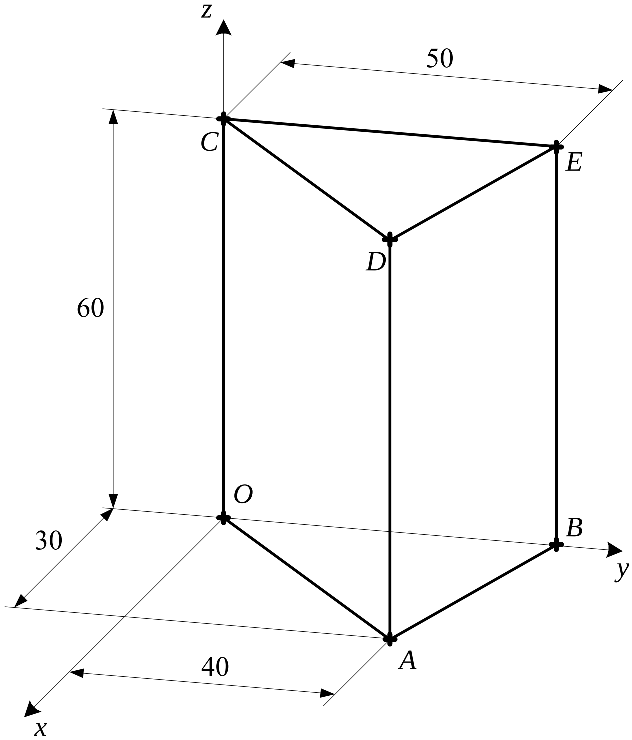
1. MECHANIKA-STATIKA GYAKORLAT
Kidolgozta: Triesz Péter egy. ts.

*Vektoralgebra*

## 1.1. Példa

*Adott* egy háromszög-alapú egyenes hasáb, melynek egyik csúcsa az origó, többi pedig helykoordinátáival van megadva.

$A(30,40,0)\,\text{mm}$,
$B(0,50,0)\,\text{mm}$,
$C(0,0,60)\,\text{mm}$,
$D(30,40,60)\,\text{mm}$,
$E(0,50,60)\,\text{mm}$.



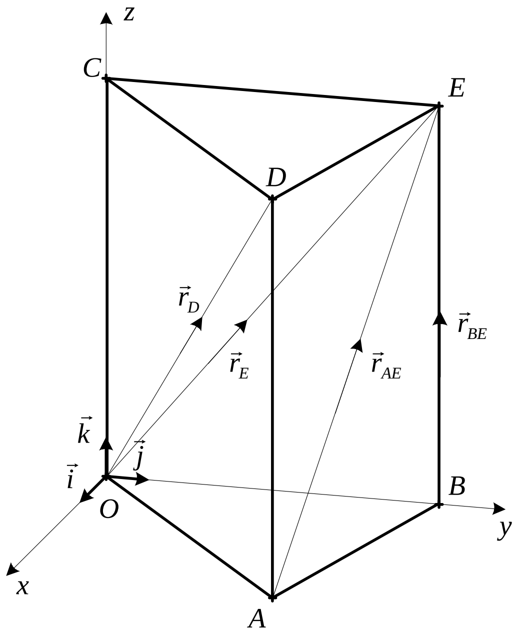

*Feladat:*

a. Határozza meg az $\vec{r}_{OE}, \vec{r}_{OD}, \vec{r}_{AE}, \vec{r}_{BE}$ helyvektorokat!
b. Számítsa ki a *CDE* háromszög és az *ABED* téglalap területét!

*Megoldás:*

a. Elsőként az origóból az egyes csúcsokba mutató helyvektorok meghatározása szükséges:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_{OA} = \left(30\vec{i} + 40\vec{j}\right)\text{mm},$$
$$\vec{r}_B = \vec{r}_{OB} = \left(50\vec{j}\right)\text{mm},$$
$$\vec{r}_C = \vec{r}_{OC} = \left(60\vec{k}\right)\text{mm},$$
$$\vec{r}_D = \vec{r}_{OD} = \left(30\vec{i} + 40\vec{j} + 60\vec{k}\right)\text{mm},$$
$$\vec{r}_E = \vec{r}_{OE} = \left(50\vec{j} + 60\vec{k}\right)\text{mm}.$$




Látható, hogy a kérdéses helyvektorok közül kettő már kiszámításra került. A maradék kettőt a következőképpen lehet meghatározni:

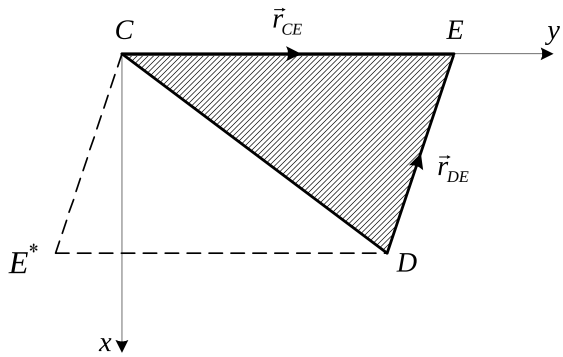
$$\vec{r}_{AE} = \vec{r}_E - \vec{r}_A = \left(-30\vec{i} + 10\vec{j} + 60\vec{k}\right)\text{mm},$$
$$\vec{r}_{BE} = \vec{r}_E - \vec{r}_B = \left(60\vec{k}\right)\text{mm}.$$

b. A *CDE* háromszög területe a *CD* oldalára tükrözéssel kapott paralelogramma területének fele. A paralelogramma területe definíció szerint:

$$T_{CEDE^*} = \left|\vec{r}_{CE} \times \vec{r}_{DE}\right|,$$

így a háromszög területe:

$$T_{CDE} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}_{CE} \times \vec{r}_{DE}\right|.$$




Ehhez szükséges a fenti két helyvektor meghatározása:

$$\vec{r}_{CE} = \vec{r}_E - \vec{r}_C = \left(50\vec{j}\right)\text{mm},$$
$$\vec{r}_{DE} = \vec{r}_E - \vec{r}_D = \left(-30\vec{i} + 10\vec{j}\right)\text{mm},$$

$$\vec{r}_{CE} \times \vec{r}_{DE} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 50 & 0 \\ -30 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \left(1500\vec{k}\right)\text{mm}^2,$$

$$T_{CDE} = 0{,}5 \cdot \sqrt{1500^2} = 750\ \text{mm}^2.$$

Az *ABED* téglalap, mint speciális helyzetű paralelogramma területe:

$$T_{ABED} = \left|\vec{r}_{DE} \times \vec{r}_{BE}\right|,$$

$$\vec{r}_{DE} \times \vec{r}_{BE} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{vmatrix} = \left(600\vec{i} + 1800\vec{j}\right)\text{mm}^2,$$

$$T_{ABED} = \left|\vec{r}_{DE} \times \vec{r}_{BE}\right| = \sqrt{600^2 + 1800^2} = 1897{,}36\ \text{mm}^2.$$

*Megjegyzés:*

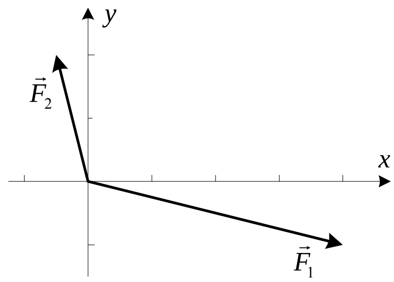
A kapott eredményeket érdemes összevetni a középiskolában megtanult területszámítási módszerekkel.

1.2. Példa

*Adott* két erő vektora:

$\vec{F}_1 = \left(40\vec{i} - 10\vec{j}\right)\text{N},$

$\vec{F}_2 = \left(-5\vec{i} + 20\vec{j}\right)\text{N}.$



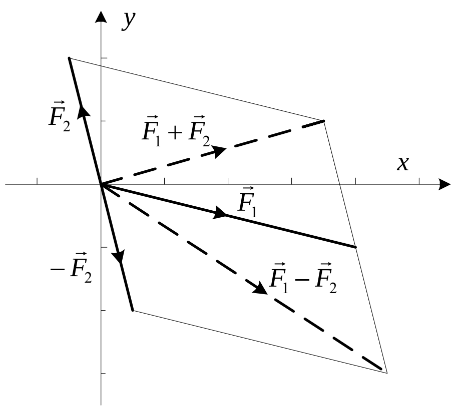

*Feladat:*

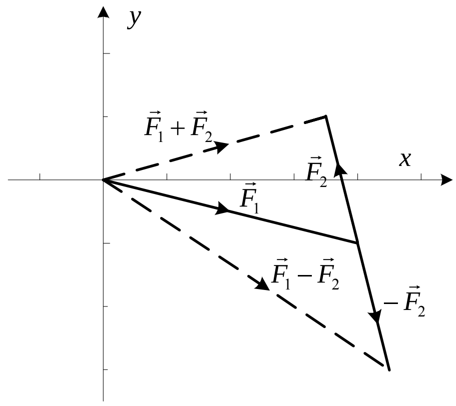
a. Határozza meg a két erő eredőjét, illetve különbségét szerkesztéssel, és
b. számítással!
c. Adja meg az erők hatásvonalának irány-egységvektorait!

*Megoldás:*

a. Szerkesztéshez két módszer választható: a paralelogramma vagy a háromszög módszer.
Összeadásnál a paralelogramma módszer a következő:
    1. párhuzamost húzunk az $\vec{F}_2$ erő végpontján keresztül az $\vec{F}_1$ hatásvonalával,
    2. ugyanezt a lépést végrehajtjuk az $\vec{F}_1$ végpontjában az $\vec{F}_2$ hatásvonalával,
    3. a két erő közös kezdőpontjából, a párhuzamosok metszéspontjába mutató vektor a két erővektor eredője (összege).

A két erő különbségének szerkesztésénél a következő átalakítást használjuk fel: $\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \left(-\vec{F}_2\right)$, azaz elsőként előállítjuk az $\vec{F}_2$ vektor (-1)-szeresét, és az előzőekben leírt lépések alapján elvégezzük a szerkesztést.




A háromszög módszer lépései (mind az összeg illetve különbség megszerkesztésére):
    1. az $\vec{F}_2$ vektort eltoljuk az $\vec{F}_1$ végpontjába,
    2. az $\vec{F}_1$ kezdőpontját és az $\vec{F}_2$ végpontját összekötő vektor a két erő eredője (összege).

b. Két (vagy több) vektor összegét illetve különbségét úgy kapjuk, hogy a megfelelő skalár-koordinátákat összeadjuk illetve kivonjuk:

$$\vec{F}_1 \pm \vec{F}_2 = \left[\left(F_{1x} \pm F_{2x}\right)\vec{i} + \left(F_{1y} \pm F_{2y}\right)\vec{j} + \left(F_{1z} \pm F_{2z}\right)\vec{k}\right]$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \left(35\vec{i} + 10\vec{j}\right)\mathrm{N}$$
$$\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = \left(45\vec{i} - 30\vec{j}\right)\mathrm{N}$$

c. Az erők irány-egységvektorai:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{F}_1}{\left|\vec{F}_1\right|} = \frac{\left(40\vec{i} - 10\vec{j}\right)}{\sqrt{40^2 + 10^2}} = \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{j}\right)$$
$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{F}_2}{\left|\vec{F}_2\right|} = \frac{\left(-5\vec{i} + 20\vec{j}\right)}{\sqrt{5^2 + 20^2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{17}}\vec{j}\right)$$

1.3. Példa

*Adott* két vektor:

$$\vec{c} = \left(20\vec{i} + 60\vec{j} - 90\vec{k}\right)\text{m},$$

$$\vec{d} = \left(-2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right)\text{m}.$$

*Feladat:*

Határozza meg a

a. $\vec{c}$ helyvektor $\vec{d}$ irányába eső összetevőjét, illetve
b. az arra merőleges összetevőjét!

*Megoldás:*

A feladat tulajdonképpen egy vektor felbontása egy adott iránnyal párhuzamos és arra merőleges vektorra.

a. Vektorok skaláris szorzatára vonatkozó összefüggés:

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = \left|\vec{d}\right| \cdot \underbrace{\left|\vec{c}\right| \cdot \cos\alpha}_{c_{\parallel}} \quad ,$$

$$\Rightarrow \quad c_{\parallel} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{\left|\vec{d}\right|} = \frac{20 \cdot (-2) + 60 \cdot 2 - 90}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = -\frac{10}{3} = -3{,}33\ \text{m}\,.$$

Vektor ebből úgy lesz, hogy a kapott skalár számot megszorozzuk a $\vec{d}$ vektor irány-egységvektorával:

$$\vec{e}_d = \frac{\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|} = \left(-\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}\right),$$

$$\vec{c}_{\parallel} = c_{\parallel}\,\vec{e}_d = \left(\frac{20}{9}\vec{i} - \frac{20}{9}\vec{j} - \frac{10}{9}\vec{k}\right)\text{m}\,.$$

b. A merőleges összetevőt úgy kapjuk meg a legegyszerűbben, ha az eredeti $\vec{c}$ vektorból kivonjuk az előbb kiszámolt párhuzamos összetevőt:

$$\vec{c}_{\perp} = \vec{c} - \vec{c}_{\parallel} = \left(\left(20 - \frac{20}{9}\right)\vec{i} + \left(60 - \left(-\frac{20}{9}\right)\right)\vec{j} + \left((-90) - \left(-\frac{10}{9}\right)\right)\vec{k}\right),$$

$$\vec{c}_{\perp} = \left(\frac{160}{9}\vec{i} + \frac{560}{9}\vec{j} - \frac{800}{9}\vec{k}\right)\text{m}.$$