(1) Adja meg a tenzor értelmezését és tulajdonságait!

Értelmezés: A tenzor homogén, lineáris, vektor-vektor függvény által megvalósított leképezés (hozzárendelés): $\vec{w} = f(\vec{v}) = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{v}$

Tulajdonságok: a) Homogén: ha $\vec{v} = \vec{0}$, akkor $\vec{w} = \vec{0}$.

b) Lineáris:

A $\vec{w}_1 = f(\vec{v}_1)$ és $\vec{w}_2 = f(\vec{v}_2)$ jelölést bevezetve, fennáll az alábbi összefüggés:

$\vec{w} = f(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \lambda_2 f(\vec{v}_2) = \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2$.

(2) Adja meg a $\underline{\underline{T}}$ tenzor és a $\underline{\underline{T}}^T$ transzponált tenzor diadikus értelmezését derékszögű descartesi koordinátarendszerben!

Tenzor: $\underline{\underline{T}} = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y + \vec{c} \circ \vec{e}_z)$,

Transzponált tenzor: $\underline{\underline{T}}^T = (\vec{e}_x \circ \vec{a} + \vec{e}_y \circ \vec{b} + \vec{e}_z \circ \vec{c})$,

ahol $\vec{a}$ az $\vec{e}_x$, $\vec{b}$ az $\vec{e}_y$, és $\vec{c}$ az $\vec{e}_z$ vektorok kép vektorai.

(3) Adja meg a szimmetrikus és a ferdeszimmetrikus tenzor értelmezését!

Szimmetrikus a tenzor, ha egyenlő a transzponáltjával: $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T$.

Ferdeszimmetrikus a tenzor, ha egyenlő a transzponáltja mínusz egyszeresével $\underline{\underline{T}} = -\underline{\underline{T}}^T$.

(4) Ismertesse a tenzorok felbontásának tételét!

Minden tenzor felbontható egy szimmetrikus és egy ferdeszimmetrikus rész ösz-szegére:
$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_{sz} + \underline{\underline{T}}_{fsz} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T) + \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T)$.

(5) Adja meg a mechanikai test modell értelmezését!

Olyan, idealizált tulajdonságokkal rendelkező test, amely a valóságos testnek a vizsgálat szempontjából leglényegesebb tulajdonságait tükrözi.

A test lényegesnek tartott tulajdonságait megtartjuk, a lényegtelennek ítélt tulajdonságokat pedig elhanyagoljuk.

(6) Mi a szilárdságtan?

A terhelés előtt és terhelés után is tartós nyugalomban levő, alakváltozásra képes testek kinematikája, dinamikája és anyagszerkezeti viselkedése.

(7) Definiálja az alakváltozás fogalmát!

Alakváltozásról beszélünk, ha terhelés hatására a test pontjai egymáshoz képest elmozdulnak és anyagi geometriai alakzatai (pl. hossz, szög, felület, térfogat) megváltoznak.

(8) Milyen esetben beszélünk rugalmas, illetve képlékeny alakváltozásról?

Rugalmas az alakváltozás, ha a terhelés hatására alakváltozott test a terhelés meg-szüntetése (a tehermentesítés) után visszanyeri eredeti alakját.

Képlékeny az alakváltozás, ha a terhelés hatására alakváltozott test a tehermentesítés után nem nyeri vissza eredeti alakját.

(9) Adja meg a kis elmozdulások és a kis alakváltozások értelmezését!

Kis elmozdulás esetén a test pontjainak elmozdulása nagyságrendekkel kisebb a test jellemző geometriai méreteinél.

Kis alakváltozások esetén a test alakváltozását jellemző mennyiségek lényegesen kisebbek, mint egy: $\varepsilon \ll 1$, $\gamma \ll 1$.

(10) *Két erőrendszer szilárdságtani szempontból mikor egyenértékű egymással?*

Két, ugyanarra a testre ható erőrendszer szilárdságtani szempontból egyenértékű, ha azok - a test kis részétől (a terhelés közvetlen környezetétől) eltekintve - a testnek ugyanazt az alakváltozási állapotát hozzák létre.

(11) *Ismertesse a Saint Venant elvet!*

Szilárd test alakváltozásakor a test valamely ugyanazon kis felületén ható, nyomatéki terük vonatkozásában egyenértékű erőrendszerek - a kis felület közvetlen környezetének kivételével - jó közelítéssel ugyanazt az alakváltozási állapotot hozzák létre.

(12) *Milyen mennyiséggel adható meg egyértelműen test P pontja elemi környezetének fajlagos, relatív elmozdulási állapota? Adja meg a jellemző mennyiséget diadikus alakban!*

A P pont elemi környezetének fajlagos, relatív elmozdulási állapotát a derivált tenzor jellemzi egyértelműen.

A derivált tenzor értelmezése: $\underline{\underline{D}} = (\vec{u}_x \circ \vec{e}_x + \vec{u}_y \circ \vec{e}_y + \vec{u}_z \circ \vec{e}_z)$,

ahol az $\vec{u}_x$, az $\vec{u}_y$ és az $\vec{u}_z$ az $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ elemi triéder végpontjainak fajlagos, relatív elmozdulásvektorai és $\circ$ a diadikus szorzás jele.

(13) *Adja meg a derivált tenzor szimmetrikus és ferdeszimmetrikus részének kinematikai tartalmát!*

A derivált tenzor felbontása: $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{\Psi}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T) + \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T)$.

ahol a szimmetrikus rész az $\underline{\underline{A}}$ alakváltozási tenzor,

a ferdeszimmetrikus rész a $\underline{\underline{\Psi}}$ forgató tenzor.

(14) *Adja meg az alakváltozási jellemzők értelmezését!*

a) ε_x, ε_y, ε_z - fajlagos nyúlások.

Pl. az ε_x az egységnyi, x irányú hossznak a terhelés hatására bekövetkező megváltozása.

Az ε_x akkor pozitív, ha az egységnyi hossz a terhelés hatására megnövekszik.

b) $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$, $\gamma_{zx} = \gamma_{zx}$ - fajlagos szögtorzulások.

Pl. az γ_{xy} az egymással 90^o-os szöget bezáró x és y irányok szögének a terhelés hatására bekövetkező megváltozása.

Az γ_{xy} akkor pozitív, ha a 90^o-os szög a terhelés hatására csökken.

(15) *Adja meg az alakváltozási tenzor definícióját diadikus alakban és írja fel az alakváltozási tenzor mátrixát derékszögű descartesi koordináta-rendszerben!*

a) Az alakváltozási tenzor diadikus alakban: $\underline{\underline{A}} = (\vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z)$,

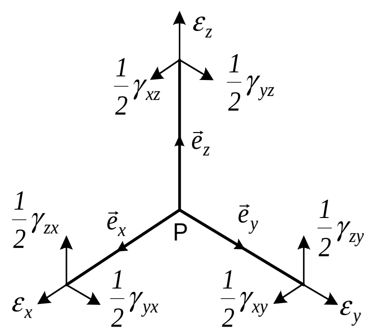
ahol az alakváltozási vektorok az alábbi alakúak:

$$\vec{\alpha}_x = \varepsilon_x \vec{e}_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{yx}\vec{e}_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{zx}\vec{e}_z,$$
$$\vec{\alpha}_y = \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\vec{e}_x + \varepsilon_y \vec{e}_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{zy}\vec{e}_z,$$
$$\vec{\alpha}_z = \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\vec{e}_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\vec{e}_y + \varepsilon_z \vec{e}_z.$$

és $\circ$ a diadikus szorzás jele.

b) Az alakváltozási tenzor mátrixa: $\left[\, \underline{\underline{A}} \,\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$.

(16) Szemléltesse az alakváltozási tenzort az elemi triéderen!



(17) Hogyan számíthatók ki az alakváltozási tenzorból az adott $\vec{n}$ és $\vec{m}$ ($\vec{n} \cdot \vec{m} = 0$) egységvektorokkal megadott irányokhoz tartozó fajlagos nyúlások és szögtorzulások?

A fajlagos nyúlások számítása: $\varepsilon_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n}, \quad \varepsilon_m = \vec{m} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{m}.$

A fajlagos szögtorzulások számítása: $\frac{1}{2}\gamma_{nm} = \frac{1}{2}\gamma_{mn} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n}.$

Az összefüggésekben $\cdot$ a skaláris szorzás jele.

(18) Adja meg az alakváltozási főtengelyek és főnyúlások értelmezését!

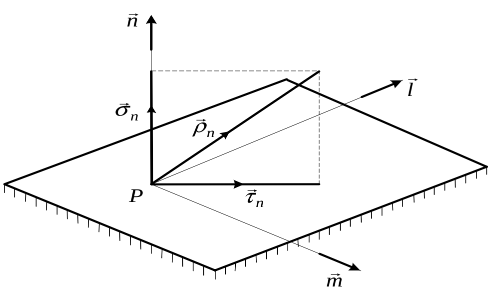
Ha $\vec{\alpha}_e = \varepsilon_e \vec{e}$ és minden $\vec{m} \perp \vec{e}$-re fennáll, hogy $\gamma_{me} = 2\,\vec{m} \cdot \vec{\alpha}_e = 0$, akkor $\vec{e}$ alakváltozási főtengely (alakváltozási főirány) és ε_e főnyúlás.

Megjegyzések:
- Az ε_e is lehet zérus ($\vec{\alpha}_e = \vec{0}$),
- Minden P pontban létezik legalább három főirány, amelyek kölcsönösen merőlegesek egymásra.

(19) Mi a feszültség?

A feszültségvektor a testben terhelés hatására fellépő, felület mentén megoszló belső erőrendszer sűrűségvektora.

(20) Hogyan számíthatók ki a feszültségvektor összetevői? Az összetevőkre bontást ábrán is szemléltesse!



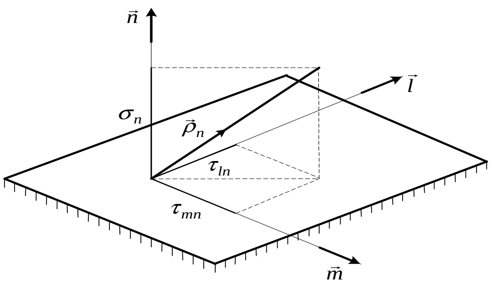
A normál feszültségi összetevő:

$\vec{\sigma}_n = \sigma_n \vec{n} = (\vec{n} \cdot \vec{\varrho}_n) \cdot \vec{n}$

A csúsztató feszültségi összetevő:

$\vec{\tau}_n = \vec{\varrho}_n - \sigma_n \vec{n} = (\vec{n} \times \vec{\varrho}_n) \times \vec{n}$

(21) Hogyan számíthatók ki a feszültségvektor koordinátái? A koordinátákra bontást ábrán is szemléltesse!



A normálfeszültség koordináta:

$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\varrho}_n = \vec{n} \cdot \vec{\sigma}_n$

A csúsztató feszültségi koordináták:

$\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\varrho}_n = \vec{m} \cdot \vec{\tau}_n$

$\tau_{ln} = \vec{l} \cdot \vec{\varrho}_n = \vec{l} \cdot \vec{\tau}_n$

(22) *Adja meg a feszültségi tenzor definícióját diadikus alakban és írja fel a feszültségi tenzor mátrixát derékszögű descartesi koordináta-rendszerben!*

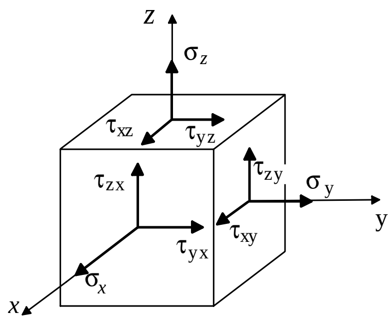
a) A feszültségi tenzor diadikus alakban: $\underline{\underline{T}} = (\vec{\varrho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\varrho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\varrho}_z \circ \vec{e}_z)$,

ahol a feszültségi vektorok az alábbi alakúak:

$$\vec{\varrho}_x = \sigma_x \vec{e}_x + \tau_{yx} \vec{e}_y + \tau_{zx} \vec{e}_z,$$
$$\vec{\varrho}_y = \tau_{xy} \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \tau_{zy} \vec{e}_z,$$
$$\vec{\varrho}_z = \tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z.$$

b) A feszültségi tenzor mátrixa: $\left[\, \underline{\underline{T}} \,\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$.

(23) *Szemléltesse a feszültségi tenzort az elemi kockán!*



(24) *Hogyan számíthatók a feszültségi tenzorból az adott $\vec{n}$ normálisú síkon fellépő $\vec{\varrho}_n$ feszültségvektor, valamint a σ_n és τ_{mn} feszültség koordináták?*

A feszültségvektor: $\vec{\varrho}_n = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n}$

A normál feszültségi koordináta: $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\varrho}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n}$

A csúsztató feszültségi koordináta: $\tau_{mn} = \tau_{nm} = \vec{m} \cdot \vec{\varrho}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n}$. Az összefüggésekben

$\cdot$ a skaláris szorzás jele.

(25) *Adja meg a feszültségi főirányok és főfeszültségek értelmezését!*

Ha az $\vec{e}$ egységvektorra $\perp$ elemi felületen $\vec{\tau}_e = \vec{0}$ és ebből következően $\vec{\varrho}_e = \sigma_e \vec{e}$, akkor az $\vec{e}$ feszültségi főtengely (feszültségi főirány) és σ_e főfeszültség, valamint az $\vec{e}$-re $\perp$ elemi felület síkja főfeszültségi sík.

Megjegyzések:
- A σ_e is lehet zérus ($\vec{\varrho}_e = \vec{0}$).
- Minden P pontban létezik legalább három főirány, amelyek kölcsönösen merőlegesek egymásra.

(26) *Ismertesse a mechanikai energia tétel alkalmazását rugalmas testek szilárdságtani feladataira!*

A mechanikai energia tétel: $E_2 - E_1 = W_{12} = W_K + W_B$,
ahol: - E_1 a rendszer (test) mozgási (kinetikai)energiája a terhelés előtt,
- E_2 a rendszer (test) mozgási (kinetikai)energiája a terhelés után,
- W_{12} a külső és belső erők munkája a terhelés során (az 1 és 2 állapot között),
- W_K a külső erők munkája a terhelés során (az 1 és 2 állapot között),
- W_B a belső erők munkája a terhelés során (az 1 és 2 állapot között).

A szilárdságtanban: $E_1 = E_2 = 0$, ezért:

$$W_{12} = W_K + W_B = 0, \quad \text{azaz} \quad W_K = -W_B = U + W_D.$$

ahol: - U a rendszerben (testben) felhalmozott rugalmas alakváltozási energia és
- W_D a disszipációs (elnyelt) energia.

Rugalmas alakváltozás esetén: $W_D = 0$, ezért: $W_K = U$.

(27) Adja meg a mechanikai rúd modell definícióját!

A rúd olyan test, amelynek egyik mérete lényegesen nagyobb, mint a másik kettő.

Mechanikai rúd modell: A rudat egy vonallal (a rúd középvonalával) helyettesítjük és a rúd mechanikai viselkedését jellemző mennyiségeket ehhez a vonalhoz kötjük.

(28) Adja meg a rúd középvonalának és keresztmetszetének a definícióját!

Középvonal: A rúdkeresztmetszetek súlypontjai által meghatározott vonal.

Keresztmetszet: A rúd legnagyobb méretére merőleges metszet.

(29) Milyen esetben beszélünk prizmatikus rúdról?

1. definíció: Prizmatikus rúdról abban az esetben beszélünk, ha a rúd keresztmetszeteinek az alakja és térbeli elhelyezkedése a rúd hossza mentén nem változik.
2. definíció: Prizmatikus az az egyenes középvonalú rúd, amelynek keresztmetszetei állandó alakúak és a középvonal mentén párhuzamos eltolással egymásba tolhatók.

(30) Definiálja az egytengelyű feszültségi állapotot! Milyen egyszerű igénybevétel esetén alakul ki a rúdban egytengelyű feszültségi állapot?

Egy P pontbeli feszültségi állapot egytengelyű, ha az egy nullától különböző főfe-szültséggel (normál feszültséggel) jellemezhető.

Egytengelyű feszültségi állapot alakul ki húzás-nyomásnál és hajlításnál.

(31) Adja meg a homogén, izotróp, lineárisan rugalmas test (anyag) definícióját!

Homogén: Az anyagi tulajdonságok a test minden pontjában azonosak.

Izotróp: Az anyagi tulajdonságok nem függnek az iránytól.

Lineárisan rugalmas: Ha a feszültségek és az alakváltozási jellemzők között lineáris függvénykapcsolat áll fenn.

(32) Írja fel az egyszerű Hooke törvényt húzás-nyomásra!

$\sigma_z = E\varepsilon_z$ és $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_k = -\nu\varepsilon_z$

ahol: - σ_z a középvonal irányú normálfeszültség,
- ε_z a középvonal irányú fajlagos nyúlás,
- $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_k$ a keresztirányú fajlagos nyúlás,
- E a (Young-féle) rugalmassági modulus,
- ν a Poisson tényező.

(33) *Fogalmazza meg általánosan a szilárdságtani méretezés feladatát rúdszerkezetek esetén!*

Adott: A rúd anyaga és terhelése (igénybevételei).

Feladat: A rúd keresztmetszeti méreteinek meghatározása és anyagának megválasztása úgy, hogy a rúd az adott terhelést kellő biztonsággal elviselje.

(34) *Fogalmazza meg általánosan a szilárdságtani ellenőrzés feladatát rúdszerkezetek esetén!*

Adott: A rúd anyaga, keresztmetszetének méretei és terhelése (igénybevételei).

Feladat: Annak eldöntése, hogy a rúd az adott terhelést kellő biztonsággal elviseli-e.

(35) *Írja fel a P ponti feszültségi tenzort és adja meg a benne szereplő feszültség koordináták, valamint az l hosszúságú rúd rugalmas alakváltozási energiájának ki-számítási módját prizmatikus rúd húzás-nyomása esetén!*

A feszültségi tenzor mátrixa: $\left[\underline{\underline{T}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$.

A normálfeszültség kiszámítása: $\sigma_z = \frac{N}{A}$, ahol: N a rúderő és
A a keresztmetszet területe.

A rugalmas alakváltozási energia: $U = \frac{1}{2}\frac{N^2}{A\,E}\,l$ ahol: E a rugalmassági modulus.

(36) *Írja fel henger koordináta-rendszerben a P ponti feszültségi tenzort és adja meg a benne szereplő feszültség koordináták, valamint az l hosszúságú rúd rugalmas alakváltozási energiájának ki-számítási módját prizmatikus, kör- és körgyűrű keresztmetszetű rúd csavarása esetén!*

A feszültségi tenzor mátrixa: $\left[\underline{\underline{T}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}$.

A csúsztató feszültség kiszámítása: $\tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} = \frac{M_c}{I_p}\,R$,

ahol: M_c a csavaró nyomaték,
I_p a keresztmetszet poláris másodrendű nyomatéka és
R a P pont súlyponttól mért távolsága.

A rugalmas alakváltozási energia: $U = \frac{1}{2}\frac{M_c^2}{I_p\,G}\,l$, ahol: G a csúsztató rugalmassági modulus.

(37) *Adja meg az I_p poláris másodrendű nyomaték értelmezését és kiszámítását kör- és körgyűrű keresztmetszetre!*

Értelmezés: $I_p = \int\limits_{(A)} R^2 dA$.

Kiszámítás: kör keresztmetszetre: $I_p = \frac{d^4\pi}{32}$,
körgyűrű keresztmetszetre $I_p = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{32}$.

(38) *Adja meg prizmatikus rúd tiszta hajlításának az értelmezését és ismertesse a Bernoulli hipotézist!*

Tiszta hajlítás: Ha a vizsgált rúdszakaszon az igénybevétel kizárólag hajlító-nyomaték.

Bernoulli hipotézis: Tiszta hajlítás esetén a rúd deformált keresztmetszetei síkok maradnak, a keresztmetszetek síkjában nem lép fel szögtorzulás és a keresztmetszetek az alakváltozás után is merőlegesek maradnak a rúd alakváltozott S ponti szálára.

(39) *Milyen esetben beszélünk egyenes hajlításról és ferde hajlításról?*

Egyenes hajlítás: Ha az $\vec{M}_S$ hajlító nyomaték párhuzamos a keresztmetszet valamelyik S ponti tehetetlenségi főtengelyével.

Ferde hajlítás: Ha az $\vec{M}_S$ hajlító nyomaték nem párhuzamos a keresztmetszet egyik S ponti tehetetlenségi főtengelyével sem.

(40) *Írja fel a P ponti feszültségi tenzort és adja meg a benne szereplő feszültség koordináták, valamint az l hosszúságú rúd rugalmas alakváltozási energiájának ki-számítási módját prizmatikus rúd tiszta, egyenes hajlítása esetén!*

A feszültségi tenzor mátrixa: $\left[\underline{\underline{T}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$

A normálfeszültség kiszámítása: $\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x}\, y,$

ahol: - M_{hx} az x irányú hajlító nyomaték,
- I_x a keresztmetszet x tengelyre számított másodrendű nyomatéka és
- y a P pont x tengelytől mért előjeles távolsága. (Az x tengely a keresztmetszet S ponti tehetetlenségi főtengelye.)

A rugalmas alakváltozási energia: $U = \frac{1}{2}\frac{M_{hx}^2}{I_x\, E}\, l,$ ahol: E a rugalmassági modulus.

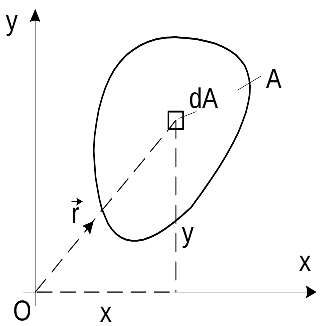
(41) *Prizmatikus rúd tiszta, egyenes hajlítása esetén adja meg a S ponti szál görbülete és a hajlító nyomaték közötti öszefüggést és adja meg a zérusvonal értelmezését!*

$\kappa = \frac{1}{\varrho} = \frac{M_{hx}}{I_x E}$,

ahol: - M_{hx} az x irányú hajlító nyomaték,
- I_x a keresztmetszet x tengelyre számított másodrendű nyomatéka,
- E a rúd anyagának rugalmassági modulusa és
- ϱ a S ponti szál görbületi sugara.

Zérusvonal: A keresztmetszet azon pontjai, ahol a $\sigma_z = 0$.

(42) *Értelmezze keresztmetszet tengelyre, tengelypárra és pontra számított másodrendű (tehetetlenségi) nyomatékát!*



Az x és y tengelyekre számított másodrendű nyomatékok:

$I_x = \int\limits_{(A)} y^2\, dA > 0, \quad I_y = \int\limits_{(A)} x^2\, dA > 0.$

Az x, y tengelypárra számított másodrendű nyomaték:

$I_{xy} = I_{yx} = \int\limits_{(A)} xy\, dA = \int\limits_{(A)} yx\, dA.$

Az O pontra számított másodrendű nyomaték:

$I_0 = \int\limits_{(A)} (\vec{r})^2\, dA = \int\limits_{(A)} (x^2 + y^2)\, dA = I_y + I_x > 0.$

(43) *Írja fel a keresztmetszet S ponti tehetetlenségi tenzorának mátrixát és adja meg a mátrix elemeinek értelmezését!*

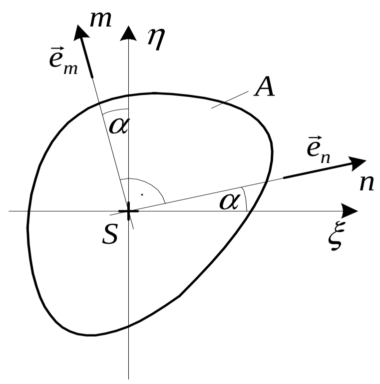
A tehetetlenségi tenzor a keresztmetszet S súlypontjához kötött ξ, η koordinátarendszerben:

$$\left[\underline{\underline{I}}_S\right] = \begin{bmatrix} I_\xi & -I_{\xi\eta} \\ -I_{\eta\xi} & I_\eta \end{bmatrix}$$

A tenzor elemeinek értelmezése:

$$I_\xi = \int\limits_{(A)} \eta^2 dA\,, \qquad I_\eta = \int\limits_{(A)} \xi^2 dA\,, \qquad I_{\xi\eta} = \int\limits_{(A)} \xi\eta dA\,.$$

(44) Az S ponti ξ, η koordináta-rendszerbeli $\underline{\underline{I}}_S$ tehetetlenségi tenzor ismeretében hogyan számíthatók ki az S ponti n és m tengelyekre és tengelypárra számított I_n, I_m, I_{nm} tehetetlenségi nyomatékok?



Az n és m tengelyekre számított másodrendű nyomatékok:

$I_n = \vec{e}_n \cdot \underline{\underline{I}}_S \cdot \vec{e}_n, \quad I_m = \vec{e}_m \cdot \underline{\underline{I}}_S \cdot \vec{e}_m.$

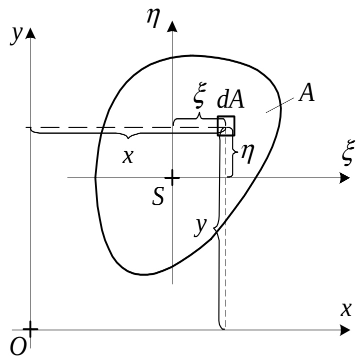
Az n, m tengelypárra számított másodrendű nyomaték:

$I_{nm} = I_{mn} = -\vec{e}_n \cdot \underline{\underline{I}}_S \cdot \vec{e}_m = -\vec{e}_m \cdot \underline{\underline{I}}_S \cdot \vec{e}_n.$

Az összefüggésekben $\vec{e}_n$ és $\vec{e}_m$ az n és m irányú egységvektorok:

$\vec{e}_n = \cos\alpha \vec{e}_\xi + \sin\alpha \vec{e}_\eta,$
$\vec{e}_m = -\sin\alpha \vec{e}_\xi + \cos\alpha \vec{e}_\eta.$

(45) Írja fel a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatékaira vonatkozó Steiner-tételt tenzoriális és skaláris alakban!



A tenzoriális alak:

$\underline{\underline{I}}_O = \underline{\underline{I}}_S + \underline{\underline{I}}_{OS},$

ahol: $\left[\underline{\underline{I}}_{OS} \right] = A \begin{bmatrix} y_S{}^2 & -y_S x_S \\ -x_S y_S & x_S{}^2 \end{bmatrix}.$

A skaláris alak:

$I_x = I_\xi + A y_S{}^2,$
$I_y = I_\eta + A x_S{}^2,$
$I_{xy} = I_{\xi\eta} + A x_S y_S.$

(46) Adja meg keresztmetszet tehetetlenségi főtengelyeinek és fő tehetetlenségi nyomatékainak az értelmezését!

Tehetetlenségi főtengely az n és m tengely $(n \perp m)$, ha az n, m tengelypárra számított nyomatékok eltünnek: $I_{nm} = I_{mn} = 0$.

Fő tehetetlenségi nyomatékok az n és m tehetetlenségi főtengelyekre számított I_n és I_m másodrendű nyomatékok.

(47) Vezesse le a keresztmetszet fő tehetetlenségi nyomatékainak meghatározására szolgáló karakterisztikus egyenletet!

Létezik-e olyan $\vec{n}$ irány, amelyre fennáll az alábbi egyenlet?

$$\underline{\underline{I}}_S \cdot \vec{n} = \lambda \, \vec{n},$$

ahol $\underline{\underline{I}}_S$ a keresztmetszet S ponti tehetetlenségi tenzora,

$\vec{n} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y$ a keresett irány egységvektora és

λ ismeretlen skaláris együttható.

Az egyenletet a bal oldalra rendezve és a mennyiségeket részletesen kiírva:

$$\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek a homogén lineáris algebrai egyenletnek csak abban az esetben van nemtriviális megoldása, ha a rendszer determinánsa eltűnik:

$$\begin{vmatrix} (I_x - \lambda) & -I_{xy} \\ -I_{yx} & (I_y - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

A karakterisztikus egyenletet a determináns kifejtésével kapjuk:

$$\lambda^2 - (I_x + I_y)\lambda + I_x I_y - I_{yx}^2 = 0.$$

(48) *Írja fel a szilárd testre vonatkozó egyensúlyi egyenletet koordináta rendszertől független vektoriális alakban és adja meg a skaláris egyenleteket x, y, z derékszögű descartesi koordináta-rendszerben!*

Vektoriális alak: $\underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$,

ahol: $\underline{\underline{T}}$ a feszültségi tenzor, ∇ a Hamilton-féle differenciál operátor és
$\vec{q}$ a térfogati terhelés sűrűségvektora.

Skaláris egyenletek x, y, z koordináta-rendszerben:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0,$$
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 0,$$
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0.$$

(49) *Adja meg a derivált tenzormező és az elmozdulásmező, az alakváltozási tenzormező és az elmozdulásmező, valamint a forgató tenzormező és az elmozdulásmező kap-csolatát koordináta rendszertől független alakban!*

A derivált tenzor: $\underline{\underline{D}} = \vec{u} \circ \nabla$,
Az alakváltozási tenzor: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u})$,
A forgató tenzor: $\underline{\underline{\Psi}} = \frac{1}{2}(\vec{u} \circ \nabla - \nabla \circ \vec{u})$,
ahol: $\vec{u}$ az elmozdulási vektormező,
∇ a Hamilton-féle differenciál operátor és
$\circ$ a diadikus szorzás jele.

(50) *Írja fel az alakváltozási jellemzők és az elmozdulás-koordináták közötti kapcsolatot skaláris alakban!*

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

(51) *Írja fel az általános Hooke törvény izotróp anyagra vonatkozó mindkét tenzoriális alakját és adja meg az egyenletekben szereplő mennyiségek jelentését!*

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G}(\underline{\underline{T}} - \frac{\nu T_I}{1+\nu}\underline{\underline{E}}), \qquad \underline{\underline{T}} = 2G(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu A_I}{1-2\nu}\underline{\underline{E}}),$$

ahol: $\underline{\underline{A}}$ az alakváltozási tenzor, $\underline{\underline{T}}$ a feszültségi tenzor, $\underline{\underline{E}}$ az egység tenzor,
G a csúsztató rugalmassági modulus, ν a Poisson tényező,
T_I a feszültségi tenzor első skalár invariánsa és
A_I az alakváltozási tenzor első skalár invariánsa.

(52) *Vezesse le az E rugalmassági modulus és a G csúsztató rugalmassági modulus közötti kapcsolatot!*

Egytengelyű feszültségi állapot esetén: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z$.

Az egyszerű Hooke törvény: $\sigma_z = E\varepsilon_z$.

Az általános Hooke törvény:
$$\sigma_z = 2G[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)] =$$
$$= 2G[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(-\nu\varepsilon_z - \nu\varepsilon_z + \varepsilon_z)] =.$$
$$= 2G[\varepsilon_z + \nu\varepsilon_z)] = 2G(1+\nu)\varepsilon_z.$$

Az egyszerű és az általános Hooke törvényt összevetve: $E = 2G(1+\nu)$.

(53) Írja fel az általános Hooke törvényt ortotróp anyagra mátrixos alakban és adja meg az egyenletekben szereplő mennyiségek jelentését!

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$

ahol: E_1, E_2, E_3 az $1, 2, 3$ irányú húzáshoz tartozó rugalmassági modulus,

G_{12}, G_{23}, G_{13} a csúsztató rugalmassági modulusok,

ν_{12}, ν_{23}, ν_{13} a Poisson tényezők.

Például ν_{12} az 1 irányú nyúláshoz tartozó 2 irányú nyúlást (kontrakciót) határozza meg.

(54) Írja fel a fajlagos alakváltozási energia általános értelmezését vektoriális és skaláris alakban, továbbá adja meg az összefüggésekben szereplő mennyiségek jelentését!

Vektoriális alak: $u = \frac{1}{2}(\vec{\varrho}_x \cdot \vec{\alpha}_x + \vec{\varrho}_y \cdot \vec{\alpha}_y + \vec{\varrho}_z \cdot \vec{\alpha}_z)$,

ahol: $\vec{\varrho}_x$, $\vec{\varrho}_y$, $\vec{\varrho}_z$ az x, y, z normálisú felületelemen fellépő feszültségvektor,

$\vec{\alpha}_x$, $\vec{\alpha}_y$, $\vec{\alpha}_z$ az x, y, z irányhoz tartozó alakváltozási vektor.

Skaláris alak: $u = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz})$,

ahol: σ_x, σ_y, σ_z normál feszültségek,

τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz} csúsztató feszültségek,

ε_x, ε_y, ε_z fajlagos nyúlások,

γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz} fajlagos szögtorzulások.

(55) Adja meg a redukált (egyenértékű) feszültség definícióját!

Olyan feszültség, amely a pontbeli feszültségi állapotot tönkremenetel szempontjából egyértelműen jellemzi.

A redukált feszültség bevezetésével a tetszőleges térbeli feszültségi állapotot egytengelyű feszültségi állapotra vezetjük vissza.

(56) Hogyan értelmezzük a Coulomb-féle redukált feszültséget?

$$\sigma_{red}(Coulomb) = \sigma_{max} = max(|\sigma_1|, |\sigma_3|),$$

ahol: σ_1 a legnagyobb, σ_3 pedig a legkisebb főfeszültség.

Coulomb szerint a pontbeli feszültségi állapotot károsodás szempontjából a legnagyobb abszolút értékű normál feszültség jellemzi.

(57) Hogyan értelmezzük a Mohr-féle redukált feszültséget?

$$\sigma_{red}(Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3,$$

ahol: σ_1 a legnagyobb, σ_3 pedig a legkisebb főfeszültség.

Mohr szerint a pontbeli feszültségi állapotot károsodás szempontjából a legnagyobb Mohr kör átmérője jellemzi.

(58) Hogyan értelmezzük a Huber-Mises-Hencky-féle redukált feszültséget?

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}\ ,$$

vagy

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}\ ,$$

ahol: $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ főfeszültségek,

$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z$ normál feszültségek,

$\tau_{xy},\ \tau_{yz},\ \tau_{xz}$ csúsztató feszültségek.

A Huber-Mises-Hencky-féle redukált feszültség arányos az u_T fajlagos torzulási energiával.

(59) *Adja meg a redukált feszültség számításának módját abban az esetben, amikor egy pontbeli feszültségi állapotot egy normál feszültség és egy (vele azonos síkon fellépő) csúsztató feszültség jellemzi!*

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + \beta\tau^2}\ ,$$

ahol: Mohr esetében $\beta = 4$ és

Huber-Mises-Hencky esetében $\beta = 3$.

(60) *Adja meg a ferde hajlítás mindkét értelmezését!*

Ha az $\vec{M}_S$ nyomatékvektor nem párhuzamos egyik S ponti tehetetlenségi főtengellyel sem.

Ha az $\vec{M}_S$ nyomatékvektor nem párhuzamos a zérus-vonallal.

(61) *Írja fel a S ponti tehetetlenségi tenzor értelmezését!*

$$\underline{\underline{I}}_S = \int_{(A)} \left[R^2 \underline{\underline{E}} - \vec{R} \circ \vec{R}\right] dA\ ,$$

ahol: $\vec{R}$ a S pontból a dA elemi tömeghez mutató helyvektor,

$\underline{\underline{E}}$ az egységtenzor és

$\circ$ a diadikus szorzás jele.

(62) *Adja meg ferde hajlítás esetén a zérusvonal értelmezését és írja fel a zérusvonal egyenletét!*

Zérusvonal: A keresztmetszet azon pontjai, ahol $\sigma_z = 0$.

A zérusvonal egyenlete:

$$\sigma_z = 0 = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x, \quad \text{vagy} \qquad y = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}} \frac{I_x}{I_y} x,$$

ahol: M_{hx}, M_{hy} az x, y tehetetlenségi főtengely irányú előjeles hajlítónyomatéki koordináták és

I_x, I_y az x, y tehetetlenségi főtengelyekre számított másodrendű nyomatékok.

(63) *Írja fel a P ponti feszültségi tenzort és adja meg a benne szereplő feszültség koordináták kiszámítási módját prizmatikus rúd ferde hajlítása esetén!*

A feszültségi tenzor mátrixa: $\left[\,\underline{\underline{T}}\,\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$

A normál feszültség kiszámítása: $\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x,$

ahol: M_{hx}, M_{hy} az x, y tehetetlenségi főtengely irányú hajlítónyomatéki koordináták és

I_x, I_y az x, y tehetetlenségi főtengelyekre számított másodrendű nyomatékok.

(64) *Milyen esetben beszélünk excentrikus húzás-nyomásról? Hogyan határozhatók meg ferde hajlítás és excentrikus húzás-nyomás esetén a keresztmetszet veszélyes pontjai?*

Excentrikus húzás-nyomás esetén a húzó-nyomó erő hatásvonala nem megy át a keresztmetszet S pontján.

Ferde hajlítás és excentrikus húzás-nyomás esetén a keresztmetszet veszélyes pontjai a zérusvonaltól legtávolabb levő pontok.

(65) *Írja fel a P ponti feszültségi tenzort és adja meg a benne szereplő feszültség koordináták kiszámítási módját prizmatikus rúd excentrikus húzás-nyomása esetén!*

A feszültségi tenzor mátrixa: $\left[\,\underline{\underline{T}}\,\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$

A normál feszültség kiszámítása: $\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x,$

ahol: M_{hx}, M_{hy} az x, y tehetetlenségi főtengely irányú hajlítónyomatéki koordináták,

I_x, I_y az x, y tehetetlenségi főtengelyekre számított másodrendű nyomatékok,

N a rúderő és A a keresztmetszet területe.

(66) *Adja meg excentrikus húzás-nyomás esetén a zérusvonal értelmezését, legfontosabb tulajdonságát és írja fel a zérusvonal egyenletét!*

Zérusvonal: A keresztmetszet azon pontjai, ahol $\sigma_z = 0$.

Tulajdonság: A zérusvonal nem függ a húzó (nyomó) erő nagyságától, csak az erő támadáspontjának helykoordinátáitól függ.

A zérusvonal egyenlete (1. változat): $\sigma_z = 0 = \frac{F}{A} + \frac{F\,\eta}{I_x} y + \frac{F\,\xi}{I_y} x,$

ahol: F a húzó (nyomó) erő,

ξ és η az erő támadáspontjának koordinátái,

I_x, I_y az x, y tehetetlenségi főtengelyekre számított másodrendű nyomatékok,

A a keresztmetszet területe.

A zérusvonal egyenlete (2. változat): $\sigma_z = 0 = 1 + \frac{\eta\, y}{{i_x}^2} + \frac{\xi\, x}{{i_y}^2},$

ahol: ξ és η a húzó (nyomó) erő támadáspontjának koordinátái,

$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$ és $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ az x, illetve az y tengelyre számított inercia sugarak.

(67) *Adja meg a magidom definícióját excentrikus húzás-nyomás esetén!*

Excentrikus húzás-nyomás esetén a magidom az erő azon támadáspontjainak mértani helye, amelyeken ható erőből a keresztmetszeten csak egyféle előjelű feszültségek keletkeznek.

A magidom határát a keresztmetszetet érintő zérusvonalakhoz tartozó erő-támadáspontok alkotják.

(68) *Írja le prizmatikus rúd hajlítás-nyírásánál alkalmazott feltételezéseket!*

- A σ_z úgy számítható, mint tiszta hajlítás esetén.
- A τ_{yz} egyensúlyi feltételből határozható meg.
- Az x és y tengelyek a keresztmetszet S ponti tehetetlenségi főtengelyei.
- Az x tengellyel párhuzamos egyenesen ébredő $\vec{\tau}_z$ feszültségek az y tengelyen egy pontban metsződnek.
- Minden x tengellyel párhuzamos egyenes mentén a τ_{yz} állandó.

(69) *Írja fel prizmatikus rúd hajlítás-nyírása esetén a P ponti feszültségi tenzort és adja meg a benne szereplő feszültség koordináták kiszámítási módját!*

A feszültségi tenzor mátrixa: $\left[\,\underline{\underline{T}}\,\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$

A normál feszültség kiszámítása: $\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y$,

ahol: M_{hx} az x tehetetlenségi főtengely irányába mutató hajlítónyomaték,
I_x az x tehetetlenségi főtengelyre számított másodrendű nyomaték.

A τ_{yz} csúsztató feszültség kiszámítása: $\tau_{yz} = -\frac{T_y\, S_x(y)}{I_x\, a(y)}$,
ahol: T_y az y tengely irányú nyíróerő,
$S_x(y)$ a keresztmetszet $y = áll.$ egyenes fölé (alá) eső részének az x tengelyre számított statikai nyomatéka,
$a(y)$ a keresztmetszetbe metsző $y = áll.$ egyenes szakasz hossza.

A τ_{xz} csúsztató feszültség kiszámítása abból a feltételből történik, hogy a $\vec{\tau}_z$ fe-szültségek az y tengelyen egy pontban metsződnek.

(70) *Definiálja vékonyfalú szelvények esetén a nyírási (csavarási) középpontot! Adja meg a nyírási (csavarási) középpontnak a keresztmetszet igénybevételei vonatkozásában játszott szerepét!*

A nyírási középpont a keresztmetszeten fellépő $\vec{\tau}_z$ csúsztató feszültségek eredőjének támadáspontja. (Az eredő hatásvonala átmegy a nyírási középponton.)

Ha a terhelő erőrendszer eredőjének hatásvonala nem megy át a nyírási (csavarási) középponton, akkor a keresztmetszet nem csak hajlításra és nyírásra, hanem még csavarásra is igénybe van véve.

(71) *Definiálja a karcsú rúd, a zömök rúd és a centrikus nyomás fogalmát!*

Karcsú rúd: A rúd hossza lényegesen nagyobb, mint a rúd jellemző keresztmetszeti méretei.

Zömök rúd: A rúd hossza nem lényegesen nagyobb, mint a rúd jellemző keresztmetszeti méretei.

Centrikus nyomás: Az F nyomó erő a rúd keresztmetszetének S súlypontjában támad.

(72) *Adja meg a stabil és az instabil egyensúlyi helyzet értelmezését!*

Stabil egyensúly helyzet: Ha a rudat ebből az egyensúlyi helyzetből egy kis hatással kimozdítjuk, akkor a rúd pontjainak elmozdulásai kicsik lesznek és a rúd a kis hatás megszünte után visszatér a kiindulási egyensúlyi helyzetébe.

Instabil egyensúly helyzet: Ha a rudat ebből az egyensúlyi helyzetből egy kis hatással kimozdítjuk, akkor a rúd egy másik, a stabil egyensúlyi helyzetet veszi fel.

(73) *Karcsú, centrikusan nyomott rudaknál mikor léphet fel kihajlás és miért jelent a kihajlás a rúdra veszélyt?*

Kihajlás léphet fel, ha az F nyomóerő nagyobb, vagy egyenlő, mint az F_{krit} legkisebb kritikus erő.

Ez azért jelent veszélyt, mert ekkor az egyenes egyensúlyi alak nem stabil, azaz egy kis zavarás hatására a rúd elveszítheti egyenes egyensúlyi alakját és görbült egyensúly alakba mehet át. A görbült egyensúlyi alak a rúd pontjainak nagyon nagy elmozdulását is jelentheti, ami a rúd tönkremeneteléhez vezet.

(74) *Karcsú, centrikusan nyomott rudaknál hogyan számítható ki a kritikus feszültség?*

A kritikus feszültség:

$$\sigma_{krit} = \begin{cases} R_{p_{0,2}} - \dfrac{R_{p_{0,2}} - R_E}{\lambda_E}\lambda, & \text{ha } 0 \le \lambda \le \lambda_E \text{ (Tetmajer egyenes)}, \\[2ex] \pi^2 \dfrac{E}{\lambda^2}, & \text{ha } \lambda_E \le \lambda \quad \text{(Euler hiperbola)}. \end{cases}$$

Itt $R_{p_{0,2}}$ a folyáshatár, R_E a rugalmassági (arányossági) határ, λ a rúd karcsúsági tényezője, λ_E a határ karcsúsági tényező.

(75) *Hogyan számítható ki rúdszerkezetek alakváltozási energiája általános esetben?*

$$U = \int\limits_{(V)} u\,dV = \underbrace{U_N}_{\substack{\text{húzás-nyomási}\\ \text{alakváltozási}\\ \text{energia}}} + \underbrace{U_{M_h}}_{\substack{\text{hajlítási}\\ \text{alakváltozási}\\ \text{energia}}} + \underbrace{U_C}_{\substack{\text{csavarási}\\ \text{alakváltozási}\\ \text{energia}}} + \underbrace{U_T}_{\substack{\text{nyírási}\\ \text{alakváltozási}\\ \text{energia}}}.$$

Ha $U_T \approx 0$, akkor $U = \frac{1}{2} \int\limits_{(l)} \left(\frac{N^2}{A\,E} + \frac{M_{hx}^2}{I_x\,E} + \frac{M_{hy}^2}{I_y\,E} + \frac{M_c^2}{I_p\,G} \right) ds$

(76) Ismertesse a Betti tételt!

Betti tétel: $W_{12} = W_{21} = U_{12} = U_{21}$.

Ha egy lineárisan rugalmas rendszerre két, egymástól független, $(E)'$ és $(E)''$-vel jelölt erőrendszer hat, akkor

- Az $(E)'$ erőrendszernek az $(E)''$ erőrendszer által létrehozott elmozdulási mezőn végzett W_{12} munkája egyenlő az $(E)''$ erőrendszernek az $(E)'$ erőrendszer által létrehozott elmozdulási mezőn végzett W_{21} munkájával.
- Bármelyik erőrendszer munkája a másik okozta elmozdulási mezőn egyenlő a belső energia $U_{12} = U_{21}$-vel jelölt részével.

A fenti munka és energia mennyiségek az alábbi módon számíthatók:

$$W_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i' \cdot \vec{u}_i'' + \vec{M}_i' \cdot \vec{\psi}_i'' \right), \qquad W_{21} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i'' \cdot \vec{u}_i' + \vec{M}_i'' \cdot \vec{\psi}_i' \right),$$

$$U_{21} = U_{21} = \int\limits_{(l)} \left(\frac{N'\,N''}{A\,E} + \frac{M_{hx}'\,M_{hx}''}{I_x\,E} + \frac{M_{hy}'\,M_{hy}''}{I_y\,E} + \frac{M_c'\,M_c''}{I_p\,G} \right) ds.$$

(77) Ismertesse a Castigliano tételt!

1. alak: $u_i = \frac{\partial\,U}{\partial\,F_i}$.

A szerkezetet terhelő F_i erő támadáspontjának az F_i erő irányába eső u_i elmozdulása egyenlő a szerkezet U alakváltozási energiájának az F_i erő szerint vett deriváltjával.

2. alak: $\psi_i = \frac{\partial\,U}{\partial\,M_i}$.

A szerkezetet terhelő M_i nyomaték keresztmetszetének az M_i nyomaték irányába eső ψ_i szögelfordulása egyenlő a szerkezet U alakváltozási energiájának az M_i nyomaték szerint vett deriváltjával.

(78) Mikor statikailag határozott egy szerkezet?

Ha az ismeretlen támasztó és belső erő koordináták száma egyenlő a szerkezetre felírható, egymástól független skaláris statikai egyensúlyi egyenletek számával.

Ha a szerkezet támasztó és belső erőrendszerének skaláris koordinátái statikai egyensúlyi (vetületi és nyomatéki) egyenletekből meghatározhatók.

(79) Mikor statikailag határozatlan egy szerkezet?

Ha az ismeretlen támasztó és belső erő koordináták száma nagyobb, mint a szerkezetre felírható, egymástól független skaláris statikai egyensúlyi egyenletek számával.

Ha a szerkezet támasztó és belső erőrendszerének skaláris koordinátái statikai egyensúlyi (vetületi és nyomatéki) egyenletekből nem határozhatók meg.

(80) Írja le a statikailag határozatlan tartószerkezetek támasztóerői meghatározásának gondolatmenetét!

- A szerkezet statikailag határozottá tétele (törzstartó).
- Az alakváltozási (geometriai) korlátozási egyenlet felírása.
- Az alakváltozási korlátozásból a Castigliano tétellel a plusz támasztóerő koordináta meghatározása.
- Statikai egyensúlyi egyenletekből a többi támasztóerő koordináta meghatározása.

(81) Milyen szerkezeti elemet tekintünk rugónak?

A rugó olyan nagy elmozdulásokat megvalósító szerkezeti elem, amely a rá ható erők munkáját rugóenergia formájában tárolja, majd ismét mechanikai munkává alakítja.

(82) Adja meg a rugókarakterisztikák és a rugóállandók értelmezését!

Rugókarakterisztika: A rugóerő - elmozdulás, vagy a rugónyomaték - szögelfordulás közötti függvénykapcsolat.

Rugóállandó: $c = \frac{v}{F}$ - az egységnyi rugóerőhöz tartozó elmozdulás, vagy

$\gamma = \frac{\psi}{M}$ - az egységnyi rugónyomatékhoz tartozó szögelfordulás.

(83) Hogyan számítható ki az erő és a nyomaték rugón végzett munkája? Adja meg a rugókihasználási tényező értelmezését!

Erő munkája: $W_K = \frac{1}{2} F\, v = \frac{v^2}{2c}$,

Nyomaték munkája: $W_K = \frac{1}{2} M\, \psi = \frac{\psi^2}{2\gamma}$,

ahol: - c és γ rugóállandók,
- v az erő hatására létrejövő elmozdulás és ψ a nyomaték hatására létrejövő szögelfordulás.

Rugókihasználási tényező: $\eta = \frac{U}{U_{max}}$,

ahol: - U a rugóban ténylegesen felhalmozott alakváltozási energia és
- U_{max} a rugóban felhalmozható alakváltozási energia maximális értéke.

(84) Milyen szempontokat kell figyelembe venni rugók szilárdságtani méretezésénél, ellenőrzésénél?

- A rugóban adott terhelés hatására nem jöhet létre törés, vagy maradó alakváltozás.
- A rugónak adott terhelés hatására előírt elmozdulást, vagy szögelfordulást kell megvalósítania.

(85) Mikor egyenszilárdságú egy lemezrugó és miért előnyös az egyenszilárdásgú rugó alkalmazása?

Akkor, ha minden keresztmetszetében azonos nagyságú maximális feszültség lép fel.

Az egyenszilárdságú lemezrugó rugókihasználási tényezője a prizmatikus lemezrugó rugókihasználási tényezőjének háromszorosa.