

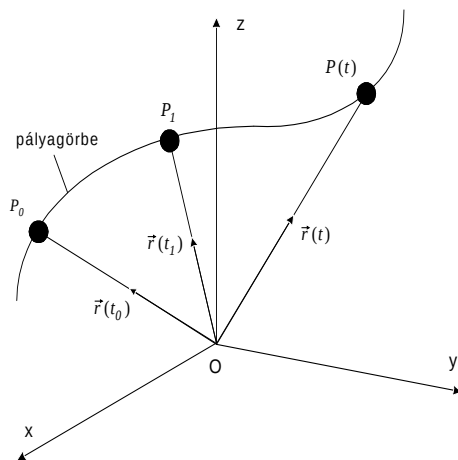
MECHANIKA III./e.
MOZGÁSTAN

Elméleti kérdések és válaszok
egyetemi mérnökhallgatók számára

(1) *Mi a mechanikai mozgás?*

A mechanikai mozgás testek egymáshoz viszonyított helyváltoztatása. Azt a testet, amelyhez a többi test mozgását viszonyítjuk vonatkoztatási rendszernek tekintjük.

(2) *Adja meg anyagi pont mozgástörvényének (mozgásfüggvényének) és pályájának definícióját!*



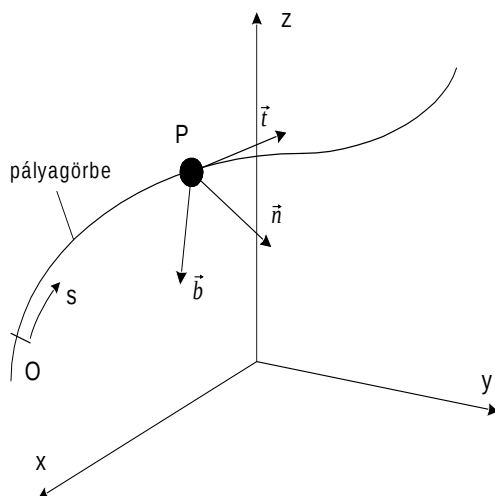
A mozgástörvény az az $\vec{r} = \vec{r}(t)$ helyvektor - idő (vektor - skalár) függvény, amely az anyagi pont pillanatnyi helyzetét meghatározza.

Anyagi pont pályája az a térgörbe, amelyen a pont a mozgás során végig halad.

(3) *Adja meg az $s=s(t)$ ívkoordináta értelmezését!*

Az s ívkoordináta egy adott O kezdőponttól, a pályagörbe mentén mért előjeles távolság (előjeles ívhossz), amely a tömegpont helyét a pályagörbén egyértelműen megadja.

(4) *Értelmezze anyagi pont pályagörbéjének egy tetszőleges pontjában a $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ kísérő triédert!*



- Az érintő irányú egységvektor:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad |\vec{t}| = 1.$$

- A főnormális egységvektor:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n} = \frac{1}{\rho} \vec{n}, \quad |\vec{n}| = 1.$$

- A binormális egységvektor:

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}, \quad |\vec{b}| = 1.$$

s - ívkoordináta (előjeles ívhossz),

κ - a pályagörbe görbülete,

ρ - a pályagörbe görbületi sugara.

(5) *Adja meg anyagi pont $\vec{v}(t)$ sebességfüggvényének, valamint pillanatnyi sebességvektorának értelmezését és írja le a pillanatnyi sebességvektor tulajdonságait!*

A sebességfüggvény a mozgástörvény (mozgásfüggvény) idő szerint vett első deriváltja:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}.$$

A pillanatnyi sebességvektor a sebesség-függvény egy adott időpillanatban felvett értéke: $\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1)$.

A pillanatnyi sebességvektor tulajdonságai:

- vektor mennyiség,
- iránya megegyezik a pályagörbe érintőjének irányával.

- (6) *Bizonyítsa be, hogy anyagi pont sebességvektorának iránya megegyezik a pályagörbe érintőjének irányával!*

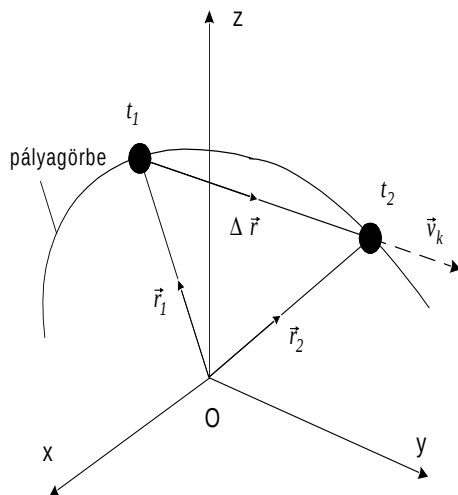
$$\text{Bizonyítás: } \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{ds}}_{\vec{t}} \frac{ds}{dt} = v(t)\vec{t}.$$

s - a pályagörbe mentén mért ívkoordináta,

$\vec{t}$ - a pályagörbe érintő egységvektora,

$v(t)$ - a pályasebesség.

- (7) *Értelmezze anyagi pont elmozdulásvektorát és közepes sebességét!*



- Az elmozdulás-vektor:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

- Az elmozdulásvektor az anyagi pont t_1 időpillanatban elfoglalt helyéből a t_2 időpillanatbeli helyzetébe mutató helyvektor.

- A közepes sebesség:

$$\vec{v}_k = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}.$$

- Az elmozdulásvektor és a közepes sebességvektor is egy adott idő-intervallumra vonatkozik.

- (8) *Értelmezze anyagi pont pálya menti sebességét (pályasebességét) és írja le a tulajdonságait!*

A pálya menti sebesség a pályagörbe mentén mért ívkoordináta idő szerint vett első deriváltja: $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$.

Tulajdonságai:

- (előjeles) skalár mennyiség,
- előjelét a s ívkoordináta irányítása dönti el, előjele a $\vec{t}$ irányára vonatkozik (a pályasebesség akkor pozitív, ha az ívkoordináta nő).

- (9) *Adja meg anyagi pont gyorsulásfüggvényének, valamint pillanatnyi gyorsulásvektorának értelmezését és írja le a pillanatnyi gyorsulásvektor tulajdonságait!*

A gyorsulásfüggvény a sebességfüggvény idő szerint vett első deriváltja, illetve a mozgásfüggvény (mozgástörvény) idő szerint vett második deriváltja:

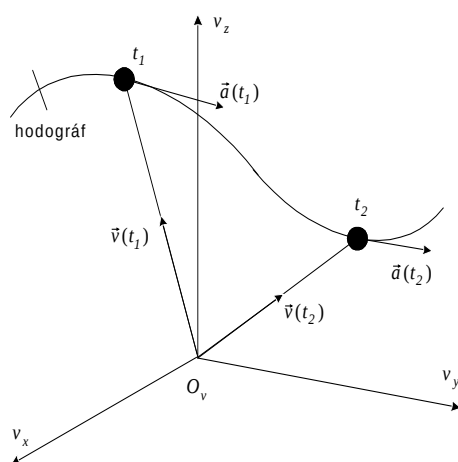
$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}.$$

A pillanatnyi gyorsulásvektor a gyorsulásfüggvény egy adott időpillanatban felvett értéke: $\vec{a}_1 = \vec{a}(t_1)$.

A pillanatnyi gyorsulásvektor tulajdonságai:

- vektormennyiség,
- a pályagörbe simulósíkjába esik és a pályagörbe $\vec{t}$ érintője és $\vec{n}$ főnormálisa irányába eső összetevőkből áll.

(10) Mi a hodográf? Adja meg a hodográf legfontosabb jellemzőjét!



A hodográf az a görbe, amelyet az anyagi pont $\vec{v} = \vec{v}(t)$ sebességvektorainak végpontja a v_x, v_y, v_z koordináta-rendszerben leír.

Legfontosabb tulajdonsága: a hodográf érintői a gyorsulásvektorok.

(11) Bizonyítsa be, hogy anyagi pont gyorsulásvektora a pályagörbe $\vec{t}, \vec{n}$ simulósíkjába esik!

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d}{dt}[v(t)\vec{t}(t)] = \frac{dv(t)}{dt}\vec{t} + v(t) \underbrace{\frac{d\vec{t}}{ds}}_{\frac{\vec{n}}{\rho}} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v(t)} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}.$$

(12) Adja meg az anyagi pont gyorsulásvektora koordinátáinak elnevezését, kiszámítási módját és fizikai tartalmát az pályagörbe $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ természetes koordináta-rendszerében!

Elnevezés:	Kiszámítási mód:	Fizikai tartalom:
Pálya menti gyorsulás (Pályagyorsulás)	$a_t(t) = \frac{dv(t)}{dt}$	A sebességvektor nagyságának változását jellemzi.
Normális gyorsulás	$a_n(t) = \frac{v^2}{\rho}$	A sebességvektor irányának változását jellemzi.

(13) Milyen függvényeket nevezünk foronómiai görbéknek (foronómiai függvényeknek) és milyen kapcsolatban állnak egymással.

Foronómiai függvényeknek az $s = s(t)$, $v = v(t)$, $a_t = a_t(t)$ pályamenti mozgásjellemzők időtől való függését megadó skalár függvényeket nevezzük.

Összefüggés a foronómiai függvények között:

Ismert: $s = s(t)$

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt},$$

$$a_t(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2s(t)}{dt^2}.$$

Ismert: $a_t = a_t(t), s_0, v_0$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a_t(t) dt,$$

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt.$$

- (14) *Adja meg a szabadságfok definícióját! Mennyi a merev test és anyagi pont szabad mozgásának szabadságfoka térbeli és síkbeli mozgás esetén?*

Szabadságfok: A test helyzetét (mozgását) egyértelműen megadó, egymástól lineárisan független skaláris függvények (skaláris koordináták) száma.

Merev test szabadságfoka:

Anyagi pont szabadságfoka:

Térbeli mozgás:

n=6

n=3

Síkmozgás:

n=3

n=2

- (15) *Adja meg a merev test sebességállapotának értelmezését! Milyen mennyiségekkel adható meg egyértelműen merev test sebességállapota?*

Merev test sebességállapota egy adott időpillanatban a merev test összes pontjához tartozó sebességvektorok halmaza.

Megadás:

- a test pillanatnyi $\vec{\omega}$ szögsebességével,
- a test egy adott A pontjának pillanatnyi $\vec{v}_A$ sebességével.

- (16) *Definiálja merev test mozgásállapotát és elemi mozgását!*

Mozgásállapot: egy merev test mozgásállapotát a test tetszőleges P pontjának

- $\vec{r}_P = \vec{r}_P(\vec{q}_{AP}, t)$ helyzete (helyvektora),
- $\vec{v}_P = \vec{v}_P(\vec{q}_{AP}, t)$ sebessége (sebességvektora) és
- $\vec{a}_P = \vec{a}_P(\vec{q}_{AP}, t)$ gyorsulása (gyorsulásvektora) határozza meg.

$\vec{q}_{AP}$ - a testen a tetszőleges P pont helyét megadó helyvektor, t - az idő.

Elemi mozgás:

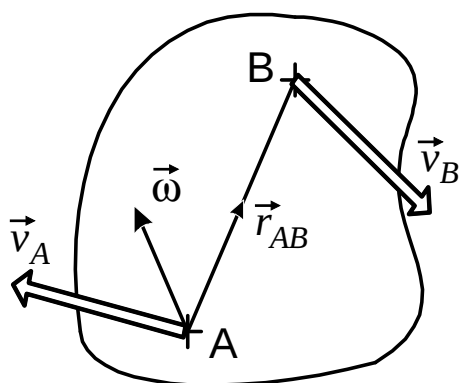
1. definíció: a merev test vizsgált időpillanatban vett mozgásállapota.
2. definíció: a merev test végtelenül rövid idő alatt végbemenő (egy adott időpillanatban bekövetkező) mozgása.

- (17) *Adja meg merev test elemi mozgásainak osztályozását!*

Merev test elemi mozgásainak osztályozása az eredő vektorkettős alapján:

- | | | | | |
|------|-----------------------------|-----|---------------------------------------|------------------------|
| (1.) | $\vec{\omega} = \vec{0}$ | (a) | $\vec{v}_A = \vec{0}$ | - elemi nyugalom, |
| | | (b) | $\vec{v}_A \neq \vec{0}$ | - elemi haladó mozgás, |
| (2.) | $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ | (a) | $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = 0$ | - elemi forgó mozgás, |
| | | (b) | $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A \neq 0$ | - elemi csavar mozgás. |

- (18) *Adja meg egy adott időpillanatban a merev test két pontjának sebességvektora közötti összefüggést!*



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB},$$

$\vec{\omega}$ - a test pillanatnyi szögsebessége,
 $\vec{v}_A, \vec{v}_B$ - az A és B pontok pillanatnyi sebessége,
 $\vec{r}_{AB}$ - az A pontból a B pontba mutató helyvektor.

- (19) *Definiálja merev test pillanatnyi forgástengelyét! Adja meg a forgástengely irányvektorát és a merev test A pontjából a forgástengely A ponthoz legközelebb levő D pontjának helyvektorát!*

A pillanatnyi forgástengelyt a tér azon X pontjai alkotják, amelyeknek sebessége zérus: $\vec{v}_X = \vec{0}$.

A forgástengely irányvektora: a test $\vec{\omega}$ szögsebességvektora.

A forgástengely A ponthoz legközelebb levő D pontjának helyvektora: $\vec{r}_{AD} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2}$.

- (20) *Definiálja merev test pillanatnyi csavartengelyét! Adja meg a csavartengely irányvektorát és a merev test A pontjából a csavartengely A ponthoz legközelebb levő D pontjának helyvektorát!*

A pillanatnyi csavartengelyt a tér azon X pontjai alkotják, amelyeknek sebessége párhuzamos a test szögsebességével: $\vec{\omega} \times \vec{v}_X = \vec{0}$.

A csavartengely irányvektora: a test $\vec{\omega}$ szögsebességvektora.

A csavartengely A ponthoz legközelebb levő D pontjának helyvektora: $\vec{r}_{AD} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2}$.

- (21) *Adja meg a síkmozgás mindkét definícióját!*

1. definíció: Síkmozgás esetén a test pontjai egy alapsíkkal (egy $\vec{\omega}$ -ra $\perp$ síkkal) párhuzamos síkokban mozognak.

2. definíció: Síkmozgás esetén a test bármely pontjának sebességvektora $\perp$ a test $\vec{\omega}$ szögsebességvektorára, vagyis $\parallel$ az $\vec{\omega}$ -ra $\perp$ alapsíkkal.

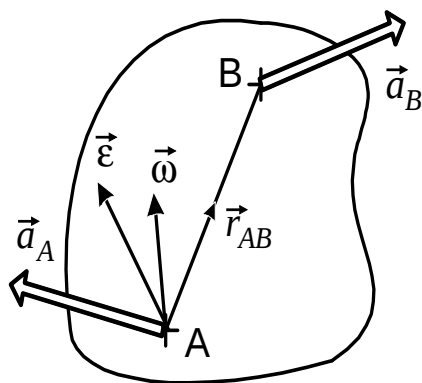
- (22) *Adja meg a sebességábra és a sebességpólus értelmezését! Milyen mozgás esetén rajzolható sebességábra? Írja le a sebességábra tulajdonságát!*

A sebességábrát úgy kapjuk meg, ha egy adott időpillanatban közös kezdőpontból felmérjük a test jellemző pontjainak sebességvektorait. Sebességábra csak síkmozgás esetén rajzolható.

A sebességpólus merev test síkmozgása esetén az alapsíknak az a P pontja, amelynek sebességvektora zérus: $\vec{v}_P = \vec{0}$.

A sebességábra hasonló a helyzetábrához, de a sebességábra a helyzetábrához képest 90° -kal el van forgatva az $\vec{\omega}$ szögsebességvektor irányában.

- (23) Adja meg egy adott időpillanatban a merev test két pontjának gyorsulásvektora közötti összefüggést térbeli mozgás és síkmozgás esetén!



Térbeli mozgás: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\epsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})$,

$\vec{\epsilon}$ - a test pillanatnyi szöggyorsulása,

$\vec{\omega}$ - a test pillanatnyi szögsebessége,

$\vec{a}_A, \vec{a}_B$ - az A és B pontok pillanatnyi gyorsulása,

$\vec{r}_{AB}$ - az A pontból a B pontba mutató helyvektor.

Síkmozgás: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \epsilon \vec{n} \times \vec{R}_{AB} - \omega^2 \vec{R}_{AB}$,

$\vec{n}$ - a sík normális egységvektora,

$\vec{R}_{AB}$ - az $\vec{r}_{AB}$ helyvektor síkba eső összetevője.

- (24) Adja meg a merev test gyorsulásállapotának értelmezését! Milyen mennyiségekkel adható meg egyértelműen merev test gyorsulásállapota?

Merev test gyorsulásállapota egy adott időpillanatban a merev test összes pontjához tartozó gyorsulásvektorok halmaza.

Megadás:

- a test $\vec{\epsilon}$ pillanatnyi szöggyorsulásával,
- a test $\vec{\omega}$ pillanatnyi szögsebességével,
- a test egy adott A pontjának $\vec{a}_A$ pillanatnyi gyorsulásával.

- (25) Adja meg a gyorsulásábra és a gyorsuláspólus értelmezését! Milyen mozgás esetén rajzolható gyorsulásábra? Írja le a gyorsulásábra tulajdonságát!

A gyorsulásábrát úgy kapjuk meg, ha egy adott időpillanatban közös kezdőpontból felmérjük a test jellemző pontjainak gyorsulásvektorait. Gyorsulásábra csak síkmozgás esetén rajzolható.

A gyorsuláspólus merev test síkmozgása esetén az alapsíknak az a Q pontja, amelynek gyorsulásvektora zérus: $\vec{a}_Q = \vec{0}$.

A gyorsulásábra hasonló a helyzetábrához, de a gyorsulásábra a helyzetábrához képest $(180^\circ - \varphi)$ szöggel el van forgatva az $\vec{\epsilon}$ szöggyorsulásvektor irányában.

A φ szög tangense: $\tan \varphi = \frac{|\epsilon|}{\omega^2}$.

- (26) Értelmezze merev test véges mozgását! Definiálja merev test véges haladó, fogó és csavar mozgását!

Merev test véges mozgásának definíciói:

1. definíció: A merev test hosszabb, $\langle t_1, t_2 \rangle$ idő intervallum alatt végbemenő mozgása.
2. definíció: Elemi (pillanatnyi) mozgások sorozata (egymásutánja).

Haladó mozgás: A test minden pontja azonos sebességgel mozog. $\vec{\omega}(t) \equiv \vec{0}$

Forgó mozgás: $\vec{\omega}(t) \neq \vec{0}$ és $\vec{\omega}(t) \cdot \vec{v}_A(t) = 0$.

Speciális esetek: - álló tengely körüli forgás,
 - síkmozgás (a mozgás során a forgástengely a helyét változtatja),
 - gömbmozgás (álló pont körüli forgás).

Csavar mozgás: $\vec{\omega}(t) \neq \vec{0}$ és $\vec{\omega}(t) \cdot \vec{v}_A(t) \neq 0$.

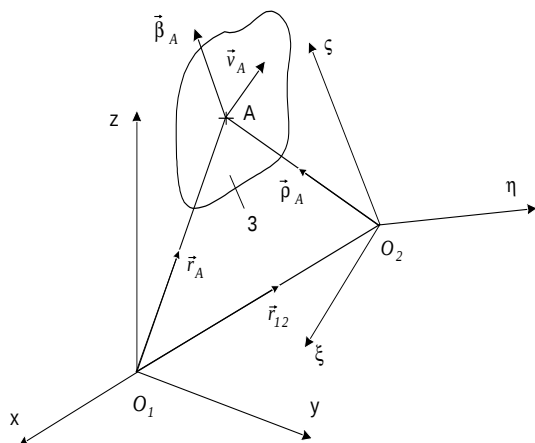
- (27) Írja le a tiszta gördülő mozgás értelmezését! Milyen mozgás jön létre hengeres felületű testek, illetve kúpos felületű testek gördülése esetén?

Két test egymáshoz képest tiszta gördülő mozgást végez, ha

- felületeik csak egy egyenes vonal mentén érintkeznek és
- a pillanatnyi forgástengely az érintkező egyenesre esik.

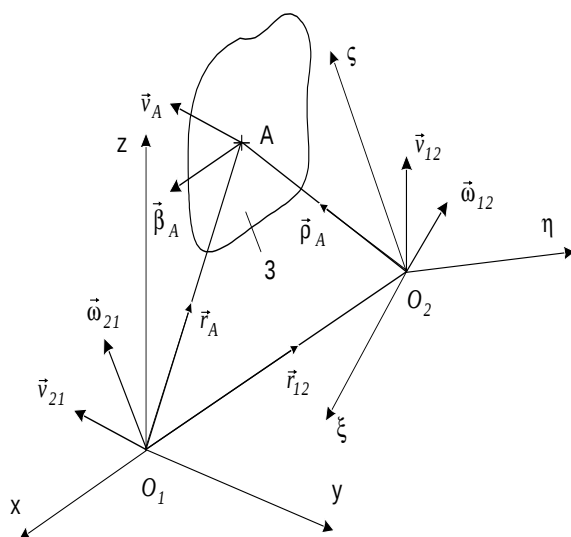
Hengeres felületű testek tiszta gördülése esetén síkmozgás, kúpos felületű testek tiszta gördülése esetén gömbmozgás (a test pontjai gömbfelületeken mozognak) jön létre.

- (28) Adja meg egy merev test A ponti, az egymáshoz képest mozgó koordináta-rendszerekben vett $\vec{v}_A$ és $\vec{\beta}_A$ sebességvektorának kapcsolatát!



- $\vec{v}_A = \vec{v}_{A_{sz}} + \vec{\beta}_A$, vagy $\vec{\beta}_A = \vec{\beta}_{A_{sz}} + \vec{v}_A$,
 $\vec{v}_A$ - az A pont pillanatnyi sebessége az x, y, z koordináta-rendszerben,
 $\vec{\beta}_A$ - az A pont pillanatnyi sebessége az ξ, η, ζ koordináta-rendszerben,
 $\vec{v}_{A_{sz}}$ - a ξ, η, ζ koordináta-rendszerhez kötött A pont pillanatnyi sebessége az x, y, z koordináta-rendszerben,
 $\vec{\beta}_{A_{sz}}$ - az x, y, z koordináta-rendszerhez kötött A pont pillanatnyi sebessége a ξ, η, ζ koordináta-rendszerben.

- (29) Hogyan számítható ki egy merev test A ponti, az egymáshoz képest mozgó koordináta-rendszerekben vett $\vec{v}_{A_{sz}}$ és $\vec{\beta}_{A_{sz}}$ szállítósebessége? Milyen kapcsolat van a szállítósebességek között?



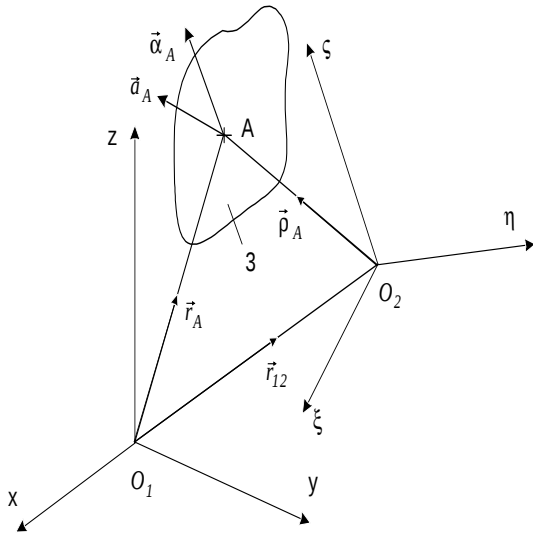
- $\vec{v}_{A_{sz}} = \vec{v}_{12} + \vec{\omega}_{12} \times \vec{r}_A$,
 $\vec{v}_{12}$ - a ξ, η, ζ koordináta-rendszer O_2 kezdőpontjának a sebessége az x, y, z koordináta-rendszerben,
 $\vec{\omega}_{12}$ - a ξ, η, ζ koordináta-rendszernek, mint merev testnek a szögsebessége az x, y, z koordináta-rendszerben.
 $\vec{\beta}_{A_{sz}} = \vec{v}_{21} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_A$,
 $\vec{v}_{21}$ - az x, y, z koordináta-rendszer O_1 kezdőpontjának a sebessége a ξ, η, ζ koordináta-rendszerben,
 $\vec{\omega}_{21}$ - az x, y, z koordináta-rendszernek, mint merev testnek a szögsebessége a ξ, η, ζ koordináta-rendszerben.

$$\vec{v}_{A_{sz}} = -\vec{\beta}_{A_{sz}},$$

$\vec{v}_{A_{sz}}$ - a ξ, η, ζ koordináta-rendszerhez kötött A pont sebessége az x, y, z koordináta-rendszerben:

$\vec{\beta}_{A_{sz}}$ - az x, y, z koordináta-rendszerhez kötött A pont sebessége a ξ, η, ζ koordináta-rendszerben.

- (30) Adja meg egy merev test A ponti, az egymáshoz képest mozgó koordináta-rendszerekben vett $\vec{a}_A$ és $\vec{\alpha}_A$ gyorsulásvektorának kapcsolatát!



$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A_{sz}} + \vec{a}_{A_c} + \vec{\alpha}_A, \quad \text{vagy}$$

$$\vec{\alpha}_A = \vec{\alpha}_{A_{sz}} + \vec{\alpha}_{A_c} + \vec{a}_A,$$

$\vec{a}_A$ - az A pont pillanatnyi gyorsulása az x, y, z koordináta-rendszerben,

$\vec{\alpha}_A$ - az A pont pillanatnyi gyorsulása az ξ, η, ζ koordináta-rendszerben,

$\vec{a}_{A_{sz}}$ - a ξ, η, ζ koordináta-rendszerhez kötött A pont gyorsulása az x, y, z koordináta-rendszerben,

$\vec{\alpha}_{A_{sz}}$ - az x, y, z koordináta-rendszerhez kötött A pont gyorsulása a ξ, η, ζ koordináta-rendszerben.

$\vec{a}_{A_c}$ - az A pont Coriolis gyorsulása az x, y, z koordináta-rendszerben,

$\vec{\alpha}_{A_c}$ - az A pont Coriolis gyorsulása a ξ, η, ζ koordináta-rendszerben.

- (31) Hogyan számítható ki egy merev test A ponti, az egymáshoz képest mozgó koordináta-rendszerekben vett $\vec{a}_{A_{sz}}$ és $\vec{\alpha}_{A_{sz}}$ szállítógyorsulása? Milyen kapcsolat van a szállítógyorsulások között?

$$\vec{a}_{A_{sz}} = \vec{a}_{12} + \vec{\varepsilon}_{12} \times \vec{\rho}_A + \vec{\omega}_{12} \times (\vec{\omega}_{12} \times \vec{\rho}_A),$$

$\vec{a}_{12}$ - a ξ, η, ζ koordináta-rendszer O_2 kezdőpontjának a gyorsulása az x, y, z koordináta-rendszerben,

$\vec{\varepsilon}_{12}$ - a ξ, η, ζ koordináta-rendszernek, mint merev testnek a szöggyorsulása az x, y, z koordináta-rendszerben.

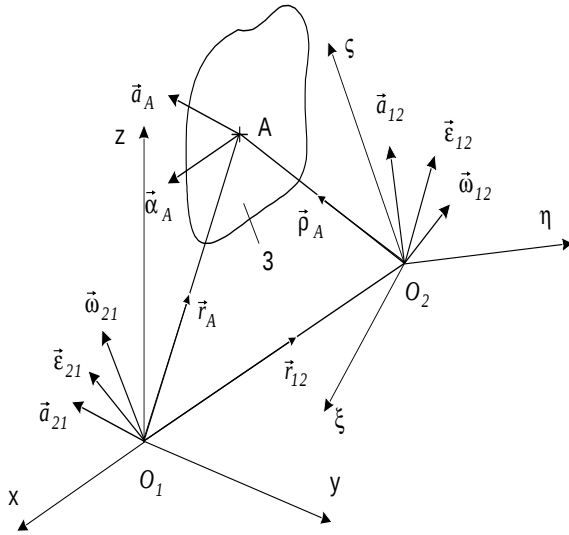
$\vec{\omega}_{12}$ - a ξ, η, ζ koordináta-rendszernek, mint merev testnek a szögsebessége az x, y, z koordináta-rendszerben.

$$\vec{\alpha}_{A_{sz}} = \vec{a}_{21} + \vec{\varepsilon}_{21} \times \vec{r}_A + \vec{\omega}_{21} \times (\vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_A),$$

$\vec{a}_{21}$ - az x, y, z koordináta-rendszer O_1 kezdőpontjának a gyorsulása a ξ, η, ζ koordináta-rendszerben,

$\vec{\varepsilon}_{21}$ - az x, y, z koordináta-rendszernek, mint merev testnek a szöggyorsulása a ξ, η, ζ koordináta-rendszerben,

$\vec{\omega}_{21}$ - az x, y, z koordináta-rendszernek, mint merev testnek a szögsebessége az ξ, η, ζ koordináta-rendszerben.



$$\vec{a}_{A_{sz}} + \vec{a}_{A_c} = -\vec{\alpha}_{A_{sz}} - \vec{\alpha}_{A_c},$$

$\vec{a}_{A_{sz}}$ - a ξ, η, ζ koordináta-rendszerhez kötött A pont sebessége az x, y, z koordináta-rendszerben:

$\vec{\alpha}_{A_{sz}}$ - az x, y, z koordináta-rendszerhez kötött A pont sebessége a ξ, η, ζ koordináta-rendszerben.

- (32) Hogyan számítható ki egy merev test A ponti, az egymáshoz képest mozgó koordináta-rendszerekben vett $\vec{a}_{A_c}$ és $\vec{\alpha}_{A_c}$ Coriolis gyorsulása? Milyen kapcsolat van a Coriolis

gyorsulások között?

$$\vec{a}_{Ac} = 2\vec{\omega}_{12} \times \vec{\beta}_A$$

$\vec{\beta}_A$ - az A pont pillanatnyi sebessége a ξ, η, ζ koordináta-rendszerben,

$\vec{\omega}_{12}$ - a ξ, η, ζ koordináta-rendszernek, mint merev testnek a pillanatnyi szögsebessége az x, y, z koordináta-rendszerben.

$$\vec{\alpha}_{Ac} = 2\vec{\omega}_{21} \times \vec{v}_A,$$

$\vec{v}_A$ - az A pont pillanatnyi sebessége az x, y, z koordináta-rendszerben,

$\vec{\omega}_{21}$ - az x, y, z koordináta-rendszernek, mint merev testnek a pillanatnyi szögsebessége az ξ, η, ζ koordináta-rendszerben.

$$\vec{a}_{Asz} + \vec{a}_{Ac} = -\vec{\alpha}_{Asz} - \vec{\alpha}_{Ac},$$

$\vec{a}_{Ac}$ - az A pont pillanatnyi Coriolis gyorsulása az x, y, z koordináta-rendszerben,

$\vec{\alpha}_{Ac}$ - az A pont pillanatnyi Coriolis gyorsulása a ξ, η, ζ koordináta-rendszerben.

- (33) *Milyen összefüggés van egy (3) jelű merev test egymáshoz képest mozgó koordináta-rendszerekben vett $\vec{\omega}_{13}$ és $\vec{\omega}_{23}$ pillanatnyi szögsebességvektora között?*

$$\vec{\omega}_{13} = \vec{\omega}_{12} + \vec{\omega}_{23},$$

$\vec{\omega}_{13}$ - a merev test pillanatnyi szögsebessége az x, y, z koordináta-rendszerben,

$\vec{\omega}_{12}$ - a ξ, η, ζ koordináta-rendszernek, mint merev testnek a pillanatnyi szögsebessége az x, y, z koordináta-rendszerben,

$\vec{\omega}_{23}$ - a merev test pillanatnyi szögsebessége a ξ, η, ζ koordináta-rendszerben.

$$\vec{\omega}_{23} = \vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_{13},$$

$\vec{\omega}_{21}$ - az x, y, z koordináta-rendszernek, mint merev testnek a pillanatnyi szögsebessége az ξ, η, ζ koordináta-rendszerben,

- (34) *Milyen összefüggés van egy (3) jelű merev test egymáshoz képest mozgó koordináta-rendszerekben vett $\vec{\epsilon}_{13}$ és $\vec{\epsilon}_{23}$ pillanatnyi szöggyorsulásvektora között?*

$$\vec{\epsilon}_{13} = \vec{\epsilon}_{12} + \vec{\omega}_{12} \times \vec{\omega}_{23} + \vec{\epsilon}_{23},$$

$\vec{\epsilon}_{13}$ - a merev test pillanatnyi szöggyorsulása az x, y, z koordináta-rendszerben,

$\vec{\epsilon}_{12}$ - a ξ, η, ζ koordináta-rendszernek, mint merev testnek a pillanatnyi szöggyorsulása az x, y, z koordináta-rendszerben,

$\vec{\omega}_{12}$ - a ξ, η, ζ koordináta-rendszernek, mint merev testnek a pillanatnyi szögsebessége az x, y, z koordináta-rendszerben,

$\vec{\omega}_{23}$ - a merev test pillanatnyi szögsebessége a ξ, η, ζ koordináta-rendszerben,

$\vec{\epsilon}_{23}$ - a merev test pillanatnyi szöggyorsulása a ξ, η, ζ koordináta-rendszerben.

$$\vec{\epsilon}_{23} = \vec{\epsilon}_{21} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{\omega}_{13} + \vec{\epsilon}_{13},$$

$\vec{\epsilon}_{23}$ - a merev test pillanatnyi szöggyorsulása a ξ, η, ζ koordináta-rendszerben,

$\vec{\epsilon}_{21}$ - az x, y, z koordináta-rendszernek, mint merev testnek a pillanatnyi szöggyorsulása a ξ, η, ζ koordináta-rendszerben,

$\vec{\omega}_{21}$ - az x, y, z koordináta-rendszernek, mint merev testnek a pillanatnyi szögsebessége az ξ, η, ζ koordináta-rendszerben,

$\vec{\omega}_{13}$ - a merev test pillanatnyi szögsebessége az x, y, z koordináta-rendszerben,

$\vec{\epsilon}_{13}$ - a merev test pillanatnyi szöggyorsulása az x, y, z koordináta-rendszerben.

- (35) *Adja meg a szabad mozgás és a kényszer mozgás definícióját!*

Szabad mozgás: A rendszert alkotó testek sem egymással sem külső testekkel nincsenek kapcsolatban, szabadon mozognak.

Kényszer mozgás:

1. definíció: A rendszert alkotó testek mozgását a rendszerhez tartozó más testek és/vagy külső testek akadályozzák (korlátozzák).
2. definíció: A rendszerhez tartozó testek helyzetét egyértelműen meghatározó koordináták (koordináta-idő függvények) nem tetszőlegesen, hanem közöttük meghatározott összefüggések állnak fenn.

(36) *Mi a kényszer, a kényszererő és a kényszerkapcsolat?*

Kényszer: Az a test, amely az általunk vizsgált test mozgását előírt geometriai feltételeknek megfelelően korlátozza.

Kényszererő: A mozgást akadályozó (korlátozó) testről a vizsgált testre ható erő (erőrendszer).

Kényszerkapcsolat: Testek közötti kapcsolat, amely a merev testeken kialakított, általában speciális felületek mentén történő érintkezéssel jön létre.

(37) *Ismertesse a Coulomb-féle súrlódási törvényt mozgásbeli súrlódásra!*

Testek egymáson, sík felületek mentén történő csúszása során a kényszererő tangenciális összetevőjének nagysága a normálerő μ -szöröse, iránya pedig ellentétes a csúszási sebességgel.

$\vec{F}_t = -\mu F_n \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, ahol μ a mozgásbeli súrlódási tényező és $\vec{v}$ a csúszási sebesség.

(38) *Milyen feltételek mellett érvényes a Coulomb-féle súrlódási törvény?*

- Nem pontonként adja meg a tangenciális erőt, hanem az egész érintkező sík felületre.
- A kényszer erőrendszer eredőjének kezelésére alkalmas.
- Stacionárius (állandósult) állapotok leírására alkalmas.
- Száraz súrlódásra érvényes (az érintkező felületek között nincs kenőanyag).

(39) *Adja meg a k kötöttségi fok és az s szabadságfok értelmezését! Hogyan számítható ki egy több merev testből álló rendszer szabadságfoka?*

Kötöttségi fok: Az egymástól független kényszerfeltételek száma. (Az egymástól független skaláris kényszeregyenletek száma.)

Szabadságfok: Az érintkező merev testek egymáshoz viszonyított (relatív) helyzetét az idő függvényében egyértelműen leíró független skaláris függvények száma.

Rendszer szabadságfoka: $s = \sum_{i=1}^n s_{0_i} - \sum_{j=1}^{n_k} k_j$,

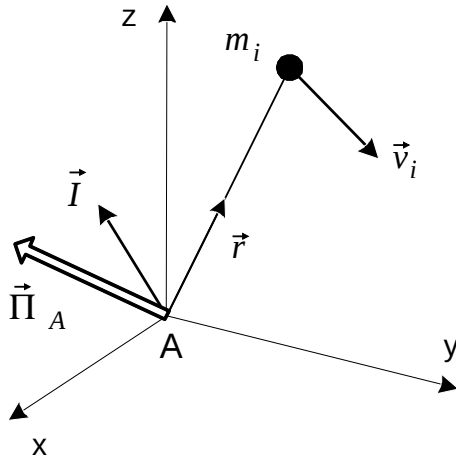
n - a rendszert alkotó merev testek száma,

n_k - a rendszer kényszereinek száma,

$s_0 = 6$ - térbeli esetben és $s_0 = 3$ - síkbeli esetben,

k_j - a j jelű kényszer lineárisan független kényszerfeltételeinek száma.

- (40) Adja meg az impulzus vektorrendszer eredő vektorkettősenek értelmezését tömegpont-rendszer és merev test esetén!



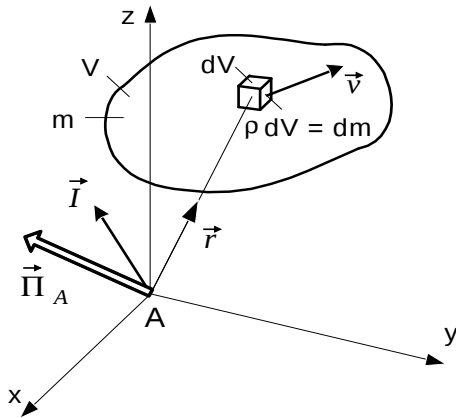
Tömegpont-rendszer esetén:

Az eredő impulzus vektor:

$$\vec{I} = \sum_i m_i \vec{v}_i.$$

Az eredő impulzus-nyomaték (perdület) vektor:

$$\vec{\Pi}_A = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$



Merev test esetén:

Az eredő impulzus vektor:

$$\vec{I} = \int_{(m)} \vec{v} dm.$$

Az eredő impulzus-nyomaték (perdület) vektor:

$$\vec{\Pi}_A = \int_{(m)} \vec{r} \times \vec{v} dm.$$

- (41) Hogyan számítható ki az impulzus vektorrendszer S súlyponti eredő vektorkettőse merev test esetén!

Az eredő impulzus vektor kiszámítása: $\vec{I} = m \vec{v}_S$.

Az eredő impulzus-nyomaték (perdület) vektor kiszámítása: $\vec{\Pi}_S = \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\omega}$.

m - a test tömege, $\vec{v}_S$ - a test S súlypontjának sebességvektora,

$\vec{\omega}$ - a test szögsebességvektora,

$\underline{\underline{J}}_S$ - a test S ponti tehetetlenségi tenzora.

- (42) Hogyan számítható ki az impulzus vektorrendszernek a test tetszőleges A pontjára számított eredő vektorkettőse!

Az eredő impulzus vektor kiszámítása: $\vec{I} = m \vec{v}_S$.

Az eredő impulzus-nyomaték (perdület) vektor kiszámítása: $\vec{\Pi}_A = \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\omega} + \vec{r}_{AS} \times m \vec{v}_A$.

m - a test tömege, $\vec{v}_S$ - a test S pontjának sebességvektora,

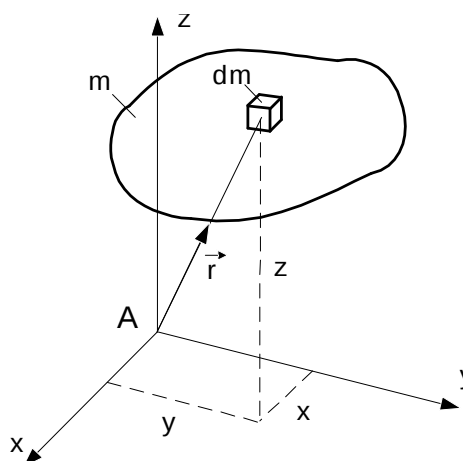
$\vec{v}_A$ - a test A pontjának sebességvektora,

$\vec{\omega}$ - a test szögsebességvektora,

$\underline{\underline{J}}_A$ - a test A ponti tehetetlenségi tenzora.

- (43) Értelmezze merev test pontra és a koordináta-rendszer tengelyeire számított tehetetlenségi nyomatékát! Adja meg a pontra és a tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékok

legfontosabb tulajdonságát!



Pontra számított:

$$J_A = \int_{(m)} r^2 dm = \int_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2) dm.$$

A koordináta tengelyekre számított nyomatékok:

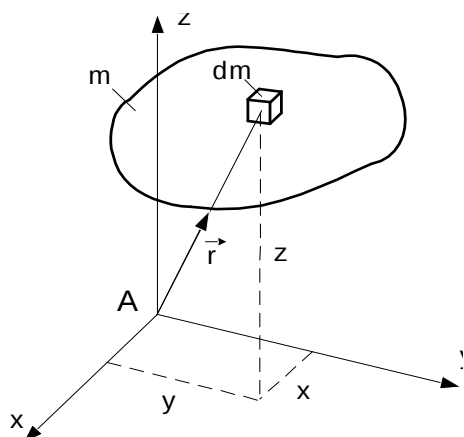
$$J_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm - x \text{ tengelyre számított,}$$

$$J_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm - y \text{ tengelyre számított,}$$

$$J_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm - z \text{ tengelyre számított.}$$

Tulajdonság: $J_A \geq 0, J_a \geq 0$.

(44) Értelmezze merev test koordináta-síkokra számított tehetetlenségi nyomatékát!



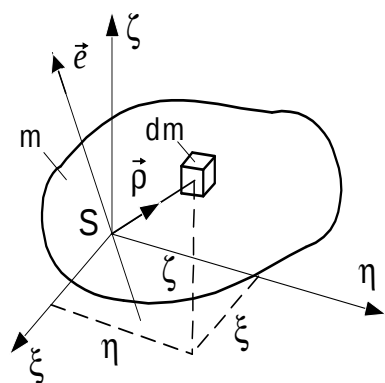
A koordináta-síkokra számított nyomatékok:

$$J_{xy} = \int_{(m)} (xy) dm - \text{az } [yz]-[xz] \text{ síkpárra számított,}$$

$$J_{yz} = \int_{(m)} (yz) dm - \text{az } [xz]-[xy] \text{ síkpárra számított,}$$

$$J_{zx} = \int_{(m)} (zx) dm - \text{az } [xy]-[yz] \text{ síkpárra számított.}$$

(45) Adja meg a merev test S súlyponti e tengelyre számított tehetetlenségi vektorának, valamint tehetetlenségi tenzorának értelmezését és írja fel a tenzor mátrixát az S ponthoz kötött ξ, η, ζ koordináta-rendszerben!



Tehetlenségi vektor értelmezése:

$$\vec{J}_e = \int_{(m)} \vec{\rho} \times (\vec{e} \times \vec{\rho}) dm.$$

Tenzor értelmezése:

$$\underline{\underline{J}}_S = \int_{(m)} [\rho^2 \underline{\underline{E}} - \vec{\rho} \circ \vec{\rho}] dm = (\vec{J}_\xi \circ \vec{e}_\xi + \vec{J}_\eta \circ \vec{e}_\eta + \vec{J}_\zeta \circ \vec{e}_\zeta).$$

A tenzor mátrixa:

$$\left[\underline{\underline{J}}_S \right] = \begin{bmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\eta\xi} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\zeta\xi} & -J_{\zeta\eta} & J_\zeta \end{bmatrix}.$$

(46) Hogyan számíthatók ki a $\underline{\underline{J}}_S$ súlyponti tehetetlenségi tenzor, valamint az $\vec{n}$ és az $\vec{m}$ irány egységvektorok ismeretében a J_n tengelyre és a J_{nm} síkpárra számított tehetetlenségi nyomaték?

$$J_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{n}, \quad J_{nm} = J_{mn} = -\vec{n} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{m} = -\vec{m} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{n}$$

- (47) Adja meg merev test S súlyponti tehetetlenségi főtengetyének és tehetetlenségi fősíkjának értelmezését!

Merev test tehetetlenségi főtengetyének irányát az az $\vec{n}$ egységvektor adja meg, amelyre fennáll az alábbi összefüggés: $\vec{J}_n = \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{n} = J_n \vec{n}$.

Ebben az esetben $J_{mn} = J_{ln} = 0$ is teljesül, ha $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$ és $\vec{l} \cdot \vec{n} = 0$.

Merev test S súlyponti tehetetlenségi fősíkjá az $\vec{n}$ irányra $\perp$ S súlyponton átmenő sík.

- (48) Hogyan számíthatók ki a tehetetlenségi tenzor skaláris invariánsai? Mivel szemben változatlanok ezek a mennyiségek?

$$J_I = J_\xi + J_\eta + J_\zeta,$$

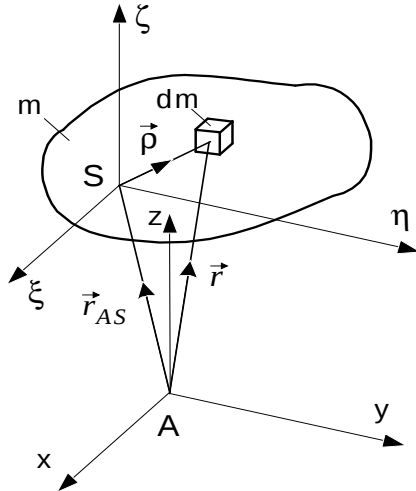
$$J_{II} = \begin{vmatrix} J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\zeta\eta} & J_\zeta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_\xi & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\zeta\xi} & J_\zeta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} \\ -J_{\eta\xi} & J_\eta \end{vmatrix},$$

$$J_{III} = \begin{vmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\eta\xi} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\zeta\xi} & -J_{\zeta\eta} & J_\zeta \end{vmatrix}.$$

Az invariánsok a koordináta transzformáció során nem változnak.

- (49) Írja fel merev test tehetetlenségi tenzorára a Steiner tételt!

A Steiner tétel összefüggést ad meg az egymással párhuzamos S súlyponti és tetszőleges A ponti tengelyekre (és síkpárokra) számított tehetetlenségi nyomatékok között.



Tenzoriális alak:

$$\underline{\underline{J}}_A = \underline{\underline{J}}_S + \underline{\underline{J}}_{SA}.$$

Skaláris alak:

$$J_x = J_\xi + m(y_{AS}^2 + z_{AS}^2) = J_\xi + m(\eta_{SA}^2 + \zeta_{SA}^2),$$

$$J_y = J_\eta + m(x_{AS}^2 + z_{AS}^2) = J_\eta + m(\xi_{SA}^2 + \zeta_{SA}^2),$$

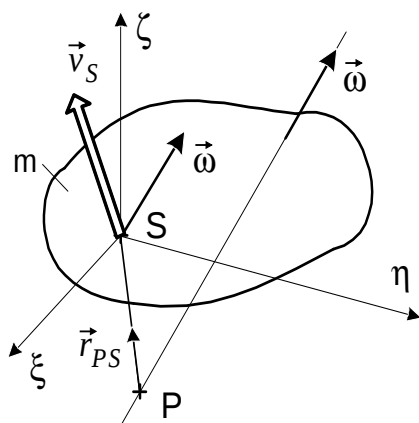
$$J_z = J_\zeta + m(x_{AS}^2 + y_{AS}^2) = J_\zeta + m(\xi_{SA}^2 + \eta_{SA}^2),$$

$$J_{xy} = J_{\xi\eta} + mx_{AS}y_{AS} = J_{\xi\eta} + m\xi_{SA}\eta_{SA},$$

$$J_{yz} = J_{\eta\zeta} + my_{AS}z_{AS} = J_{\eta\zeta} + m\eta_{SA}\zeta_{SA},$$

$$J_{xz} = J_{\xi\zeta} + mx_{AS}z_{AS} = J_{\xi\zeta} + m\xi_{SA}\zeta_{SA}.$$

- (50) Hogyan számítható ki merev test impulzus vektorrendszerének eredő vektorkettőse a test pillanatnyi forgástengelyének P pontjára?



Az eredő impulzus vektor kiszámítása:

$$\vec{I} = m\vec{v}_S.$$

Az eredő impulzus-nyomaték (perdület) vektor kiszámítása:

$$\vec{\Pi}_P = \underline{\underline{J}}_P \cdot \vec{\omega},$$

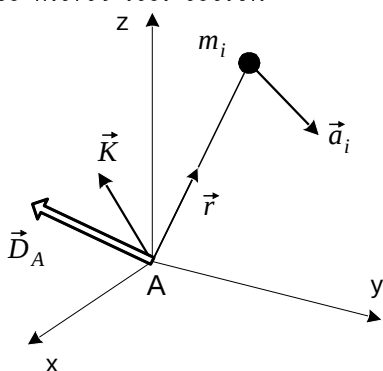
m - a test tömege,

$\vec{v}_S$ - a test S súlypontjának sebességvektora,

$\vec{\omega}$ - a test szögsebességvektora,

$\underline{\underline{J}}_P$ - a test P ponti tehetetlenségi tenzora.

- (51) Adja meg a kinetikai vektorrendszer eredő vektorkettőssének értelmezését tömegpont-rendszer és merev test esetén!



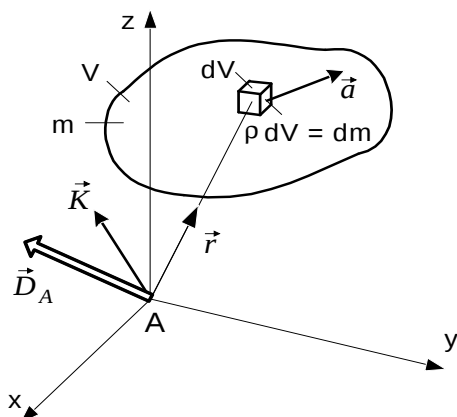
Tömegpont-rendszer esetén:

Az eredő kinetikai vektor:

$$\vec{K} = \sum_i m_i \vec{a}_i.$$

Az eredő kinetikai-nyomaték vektor:

$$\vec{D}_A = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i.$$



Merev test esetén:

Az eredő kinetikai vektor:

$$\vec{K} = \int_{(m)} \vec{a} dm.$$

Az eredő kinetikai-nyomaték vektor:

$$\vec{D}_A = \int_{(m)} \vec{r} \times \vec{a} dm.$$

- (52) Hogyan számítható ki a kinetikai vektorrendszer S súlyponti eredő vektorkettőse merev test esetén!

Az eredő kinetikai vektor kiszámítása: $\vec{K} = m\vec{a}_S$.

Az eredő kinetikai-nyomaték vektor kiszámítása: $\vec{D}_S = \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{\Pi}_S$,

m - a test tömege, $\vec{a}_S$ - a test S pontjának gyorsulásvektora,

$\vec{\varepsilon}$ - a test szöggyorsulásvektora,

$\underline{\underline{J}}_S$ - a test S ponti tehetetlenségi tenzora.

- (53) Hogyan számítható ki a kinetikai vektorrendszernek a test tetszőleges A pontjára számított eredő vektorkettőse!

Az eredő kinetikai vektor kiszámítása: $\vec{K} = m\vec{a}_S$.

Az eredő kinetikai-nyomaték vektor kiszámítása: $\vec{D}_A = \underline{J}_A \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \underline{J}_A \cdot \vec{\omega} + m\vec{r}_{AS} \times \vec{a}_A$,
 m - a test tömege, $\vec{a}_S$ - a test S súlypontjának gyorsulásvektora,
 $\vec{a}_A$ - a test A pontjának gyorsulásvektora,
 $\vec{\varepsilon}$ - a test szögsebességvektora, $\vec{\omega}$ - a test szöggyorsulásvektora,
 $\underline{J}_A$ - a test A pontjának tehetetlenségi tenzora.

- (54) Milyen összefüggés áll fenn az impulzus és kinetikai vektorrendszer S súlyponti és tet-szőleges A pontjának eredő vektorkettőse között?

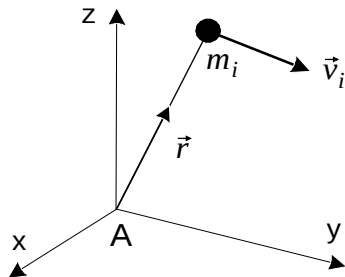
Az S pontjának eredő vektorkettős kapcsolata:

$$\vec{I} = \vec{K}, \quad \dot{\vec{\Pi}}_S = \vec{D}_S.$$

Az A pontjának eredő vektorkettős kapcsolata:

$$\vec{I} = \vec{K}, \quad \dot{\vec{\Pi}}_A = \vec{D}_A + m\vec{v}_S \times \vec{v}_A.$$

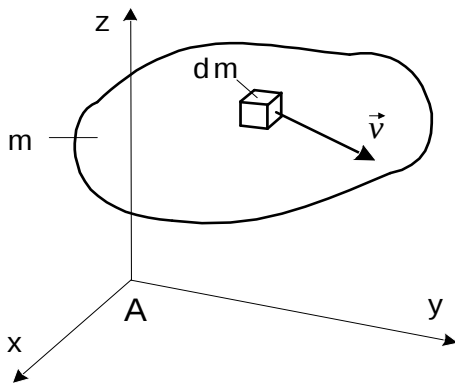
- (55) Adja meg a kinetikai (mozgási) energia értelmezését tömegpont-rendszer és merev test esetén!



Tömegpont-rendszer esetén:

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 > 0.$$

A mozgási energia pozitív skalár mennyiség.



Merev test esetén:

$$E = \int_{(m)} v^2 dm > 0.$$

A mozgási energia pozitív skalár mennyiség.

- (56) Hogyan számítható ki merev test kinetikai (mozgási) energiája a szögsebesség és az impulzus vektorrendszer eredő vektorkettőseinek felhasználásával?

A tetszőleges A pontjának vektorkettőssel:

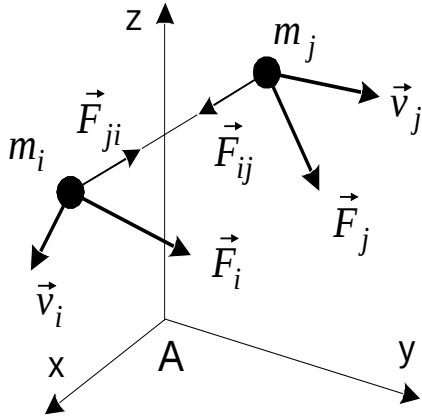
$$E = \frac{1}{2} (\vec{v}_A \cdot \vec{I} + \vec{\omega} \cdot \vec{\Pi}_A),$$

Az S súlyponti vektorkettőssel:

$$E = \frac{1}{2} (\vec{v}_S \cdot \vec{I} + \vec{\omega} \cdot \vec{\Pi}_S), \quad \text{vagy}$$

$$E = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_s \omega^2, \quad \text{ahol } J_s = \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \cdot \underline{J}_S \cdot \vec{\omega}) \text{ a test } \vec{\omega}\text{-val párhuzamos S pontjának tengelyére számított tehetetlenségi nyomaték.}$$

- (57) Hogyan számítható tömegpont-rendszerre és merev testre ható erők teljesítménye?



Az i jelű tömegpontra ható erők teljesítménye:

$$P_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_j \vec{F}_{ji} \cdot \vec{v}_i,$$

$\vec{F}_i$ - az i tömegpontra ható külső erők eredője,

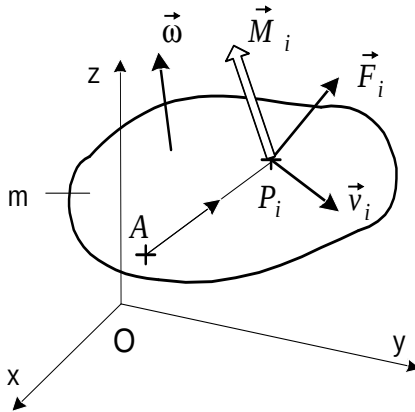
$\vec{F}_{ji}$ - a j tömegpontról az i tömegpontra átadódó belső erő.

A tömegpont-rendszerre ható erők teljesítménye:

$$P = \sum_i P_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_i \sum_j \vec{F}_{ji} \cdot \vec{v}_i,$$

ahol $P_K = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$ - a külső erők teljesítménye,

$P_B = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ji} \cdot \vec{v}_i$ - a belső erők teljesítménye.



Merev testre ható erők teljesítménye:

$$P = P_K = \sum_i (\vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \vec{M}_i \cdot \vec{\omega}), \quad \text{vagy}$$

$$P = P_K = \vec{F} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\omega},$$

$\vec{F}$ - a külső erőrendszer eredő erője,

$\vec{v}_A$ - a test A pontjának sebessége,

$\vec{M}_A$ - a külső erőrendszernek az A pontra számított nyomatéka,

$\vec{\omega}$ - a test szögsebessége.

(58) Hogyan számítható ki tömegpontra, illetve merev testre ható erőrendszer munkája?

A tömegpontra ható erőrendszer munkája:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

$\vec{F}$ - az erőrendszer eredője, $\vec{v}$ - a tömegpont sebessége.

A merev testre ható erőrendszer munkája:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\omega}) dt,$$

$\vec{F}$ - a külső erőrendszer eredő erője, $\vec{v}_A$ - a test A pontjának sebessége,

$\vec{M}_A$ - a külső erőrendszer A pontra számított nyomatéka,

$\vec{\omega}$ - a test szögsebessége.

(59) Adja meg a konzervatív erőtér (konzervatív erőrendszer) és a potenciális energia (potenciál) definícióját!

Konzervatív erőtér (konzervatív erőrendszer):

1. definíció: Ha az erőtérben létezik olyan $U = U(\vec{r})$ skalár függvény, amelyből az erő negatív gradiens képzéssel származtatható:

$$\vec{F} = -\text{grad}U = -\frac{dU}{d\vec{r}},$$

2. definíció: Ha az erőtérben a munkavégzés független az úttól, csak a kezdeti és a végső állapottól függ:

$$W_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B).$$

Potenciális energia (potenciál):

Az az $U = U(\vec{r})$ skalár függvény, amelyből konzervatív erőterben az erő előállítható.

(60) *Ismertesse Newton I. törvényét!*

- Minden test megmarad a nyugalom, vagy az egyenes vonalú egyenletes mozgás állapotában, amíg a rá ható erők ennek az állapotnak a megváltoztatására nem kényszerítik.
- Zárt rendszer impulzusa állandó. (Egy rendszer zárt, ha nem éri külső erőhatás.)

(61) *Ismertesse Newton II. törvényét!*

Test impulzusának a megváltozása arányos a testet mozgató erővel és a változás iránya megegyezik az erő irányával:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{a} = \vec{F}.$$

(62) *Ismertesse Newton III. törvényét!*

Két test kölcsönhatása esetén a szóbanforgó két test egymásra gyakorolt hatása megegyező nagyságú, közös hatásvonalú és ellentétes irányú:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

(63) *Adja meg az inercia-rendszer értelmezését!*

Olyan koordináta-rendszer, amelyben egy test mozgása más testek hatásával, azaz kizárólag külső erők figyelembevételével leírható (meghatározható).

(64) *Ismertesse a dinamika alaptörvényét, valamint az ebből következő impulzus- és perdülettétel differenciális alakját merev test (vagy tömegpont-rendszer) S súlypontjára, illetve tetszőleges A pontjára felírva!*

Inercia-rendszerben bármely merev test, (vagy tömegpont-rendszer) kinetikai vektor-rendszere egyenértékű a merev testre (vagy tömegpont-rendszerre) ható külső erőrendszerrel: $(V_K) \stackrel{M}{=} (V_F).$

Impulzus tétel:

Perdülettétel:

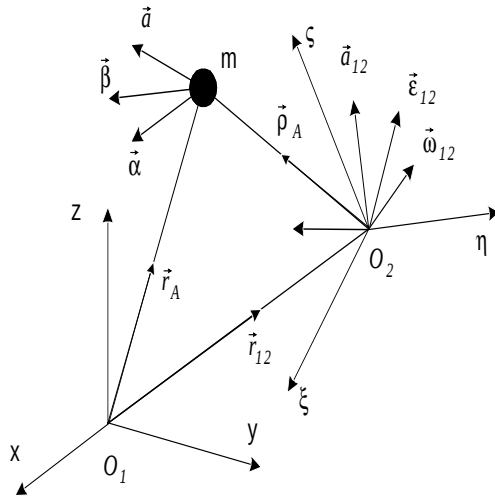
$$S \text{ pont: } \vec{K} = m\vec{a}_S = \vec{F},$$

$$\vec{D}_S = \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{\Pi}_S = \vec{M}_S,$$

$$A \text{ pont: } \vec{K} = m\vec{a}_S = \vec{F},$$

$$\vec{D}_A = \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\omega} + m\vec{r}_{AS} \times \vec{a}_A = \vec{M}_A.$$

(65) *Ismertesse Newton II. törvényének nem inercia-rendszerekre vonatkozó általánosítását!*



KR_1 - a Földhöz kötött koordináta-rendszer,
 KR_2 - a mozgó koordináta-rendszer.

$$m\vec{a} - m\vec{a}_{sz} - m\vec{a}_c = m\vec{\alpha},$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{sz} + \vec{F}_c = \vec{F}_2,$$

$\vec{F}_1 = m\vec{a}$ - az 1. jelű koordináta-rendszerben ható
külső erők eredője,

$\vec{F}_2 = m\vec{\alpha}$ - a 2. jelű koordináta-rendszerben ható
külső erők eredője,

Járolékos erők: A KR-ek mozgásából származnak - nem más testek hatásai.

Szállító erő: $\vec{F}_{sz} = -m\vec{a}_{sz} = -m[a_{12} + \vec{\varepsilon}_{12} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_{12} \times (\vec{\omega}_{12} \times \vec{\rho})]$.

Coriolis erő: $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = -2m(\vec{\omega}_{12} \times \vec{\beta})$.

(66) *Ismertesse a mechanikai energia-tételt és a mechanikai munka-tételt!*

Energia-tétel: A rendszer kinetikai energiájának idő szerinti deriváltja (idő szerinti megváltozása) egyenlő a rendszerre ható külső és belső erők teljesítményével.

$$\dot{E} = P_K + P_B = P$$

Munka-tétel: A rendszer kinetikai energiájának $\langle t_1, t_2 \rangle$ idő intervallum alatti megváltozása egyenlő a rendszerre ható külső és belső erőknek a $\langle t_1, t_2 \rangle$ idő intervallum alatt végzett munkájával.

$$E_2 - E_1 = W_{K_{12}} + W_{B_{12}} = W_{12}$$

Megjegyzés: merev test esetén: $P_B = 0$ és $W_{B_{12}} = 0$.

(67) *Ismertesse a mechanikai munka-tételt konzervatív erőterben!*

Konzervatív erőterben a kinetikai és potenciális energia összege állandó:

$$E_1 + U_1 = E_2 + U_2.$$

(68) *Adja meg a forgórészek egyenlőtlen járására jellemző közepes sebesség és az egyenlőtlen-ségi fok értelmezését!*

Közepes sebesség: $\omega_{köz} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2},$

Egyenlőtlen-ségi fok: $\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{köz}}.$

(69) *Mikor van egy rögzített tengely körül forgó merev test statikusan és dinamikusan kiegyensúlyozva?*

Statikusan kiegyensúlyozott egy álló tengely körül forgó merev test, ha a test S súlypontja a forgástengelyre esik.

Dinamikusan kiegyensúlyozott egy álló tengely körül forgó merev test, ha a forgástengely a merev test S súlyponti tehetetlenségi fő-tengelye.

(70) *Milyen feltételezések mellett vizsgáltuk testek ütközését?*

- Az ütköző testek valamilyen mértékben rugalmasak.
- Az ütközés igen rövid idő alatt játszódik le.
- A rövid ideig tartó érintkezés alatt a testek helyzetében nem következik be változás.
- Az ütközés következtében fellépő erők mellett a többi erő elhanyagolható.

(71) *Milyen esetben beszélünk centrikus és excentrikus ütközésről?*

Centrikus ütközés esetén az ütközési normális átmegy mindkét test súlypontján.

Excentrikus ütközés esetén az ütközési normális nem megy át mindkét test súlypontján.

(72) *Adja meg excentrikus ütközés esetén az ütközési talppontok és az ütközési (lökési) középpontok értelmezését!*

Az ütközési talppontok az ütközési normális és a testek S súlypontjából az ütközési normálisra bocsátott merőleges egyenesek metszéspontjai.

Az ütközési (lökési) középpontok a testek azon pontjai, amelyeknek az ütközés során nem változik a sebessége.

(73) *Írja le egy excentrikus ütközési feladat megoldásának gondolatmenetét!*

- A redukált tömegek meghatározása.
- Az ütközési talppontok ütközés előtti sebességének meghatározása.
- A Maxwell-féle ütközési diagramból az ütközési talppontok ütközés utáni sebességének meghatározása.
- Az ütközési középpontok helyének meghatározása.
- Az ütközés utáni szögsebességek meghatározása.
- A testek bármely pontjának ütközés utáni sebességének meghatározása.

(74) *Adja meg az általános koordináták értelmezését és tulajdonságait!*

Általános koordináták azok a $q = q(t)$ skalár függvények (koordináták), amelyek a vizsgált rendszer mozgását, vagy helyzetét egyértelműen meghatározzák.

Tulajdonságok: - a $q = q(t)$ elmozdulás, vagy szögelfordulás is lehet,

- a $q = q(t)$ az időnek legalább kétszer differenciálható függvénye.

(75) *Írja fel a Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet N merev testből (vagy anyagi pontból) álló, n szabadságfokú rendszerre vonatkozó alakját, és definiálja az egyenletben szereplő mennyiségeket!*

Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

A rendszer kinetikai (mozgási) energiája:
$$E = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i v_{S_i}^2 + \frac{1}{2} J_{S_i} \omega_i^2 \right)$$

Az általános erő:
$$Q_j = \sum_{k=1}^{N_F} \vec{F}_k \cdot \vec{\beta}_{kj} + \sum_{i=1}^{N_M} \vec{M}_i \cdot \vec{b}_{ij}, \quad \text{ahol}$$

- N_F a rendszerre ható koncentrált erők száma,
- N_M a rendszerre ható nyomatékok száma,

- $\vec{\beta}_{kj} = \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_j}$ a k-dik erő támadáspontjának az egységnyi koordináta-sebességhez tartozó sebessége,
- $\vec{b}_{ij} = \frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j}$ annak a testnek az egységnyi koordináta-sebességhez tartozó szögsebessége, amelyre az i-dik nyomaték hat.

(76) Adja meg a rezgőmozgás (lengőmozgás) és a rezgőrendszer értelmezését és sorolja fel a rezgőrendszereket alkotó elemeket!

Rezgőmozgás: Ha a mozgás közben a q általános koordináta, a $\dot{q}$ általános koordináta-sebesség, vagy a $\ddot{q}$ általános koordináta-gyorsulás többször is előjelet vált.

Rezgőrendszernek a rezgőmozgásra képes mechanikai rendszereket nevezzük.

A rezgőrendszerek alkotó elemei:

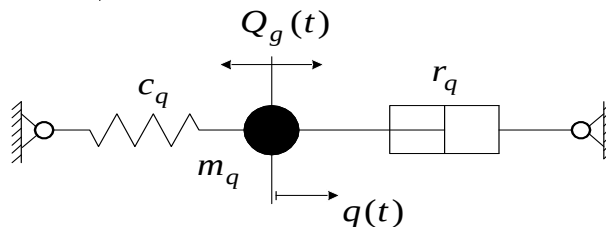
- merev testek, vagy tömegpontok,
- rugalmas elemek (rugók),
- csillapító elemek (csillapítások).

(77) Írja fel egyszabadságfokú rezgőrendszer mozgásegyenletének általános (redukált) alakját, adja meg az egyenletben szereplő mennyiségek jelentését és vázolja a helyettesítő rezgőrendszert!

A mozgásegyenlet: $m_q \ddot{q} + r_q \dot{q} + \frac{1}{c_q} q = Q_g(t) = Q_{g0} \sin(\omega t + \varepsilon),$

- m_q az általános (redukált) tömeg,
- r_q az általános (redukált) csillapítási tényező,
- c_q az általános (redukált) rugóállandó,
- Q_{g0} az ált. gerjesztőerő amplitúdója,
- ω a gerjesztés körfrekvenciája,
- ε a gerjesztőerő fázisszöge.

A helyettesítő (redukált) rezgőrendszer:



(78) Írja fel az egyszabadságfokú szabad rezgőrendszer mozgásegyenletének komplex alakját, valamint a mozgásegyenlet általános megoldását a megoldásban szereplő mennyiségek jelentésének megadásával!

A mozgásegyenlet komplex alakja: $m_q \ddot{z} + r_q \dot{z} + \frac{1}{c_q} z = 0,$

ahol $z = x + iq$, azaz $q(t) = \text{Im}(z).$

A (homogén) mozgásegyenlet általános megoldása: $z_h(t) = (a + ib)e^{-\beta t} e^{i\nu t},$

- i az imaginárius egységvektor,
- a és b a kezdeti feltételekből számítható valós állandók,
- $\beta = \frac{r_q}{2m_q}$ a rendszer csillapítását jellemző mennyiség,
- $\nu = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ a csillapított szabad rendszer körfrekvenciája,
- $\alpha = \sqrt{\frac{1}{m_q c_q}}$ a csillapítatlan szabad rendszer körfrekvenciája.

- (79) Írja fel az egyszabadságfokú gerjesztett rezgőrendszer mozgásegyenletének komplex alakját, valamint a mozgásegyenlet partikuláris megoldását a partikuláris megoldásban szereplő mennyiségek jelentésének megadásával!

A mozgásegyenlet komplex alakja: $m_q \ddot{z} + r_q \dot{z} + \frac{1}{c_q} z = P_0 e^{i\omega t}$,

ahol $z = x + iq$, azaz $q(t) = \text{Im}(z)$ és

$P_0 = Q_{g0} e^{i\varepsilon}$ a gerjesztés komplex amplitudója.

A mozgásegyenlet partikuláris megoldása: $z_p(t) = \frac{P_0}{i\omega Z} e^{i\omega t}$,

- i az imaginárius egységvektor,

- ω a gerjesztés körfrekvenciája,

- $Z = \left[r_q + i \left(\omega m_q - \frac{1}{\omega c_q} \right) \right]$ a rendszer komplex ellenállása.