eta(\zeta)}{d\zeta} \xi = \\ &= \frac{dw_S(\zeta)}{d\zeta} - \frac{d^2 v_S(\zeta)}{d\zeta^2} \eta - \frac{d^2 u_S(\zeta)}{d\zeta^2} \xi \approx \varepsilon_\zeta^N + \underbrace{\kappa_\xi \eta + \kappa_\eta \xi}_{\varepsilon_\zeta^H} \end{aligned}$$

ahol

$$\kappa_\xi \approx -\frac{d^2 v_S(\zeta)}{d\zeta^2}$$

és

$$\kappa_\eta \approx -\frac{d^2 u_S(\zeta)}{d\zeta^2}$$

a rúd középvonalának  $\eta\zeta$  és  $\xi\zeta$  síkban fellépő görbületei.

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = -\varphi_\zeta(\zeta) + \varphi_\zeta(\zeta) = 0$$

$$\gamma_{\eta\zeta}(\xi, \zeta) = \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \eta} = \underbrace{\frac{dv_S(\zeta)}{d\zeta}}_{-\varphi_\xi(\zeta)} + \frac{d\varphi_\zeta(\zeta)}{d\zeta} \xi + \varphi_\xi(\zeta) = \frac{d\varphi_\zeta(\zeta)}{d\zeta} \xi = \vartheta(\zeta) \xi$$

$$\gamma_{\zeta\xi}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\varphi_{\eta}(\zeta) + \underbrace{\frac{du_S(\zeta)}{d\zeta}}_{\varphi_{\eta}(\zeta)} - \frac{d\varphi_{\zeta}(\zeta)}{d\zeta}\eta = -\frac{d\varphi_{\zeta}(\zeta)}{d\zeta}\eta = -\vartheta(\zeta)\eta$$

ahol  $\vartheta(\zeta)$  a fajlagos szögelfordulás. Összefoglalva

$$\varepsilon_{\zeta} = \frac{dw_S(\zeta)}{d\zeta} - \frac{d^2v_S(\zeta)}{d\zeta^2}\eta - \frac{d^2u_S(\zeta)}{d\zeta^2}\xi, \quad (20)$$

$$\gamma_{\xi\eta} = 0, \quad \gamma_{\eta\zeta} = \frac{d\varphi_{\zeta}(\zeta)}{d\zeta}\xi, \quad \gamma_{\zeta\xi} = -\frac{d\varphi_{\zeta}(\zeta)}{d\zeta}\eta. \quad (21)$$

#### 5.2.4. Feszültségi állapot

A rúdban feszültségek a húzó-nyomó, hajlító és csavaró igénybevételek hatására keletkeznek. Az egyes feszültségek kiszámítási módja a Szilárdságtan (Alkalmazott mechanika) című tantárgyból már ismert.

– Húzás-nyomás

$$\sigma_{\zeta}^N = \frac{N}{A}$$

ahol  $N$  a rúderő,  $A$  pedig a rúd keresztmetszetének területe.

– Hajlítás

$$\sigma_{\zeta}^H = \sigma_{\zeta}^{H_1} + \sigma_{\zeta}^{H_2} = \frac{M_{h\eta}}{I_{\eta}}\xi + \frac{M_{h\xi}}{I_{\xi}}\eta$$

ahol  $M_{h\eta}$  és  $M_{h\xi}$  a  $\eta$  és  $\xi$  tengelyek körüli hajlító nyomatékok,  $I_{\eta}$  és  $I_{\xi}$  pedig a keresztmetszet fő tehetetlenségi nyomatékai (feltételezzük, hogy a  $\eta$  és  $\xi$  tengelyek tehetetlenségi főtengelyek).

– Csavarás

$$\tau_{\xi\zeta}^C = -\frac{M_c}{I_c}\eta$$

$$\tau_{\eta\zeta}^C = \frac{M_c}{I_c}\xi$$

ahol  $M_c$  a csavaró nyomaték  $I_c$  pedig a keresztmetszet csavarási másodrendű nyomatéka.

#### 5.2.5. Anyagtörvény

Egyszerű Hooke-törvény

$$\sigma_{\zeta} = E\varepsilon_{\zeta}$$

$$\tau_{\xi\zeta} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{\xi\zeta} = G\gamma_{\xi\zeta}$$

$$\tau_{\eta\zeta} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{\eta\zeta} = G\gamma_{\eta\zeta}$$

– Húzás-nyomás

$$\begin{aligned}\sigma_{\zeta}^N &= E\varepsilon_{\zeta}^N \\ \frac{N}{A} &= E\varepsilon_{\zeta}^N = E\frac{dw_S(\zeta)}{d\zeta} \\ N &= AE\varepsilon_{\zeta}^N = AE\frac{dw_S(\zeta)}{d\zeta}\end{aligned}$$

– Hajlítás

$$\begin{aligned}\sigma_{\zeta}^H &= E\varepsilon_{\zeta}^H \\ \sigma_{\zeta}^{H_1} &= \frac{M_{h\eta}}{I_{\eta}}\xi = E\varepsilon_{\zeta}^{H_1} = E\kappa_{\eta}\xi & \sigma_{\zeta}^{H_2} &= \frac{M_{h\xi}}{I_{\xi}}\eta = E\varepsilon_{\zeta}^{H_2} = E\kappa_{\xi}\eta \\ M_{h\eta}\xi &= I_{\eta}E\kappa_{\eta}\xi \Rightarrow M_{h\eta} = I_{\eta}E\kappa_{\eta} = -I_{\eta}E\frac{d^2u_S(\zeta)}{d\zeta^2} \\ M_{h\xi}\eta &= I_{\xi}E\kappa_{\xi}\eta \Rightarrow M_{h\xi} = I_{\xi}E\kappa_{\xi} = -I_{\xi}E\frac{d^2v_S(\zeta)}{d\zeta^2}\end{aligned}$$

– Csavarás

$$\begin{aligned}\tau_{\xi\xi}^C &= -\frac{M_c}{I_c}\eta = G\gamma_{\xi\xi} = -G\vartheta(\zeta)\eta & \tau_{\eta\xi}^C &= \frac{M_c}{I_c}\xi = G\gamma_{\eta\xi} = G\vartheta(\zeta)\xi \\ M_c\eta &= I_cG\vartheta(\zeta)\eta \Rightarrow M_c = I_cG\vartheta = I_cG\frac{d\varphi_{\zeta}(\zeta)}{d\zeta} \\ M_c\xi &= I_cG\vartheta(\zeta)\xi \Rightarrow M_c = I_cG\vartheta = I_cG\frac{d\varphi_{\zeta}(\zeta)}{d\zeta}\end{aligned}$$

vagyis mindkét egyenlet ugyanarra az eredményre vezetett.

### 5.2.6. Húzott-nyomott hajlított-nyírt és csavart rúd-végeselem

Az előző fejezetben leírtak alapján egy rúdelemet négy skalár koordinátával jellemezhetünk. A továbbiakban minden rúddal kapcsolatos mennyiséget a rúd középvonalában értelmeztünk tekintünk, ezért a (19) mennyiségek alsó indexéből elhagyjuk a súlypontot jelentő  $S$  betűket. Az egyszerűség kedvéért elhagyjuk a szögelfordulás alsó indexét is. Írjuk be ezeket a skalár koordinátákat egy oszlopvektorba.

$$\underline{\underline{u}}^e(\zeta) = \begin{bmatrix} u^e(\zeta) \\ v^e(\zeta) \\ w^e(\zeta) \\ \varphi^e(\zeta) \end{bmatrix}_{(4 \times 1)}$$

### 5.2.7. Csomóponti elmozdulás vektor

Egy rúdelem rendelkezzen kettő csomóponttal, és egy csomóponthoz rendeljük hozzá a csomópont  $\xi$ ,  $\eta$  és  $\zeta$  irányú elmozdulását valamint a  $\xi$ ,  $\eta$  és  $\zeta$  tengelyek körüli szögelfordulását. Így egy rúdelem csomóponti elmozdulásvektora a következő lesz

$$\left(\underline{q}^e\right)^T = \left[ \begin{array}{cccccccccccc} u_i^e & v_i^e & w_i^e & \varphi_{\xi i}^e & \varphi_{\eta i}^e & \varphi_{\zeta i}^e & u_j^e & v_j^e & w_j^e & \varphi_{\xi j}^e & \varphi_{\eta j}^e & \varphi_{\zeta j}^e \end{array} \right] \quad (22)$$

(1×12)

Ez 12 db paramétert jelent. Válasszuk meg a közelítő függvényeket olyanra, hogy azok is 12 db paramétert tartsanak, így a paraméterek a csomópontok elmozdulásából és szögelfordulásából meghatározhatók.

$$\begin{aligned} u^e(\zeta) &= a_1^e + a_2^e \zeta + a_3^e \zeta^2 + a_4^e \zeta^3 \\ v^e(\zeta) &= a_5^e + a_6^e \zeta + a_7^e \zeta^2 + a_8^e \zeta^3 \\ w^e(\zeta) &= a_9^e + a_{10}^e \zeta \\ \varphi^e(\zeta) &= a_{11}^e + a_{12}^e \zeta \end{aligned}$$

Később látni fogjuk, hogy miért így célszerű a paramétereket megválasztani.

### 5.2.8. Alakfüggvények meghatározása

Az  $a_i^e$  paramétereket a csomóponti elmozdulás és szögelfordulás koordinátákon keresztül próbáljuk meghatározni. Tudjuk korábbról ((17) és (18)), hogy a  $\xi$  és  $\eta$  tengelyek körüli elfordulásokat az  $u^e(\zeta)$  és  $v^e(\zeta)$  függvények deriváltjaiból állíthatjuk elő.

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi}(\zeta) &= -\frac{dv(\zeta)}{d\zeta} \\ \varphi_{\eta}(\zeta) &= \frac{du(\zeta)}{d\zeta} \end{aligned}$$

Legyen a végeelem hossza  $L$ . Ha a csomóponti elmozdulás paraméterek adottak, akkor

$$\begin{aligned} u^e(\zeta = 0) &= a_1^e + a_2^e 0 + a_3^e 0 + a_4^e 0 = u_i^e \\ v^e(\zeta = 0) &= a_5^e + a_6^e 0 + a_7^e 0 + a_8^e 0 = v_i^e \\ w^e(\zeta = 0) &= a_9^e + a_{10}^e 0 = w_i^e \\ -\frac{dv(\zeta = 0)}{d\zeta} &= -a_6^e - 2a_7^e 0 - 3a_8^e 0 = \varphi_{\xi i}^e \\ \frac{du(\zeta = 0)}{d\zeta} &= a_2^e + 2a_3^e 0 + 3a_4^e 0 = \varphi_{\eta i}^e \\ \varphi^e(\zeta = 0) &= a_{11}^e + a_{12}^e 0 = \varphi_{\zeta i}^e \\ u^e(\zeta = L) &= a_1^e + a_2^e L + a_3^e L^2 + a_4^e L^3 = u_j^e \\ v^e(\zeta = L) &= a_5^e + a_6^e L + a_7^e L^2 + a_8^e L^3 = v_j^e \\ w^e(\zeta = L) &= a_9^e + a_{10}^e L = w_j^e \end{aligned}$$

$$-\frac{dv(\zeta=L)}{d\zeta} = -a_6^e - 2a_7^e L - 3a_8^e L^2 = \varphi_{\xi j}^e$$

$$\frac{du(\zeta=L)}{d\zeta} = a_2^e + 2a_3^e L + 3a_4^e L^2 = \varphi_{\eta j}^e$$

$$\varphi^e(\zeta=L) = a_{11}^e + a_{12}^e L = \varphi_{\zeta j}^e$$

Írjuk fel ezt mátrixokkal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2L & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \\ a_4^e \\ a_5^e \\ a_6^e \\ a_7^e \\ a_8^e \\ a_9^e \\ a_{10}^e \\ a_{11}^e \\ a_{12}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ w_i^e \\ \varphi_{\xi i}^e \\ \varphi_{\eta i}^e \\ \varphi_{\zeta i}^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ w_j^e \\ \varphi_{\xi j}^e \\ \varphi_{\eta j}^e \\ \varphi_{\zeta j}^e \end{bmatrix}$$

(12×12) (12×1) (12×1)

Az együttható mátrix invertálása után az  $a_i^e$  ( $i = 1, 2, \dots, 12$ ) paraméterek kifejezhetők.

$$\begin{bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \\ a_4^e \\ a_5^e \\ a_6^e \\ a_7^e \\ a_8^e \\ a_9^e \\ a_{10}^e \\ a_{11}^e \\ a_{12}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{L} & 0 & \frac{3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{2}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L^2} & 0 & -\frac{2}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{L^2} & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{L^3} & 0 & -\frac{1}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{L^3} & 0 & -\frac{1}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ w_i^e \\ \varphi_{\xi i}^e \\ \varphi_{\eta i}^e \\ \varphi_{\zeta i}^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ w_j^e \\ \varphi_{\xi j}^e \\ \varphi_{\eta j}^e \\ \varphi_{\zeta j}^e \end{bmatrix}$$

(12×1) (12×12) (12×1)

azaz

$$\begin{aligned} a_1^e &= u_i^e \\ a_2^e &= \varphi_{\eta i}^e \\ a_3^e &= -\frac{3}{L^2} u_i^e - \frac{2}{L} \varphi_{\eta i}^e + \frac{3}{L^2} u_j^e - \frac{1}{L} \varphi_{\eta j}^e \\ a_4^e &= \frac{2}{L^3} u_i^e + \frac{1}{L^2} \varphi_{\eta i}^e - \frac{2}{L^3} u_j^e + \frac{1}{L^2} \varphi_{\eta j}^e \\ a_5^e &= v_i^e \\ a_6^e &= -\varphi_{\xi i}^e \end{aligned}$$



$$a_7^e = -\frac{3}{L^2}v_i^e + \frac{2}{L}\varphi_{\xi i}^e + \frac{3}{L^2}v_j^e + \frac{1}{L}\varphi_{\xi j}^e$$

$$a_8^e = \frac{2}{L^3}v_i^e - \frac{1}{L^2}\varphi_{\xi i}^e - \frac{2}{L^3}v_j^e - \frac{1}{L^2}\varphi_{\xi j}^e$$

$$a_9^e = w_i^e$$

$$a_{10}^e = -\frac{1}{L}w_i^e + \frac{1}{L}w_j^e$$

$$a_{11}^e = \varphi_{\zeta i}^e$$

$$a_{12}^e = -\frac{1}{L}\varphi_{\zeta i}^e + \frac{1}{L}\varphi_{\zeta j}^e$$

Helyettesítsük vissza a paramétereket a közelítő függvénybe.

$$u^e(\zeta) = u_i^e + \varphi_{\eta i}^e \zeta + \left( -\frac{3}{L^2}u_i^e - \frac{2}{L}\varphi_{\eta i}^e + \frac{3}{L^2}u_j^e - \frac{1}{L}\varphi_{\eta j}^e \right) \zeta^2 + \left( \frac{2}{L^3}u_i^e + \frac{1}{L^2}\varphi_{\eta i}^e - \frac{2}{L^3}u_j^e + \frac{1}{L^2}\varphi_{\eta j}^e \right) \zeta^3$$

$$v^e(\zeta) = v_i^e - \varphi_{\xi i}^e \zeta + \left( -\frac{3}{L^2}v_i^e + \frac{2}{L}\varphi_{\xi i}^e + \frac{3}{L^2}v_j^e + \frac{1}{L}\varphi_{\xi j}^e \right) \zeta^2 + \left( \frac{2}{L^3}v_i^e - \frac{1}{L^2}\varphi_{\xi i}^e - \frac{2}{L^3}v_j^e - \frac{1}{L^2}\varphi_{\xi j}^e \right) \zeta^3$$

$$w^e(\zeta) = w_i^e + \left( -\frac{1}{L}w_i^e + \frac{1}{L}w_j^e \right) \zeta$$

$$\varphi^e(\zeta) = \varphi_{\zeta i}^e + \left( -\frac{1}{L}\varphi_{\zeta i}^e + \frac{1}{L}\varphi_{\zeta j}^e \right) \zeta$$

Kis átalakítás után kapjuk, hogy

$$u^e(\zeta) = \underbrace{\left(1 - \frac{3\zeta^2}{L^2} + \frac{2\zeta^3}{L^3}\right)}_{A_1(\zeta)} u_i^e + \underbrace{\left(\zeta - \frac{2\zeta^2}{L} + \frac{\zeta^3}{L^2}\right)}_{A_2(\zeta)} \varphi_{\eta i}^e + \underbrace{\left(\frac{3\zeta^2}{L^2} - \frac{2\zeta^3}{L^3}\right)}_{A_3(\zeta)} u_j^e + \underbrace{\left(-\frac{\zeta^2}{L} + \frac{\zeta^3}{L^2}\right)}_{A_4(\zeta)} \varphi_{\eta j}^e$$

$$v^e(\zeta) = \underbrace{\left(1 - \frac{3\zeta^2}{L^2} + \frac{2\zeta^3}{L^3}\right)}_{A_1(\zeta)} v_i^e + \underbrace{\left(-\zeta + \frac{2\zeta^2}{L} - \frac{\zeta^3}{L^2}\right)}_{-A_2(\zeta)} \varphi_{\xi i}^e + \underbrace{\left(\frac{3\zeta^2}{L^2} - \frac{2\zeta^3}{L^3}\right)}_{A_3(\zeta)} v_j^e + \underbrace{\left(\frac{\zeta^2}{L} - \frac{\zeta^3}{L^2}\right)}_{-A_4(\zeta)} \varphi_{\xi j}^e$$

$$w^e(\zeta) = \underbrace{\left(1 - \frac{\zeta}{L}\right)}_{A_5(\zeta)} w_i^e + \underbrace{\frac{\zeta}{L}}_{A_6(\zeta)} w_j^e$$

$$\varphi^e(\zeta) = \underbrace{\left(1 - \frac{\zeta}{L}\right)}_{A_5(\zeta)} \varphi_{\zeta i}^e + \underbrace{\frac{\zeta}{L}}_{A_6(\zeta)} \varphi_{\zeta j}^e$$

Elhagyva a függvények argumentumának jelölését írjuk fel ugyan ezt mátrixos alakban is.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u^e \\ v^e \\ w^e \\ \varphi^e \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{u}}^e(\zeta) \\ (4 \times 1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & A_3 & 0 & 0 & 0 & A_4 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & -A_2 & 0 & 0 & 0 & A_3 & 0 & -A_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_6 \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{A}}(\zeta) \\ (4 \times 12)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ w_i^e \\ \varphi_{\xi i}^e \\ \varphi_{\eta i}^e \\ \varphi_{\zeta i}^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ w_j^e \\ \varphi_{\xi j}^e \\ \varphi_{\eta j}^e \\ \varphi_{\zeta j}^e \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{q}}^e \\ (12 \times 1)}}$$

Tömörebben:

$$\underline{\underline{u}}^e(\zeta) = \underline{\underline{A}}(\zeta) \underline{\underline{q}}^e$$

### 5.2.9. Egy végeelem alakváltozási energiája

$$\begin{aligned} U^e &= \frac{1}{2} \int_{(V^e)} (\underbrace{\sigma_{\xi\xi}\varepsilon_{\xi\xi}}_0 + \underbrace{\sigma_{\eta\eta}\varepsilon_{\eta\eta}}_0 + \sigma_{\zeta\zeta}\varepsilon_{\zeta\zeta} + \underbrace{\tau_{\xi\eta}\gamma_{\xi\eta}}_0 + \tau_{\eta\zeta}\gamma_{\eta\zeta} + \tau_{\zeta\xi}\gamma_{\zeta\xi}) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_{(V^e)} ((\sigma_{\zeta}^N + \sigma_{\zeta}^{H1} + \sigma_{\zeta}^{H2}) (\varepsilon_{\zeta}^N + \varepsilon_{\zeta}^{H1} + \varepsilon_{\zeta}^{H2}) + \tau_{\eta\zeta}\gamma_{\eta\zeta} + \tau_{\zeta\xi}\gamma_{\zeta\xi}) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_{(V^e)} \left( \left( \frac{N}{A} + \frac{M_{h\eta}\xi}{I_{\eta}} + \frac{M_{h\xi}\eta}{I_{\xi}} \right) (\varepsilon_{\zeta}^N + \kappa_{\eta}\xi + \kappa_{\xi}\eta) + \left( \frac{M_c}{I_c} \xi \right) \vartheta + \left( -\frac{M_c}{I_c} \eta \right) (-\vartheta) \right) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_{(l^e)} \int_{(A^e)} \left( E (\varepsilon_{\zeta}^N)^2 + E (\kappa_{\eta})^2 \xi^2 + E (\kappa_{\xi})^2 \eta^2 + G \vartheta^2 (\xi^2 + \eta^2) \right) dAd\zeta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{(l^e)} \left( EA (\varepsilon_{\zeta}^N)^2 + EI_{\eta} (\kappa_{\eta})^2 + EI_{\xi} (\kappa_{\xi})^2 + G \underbrace{I_p}_{\approx I_c} \vartheta^2 \right) d\zeta = \quad (23) \\ &= \frac{1}{2} \int_{(l^e)} (N \varepsilon_{\zeta}^N + M_{h\eta} \kappa_{\eta} + M_{h\xi} \kappa_{\xi} + M_c \vartheta) d\zeta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{(l^e)} \underbrace{\begin{bmatrix} M_{h\eta} & M_{h\xi} & N & M_c \end{bmatrix}}_{\substack{(\underline{\underline{\sigma}}^e)^T \\ (4 \times 1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \kappa_{\eta} \\ \kappa_{\xi} \\ \varepsilon_{\zeta}^N \\ \vartheta \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{\varepsilon}}^e \\ (4 \times 1)}} d\zeta = \frac{1}{2} \int_{(l^e)} (\underline{\underline{\sigma}}^e)^T \underline{\underline{\varepsilon}}^e d\zeta \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy

$$\int_{(A)} \xi dA = 0 \quad \int_{(A)} \eta dA = 0 \quad \int_{(A)} \xi \eta dA = 0$$

és

$$\int_{(A)} \xi^2 dA = I_\eta \quad \int_{(A)} \eta^2 dA = I_\xi \quad \int_{(A)} (\xi^2 + \eta^2) dA = I_p$$

továbbá bevezettük a következő jelöléseket

$$\underline{\underline{\sigma}}^e = \begin{bmatrix} M_{h\eta} \\ M_{h\xi} \\ N \\ M_c \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^e = \begin{bmatrix} \kappa_\eta \\ \kappa_\xi \\ \varepsilon_\zeta^N \\ \vartheta \end{bmatrix}$$

(4×1)  (4×1)

A (23) összefüggésnek megfelelően megfogalmazhatunk egy anyagtörvényt is:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{h\eta} \\ M_{h\xi} \\ N \\ M_c \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{\sigma}}^e \\ (4 \times 1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} EI_\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_c \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{C}}^e \\ (4 \times 4)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \kappa_\eta \\ \kappa_\xi \\ \varepsilon_\zeta^N \\ \vartheta \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{\varepsilon}}^e \\ (4 \times 1)}}$$

vagyis

$$\underline{\underline{\sigma}}^e = \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{\varepsilon}}^e$$

A (20)-(21) kinematikai egyenleteknek megfelelően az  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  kifejezhető az elmozdulás koordinátákkal is.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \kappa_\eta \\ \kappa_\xi \\ \varepsilon_\zeta^N \\ \vartheta \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{\varepsilon}}^e \\ (4 \times 1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{d^2}{d\zeta^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{d\zeta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{d\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{d\zeta} \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{\partial}} \\ (4 \times 4)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u^e \\ v^e \\ w^e \\ \varphi^e \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{u}}^e \\ (4 \times 1)}}$$

Az új jelölésekkel az alakváltozási energia tömörebben írható

$$\begin{aligned} U^e &= \frac{1}{2} \int_{(l)} (\underline{\underline{\sigma}}^e)^T \underline{\underline{\varepsilon}}^e d\zeta = \frac{1}{2} \int_{(l)} \underbrace{(\underline{\underline{\varepsilon}}^e)^T}_{(\underline{\underline{\sigma}}^e)^T} \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{\varepsilon}}^e d\zeta = \frac{1}{2} \int_{(l)} (\underline{\underline{\partial}} \underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{\partial}} \underline{\underline{u}}^e d\zeta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{(l)} \underbrace{(\underline{\underline{\partial}} \underline{\underline{A}}^e \underline{\underline{q}}^e)^T}_{\underline{\underline{B}}^e} \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{\partial}} \underline{\underline{A}}^e \underline{\underline{q}}^e d\zeta = \frac{1}{2} \int_{(l)} (\underline{\underline{q}}^e)^T \underbrace{(\underline{\underline{B}}^e)^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e}_{\underline{\underline{K}}^e} \underline{\underline{q}}^e d\zeta = \\ &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{q}}^e)^T \underbrace{\int_{(l)} (\underline{\underline{B}}^e)^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e d\zeta}_{\underline{\underline{K}}^e} \underline{\underline{q}}^e = \frac{1}{2} (\underline{\underline{q}}^e)^T \underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{q}}^e \end{aligned}$$

ahol

$$\underline{\underline{\partial^e A}}(\zeta) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{d^2}{d\zeta^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{d\zeta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{d\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{d\zeta} \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{\partial^e}} \\ (4 \times 4)}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & A_3 & 0 & 0 & 0 & A_4 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & -A_2 & 0 & 0 & 0 & A_3 & 0 & -A_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_6 \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{A}}(\zeta) \\ (4 \times 12)}} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{d^2 A_1}{d\zeta^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{d^2 A_2}{d\zeta^2} & 0 & -\frac{d^2 A_3}{d\zeta^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{d^2 A_4}{d\zeta^2} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2 A_1}{d\zeta^2} & 0 & \frac{d^2 A_2}{d\zeta^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{d^2 A_3}{d\zeta^2} & 0 & \frac{d^2 A_4}{d\zeta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dA_5}{d\zeta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dA_6}{d\zeta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dA_5}{d\zeta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dA_6}{d\zeta} \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{B}}(\zeta) \\ (4 \times 12)}} = \underline{\underline{B}}(\zeta)$$

és

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{(l)} (\underline{\underline{B}}^e)^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e d\zeta$$

a merevségi mátrix.

**15. feladat.** Az  $A_i(\zeta)$  alakfüggvények ismeretében számítsa ki a merevségi mátrix elemeit.

Megoldás: A számítást az ingyen elérhető wxMaxima nevű számítógépes program segítségével végezzük el.

```
A1:1-3*x^2/L^2+2*x^3/L^3;
A2:x-2*x^2/L+x^3/L^2;
A3:3*x^2/L^2-2*x^3/L^3;
A4:-x^2/L+x^3/L^2;
A5:1-x/L;
A6:x/L;
B: matrix( [-diff(A1,x,2),0,0,0,-diff(A2,x,2),0,-diff(A3,x,2),0,0,0,diff(A4,x,2),0],
[0,-diff(A1,x,2),0,diff(A2,x,2),0,0,0,-diff(A3,x,2),0,diff(A4,x,2),0,0], [0,0,diff(A5,x),0,0,0,0,0,diff(A6,x),0,0,0],
[0,0,0,0,diff(A5,x),0,0,0,0,0,diff(A6,x)] );
C: matrix( [E*leta,0,0,0], [0,E*Ixi,0,0], [0,0,E*A,0], [0,0,0,G*Ic] );
BCB:transpose(B).C.B;
K1:ratsimp(integrate(BCB, x));
subst(L, x, K1);
```

A végeredmény:

$$\underline{\underline{K}}^e = \begin{bmatrix} \frac{12I_\eta E}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_\eta E}{L^2} & 0 & -\frac{12I_\eta E}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6I_\eta E}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{12I_\xi E}{L^3} & 0 & -\frac{6I_\xi E}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12I_\xi E}{L^3} & 0 & -\frac{6I_\xi E}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6I_\xi E}{L^2} & 0 & \frac{4I_\xi E}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_\xi E}{L^2} & 0 & \frac{2I_\xi E}{L} & 0 & 0 \\ \frac{6I_\eta E}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4I_\eta E}{L} & 0 & -\frac{6I_\eta E}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2I_\eta E}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_c G}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_c G}{L} \\ -\frac{12I_\eta E}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6I_\eta E}{L^2} & 0 & \frac{12I_\eta E}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_\eta E}{L^2} & 0 \\ 0 & -\frac{12I_\xi E}{L^3} & 0 & \frac{6I_\xi E}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12I_\xi E}{L^3} & 0 & \frac{6I_\xi E}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6I_\xi E}{L^2} & 0 & \frac{2I_\xi E}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_\xi E}{L^2} & 0 & \frac{4I_\xi E}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{6I_\eta E}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2I_\eta E}{L} & 0 & \frac{6I_\eta E}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4I_\eta E}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_c G}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_c G}{L} \end{bmatrix}$$

(12×12)



A merevségi mátrixot osszuk négy részre olymódon, hogy az egyes részek egy-egy csomóponti elmozdulásoknak és szögelfordulásoknak feleljenek meg.

$$\underline{\underline{K}}^e = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{ii}^e & \underline{\underline{K}}_{ij}^e \\ \underline{\underline{K}}_{ji}^e & \underline{\underline{K}}_{jj}^e \end{bmatrix}$$

ahol

$$\underline{\underline{K}}_{ii}^e = \underline{\underline{K}}_{jj}^e = \begin{bmatrix} \frac{12I_\eta E}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_\eta E}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{12I_\xi E}{L^3} & 0 & -\frac{6I_\xi E}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6I_\xi E}{L^2} & 0 & \frac{4I_\xi E}{L} & 0 & 0 \\ \frac{6I_\eta E}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4I_\eta E}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_c G}{L} \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{\underline{K}}_{ij}^e = \underline{\underline{K}}_{ji}^e = \begin{bmatrix} -\frac{12I_\eta E}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6I_\eta E}{L^2} & 0 \\ 0 & -\frac{12I_\xi E}{L^3} & 0 & \frac{6I_\xi E}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6I_\xi E}{L^2} & 0 & \frac{2I_\xi E}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{6I_\eta E}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2I_\eta E}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_c G}{L} \end{bmatrix}$$

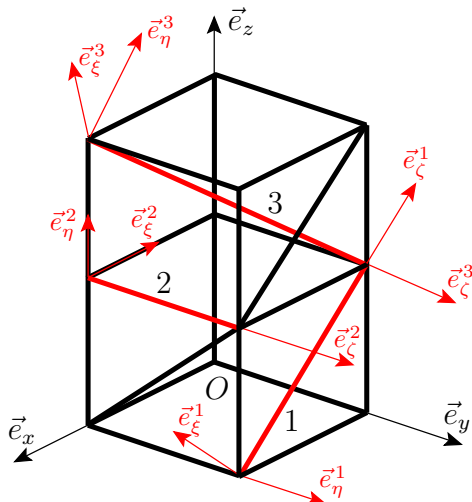
### 5.2.10. Külső erők munkája egy végeelemen

A külső erőket és nyomatékokat két csoportra tudjuk bontani. Az első csoportba tartoznak a rúd hossza mentén megoszló erők és nyomatékok. A második csoportba tartozó koncentrált erőket és nyomatékokat külön tárgyaljuk, mert azokat nem elemszinten, hanem a teljes szerkezet vizsgálatakor kell majd figyelembe venni.

A külső erők munkájának számításakor problémát jelenthet az, hogy a terheléseket általában a globális  $xyz$  koordinátarendszerben ismerjük, míg a végelemek csomópontjainak elmozdulását és szögelfordulását az elemhez kötött koordinátarendszerben írjuk fel. Koordináta transzformáció segítségével át lehetne számolni a terheléseket a helyi  $\xi\eta\zeta$  koordinátarendszerbe, de célszerűbb inkább az elmozdulásokat és szögelfordulásokat áttranszformálni a globális  $xyz$  koordinátarendszerbe.

**Koordináta transzformáció** A transzformációt egy adott  $e$  sorszámú végelelemre a  $\underline{\underline{T}}^e$  tenzor valósítja meg. Határozzuk meg ezt a tenzort. A rúd végelelem térbeli irányát az  $\vec{e}_\zeta$  vektor, míg a keresztmetszet főtengelelinek irányát az  $\vec{e}_\xi$  és  $\vec{e}_\eta$  vektorok adják meg. Ezek a vektorok a szerkezet geometriájának ismeretében meghatározhatók.

**16. feladat.** Írja fel az 19. ábrán megjelölt 1-es, 2-es és 3-as számú rúdelemekhez kötött  $\xi\eta\zeta$  koordinátarendszerek egységvektorait az  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  és  $\vec{e}_z$  egységvektorok segítségével, ha  $\vec{e}_\eta^1$  és  $\vec{e}_y$  párhuzamosak, illetve  $\vec{e}_\xi^3$  párhuzamos az  $xy$  síkkal. Az  $x$ ,  $y$  és  $z$  tengelyekkel párhuzamos rúdelemek hossza legyen egységnyi.



19. ábra. Térbeli rácsos tartók

Megoldás:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\xi^1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_z, & \vec{e}_\eta^1 &= \vec{e}_y, & \vec{e}_\zeta^1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_z, \\ \vec{e}_\xi^2 &= -\vec{e}_x, & \vec{e}_\eta^2 &= \vec{e}_z, & \vec{e}_\zeta^2 &= \vec{e}_y, \\ \vec{e}_\xi^3 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y, & \vec{e}_\eta^3 &= -\frac{\sqrt{6}}{6}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{e}_y + \frac{\sqrt{6}}{3}\vec{e}_z, & \vec{e}_\zeta^3 &= -\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e}_y - \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e}_z. \end{aligned}$$



Tudjuk, hogy ha egy  $\vec{a}$  vektor az  $xyz$  koordinátarendszerben az

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$$

alakban írható, akkor az  $x$ ,  $y$  és  $z$  irányú vetületei az

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{e}_x \quad a_y = \vec{a} \cdot \vec{e}_y \quad a_z = \vec{a} \cdot \vec{e}_z$$

összefüggéssel számíthatóak. Írjuk vissza a vetületeket az  $\vec{a}$  vektorba

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z = (\vec{a} \cdot \vec{e}_x)\vec{e}_x + (\vec{a} \cdot \vec{e}_y)\vec{e}_y + (\vec{a} \cdot \vec{e}_z)\vec{e}_z$$

Ennek mintájára az  $\vec{e}_\xi^e$ ,  $\vec{e}_\eta^e$  és  $\vec{e}_\zeta^e$  vektorokat fel lehet írni az alábbiak szerint is

$$\vec{e}_\xi^e = (\vec{e}_\xi^e \cdot \vec{e}_x)\vec{e}_x + (\vec{e}_\xi^e \cdot \vec{e}_y)\vec{e}_y + (\vec{e}_\xi^e \cdot \vec{e}_z)\vec{e}_z = \cos(\alpha_{\xi x}^e)\vec{e}_x + \cos(\alpha_{\xi y}^e)\vec{e}_y + \cos(\alpha_{\xi z}^e)\vec{e}_z \quad (24)$$

$$\vec{e}_\eta^e = (\vec{e}_\eta^e \cdot \vec{e}_x) \vec{e}_x + (\vec{e}_\eta^e \cdot \vec{e}_y) \vec{e}_y + (\vec{e}_\eta^e \cdot \vec{e}_z) \vec{e}_z = \cos(\alpha_{\eta x}^e) \vec{e}_x + \cos(\alpha_{\eta y}^e) \vec{e}_y + \cos(\alpha_{\eta z}^e) \vec{e}_z \quad (25)$$

$$\vec{e}_\zeta^e = (\vec{e}_\zeta^e \cdot \vec{e}_x) \vec{e}_x + (\vec{e}_\zeta^e \cdot \vec{e}_y) \vec{e}_y + (\vec{e}_\zeta^e \cdot \vec{e}_z) \vec{e}_z = \cos(\alpha_{\zeta x}^e) \vec{e}_x + \cos(\alpha_{\zeta y}^e) \vec{e}_y + \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \vec{e}_z \quad (26)$$

ahol például az  $\alpha_{\eta x}^e$  szög az  $e$ -edik végeelem  $\eta$  tengelyének a globális  $xyz$  koordinátarendszer  $x$  tengelyével bezárt szögét jelenti.

Helyettesítsük be a transzformációt leíró (24)-(26) összefüggéseket a (15) elmozdulás és (16) szögelfordulás vektorokba.

$$\begin{aligned} \vec{u}_S^e(\zeta) &= u_S^e(\zeta) \vec{e}_\xi^e + v_S^e(\zeta) \vec{e}_\eta^e + w_S^e(\zeta) \vec{e}_\zeta^e = u_S^e(\zeta) (\cos(\alpha_{\xi x}^e) \vec{e}_x + \cos(\alpha_{\xi y}^e) \vec{e}_y + \cos(\alpha_{\xi z}^e) \vec{e}_z) + \\ &+ v_S^e(\zeta) (\cos(\alpha_{\eta x}^e) \vec{e}_x + \cos(\alpha_{\eta y}^e) \vec{e}_y + \cos(\alpha_{\eta z}^e) \vec{e}_z) + w_S^e(\zeta) (\cos(\alpha_{\zeta x}^e) \vec{e}_x + \cos(\alpha_{\zeta y}^e) \vec{e}_y + \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \vec{e}_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}^e(\zeta) &= \varphi_\xi^e(\zeta) \vec{e}_\xi^e + \varphi_\eta^e(\zeta) \vec{e}_\eta^e + \varphi_\zeta^e(\zeta) \vec{e}_\zeta^e = \varphi_\xi^e(\zeta) (\cos(\alpha_{\xi x}^e) \vec{e}_x + \cos(\alpha_{\xi y}^e) \vec{e}_y + \cos(\alpha_{\xi z}^e) \vec{e}_z) + \\ &+ \varphi_\eta^e(\zeta) (\cos(\alpha_{\eta x}^e) \vec{e}_x + \cos(\alpha_{\eta y}^e) \vec{e}_y + \cos(\alpha_{\eta z}^e) \vec{e}_z) + \varphi_\zeta^e(\zeta) (\cos(\alpha_{\zeta x}^e) \vec{e}_x + \cos(\alpha_{\zeta y}^e) \vec{e}_y + \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \vec{e}_z) \end{aligned}$$

Átrendezés után kapjuk hogy

$$\begin{aligned} \vec{u}_S^e(\zeta) &= \underbrace{(u_S^e(\zeta) \cos(\alpha_{\xi x}^e) + v_S^e(\zeta) \cos(\alpha_{\eta x}^e) + w_S^e(\zeta) \cos(\alpha_{\zeta x}^e))}_{U_S^e(\zeta)} \vec{e}_x + \\ &+ \underbrace{(u_S^e(\zeta) \cos(\alpha_{\xi y}^e) + v_S^e(\zeta) \cos(\alpha_{\eta y}^e) + w_S^e(\zeta) \cos(\alpha_{\zeta y}^e))}_{V_S^e(\zeta)} \vec{e}_y + \\ &+ \underbrace{(u_S^e(\zeta) \cos(\alpha_{\xi z}^e) + v_S^e(\zeta) \cos(\alpha_{\eta z}^e) + w_S^e(\zeta) \cos(\alpha_{\zeta z}^e))}_{W_S^e(\zeta)} \vec{e}_z = \\ &= U_S^e(\zeta) \vec{e}_x + V_S^e(\zeta) \vec{e}_y + W_S^e(\zeta) \vec{e}_z = \\ &= (u_S^e(\zeta) \cos(\alpha_{\xi x}^e) \vec{e}_\xi^e \cdot \vec{e}_\xi^e + v_S^e(\zeta) \cos(\alpha_{\eta x}^e) \vec{e}_\eta^e \cdot \vec{e}_\eta^e + w_S^e(\zeta) \cos(\alpha_{\zeta x}^e) \vec{e}_\zeta^e \cdot \vec{e}_\zeta^e) \vec{e}_x + \\ &+ (u_S^e(\zeta) \cos(\alpha_{\xi y}^e) \vec{e}_\xi^e \cdot \vec{e}_\xi^e + v_S^e(\zeta) \cos(\alpha_{\eta y}^e) \vec{e}_\eta^e \cdot \vec{e}_\eta^e + w_S^e(\zeta) \cos(\alpha_{\zeta y}^e) \vec{e}_\zeta^e \cdot \vec{e}_\zeta^e) \vec{e}_y + \\ &+ (u_S^e(\zeta) \cos(\alpha_{\xi z}^e) \vec{e}_\xi^e \cdot \vec{e}_\xi^e + v_S^e(\zeta) \cos(\alpha_{\eta z}^e) \vec{e}_\eta^e \cdot \vec{e}_\eta^e + w_S^e(\zeta) \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \vec{e}_\zeta^e \cdot \vec{e}_\zeta^e) \vec{e}_z = \\ &= (\cos(\alpha_{\xi x}^e) \vec{e}_x \circ \vec{e}_\xi^e + \cos(\alpha_{\eta x}^e) \vec{e}_x \circ \vec{e}_\eta^e + \cos(\alpha_{\zeta x}^e) \vec{e}_x \circ \vec{e}_\zeta^e + \\ &+ \cos(\alpha_{\xi y}^e) \vec{e}_y \circ \vec{e}_\xi^e + \cos(\alpha_{\eta y}^e) \vec{e}_y \circ \vec{e}_\eta^e + \cos(\alpha_{\zeta y}^e) \vec{e}_y \circ \vec{e}_\zeta^e + \\ &+ \cos(\alpha_{\xi z}^e) \vec{e}_z \circ \vec{e}_\xi^e + \cos(\alpha_{\eta z}^e) \vec{e}_z \circ \vec{e}_\eta^e + \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \vec{e}_z \circ \vec{e}_\zeta^e) \cdot (u_S^e(\zeta) \vec{e}_\xi^e + v_S^e(\zeta) \vec{e}_\eta^e + w_S^e(\zeta) \vec{e}_\zeta^e) = \\ &= \underline{\underline{\vec{T}}}^e \cdot \vec{u}_S^e(\zeta) \end{aligned} \quad (27)$$

A szögelfordulásokra hasonlóan az kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}^e(\zeta) &= \underbrace{(\varphi_\xi^e(\zeta) \cos(\alpha_{\xi x}^e) + \varphi_\eta^e(\zeta) \cos(\alpha_{\eta x}^e) + \varphi_\zeta^e(\zeta) \cos(\alpha_{\zeta x}^e))}_{\Phi_x^e(\zeta)} \vec{e}_x + \\ &+ \underbrace{(\varphi_\xi^e(\zeta) \cos(\alpha_{\xi y}^e) + \varphi_\eta^e(\zeta) \cos(\alpha_{\eta y}^e) + \varphi_\zeta^e(\zeta) \cos(\alpha_{\zeta y}^e))}_{\Phi_y^e(\zeta)} \vec{e}_y + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{\left( \varphi_\xi^e(\zeta) \cos(\alpha_{\xi z}^e) + \varphi_\eta^e(\zeta) \cos(\alpha_{\eta z}^e) + \varphi_\zeta^e(\zeta) \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \right)}_{\Phi_z^e(\zeta)} \vec{e}_z = \\
& = \Phi_x^e(\zeta) \vec{e}_x + \Phi_y^e(\zeta) \vec{e}_y + \Phi_z^e(\zeta) \vec{e}_z = \\
& = \left( \varphi_\xi^e(\zeta) \cos(\alpha_{\xi x}^e) \vec{e}_\xi^e \cdot \vec{e}_\xi^e + \varphi_\eta^e(\zeta) \cos(\alpha_{\eta x}^e) \vec{e}_\eta^e \cdot \vec{e}_\eta^e + \varphi_\zeta^e(\zeta) \cos(\alpha_{\zeta x}^e) \vec{e}_\zeta^e \cdot \vec{e}_\zeta^e \right) \vec{e}_x + \\
& + \left( \varphi_\xi^e(\zeta) \cos(\alpha_{\xi y}^e) \vec{e}_\xi^e \cdot \vec{e}_\xi^e + \varphi_\eta^e(\zeta) \cos(\alpha_{\eta y}^e) \vec{e}_\eta^e \cdot \vec{e}_\eta^e + \varphi_\zeta^e(\zeta) \cos(\alpha_{\zeta y}^e) \vec{e}_\zeta^e \cdot \vec{e}_\zeta^e \right) \vec{e}_y + \\
& + \left( \varphi_\xi^e(\zeta) \cos(\alpha_{\xi z}^e) \vec{e}_\xi^e \cdot \vec{e}_\xi^e + \varphi_\eta^e(\zeta) \cos(\alpha_{\eta z}^e) \vec{e}_\eta^e \cdot \vec{e}_\eta^e + \varphi_\zeta^e(\zeta) \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \vec{e}_\zeta^e \cdot \vec{e}_\zeta^e \right) \vec{e}_z = \\
& = \left( \cos(\alpha_{\xi x}^e) \vec{e}_x \circ \vec{e}_\xi^e + \cos(\alpha_{\eta x}^e) \vec{e}_x \circ \vec{e}_\eta^e + \cos(\alpha_{\zeta x}^e) \vec{e}_x \circ \vec{e}_\zeta^e + \right. \\
& \quad \left. + \cos(\alpha_{\xi y}^e) \vec{e}_y \circ \vec{e}_\xi^e + \cos(\alpha_{\eta y}^e) \vec{e}_y \circ \vec{e}_\eta^e + \cos(\alpha_{\zeta y}^e) \vec{e}_y \circ \vec{e}_\zeta^e + \right. \\
& \quad \left. + \cos(\alpha_{\xi z}^e) \vec{e}_z \circ \vec{e}_\xi^e + \cos(\alpha_{\eta z}^e) \vec{e}_z \circ \vec{e}_\eta^e + \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \vec{e}_z \circ \vec{e}_\zeta^e \right) \cdot \left( \varphi_\xi^e(\zeta) \vec{e}_\xi^e + \varphi_\eta^e(\zeta) \vec{e}_\eta^e + \varphi_\zeta^e(\zeta) \vec{e}_\zeta^e \right) = \\
& = \underline{\underline{\tilde{T}}^e} \cdot \vec{\varphi}^e(\zeta) \tag{28}
\end{aligned}$$

Vagyis összefoglalva azt állapíthatjuk meg, hogy a  $\underline{\underline{\tilde{T}}^e}$  tenzor a  $\xi\eta\zeta$  és  $xyz$  koordinátarendszerek közötti transzformációt valósítja meg. A  $\underline{\underline{\tilde{T}}^e}$  tenzor különlegessége abban áll, hogy bázisa, a  $\vec{e}_i \circ \vec{e}_k^e$  ( $i = x, y, z$  és  $k = \xi, \eta, \zeta$ ), tartalmazza a  $\xi\eta\zeta$  és  $xyz$  bázisvektorait is. Az ilyen tenzorokat *kétpont tenzoroknak* nevezzük. A  $\underline{\underline{\tilde{T}}^e}$  tenzor mátrixa ebben a bázisban a következő lesz

$$\underline{\underline{\tilde{T}}^e} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{\xi x}^e) & \cos(\alpha_{\eta x}^e) & \cos(\alpha_{\zeta x}^e) \\ \cos(\alpha_{\xi y}^e) & \cos(\alpha_{\eta y}^e) & \cos(\alpha_{\zeta y}^e) \\ \cos(\alpha_{\xi z}^e) & \cos(\alpha_{\eta z}^e) & \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\vec{e}_\xi^e \cdot \vec{e}_x) & (\vec{e}_\eta^e \cdot \vec{e}_x) & (\vec{e}_\zeta^e \cdot \vec{e}_x) \\ (\vec{e}_\xi^e \cdot \vec{e}_y) & (\vec{e}_\eta^e \cdot \vec{e}_y) & (\vec{e}_\zeta^e \cdot \vec{e}_y) \\ (\vec{e}_\xi^e \cdot \vec{e}_z) & (\vec{e}_\eta^e \cdot \vec{e}_z) & (\vec{e}_\zeta^e \cdot \vec{e}_z) \end{bmatrix} \tag{29}$$

A (27) és (28) egyenletek, vagyis az

$$\vec{u}_S^e(\zeta) = \underline{\underline{\tilde{T}}^e} \cdot \vec{u}_S^e(\zeta) \tag{30}$$

illetve

$$\vec{\varphi}^e(\zeta) = \underline{\underline{\tilde{T}}^e} \cdot \vec{\varphi}^e(\zeta) \tag{31}$$

jobb és bal oldalát összehasonlítva az adódna, hogy a  $\underline{\underline{\tilde{T}}^e}$  egységtenzor. Ha azonban a jobb és bal oldal nem ugyan abban a bázisban van felírva, akkor  $\underline{\underline{\tilde{T}}^e}$  a (35) alakú lesz. Ezek alapján a (27) és (28) mátrixokkal így írható

$$\begin{bmatrix} U_S^e(\zeta) \\ V_S^e(\zeta) \\ W_S^e(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{\xi x}^e) & \cos(\alpha_{\eta x}^e) & \cos(\alpha_{\zeta x}^e) \\ \cos(\alpha_{\xi y}^e) & \cos(\alpha_{\eta y}^e) & \cos(\alpha_{\zeta y}^e) \\ \cos(\alpha_{\xi z}^e) & \cos(\alpha_{\eta z}^e) & \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_S^e(\zeta) \\ v_S^e(\zeta) \\ w_S^e(\zeta) \end{bmatrix} \tag{32}$$

illetve

$$\begin{bmatrix} \Phi_x^e(\zeta) \\ \Phi_y^e(\zeta) \\ \Phi_z^e(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{\xi x}^e) & \cos(\alpha_{\eta x}^e) & \cos(\alpha_{\zeta x}^e) \\ \cos(\alpha_{\xi y}^e) & \cos(\alpha_{\eta y}^e) & \cos(\alpha_{\zeta y}^e) \\ \cos(\alpha_{\xi z}^e) & \cos(\alpha_{\eta z}^e) & \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_\xi^e(\zeta) \\ \varphi_\eta^e(\zeta) \\ \varphi_\zeta^e(\zeta) \end{bmatrix} \tag{33}$$

Nekünk viszont a feni két összefüggés inverzére van szükségünk. Az előzőekkel analóg módon belátható, hogy a  $\underline{\underline{\tilde{T}}^e}$  inverze

$$\left( \underline{\underline{\tilde{T}}^e} \right)^{-1} = \cos(\alpha_{\xi x}^e) \vec{e}_\xi^e \circ \vec{e}_x + \cos(\alpha_{\xi y}^e) \vec{e}_\xi^e \circ \vec{e}_y + \cos(\alpha_{\xi z}^e) \vec{e}_\xi^e \circ \vec{e}_z +$$



$$\begin{aligned}
& + \cos(\alpha_{\eta x}^e) \vec{e}_\eta^e \circ \vec{e}_x + \cos(\alpha_{\eta y}^e) \vec{e}_\eta^e \circ \vec{e}_y + \cos(\alpha_{\eta z}^e) \vec{e}_\eta^e \circ \vec{e}_z + \\
& + \cos(\alpha_{\zeta x}^e) \vec{e}_\zeta^e \circ \vec{e}_x + \cos(\alpha_{\zeta y}^e) \vec{e}_\zeta^e \circ \vec{e}_y + \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \vec{e}_\zeta^e \circ \vec{e}_z = \left( \underline{\underline{\tilde{T}}}^e \right)^T
\end{aligned} \tag{34}$$

vagy mátrixos alakban

$$\left[ \left( \underline{\underline{\tilde{T}}}^e \right)^{-1} \right] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{\xi x}^e) & \cos(\alpha_{\xi y}^e) & \cos(\alpha_{\xi z}^e) \\ \cos(\alpha_{\eta x}^e) & \cos(\alpha_{\eta y}^e) & \cos(\alpha_{\eta z}^e) \\ \cos(\alpha_{\zeta x}^e) & \cos(\alpha_{\zeta y}^e) & \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\vec{e}_\xi^e \cdot \vec{e}_x) & (\vec{e}_\xi^e \cdot \vec{e}_y) & (\vec{e}_\xi^e \cdot \vec{e}_z) \\ (\vec{e}_\eta^e \cdot \vec{e}_x) & (\vec{e}_\eta^e \cdot \vec{e}_y) & (\vec{e}_\eta^e \cdot \vec{e}_z) \\ (\vec{e}_\zeta^e \cdot \vec{e}_x) & (\vec{e}_\zeta^e \cdot \vec{e}_y) & (\vec{e}_\zeta^e \cdot \vec{e}_z) \end{bmatrix} = \left[ \left( \underline{\underline{\tilde{T}}}^e \right)^T \right] \tag{35}$$

A  $\underline{\underline{\tilde{T}}}^e$  inverzének segítségével az elmozdulás és szögelfordulás végeelemhez kötött lokális koordinátái kifejezhetők

$$\begin{bmatrix} u_S^e(\zeta) \\ v_S^e(\zeta) \\ w_S^e(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{\xi x}^e) & \cos(\alpha_{\xi y}^e) & \cos(\alpha_{\xi z}^e) \\ \cos(\alpha_{\eta x}^e) & \cos(\alpha_{\eta y}^e) & \cos(\alpha_{\eta z}^e) \\ \cos(\alpha_{\zeta x}^e) & \cos(\alpha_{\zeta y}^e) & \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_S^e(\zeta) \\ V_S^e(\zeta) \\ W_S^e(\zeta) \end{bmatrix} \tag{36}$$

és

$$\begin{bmatrix} \varphi_\xi^e(\zeta) \\ \varphi_\eta^e(\zeta) \\ \varphi_\zeta^e(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{\xi x}^e) & \cos(\alpha_{\xi y}^e) & \cos(\alpha_{\xi z}^e) \\ \cos(\alpha_{\eta x}^e) & \cos(\alpha_{\eta y}^e) & \cos(\alpha_{\eta z}^e) \\ \cos(\alpha_{\zeta x}^e) & \cos(\alpha_{\zeta y}^e) & \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_x^e(\zeta) \\ \Phi_y^e(\zeta) \\ \Phi_z^e(\zeta) \end{bmatrix} \tag{37}$$

**17. feladat.** Számítsa ki a  $\underline{\underline{\tilde{T}}}^e \cdot \left( \underline{\underline{\tilde{T}}}^e \right)^T$  szorzatot.



**18. feladat.** Számítsa ki a 19. ábrán látható rúdszerkezet 1-es, 2-es és 3-as számokkal jelölt rúdjaihoz tartozó transzformációs mátrixot.



Egy rúd végeelem  $i$  és  $j$  csomópontjaihoz tartozó elmozdulás és szögelfordulás értékeket úgy kapjuk meg, hogy a  $\zeta$  koordináta helyére nullát vagy  $L$ -et írunk.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} u_S^e(\zeta=0) \\ v_S^e(\zeta=0) \\ w_S^e(\zeta=0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ w_i^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{\xi x}^e) & \cos(\alpha_{\xi y}^e) & \cos(\alpha_{\xi z}^e) \\ \cos(\alpha_{\eta x}^e) & \cos(\alpha_{\eta y}^e) & \cos(\alpha_{\eta z}^e) \\ \cos(\alpha_{\zeta x}^e) & \cos(\alpha_{\zeta y}^e) & \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i^e \\ V_i^e \\ W_i^e \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \varphi_\xi^e(\zeta=0) \\ \varphi_\eta^e(\zeta=0) \\ \varphi_\zeta^e(\zeta=0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varphi_{\xi i}^e \\ \varphi_{\eta i}^e \\ \varphi_{\zeta i}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{\xi x}^e) & \cos(\alpha_{\xi y}^e) & \cos(\alpha_{\xi z}^e) \\ \cos(\alpha_{\eta x}^e) & \cos(\alpha_{\eta y}^e) & \cos(\alpha_{\eta z}^e) \\ \cos(\alpha_{\zeta x}^e) & \cos(\alpha_{\zeta y}^e) & \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{xi}^e \\ \Phi_{yi}^e \\ \Phi_{zi}^e \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} u_S^e(\zeta=L) \\ v_S^e(\zeta=L) \\ w_S^e(\zeta=L) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_j^e \\ v_j^e \\ w_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{\xi x}^e) & \cos(\alpha_{\xi y}^e) & \cos(\alpha_{\xi z}^e) \\ \cos(\alpha_{\eta x}^e) & \cos(\alpha_{\eta y}^e) & \cos(\alpha_{\eta z}^e) \\ \cos(\alpha_{\zeta x}^e) & \cos(\alpha_{\zeta y}^e) & \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j^e \\ V_j^e \\ W_j^e \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \varphi_\xi^e(\zeta=L) \\ \varphi_\eta^e(\zeta=L) \\ \varphi_\zeta^e(\zeta=L) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varphi_{\xi j}^e \\ \varphi_{\eta j}^e \\ \varphi_{\zeta j}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{\xi x}^e) & \cos(\alpha_{\xi y}^e) & \cos(\alpha_{\xi z}^e) \\ \cos(\alpha_{\eta x}^e) & \cos(\alpha_{\eta y}^e) & \cos(\alpha_{\eta z}^e) \\ \cos(\alpha_{\zeta x}^e) & \cos(\alpha_{\zeta y}^e) & \cos(\alpha_{\zeta z}^e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{xj}^e \\ \Phi_{yj}^e \\ \Phi_{zj}^e \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Összefoglalva ezeket egy közös mátrix egyenletben

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ w_i^e \\ \varphi_{\xi i}^e \\ \varphi_{\eta i}^e \\ \varphi_{\zeta i}^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ w_j^e \\ \varphi_{\xi j}^e \\ \varphi_{\eta j}^e \\ \varphi_{\zeta j}^e \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{q}}^e \quad (12 \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \left[ \left( \underline{\underline{\tilde{T}}}^e \right)^{-1} \right] & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \left[ \left( \underline{\underline{\tilde{T}}}^e \right)^{-1} \right] & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \left[ \left( \underline{\underline{\tilde{T}}}^e \right)^{-1} \right] & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \left[ \left( \underline{\underline{\tilde{T}}}^e \right)^{-1} \right] \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{T}}^e \quad (12 \times 12)} \underbrace{\begin{bmatrix} U_i^e \\ V_i^e \\ W_i^e \\ \Phi_{xi}^e \\ \Phi_{yi}^e \\ \Phi_{zi}^e \\ U_j^e \\ V_j^e \\ W_j^e \\ \Phi_{xj}^e \\ \Phi_{yj}^e \\ \Phi_{zj}^e \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{Q}}^e \quad (12 \times 1)}$$

ahol  $\underline{\underline{q}}^e$  az  $e$ -edik végelemhez tartozó lokális csomóponti elmozdulásvektor,  $\underline{\underline{Q}}^e$  az  $e$ -edik végelemhez tartozó globális csomóponti elmozdulásvektor és  $\underline{\underline{T}}^e$  a kettő közötti kapcsolatot leíró transzformációs mátrix. Röviden így is írhatjuk

$$\underline{\underline{q}}^e = \underline{\underline{T}}^e \underline{\underline{Q}}^e \quad (38)$$

**A munka számítása az elemhez kötött (lokális) koordinátarendszerben** Tétélezzük fel, hogy a rudakon vonal mentén megoszló nyomaték nem hat. Így a külső erők munkája

$$W_k^e = \int_{(l^e)} \vec{u}_S(\zeta) \cdot \vec{f}_0(\zeta) d\zeta$$

ahol  $\vec{f}_0(\zeta)$  a vonal mentén megoszló terhelés intenzitása. Írjuk fel a vektorokat sor- és oszlopmátrixok segítségével. Célszerű az egyszer már bevezetett  $\underline{\underline{u}}^e$  oszlopvektort használni az elmozdulás számításánál. Ekkor megjelenik az ismeretlenek között egy szögelfordulás koordináta is, emiatt az erő koordinátákat tartalmazó oszlopvektorban is szerepeltetni kell egy plusz tagot, amit nullának választunk.

$$\vec{u}_S \Rightarrow \underline{\underline{u}} = \begin{bmatrix} u_S^e \\ v_S^e \\ w_S^e \\ \varphi_\zeta^e \end{bmatrix}$$

$$\vec{f}_0 \Rightarrow \underline{\underline{f}}_0 = \begin{bmatrix} f_{0\xi} \\ f_{0\eta} \\ f_{0\zeta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
W_{kf}^e &= \int_{(l^e)} [ u_S^e \quad v_S^e \quad w_S^e \quad \varphi_\zeta^e ] \begin{bmatrix} f_{0\xi} \\ f_{0\eta} \\ f_{0\zeta} \\ 0 \end{bmatrix} d\zeta = \int_{(l^e)} (\underline{u}^e)^T \underline{f}_{=0}(\zeta) d\zeta = \\
&= \int_{(l^e)} (\underline{A}^e(\zeta) \underline{q}^e)^T \underline{f}_{=0}(\zeta) d\zeta = \int_{(l^e)} (\underline{q}^e)^T (\underline{A}^e(\zeta))^T \underline{f}_{=0}(\zeta) d\zeta = \\
&= (\underline{q}^e)^T \underbrace{\int_{(l^e)} (\underline{A}^e(\zeta))^T \underline{f}_{=0}(\zeta) d\zeta}_{\underline{f}_{=f}^e} = (\underline{q}^e)^T \underline{f}_{=f}^e
\end{aligned}$$

ahol  $\underline{f}_{=f}^e$  a vonal mentén megoszló erőkiből származó tehervektor a lokális, elemhez kötött koordinátarendszerben felírva.

**19. feladat.** Határozzuk meg az  $\underline{f}_{=f}^e$  tehervektort, ha egy végelemen a megoszló terhelés intenzitása állandó.

Megoldás: A számítást a wxMaxima nevű számítógépes program segítségével végezzük el.

```

A1:1-3*x^2/L^2+2*x^3/L^3;
A2:x-2*x^2/L+x^3/L^2;
A3:3*x^2/L^2-2*x^3/L^3;
A4:-x^2/L+x^3/L^2;
A5:1-x/L;
A6:x/L;
A:matrix([A1,0,0,0,A2,0,A3,0,0,0,A4,0],[0,A1,0,-A2,0,0,0,A3,0,-A4,0,0],[0,0,A5,0,0,0,0,0,A6,0,0,0],
[0,0,0,0,0,A5,0,0,0,0,0,A6]);
f0:matrix([fxi],[feta],[fzeta],[0]);
Af0:transpose(A).f0;
f1:ratsimp(integrate(Af0,x));
subst(L,x,f1);

```

Az eredmény:

$$\left( \underline{f}_{=f}^e \right)^T = \begin{bmatrix} \frac{f_{0\xi}L}{2} & \frac{f_{0\eta}L}{2} & \frac{f_{0\zeta}L}{2} & -\frac{f_{0\eta}L^2}{12} & \frac{f_{0\xi}L^2}{12} & 0 & \frac{f_{0\xi}L}{2} & \frac{f_{0\eta}L}{2} & \frac{f_{0\zeta}L}{2} & \frac{f_{0\eta}L^2}{12} & -\frac{f_{0\xi}L^2}{12} & 0 \end{bmatrix}_{(1 \times 12)}$$



**A munka számítása a globális koordinátarendszerben** A (38) transzformáció segítségével áttérhetünk a globális koordinátarendszerre.

$$W_{kf}^e = (\underline{q}^e)^T \underline{f}_{=f}^e = (\underline{T}^e \underline{Q}^e)^T \underline{f}_{=f}^e = (\underline{Q}^e)^T \underbrace{(\underline{T}^e)^T \underline{f}_{=f}^e}_{\hat{\underline{f}}_{=f}^e} = (\underline{Q}^e)^T \hat{\underline{f}}_{=f}^e$$

ahol  $\hat{\underline{f}}_{=f}^e$  a vonal mentén megoszló erőkiből származó tehervektor a globális koordinátarendszerben felírva.

### 5.2.11. Végeselemek összekapcsolása

Tekintsünk két végeselemet. Az első sorszáma legyen  $e$ , csomópontjainak lokális sorszáma legyen  $i$  és  $j$ . A második végeselem sorszáma legyen  $e + 1$ , csomópontjainak lokális sorszáma legyen  $p$  és  $q$ . Tegyük fel, hogy az  $e$ -edik elem  $j$ -edik csomópontja az  $(e + 1)$ -edik elem  $p$  csomópontjával kapcsolódik össze. A végeselemek összekapcsolásának lehetőségei az következők:

- Csuklós kapcsolat esetén két szomszédos végeselem közös csomópontjában csak az elmozdulás koordináták azonosak, a szögelfordulások különbözhetnek.

$$\begin{aligned} U_j^e &= U_p^{e+1} \\ V_j^e &= V_p^{e+1} \\ W_j^e &= W_p^{e+1} \\ \Phi_{xj}^e &\neq \Phi_{xp}^{e+1} \\ \Phi_{yj}^e &\neq \Phi_{yp}^{e+1} \\ \Phi_{zj}^e &\neq \Phi_{zp}^{e+1} \end{aligned}$$

Ezt gömbcsuklónak is nevezzük.

- Merev kapcsolat esetén a két szomszédos végeselem közös csomópontjában az elmozdulások és szögelfordulások is megegyeznek.

$$\begin{aligned} U_j^e &= U_p^{e+1} \\ V_j^e &= V_p^{e+1} \\ W_j^e &= W_p^{e+1} \\ \Phi_{xj}^e &= \Phi_{xp}^{e+1} \\ \Phi_{yj}^e &= \Phi_{yp}^{e+1} \\ \Phi_{zj}^e &= \Phi_{zp}^{e+1} \end{aligned}$$

Speciális esetekben lehetséges az is, hogy csak egyes koordináták egyeznek meg, mások nem.

### 5.2.12. A teljes szerkezet potenciális energiája

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^m \Pi_p^e - W_{kF}$$

ahol  $m$  a végeselemek száma,  $W_{kF}$  pedig a csomópontokban ható koncentrált erők és nyomatékok munkája. Ha a teljes szerkezet összesen  $n$  darab csomópontból áll, akkor az összes csomóponti elmozdulást és szögelfordulást tartalmazó csomóponti elmozdulás vektor  $6n$  sorból fog állni.

$$\left( \underline{\underline{Q}} \right)^T = \left[ \begin{array}{cccccccccccccccc} U_i & V_i & W_i & \Phi_{xi} & \Phi_{yi} & \Phi_{zi} & U_j & V_j & \cdots & U_n & V_n & W_n & \Phi_{xn} & \Phi_{yn} & \Phi_{zn} \end{array} \right]_{(1 \times 6n)}$$

ahol  $n$  a csomópontok száma. Osszuk fel ezt a mátrixot  $n$  részre aszerint, hogy az egyes elemei melyik csomóponthoz tartoznak.

$$\left( \underline{\underline{Q}} \right)^T = \left[ \left( \underline{\underline{Q}}_i \right)^T \quad \left( \underline{\underline{Q}}_j \right)^T \quad \cdots \quad \left( \underline{\underline{Q}}_n \right)^T \right]$$

ahol

$$\left( \underline{\underline{Q}}_k \right)^T = \left[ \begin{array}{cccccc} U_k & V_k & W_k & \Phi_{xk} & \Phi_{yk} & \Phi_{zk} \end{array} \right]_{(1 \times 6)}$$

**20. feladat.** Oldjuk meg a 4. feladatot végeelem módszerrel. Vegyünk fel a rúdon kettő egyenlő hosszúságú végeelemet. Használjuk ki az azzal járó egyszerűsítéseket, hogy a feladat síkbeli feladat.

Megoldás: Az alábbi egyszerűsítésekkel élhetünk:

– A rúdra nem hat rúderő, emiatt a rúd keresztmetszeteinek rúdirányú elmozdulását nullának vehetjük.

$$w_{\xi}^e(\zeta) = 0$$

– A rúdra nem hat csavaró nyomaték, emiatt a rúd keresztmetszeteinek elfordulása nullának vehető.

$$\varphi_{\zeta}^e(\zeta) = 0$$

– A rúd terhelése síkbeli, ezért a rúd középvonalának  $x$  irányú elmozdulása nem lesz.

$$u_S^e(\zeta) = 0$$

Emiatt a  $\underline{\underline{q}}^e$  csomóponti elmozdulásvektor a

$$\underline{\underline{q}}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ v_i^e \\ 0 \\ \varphi_{\xi_i}^e \\ 0 \\ 0 \\ v_j^e \\ 0 \\ \varphi_{\xi_j}^e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alakra egyszerűsödik. Mivel a  $\xi\eta\zeta$  és  $xyz$  koordinátarendszerek tengelyei páronként párhuzamosak, a transzformációs mátrix diagonális mátrix lesz a főátlójában csupa egyesekkel, a globális csomóponti elmozdulásvektor pedig a globális  $xyz$  koordinátarendszerben értelmezett elmozdulás és szögelfordulás koordinátákat fogja tartalmazni.

$$\underline{\underline{Q}}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ V_i^e \\ 0 \\ \Phi_{xi}^e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_j^e \\ 0 \\ \Phi_{xj}^e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az alakváltozási energiában a  $\underline{\underline{Q}}^e$  csomóponti elmozdulás vektorban lévő nullákkal történő szorzás miatt a merevségi mátrix 1., 3., 5., 6., 7., 9., 11. és 12. sorait és oszlopait, valamint a  $\underline{\underline{Q}}^e$  csomóponti elmozdulás vektor ugyanezen

sorait kitörölhetjük. Így az egy elemre számított alakváltozási energia

$$U^e = \frac{1}{2} (\underline{Q}^e)^T \underline{K}^e \underline{Q}^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} V_i^e & \Phi_{xi}^e & V_j^e & \Phi_{xj}^e \end{bmatrix}_{(1 \times 4)} \begin{bmatrix} \frac{12I_\xi E}{L^3} & -\frac{6I_\xi E}{L^2} & -\frac{12I_\xi E}{L^3} & -\frac{6I_\xi E}{L^2} \\ -\frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{4I_\xi E}{L} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{2I_\xi E}{L} \\ \frac{12I_\xi E}{L^3} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{12I_\xi E}{L^3} & \frac{6I_\xi E}{L^2} \\ -\frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{2I_\xi E}{L} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{4I_\xi E}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i^e \\ \Phi_{xi}^e \\ V_j^e \\ \Phi_{xj}^e \end{bmatrix}_{(4 \times 1)}$$

A megoszló terhelésnél tudjuk hogy  $f_{0\xi} = f_{0x} = 0$ ,  $f_{0\eta} = f_{0y} = -f_y$  és  $f_{0\zeta} = f_{0z} = 0$ , valamint itt is a  $\underline{Q}^e$  csomóponti elmozdulás vektorban lévő nullákkal történő szorzás miatt a tehervektor 1., 3., 5., 6., 7., 9., 11. és 12. sorait, valamint a  $\underline{Q}^e$  csomóponti elmozdulás vektor ugyanezen sorait kitörölhetjük.

$$W_{kf}^e = \begin{bmatrix} V_i^e & \Phi_{xi}^e & V_j^e & \Phi_{xj}^e \end{bmatrix}_{(1 \times 4)} \begin{bmatrix} -\frac{f_y L}{2} \\ \frac{f_y L^2}{12} \\ -\frac{f_y L}{2} \\ -\frac{f_y L^2}{12} \end{bmatrix}_{(4 \times 1)}$$

A teljes szerkezet potenciális energiája:

$$\begin{aligned} \Pi_p &= \sum_{e=1}^2 \Pi_p^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} V_1 & \Phi_{x1} & V_2 & \Phi_{x2} & V_3 & \Phi_{x3} \end{bmatrix}_{(1 \times 6)} \begin{bmatrix} \frac{12I_\xi E}{L^3} & -\frac{6I_\xi E}{L^2} & -\frac{12I_\xi E}{L^3} & -\frac{6I_\xi E}{L^2} & 0 & 0 \\ -\frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{4I_\xi E}{L} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{2I_\xi E}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{12I_\xi E}{L^3} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{12I_\xi E}{L^3} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & 0 & 0 \\ -\frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{2I_\xi E}{L} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{4I_\xi E}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \begin{bmatrix} V_1 \\ \Phi_{x1} \\ V_2 \\ \Phi_{x2} \\ V_3 \\ \Phi_{x3} \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} + \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} V_1 & \Phi_{x1} & V_2 & \Phi_{x2} & V_3 & \Phi_{x3} \end{bmatrix}_{(1 \times 6)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12I_\xi E}{L^3} & -\frac{6I_\xi E}{L^2} & -\frac{12I_\xi E}{L^3} & -\frac{6I_\xi E}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{4I_\xi E}{L} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{2I_\xi E}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{12I_\xi E}{L^3} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{12I_\xi E}{L^3} & \frac{6I_\xi E}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{2I_\xi E}{L} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{4I_\xi E}{L} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \begin{bmatrix} V_1 \\ \Phi_{x1} \\ V_2 \\ \Phi_{x2} \\ V_3 \\ \Phi_{x3} \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} - \\ &- \begin{bmatrix} V_1 & \Phi_{x1} & V_2 & \Phi_{x2} & V_3 & \Phi_{x3} \end{bmatrix}_{(1 \times 6)} \begin{bmatrix} -\frac{f_y L}{2} \\ \frac{f_y L^2}{12} \\ -\frac{f_y L}{2} \\ -\frac{f_y L^2}{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} - \begin{bmatrix} V_1 & \Phi_{x1} & V_2 & \Phi_{x2} & V_3 & \Phi_{x3} \end{bmatrix}_{(1 \times 6)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{f_y L}{2} \\ \frac{f_y L^2}{12} \\ -\frac{f_y L}{2} \\ -\frac{f_y L^2}{12} \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} V_1 & \Phi_{x1} & V_2 & \Phi_{x2} & V_3 & \Phi_{x3} \end{bmatrix}_{(1 \times 6)} \begin{bmatrix} \frac{12I_\xi E}{L^3} & -\frac{6I_\xi E}{L^2} & -\frac{12I_\xi E}{L^3} & -\frac{6I_\xi E}{L^2} & 0 & 0 \\ -\frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{4I_\xi E}{L} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{2I_\xi E}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{12I_\xi E}{L^3} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{12I_\xi E}{L^3} + \frac{12I_\xi E}{L^3} & \frac{6I_\xi E}{L^2} - \frac{6I_\xi E}{L^2} & -\frac{12I_\xi E}{L^3} & -\frac{6I_\xi E}{L^2} \\ -\frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{2I_\xi E}{L} & \frac{6I_\xi E}{L^2} - \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{4I_\xi E}{L} + \frac{4I_\xi E}{L} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{2I_\xi E}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{12I_\xi E}{L^3} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{12I_\xi E}{L^3} & \frac{6I_\xi E}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{2I_\xi E}{L} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{4I_\xi E}{L} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \begin{bmatrix} V_1 \\ \Phi_{x1} \\ V_2 \\ \Phi_{x2} \\ V_3 \\ \Phi_{x3} \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} - \end{aligned}$$

$$-\begin{bmatrix} V_1 & \Phi_{x1} & V_2 & \Phi_{x2} & V_3 & \Phi_{x3} \end{bmatrix}_{(1 \times 6)} \begin{bmatrix} -\frac{f_y L}{2} \\ \frac{f_y L^2}{12} \\ -\frac{f_y L}{2} - \frac{f_y L}{2} \\ -\frac{f_y L^2}{12} + \frac{f_y L^2}{12} \\ -\frac{f_y L}{2} \\ -\frac{f_y L^2}{12} \end{bmatrix}_{(6 \times 1)}$$

Mivel tudjuk, hogy a befogás miatt  $V_1^e = 0$  és  $\Phi_{x1} = 0$

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} V_2 & \Phi_{x2} & V_3 & \Phi_{x3} \end{bmatrix}_{(1 \times 4)} \begin{bmatrix} \frac{12I_\xi E}{L^3} + \frac{12I_\xi E}{L^3} & \frac{6I_\xi E}{L^2} - \frac{6I_\xi E}{L^2} & -\frac{12I_\xi E}{L^3} & -\frac{6I_\xi E}{L^2} \\ \frac{6I_\xi E}{L^2} - \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{4I_\xi E}{L} + \frac{4I_\xi E}{L} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{2I_\xi E}{L} \\ -\frac{12I_\xi E}{L^3} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{12I_\xi E}{L^3} & \frac{6I_\xi E}{L^2} \\ -\frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{2I_\xi E}{L} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{4I_\xi E}{L} \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \begin{bmatrix} V_2 \\ \Phi_{x2} \\ V_3 \\ \Phi_{x3} \end{bmatrix}_{(4 \times 1)} -$$

$$-\begin{bmatrix} V_2 & \Phi_{x2} & V_3 & \Phi_{x3} \end{bmatrix}_{(1 \times 6)} \begin{bmatrix} -\frac{f_y L}{2} - \frac{f_y L}{2} \\ -\frac{f_y L^2}{12} + \frac{f_y L^2}{12} \\ -\frac{f_y L}{2} \\ -\frac{f_y L^2}{12} \end{bmatrix}_{(6 \times 1)}$$

A megvalósuló elmozdulásnál a potenciális energiának minimuma van, azaz

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial V_2} = 0 \quad \frac{\partial \Pi_p}{\partial \Phi_{x2}} = 0 \quad \frac{\partial \Pi_p}{\partial V_3} = 0 \quad \frac{\partial \Pi_p}{\partial \Phi_{x3}} = 0$$

ami egyenértékű a

$$\begin{bmatrix} \frac{12I_\xi E}{L^3} + \frac{12I_\xi E}{L^3} & \frac{6I_\xi E}{L^2} - \frac{6I_\xi E}{L^2} & -\frac{12I_\xi E}{L^3} & -\frac{6I_\xi E}{L^2} \\ \frac{6I_\xi E}{L^2} - \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{4I_\xi E}{L} + \frac{4I_\xi E}{L} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{2I_\xi E}{L} \\ -\frac{12I_\xi E}{L^3} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{12I_\xi E}{L^3} & \frac{6I_\xi E}{L^2} \\ -\frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{2I_\xi E}{L} & \frac{6I_\xi E}{L^2} & \frac{4I_\xi E}{L} \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \begin{bmatrix} V_2 \\ \Phi_{x2} \\ V_3 \\ \Phi_{x3} \end{bmatrix}_{(4 \times 1)} = \begin{bmatrix} -\frac{f_y L}{2} - \frac{f_y L}{2} \\ -\frac{f_y L^2}{12} + \frac{f_y L^2}{12} \\ -\frac{f_y L}{2} \\ -\frac{f_y L^2}{12} \end{bmatrix}_{(6 \times 1)}$$

egyenletrendszerrel. Ennek a megoldása

$$V_2 = -\frac{17f_y L^4}{24I_\xi E} = -\frac{17f_y l^4}{384I_\xi E} \quad \Phi_{x2} = \frac{7f_y L^3}{6I_\xi E} = \frac{7f_y l^3}{48I_\xi E}$$

$$V_3 = -\frac{2f_y L^4}{I_\xi E} = -\frac{f_y l^4}{8I_\xi E} \quad \Phi_{x3} = \frac{4f_y L^3}{3I_\xi E} = \frac{f_y l^3}{6I_\xi E}$$



## 5.3. A rugalmasságtan 2D-s feladatai

### 5.3.1. Sík alakváltozás feladat

### 5.3.2. Általánosított síkfeszültség feladat

### 5.3.3. Tengelyszimmetrikus feladat