

1. Adja meg az anyagi pont definícióját!

1. definíció: Anyagi tulajdonságokkal rendelkező geometriai pont.

2. definíció: Olyan anyagi test, amelynek mozgása (helyzete) egyetlen pontjának mozgásával (helyzetével) egyértelműen megadható.

2. Adja meg a merev test definícióját!

Olyan test, amelyben bármely két pont távolsága az idő függvényében állandó (a pontok távolsága terhelés/erő hatására sem változik meg).

3. Adja meg a szilárd test definícióját!

Olyan határozott térfogatú és alakú test, amely alakváltozásra képes (a szilárd test pontjainak távolsága terhelés/erő hatására megváltozhat).

4. Adja meg a kontinuum definícióját!

Olyan szilárd test, amelynek tömegeloszlása és mechanikai viselkedése folytonos függvényekkel leírható.

5. Adja meg a rúd definícióját!

Olyan test, amelynek egyik mérete lényegesen nagyobb, mint a másik kettő. (A Statikában merev, a Szilárdságtanban és Rezgéstanban szilárd rudakat vizsgálunk.)

6. Adja meg a rezgőmozgás definícióját!

Rezgőmozgásnál a vizsgált tömegpont/test, vagy ezek rendszere valamely egyensúlyi (nyugalmi) helyzet környezetében váltakozó/irányváltó (előjelváltó) mozgást végez.

7. Adja meg a kitérés definícióját!

Az egyensúlyi (nyugalmi) helyzettől mért, a t időtől függő, előjeles geometriai koordináta (skaláris koordináta), pl. $y = y(t)$. A kitérés lehet elmozdulás-koordináta, vagy szögkoordináta is.

8. Definiálja a periodikus rezgést!

A kitérések időbeni lefolyása, szabályos időközönként ismétlődik.

9. Definiálja a harmonikus rezgést!

Olyan periodikus rezgés, amelynek a kitérések időbeni lefolyása leírható $\sin$ vagy $\cos$ függvényekkel. (A $\sin$ és $\cos$ függvények lineáris kombinációi átalakíthatók csak $\sin$ vagy $\cos$ függvényekké). Pl. $y(t) = A \sin \omega t$, vagy $y(t) = A \cos \omega t$; vagy $y(t) = A \sin(\omega t + \varepsilon)$, vagy $y(t) = A \cos(\omega t + \varepsilon)$.

10. Definiálja a periódus időt, és adja meg az SI mértékegységét!

A periodikus rezgés ismétlődésének időintervalluma a periódus idő. Jele T , SI mértékegysége [s].

11. Definiálja a frekvenciát, és adja meg az SI mértékegységét!

A periodikus mozgás időegység alatti ismétlődésének a száma. Jele ν (nű), SI mértékegysége $\left[\frac{1}{s} \right] = [\text{Hz}]$.

12. Definiálja a körfrekvenciát, és adja meg az SI mértékegységét!

Harmonikus mozgásnál a frekvencia 2π -szerese: $\omega = 2\pi f$ Jele ω , SI mértékegysége $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$

13. Definiálja az általános koordinátát!

Általános koordináták azok a skaláris paraméterek (koordináták), amelyek a rendszer mozgását (helyzetét) kölcsönösen egyértelműen meghatározzák az idő függvényében. Jele q , amely az időnek a függvénye: $q = q(t)$

14. Definiálja az általános koordinátasebességet és általános koordinátagyorsulást!

Általános koordinátasebesség az általános koordináta idő szerinti deriváltja: $\dot{q} = \dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}$.

Általános koordinátagyorsulás az általános koordinátasebesség idő szerinti deriváltja: $\ddot{q} = \ddot{q}(t) = \frac{d\dot{q}}{dt}$.

15. Definiálja a szabadságfokot!

Azoknak az általános koordinátáknak a minimális száma, amelyek a rendszer mozgását (helyzetét) kölcsönösen egyértelműen meghatározzák.

16. Definiálja az inverz mátrixot!

$\underline{\underline{A}}$ négyzetes mátrix esetében $\underline{\underline{A}}^{-1}$ a mátrixnak az inverze, ha igaz, hogy $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$, ahol $\underline{\underline{E}}$ az egységmátrix.

17. Hogyan számolható ki az $\underline{\underline{A}}$ négyzetes mátrix inverze?

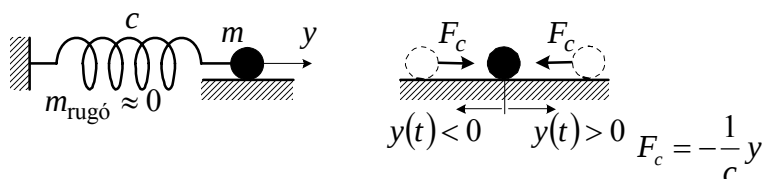
$\underline{\underline{A}}$ négyzetes mátrix esetében $\underline{\underline{A}}^{-1}$ az inverz mátrix: $\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{\text{adj}\underline{\underline{A}}}{\det \underline{\underline{A}}}$, ahol $\text{adj}\underline{\underline{A}}$ mátrix elemeit az

$\underline{\underline{A}}^T$ transzponált mátrix elemeihez tartozó előjeles aldetermináns adja. Az előjelszabály azt jelenti, hogy az 1. sor 1. eleméhez pozitív előjel tartozik, és minden szomszédos elemnél előjelváltás történik. Az elemhez tartozó aldeterminánst úgy kapjuk, hogy a mátrixból elhagyjuk az aktuális elemhez tartozó sort és oszlopot, majd az így kapott mátrix determinánsát kiszámoljuk.

18. Fogalmazza meg a sajátérték feladatot $\underline{\underline{A}}$ négyzetes mátrix esetében!

Ha van olyan $\underline{\underline{n}}$ oszlopmátrix, amelyre igaz, hogy $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{n}} = \lambda \underline{\underline{n}}$, akkor az $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak λ a sajátértéke, és $\underline{\underline{n}}$ a sajátvektora.

19. Definiálja az F_c visszatérítő erőt, és adja meg a tulajdonságait! Készítsen magyarázó ábrát!



Az F_c visszatérítő erő mindig az egyensúlyi helyzet felé mutat, iránya ellentétes és arányos a kitéréssel. Az arányossági tényező a c rugóállandó reciproka.

20. Definiálja a kis rezgéseket!

Az elmozdulások a rezgőrendszer méreteihez képest kicsik, a rezgés amplitúdója a rugó lineáris szakaszán belül marad, valamint a szögelfordulások és az elmozdulások között lineáris kapcsolat áll fenn.

21. Definiálja az U rugópotenciált!

$U = -W_c = -\frac{1}{2}F_c y = \frac{y^2}{2c}$, ahol W_c a visszatérítő erő munkája, F_c a visszatérítő erő, y a kitérés, c a rugóállandó.

22. Hogyan származtatható az F_c visszatérítő erő az U rugópotenciálból?

$F_c = -\frac{dU}{dy}$, ahol y a kitérés.

23. Hogyan számoljuk a c_0 eredő rugóállandót két, c_1 és c_2 rugóállandójú rugó esetében, ha azok sorosan, illetve párhuzamosan vannak kötve?

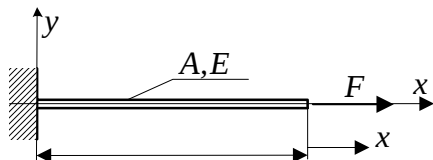
Soros kapcsolás esetén: $c_0 = c_1 + c_2$

Párhuzamos kapcsolás esetén: $\frac{1}{c_0} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$

24. Fogalmazza meg az egyszabadságfokú rendszerhez tartozó rugalmas elemekre vonatkozó tételt!

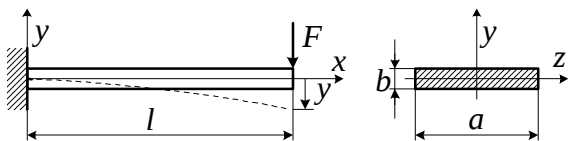
Az egyszabadságfokú rendszerhez tartozó rugalmas elemek helyettesíthetők egyetlen rugóval.

25. Adja meg a húzott-nyomott rúd (longitudinális) rugóállandóját! Készítsen magyarázó ábrát!



$$x = l\varepsilon_x = \frac{l\sigma_x}{E} = \frac{l}{AE}F \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{l}{AE}$$

26. Adja meg hajlított rúd (tranzverzális) rugóállandóját! Készítsen magyarázó ábrát!



$$y = \frac{F}{I_z E} \left(l \frac{l^2}{2} - \frac{l^3}{6} \right) = \frac{l^3}{3I_z E} F \Rightarrow c = \frac{l^3}{3I_z E}, \text{ ahol } I_z = \frac{ab^3}{12} \text{ a keresztmetszet } z \text{ tengelyre számolt másodrendű nyomatéka, } E \text{ a Young-féle rugalmassági modulus.}$$

27. Definiálja a folyadékfék típusú csillapító erőt!

$F_k = -k v_d = -k \dot{y}$, ahol k a csillapítási tényező v_d a dugattyú relatív sebessége a hengerhez képest

28. Mi a fő jellemzője a csillapító erőnek?

A csillapító erő teljesítménye mindig negatív.

29. Adja meg a folyadékfék típusú csillapítás esetében a Q_k általános csillapító erő meghatározásának módját!

$Q_k = \vec{F}_k \vec{\beta}_k$, ahol $\vec{F}_k$ a csillapító erő, $\vec{\beta}_k = \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}}$, és $\vec{v}_k$ a csillapító erő támadáspontjának sebessége.

30. Adja meg a gerjesztő erő és gerjesztő nyomaték összefüggéseit harmonikus gerjesztés esetében!

$F_g = F_{g0} \sin(\omega t + \varepsilon)$, vagy $F_g = F_{g0} \cos(\omega t + \varepsilon)$, illetve $M_g = M_{g0} \sin(\omega t + \varepsilon)$, vagy $M_g = M_{g0} \cos(\omega t + \varepsilon)$, ahol F_{g0} , M_{g0} a gerjesztő erő/nyomaték amplitúdója, ω a gerjesztés körfrekvenciája, ε a gerjesztés fázisszöge (a forgóvektor helyzetét adja meg a $t=0$ időpillanatban).

31. Adja meg a Q_g általános gerjesztő erő meghatározásának módját!

$Q_g = \vec{F}_g \vec{\beta}_g + \vec{M}_g \vec{b}_g$, ahol $\vec{F}_g$ a gerjesztő erő, $\vec{M}_g$ a gerjesztő nyomaték, $\vec{\beta}_g = \frac{\partial \vec{v}_g}{\partial \dot{q}}$, és $\vec{v}_g$ a gerjesztő erő támadáspontjának sebessége, $\vec{b}_g = \frac{\partial \vec{\omega}_g}{\partial \dot{q}}$, és $\vec{\omega}_g$ annak a testnek a szögsebessége, amelyre a gerjesztő nyomaték hat.

32. Adja meg a *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenletet egyszabadságfokú rezgőrendszer esetében!

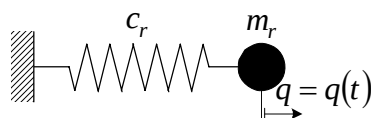
$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q_c + Q_k + Q_g$, ahol E a rendszer kinetikai energiája, q az általános koordináta, $\dot{q}$ az általános koordinátasebesség, t az idő, Q_c az általános visszatérítő erő, Q_k az általános csillapító erő, Q_g az általános gerjesztő erő.

33. Adja meg az egyszabadságfokú rezgőrendszerek osztályozását a vonatkozó redukált rezgőrendszerrel, és a mozgásegyenletekkel együtt

Szabad, csillapítás-mentes rezgőrendszer.

Redukált rezgőrendszer:

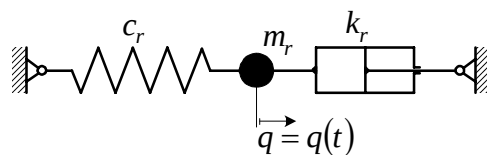
$$\text{Mozgásegyenlet: } m_r \ddot{q} + \frac{1}{c_r} q = 0$$



Szabad, csillapított rezgőrendszer.

Redukált rezgőrendszer:

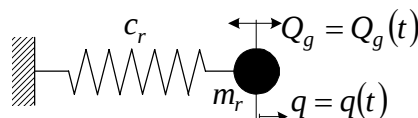
$$\text{Mozgásegyenlet: } m_r \ddot{q} + k_r \dot{q} + \frac{1}{c_r} q = 0$$



Gerjesztett, csillapítás-mentes rezgőrendszer.

Redukált rezgőrendszer:

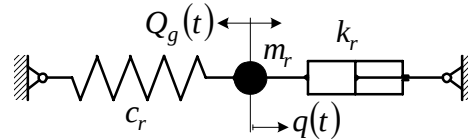
$$\text{Mozgásegyenlet: } m_r \ddot{q} + \frac{1}{c_r} q = Q_g$$



Gerjesztett, csillapított rezgőrendszer.

Redukált rezgőrendszer:

$$\text{Mozgásegyenlet: } m_r \ddot{q} + c_r \dot{q} + \frac{1}{c_r} q = Q_g$$



34. Adja meg a komplex változóra vonatkozó mozgásegyenletet, valamint a komplex változó és az általános koordináta kapcsolatát egyszabadságfokú rezgőrendszer esetében!

$m_r \ddot{z} + k_r \dot{z} + \frac{1}{c_r} z = P_g$, ahol $q = \text{Im}(z)$, $P_g = P_{g0} e^{i\omega t}$ a komplex gerjesztés, és $P_{g0} = Q_{g0} e^{i\varepsilon}$ a komplex gerjesztés kezdeti vektora, illetve Q_{g0} az általános gerjesztő erő amplitúdója, ω a körfrekvenciája, ε a fázisszöge.

35. Írja fel a szabad rezgőrendszer általános megoldását komplex változó esetében!

$z(t) = (a + ib) e^{-\beta t} e^{i\nu t}$, ahol a, b integrációs állandók, $\beta = \frac{k_r}{2m_r}$, $\nu = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ a csillapított rendszer saját körfrekvenciája, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{m_r c_r}}$ a csillapítás-mentes rendszer saját körfrekvenciája, illetve m_r a redukált tömeg, k_r a redukált csillapítási tényező, c_r a redukált rugóállandó.

36. Írja fel azokat a kezdeti feltételeket, amelyekből az integrációs állandók meghatározhatók szabad rezgőrendszer esetében!

$q|_{t=0} = y_0 = \text{Im}(z|_{t=0})$, illetve $\dot{q}|_{t=0} = v_0 = \text{Im}(\dot{z}|_{t=0})$ ahol y_0 a rezgőrendszer kezdeti kitérése, v_0 a rezgőrendszer kezdeti sebessége.

37. Írja fel a gerjesztett rezgőrendszer általános megoldását komplex változó esetében, ha a zavaró tag $P_{g0} e^{i\omega t}$!

$z(t) = \underbrace{(a + ib) e^{-\beta t} e^{i\nu t}}_{\text{lecseng, elhanyagolható}} + B e^{i\omega t} \cong B e^{i\omega t}$, ahol t az idő, ω az általános gerjesztő körfrekvenciája.

38. Írja fel a csillapított és gerjesztett rezgőrendszer komplex változójának kiszámítására vonatkozó összefüggést, és kezdeti vektorát!

$z(t) = B e^{i\omega t}$, és $B = \frac{P_{g0}}{i\omega Z}$, ahol $P_{g0} = Q_{g0} e^{i\varepsilon}$ a komplex gerjesztés kezdeti vektora, ω a körfrekvenciája, és Z a rezgőrendszer komplex impedanciája.

39. Írja fel a logaritmikus dekrementum összefüggését!

$\Lambda = \ln \frac{q_1}{q_2} = \ln \left(e^{2\pi \frac{\beta}{\nu}} \right) = 2\pi \frac{\beta}{\nu}$, ahol $\beta = \frac{k_r}{2m_r}$, $\nu = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ a csillapított rendszer saját körfrekvenciája, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{m_r c_r}}$ a csillapítás-mentes rendszer saját körfrekvenciája.

40. Adja meg a rezgés kialakulásának feltételét csillapított rezgőrendszer esetében!

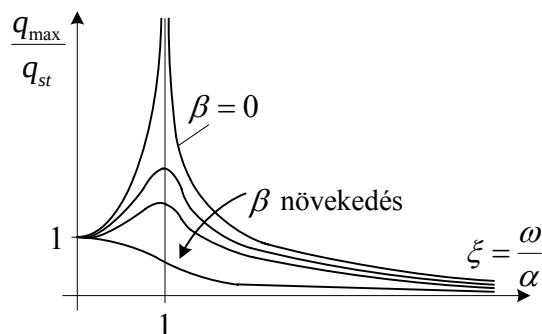
$\alpha > \beta$, kialakul a rezgés;

$\alpha = \beta$, aperiodikus rezgés alakul ki (egyetlen előjelváltás lehetséges);

$\alpha < \beta$, nem alakul ki a rezgés;

ahol $\beta = \frac{k_r}{2m_r}$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{m_r c_r}}$ a csillapítás-mentes rendszer saját körfrekvenciája.

41. Rajzolja meg a rezonancia görbét és adja meg a függvényt!



$$\frac{q_{\max}}{q_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)^2 + 4\frac{\beta^2}{\alpha^2}\xi^2}}.$$

42. Értelmezze a diszkrét rezgőrendszer fogalmát!

Diszkrét rezgőrendszeren merev testekből, tömegpontokból, és a köztük lévő súlytalan rugalmas elemekből (rugókból) felépített rendszert értünk, amely tartalmazhat még csillapításokat és gerjesztéseket is.

43. Értelmezze a többszabadságfokú diszkrét rezgőrendszer fogalmát!

Olyan diszkrét rezgőrendszer, amelynél a rendszert kölcsönösen és egyértelműen leíró koordinátáknak a száma nagyobb egynél.

44. Írja fel a *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenletet N szabadságfokú rendszerek megoldására alkalmas módon!

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = Q_k$, $(k=1,2,\dots,N)$, ahol E a rendszer kinetikai energiája, q_k a k -adik általános koordináta, $\dot{q}_k$ a k -adik általános koordinátasebesség, t az idő, Q_k a k -adik általános erő.

45. Írja fel a Q_k általános erő kiszámításának a módját, ha nincs a rendszerben általános koordinátasebességtől függő erő!

$Q_k = \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^M \vec{F}_i \cdot \vec{\beta}_{ik} + \sum_{j=1}^L \vec{M}_j \cdot \vec{b}_{jk}$, $(k=1,2,\dots,N)$, ahol P a rendszerre ható erők teljesítménye, $\dot{q}_k$ a k -adik általános koordinátasebesség, $\vec{F}_i$, $(i=1,2,\dots,M)$ a rendszerre ható, általános koordinátasebességtől független erők, $\vec{M}_j$, $(j=1,2,\dots,L)$ a rendszerre ható, általános koordinátasebességtől független nyomatékok, $\vec{\beta}_{ik} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}$, és $\vec{v}_i$ az $\vec{F}_i$ erő

támadáspontjának sebessége, $\vec{b}_{jk} = \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{q}_k}$, és $\vec{\omega}_j$ annak a testnek a szögsebessége, amelyre az $\vec{M}_j$ nyomaték hat.

46. Írja fel a *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenletet N szabadságfokú gerjesztett, csillapítás mentes rezgőrendszerek megoldására alkalmas módon!

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = Q_{ck} + Q_{gk}$, $(k=1, 2, \dots, N)$, ahol E a rendszer kinetikai energiája, q_k a k -adik általános koordináta, $\dot{q}_k$ a k -adik általános koordinátasebesség, t az idő, Q_{ck} a k -adik általános visszatérítő erő, Q_{gk} a k -adik általános gerjesztő erő.

47. Írja fel a Q_{ck} általános visszatérítő erő kiszámításának a módját!

$Q_{ck} = -\frac{\partial U}{\partial q_k}$, $(k=1, 2, \dots, N)$, ahol U a rugókban felhalmozott rugalmas energia, q_k a k -adik általános koordináta.

48. Írja fel a Q_{gk} általános gerjesztő erő kiszámításának a módját!

$Q_{gk} = \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^M \vec{F}_{gi} \cdot \vec{\beta}_{ik} + \sum_{j=1}^L \vec{M}_{gj} \cdot \vec{b}_{jk}$, $(k=1, 2, \dots, N)$, ahol P a rendszerre ható gerjesztő erők teljesítménye, $\dot{q}_k$ a k -adik általános koordinátasebesség, $\vec{F}_{gi}$, $(i=1, 2, \dots, M)$ a rendszerre ható gerjesztő erők, $\vec{M}_{gj}$, $(j=1, 2, \dots, L)$ a rendszerre ható gerjesztő nyomatékok, $\vec{\beta}_{ik} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}$, és $\vec{v}_i$ az $\vec{F}_{gi}$ gerjesztő erő támadáspontjának sebessége, $\vec{b}_{jk} = \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{q}_k}$, és $\vec{\omega}_j$ annak a testnek a szögsebessége, amelyre az $\vec{M}_{gj}$ gerjesztő nyomaték hat.

49. Adja meg a mozgásegyenlet-rendszer általános alakját láncszerű rendszerek esetén!

$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{C}}\dot{\underline{\underline{q}}} = 0$, ahol $\underline{\underline{M}}$ a tömegmátrix, $\underline{\underline{C}}$ a rugómátrix, $\underline{\underline{q}}$ az általános koordinátákból alkotott oszlopvektor.

50. Definiálja a nem kötött, áttételmentes láncszerű rezgőrendszer fogalmát!

A nem kötött, áttételmentes láncszerű rezgőrendszer tömegekből és rugókból álló elemeknek olyan sorozata, amely tömeggel kezdődik és zárul, továbbá a kezdő és záró tömeg kivételével mindegyik tömeg kettő, a tömeget megelőző, és a tömeget követő taggal van egy-egy rugóval összekötve, de egyik rugó sincs az állványhoz kötve.

51. Definiálja a kötött, áttételmentes láncszerű rezgőrendszer fogalmát!

A kötött, áttételmentes láncszerű rezgőrendszer tömegekből és rugókból álló elemeknek olyan sorozata, amelynek vagy az egyik végén, vagy a másik végén, vagy mindkét végén állvány található, amelyben mindegyik tömeg legfeljebb kettő, a tömeget megelőző, és a tömeget követő taggal lehet rugóval összekötve, valamint a sorozat első, vagy utolsó, esetleg mindkettő tömege rugóval az állványhoz kötött.

52. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a nem kötött, áttételmentes láncszerű rezgőrendszer tömeg- és rugómátrixa!

A tömegmátrix diagonális négyzetes mátrix, amelynek determinánsa nagyobb nullánál (pozitív definit), a rugómátrix kodiagonális (csak a főátlóban lévő, és a közvetlen mellette található elemek zérustól különbözők) szimmetrikus négyzetes mátrix, amelynél valamennyi sor, illetve oszlop elemeinek összege nulla. A rugómátrix determinánsa nulla. A tömegmátrix és rugómátrix főátlójába csak pozitív számok állhatnak.

53. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a kötött, áttételmentes láncszerű rezgőrendszer tömeg- és rugómátrixa!

A tömegmátrix diagonális négyzetes mátrix, amelynek determinánsa nagyobb nullánál (pozitív definit). A rugómátrix kodiagonális (csak a főátlóban lévő, és a közvetlen mellette található elemek zérustól különbözők) szimmetrikus négyzetes mátrix, amelynél a sorok, illetve oszlopok elemeinek összege nulla, azon sorok és oszlopok kivételével, amelyek az állványhoz rugóval kötött tömegekhez tartoznak. A rugómátrix determinánsa pozitív szám. A tömegmátrix és rugómátrix főátlójába csak pozitív számok állhatnak.

54. Mi a különbség az áttételes és áttételmentes láncszerű rezgőrendszerhez tartozó rugómátrixok között!

Az áttételmentes rendszerhez képest az áttételes rendszer rugómátrixánál nem teljesül az a feltétel, amely azt mondja ki, hogy a soraihoz és oszlopaihoz tartozó elemeknek az összege nulla.

55. Az áttételes rendszer átalakítható-e áttételmentes rendszerré, ha igen milyen módon!

Transzformációval áttételmentes rendszerre alakítható az áttételes rendszer.

56. Értelmezze a torziós rugóállandót l hosszúságú és d átmérőjű tengely esetén!

$$\gamma = \frac{l}{I_p G} = \frac{32l}{\pi d^4 G}, \text{ ahol } G \text{ a csúsztató rugalmassági modulus.}$$

57. Milyen tételeket alkalmazunk a mozgásegyenlet-rendszer felírásánál tengelyek hajlító rezgései esetére!

Impulzus tétel, perdület tétel, *Castigliano* tétel.

58. Adja meg a mozgásegyenlet-rendszer általános alakját tengelyek hajlító rezgései esetén!

$\underline{\underline{m}}\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{q}} = 0$, ahol $\underline{\underline{m}} = \underline{\underline{D}}\underline{\underline{M}}$ a tömegmátrix, és $\underline{\underline{D}}$ a *Maxwell*-féle hatásmátrix, $\underline{\underline{M}}$ a láncszerű rendszereknél értelmezett tömegmátrix, $\underline{\underline{C}}$ a rugómátrix, $\underline{\underline{q}}$ az általános koordinátákból alkotott oszlopvektor.

59. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a *Maxwell*-féle hatásmátrix, és elemeinek mi a fizikai jelentése?

A *Maxwell*-féle hatásmátrix szimmetrikus, determinánsa zérustól különböző, főátlójában pozitív mennyiségek találhatók. A mátrix i -edik sorában a j -edik elem, az i -edik általános koordináta irányú elmozdulást adja meg, amely a j -edik általános koordináta irányába mutató egységnyi általános erő hatására jön létre.

60. Milyen módon transzformálható láncszerű rendszerre a hajlító rezgések mozgásegyenlet-rendszere?

$\underline{\underline{m}}\ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{q}} = 0$ egyenlet mindkét oldalát balról beszorozzuk a $\underline{\underline{D}}$ Maxwell-féle hatásmátrix reciprokával, így $\underline{\underline{D}}^{-1} \cdot \underline{\underline{DM}}\ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{q}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{M}}\ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{D}}^{-1}\underline{\underline{q}} = 0$ egyenletet kapjuk, amelyben $\underline{\underline{D}}^{-1} = \underline{\underline{C}}$ helyettesítéssel $\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{C}}\underline{\underline{q}} = 0$ egyenlethez jutunk.

61. Írja fel a többszabadságfokú csillapítás mentes diszkrét rezgőrendszerek mozgásegyenletét mátrixos alakban, majd adja meg, hogy milyen módon keressük az általános megoldását?

$\underline{\underline{A}}\ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{B}}\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{Q}}$ a mozgásegyenlet, és $\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{q}}_h + \underline{\underline{q}}_p$ alakban keressük a megoldást, ahol $\underline{\underline{q}}_h$ a homogén mozgásegyenlet általános megoldása, míg $\underline{\underline{q}}_p$ az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása.

62. Adja meg, hogy milyen alakban keressük a többszabadságfokú csillapítás mentes diszkrét rezgőrendszerek mozgásegyenleténél a homogén egyenlet általános megoldását?

Az $\underline{\underline{A}}\ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{B}}\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}}$ homogén egyenlet általános megoldását $\underline{\underline{q}}_h = \underline{\underline{q}}_0 (a \sin \alpha t + b \cos \alpha t)$ alakban keressük.

63. Hogyan állítjuk elő a karakterisztikus egyenletet?

A $\underline{\underline{A}}\ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{B}}\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}}$ homogén egyenletbe a $\underline{\underline{q}}_h = \underline{\underline{q}}_0 (a \sin \alpha t + b \cos \alpha t)$ általános megoldást behelyettesítve a $(-\alpha^2 \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})\underline{\underline{q}}_0 (a \sin \alpha t + b \cos \alpha t) = \underline{\underline{0}}$ egyenlethez jutunk, amelynek minden időpillanatban teljesülnie kell. Ez csak akkor lehetséges, ha $(-\alpha^2 \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})\underline{\underline{q}}_0 = \underline{\underline{0}}$ teljesül. Ez lineáris homogén egyenletrendszer, amelynek csak akkor van zérustól különböző megoldása, ha $\det |-\alpha^2 \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}| = 0$. Ennek a determinánsnak a kifejtése adja az α sajátértékek meghatározására alkalmas $(-1)^N K_N \alpha^{2N} + (-1)^{(N-1)} K_{N-1} \alpha^{2(N-1)} + \dots + (-1)^1 K_1 \alpha^2 + K_0 = 0$ karakterisztikus egyenletet.

64. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a karakterisztikus egyenlet a saját értékek meghatározásához?

Ha $\underline{\underline{A}}$ szimmetrikus és pozitív definit, valamint $\underline{\underline{B}}$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit, akkor bizonyítható, hogy ennek a karakterisztikus egyenletnek α^2 -re való megoldása mindig N db. nulla vagy pozitív értékre ($\alpha_i^2 \geq 0$) vezet, amiből az α_i , ($i = 1, 2, \dots, N$) saját körfrekvenciák számíthatók. Tehát egy N szabadságfokú diszkrét rendszernek N db. saját körfrekvenciája van.

65. Írja le a saját körfrekvenciák meghatározásának menetét hajlító rezgések esetén!

Hajlító rezgésekre vonatkozó mozgásegyenlet $\underline{\underline{m}}\ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}}$ alakú, amelynek általános megoldását $\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{q}}_0 (a \sin \alpha t + b \cos \alpha t)$ alakban keressük. A megoldást az egyenletbe helyettesítve $(-\alpha^2 \underline{\underline{m}} + \underline{\underline{E}})\underline{\underline{q}}_0 (a \sin \alpha t + b \cos \alpha t) = \underline{\underline{0}}$ egyenlethez jutunk, amelynek minden időpontban teljesülnie kell, így érvényesnek kell lennie a $(-\alpha^2 \underline{\underline{m}} + \underline{\underline{E}})\underline{\underline{q}}_0 = \underline{\underline{0}}$ lineáris homogén egyenletrendszernek, amelynek csak akkor van zérustól különböző megoldása, ha

$\det|-\alpha^2 \underline{\underline{m}} + \underline{\underline{E}}| = 0$. Bevezetve a $\lambda = \frac{1}{\alpha^2}$ helyettesítést a determináns $\det|\underline{\underline{m}} + \lambda \underline{\underline{E}}| = 0$ alakra hozható, amely az $\underline{\underline{m}}$ mátrix sajátérték feladatát szolgáltatja (az $\underline{\underline{m}}$ mátrix sajátértékei, a rezgőrendszer saját körfrekvenciáinak reciproknéyzete).

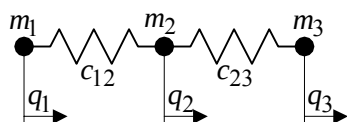
66. Adja meg a többszabadságfokú csillapítás mentes gerjesztett diszkrét rezgőrendszerek esetében a partikuláris megoldásának menetét, ha a gerjesztés $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{Q}}_0 \sin(\omega t + \varepsilon)$ alakú!

A mozgásegyenlet ebben az esetben $\underline{\underline{A}}\ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{B}}\dot{\underline{\underline{q}}} = \underline{\underline{Q}}_0 \sin(\omega t + \varepsilon)$ alakú, amelynek partikuláris megoldását $\underline{\underline{q}}_p = \underline{\underline{q}}_{p0} \sin(\omega t + \varepsilon)$ alakban keressük. Ezt az egyenletbe helyettesítve $(-\omega^2 \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})\underline{\underline{q}}_{p0} \sin(\omega t + \varepsilon) = \underline{\underline{Q}}_0 \sin(\omega t + \varepsilon)$ egyenlethez jutunk, amely csak akkor teljesül minden időpillanatban, ha $(-\omega^2 \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})\underline{\underline{q}}_{p0} = \underline{\underline{Q}}_0$ egyenlőség igaz. Ebből a lineáris inhomogén egyenletrendszerből meghatározhatók $\underline{\underline{q}}_{p0}$ oszlopvektor koordinátái, ha igaz, hogy $\det|-\omega^2 \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}| \neq 0$., vagyis csak akkor, ha $\omega \neq \alpha_i$, $(i = 1, 2, \dots, N)$ egyenlőtlenség fennáll.

67. Adja meg a többszabadságfokú csillapítás mentes gerjesztett diszkrét rezgőrendszerek esetében a partikuláris megoldásának menetét, ha a gerjesztés $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{Q}}_0 \sin(2\omega t + \varepsilon)$ alakú!

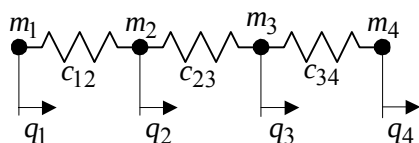
A mozgásegyenlet ebben az esetben $\underline{\underline{A}}\ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{B}}\dot{\underline{\underline{q}}} = \underline{\underline{Q}}_0 \sin(2\omega t + \varepsilon)$ alakú, amelynek partikuláris megoldását $\underline{\underline{q}}_p = \underline{\underline{q}}_{p0} \sin(2\omega t + \varepsilon)$ alakban keressük. Ezt az egyenletbe helyettesítve $(-4\omega^2 \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})\underline{\underline{q}}_{p0} \sin(2\omega t + \varepsilon) = \underline{\underline{Q}}_0 \sin(2\omega t + \varepsilon)$ egyenlethez jutunk, amely csak akkor teljesül minden időpillanatban, ha $(-4\omega^2 \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})\underline{\underline{q}}_{p0} = \underline{\underline{Q}}_0$ egyenlőség igaz. Ebből a lineáris inhomogén egyenletrendszerből meghatározhatók $\underline{\underline{q}}_{p0}$ oszlopvektor koordinátái, ha igaz, hogy $\det|-4\omega^2 \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}| \neq 0$., vagyis csak akkor, ha $2\omega \neq \alpha_i$, $(i = 1, 2, \dots, N)$ egyenlőtlenség fennáll.

68. Adja meg három szabadságfokú láncszerű elágazás- és áttételmentes nem kötött rezgőrendszer karakterisztikus egyenletét! (Készítsen magyarázó ábrát!)



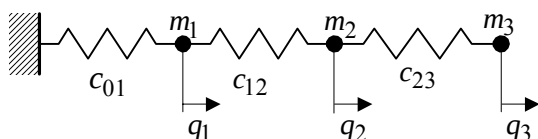
$$-m_1 c_{12} m_2 c_{23} m_3 (\alpha^2)^3 + [m_1 c_{12} m_2 + m_1 (c_{12} + c_{23}) m_3 + m_2 c_{23} m_3] (\alpha^2)^2 - [m_1 + m_2 + m_3] \alpha^2 = 0$$

69. Adja meg négy szabadságfokú láncszerű elágazás- és áttételmentes nem kötött rezgőrendszer karakterisztikus egyenletét! (Készítsen magyarázó ábrát!)



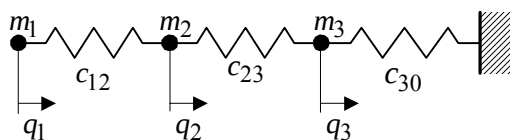
$$m_1 c_{12} m_2 c_{23} m_3 c_{34} m_4 (\alpha^2)^4 - [m_1 c_{12} m_2 c_{23} m_3 + m_1 c_{12} m_2 (c_{23} + c_{34}) m_4 + \\ + m_1 (c_{12} + c_{23}) m_3 c_{34} m_4 + m_2 c_{23} m_3 c_{34} m_4] (\alpha^2)^3 + \\ + [m_1 c_{12} m_2 + m_1 (c_{12} + c_{23}) m_3 + m_1 (c_{12} + c_{23} + c_{34}) m_4 + \\ + m_2 c_{23} m_3 + m_2 (c_{23} + c_{34}) m_4 + m_3 c_{34} m_4] (\alpha^2)^2 - [m_1 + m_2 + m_3 + m_4] \alpha^2 = 0.$$

70. Adja meg három szabadságfokú láncszerű elágazás- és áttételmentes egyik oldalon kötött rezgőrendszer karakterisztikus egyenletét! (Készítsen magyarázó ábrát!)



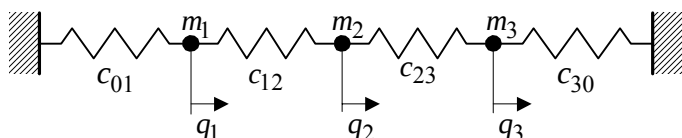
$$c_{01} m_1 c_{12} m_2 c_{23} m_3 (\alpha^2)^3 - [c_{01} m_1 c_{12} m_2 + c_{01} m_1 (c_{12} + c_{23}) m_3 + (c_{01} + c_{12}) m_2 c_{23} m_3] (\alpha^2)^2 + \\ + [c_{01} m_1 + (c_{01} + c_{12}) m_2 + (c_{01} + c_{12} + c_{23}) m_3] \alpha^2 - 1 = 0,$$

vagy



$$m_1 c_{12} m_2 c_{23} m_3 c_{30} (\alpha^2)^3 - [m_1 c_{12} m_2 (c_{23} + c_{30}) + m_1 (c_{12} + c_{23}) m_3 c_{30} + m_2 c_{23} m_3 c_{30}] (\alpha^2)^2 + \\ + [m_1 (c_{12} + c_{23} + c_{30}) + m_2 (c_{23} + c_{30}) + m_3 c_{30}] \alpha^2 - 1 = 0.$$

71. Adja meg három szabadságfokú láncszerű elágazás- és áttételmentes mindkét oldalon kötött rezgőrendszer karakterisztikus egyenletét! (Készítsen magyarázó ábrát!)



$$-c_{01} m_1 c_{12} m_2 c_{23} m_3 c_{30} (\alpha^2)^3 + [c_{01} m_1 c_{12} m_2 (c_{23} + c_{30}) + c_{01} m_1 (c_{12} + c_{23}) m_3 c_{30} + \\ + (c_{01} + c_{12}) m_2 c_{23} m_3 c_{30}] (\alpha^2)^2 - [c_{01} m_1 (c_{12} + c_{23} + c_{30}) + (c_{01} + c_{12}) m_2 (c_{23} + c_{30}) + \\ + (c_{01} + c_{12} + c_{23}) m_3 c_{30}] \alpha^2 - (c_{01} + c_{12} + c_{23} + c_{30}) = 0.$$

72. Adja meg N szabadságfokú láncszerű elágazás- és áttételmentes nem kötött rezgőrendszer saját körfrekvenciáinak nagyságrend szerinti elnevezéseit!

N db. saját körfrekvencia van, melyek nagyságrend szerinti elnevezése: $\alpha_0 = 0$,
 $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{N-1}$.

73. Adja meg N szabadságfokú láncszerű elágazás- és áttételmentes kötött rezgőrendszer saját körfrekvenciáinak nagyságrend szerinti elnevezéseit!

N db. saját körfrekvencia van, melyek nagyságrend szerinti elnevezése: $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_N$.

74. Definiálja a csomópontot, és adja meg a tulajdonságait!

Csomópontnak a rugó azon pontját nevezzük amelynek az elmozdulása zérus. Valóságos csomópontról beszélünk, ha a csomópont a rugóra esik. Ilyenkor a két szomszédos tömeg kitérése ellenfázisban van. Virtuális a csomópont, ha a csomópont nem esik a rugóra. Ilyenkor a két szomszédos tömeg kitérése azonos fázisban van. A csomópontok a rezgőrendszert egyszabadságfokú rendszerekre bontják.

75. Adja meg N szabadságfokú láncszerű elágazás- és áttételmentes, nem kötött rezgőrendszer csomópontjainak saját körfrekvenciáktól függő tulajdonságát!

A rendszernek $N-1$ db. csomópontja van, amelyek közül i számú valóságos és $N-i-1$ virtuális csomópont az α_i , $i = 1, 2, \dots, N-1$ saját körfrekvenciához tartozó rezgésképet adja.

76. Adja meg N szabadságfokú láncszerű elágazás- és áttételmentes, egyik oldalon kötött rezgőrendszer csomópontjainak saját körfrekvenciáktól függő tulajdonságát!

A rendszernek N db. csomópontja van, amelyek közül i számú valóságos és $N-i$ virtuális csomópont az α_i , $i = 1, 2, \dots, N$ saját körfrekvenciához tartozó rezgésképet adja.

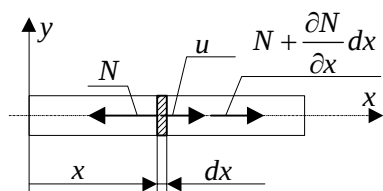
77. Adja meg N szabadságfokú láncszerű elágazás- és áttételmentes, mindkét oldalon kötött rezgőrendszer csomópontjainak saját körfrekvenciáktól függő tulajdonságát!

A rendszernek $N+1$ db. csomópontja van, amelyek közül $i+1$ számú valóságos csomópont és $N-i$ virtuális csomópont az α_i , $i = 1, 2, \dots, N$ saját körfrekvenciához tartozó rezgésképet adja.

78. Definiálja a kontinuum rezgések fogalmát!

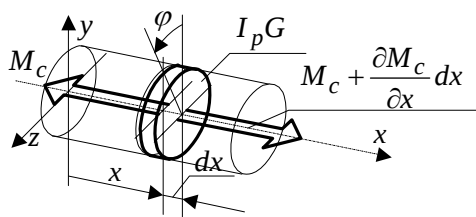
Kontinuum rezgéseken a folytonos tömegeloszlású rugalmas testek rezgéseit értjük.

79. Adja meg rudak longitudinális kontinuumrezgéseire vonatkozó mozgásegyenletet! Készítsen magyarázó ábrát!



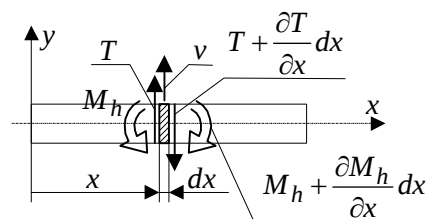
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

80. Adja meg rudak csavaró kontinuumrezgéseire vonatkozó mozgásegyenletet! Készítsen magyarázó ábrát!



$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

81. Adja meg rudak hajlító kontinuumrezgéseire vonatkozó mozgásegyenletet! Készítsen magyarázó ábrát!



$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{I_z E}{A \rho} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}$$

82. Adja meg rudak longitudinális kontinuumrezgéseire vonatkozó peremfeltételeit rúd irányába megfogott rúd végén, illetve rúd irányába terheletlen rúd végén!

Rúd irányába megfogott rúd végén: $u = 0$.

Rúd irányába terheletlen rúd végén: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

83. Adja meg rudak csavaró kontinuumrezgéseire vonatkozó peremfeltételeit elfordulás ellen megfogott rúd végén, illetve csavaró nyomatékkal terheletlen rúd végén!

Elfordulás ellen megfogott rúd végén: $\varphi = 0$.

Csavaró nyomatékkal terheletlen rúd végén: $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$.

84. Adja meg rudak hajlító kontinuumrezgéseire vonatkozó peremfeltételeit befalazott rúd végén, hajlító nyomatékkal és nyíró erővel terheletlen rúd végén, illetve rúdra merőleges irányba csuklósan megfogott, egyébként terheletlen hajlító nyomatékkal rúd végén!

Befalazott rúd végén: $v = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$.

Hajlító nyomatékkal és nyíró erővel terheletlen rúd végén: $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0$.

Rúdra merőleges irányba csuklósan megfogott, egyébként hajlító nyomatékkal terheletlen rúd végén: $v = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$.