SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM **GÉPSZERKEZETTAN ÉS MECHANIKA TANSZÉK**

3. MECHANIKA – STATIKA GYAKORLAT

Kidolgozta: Triesz Péter egy. ts.

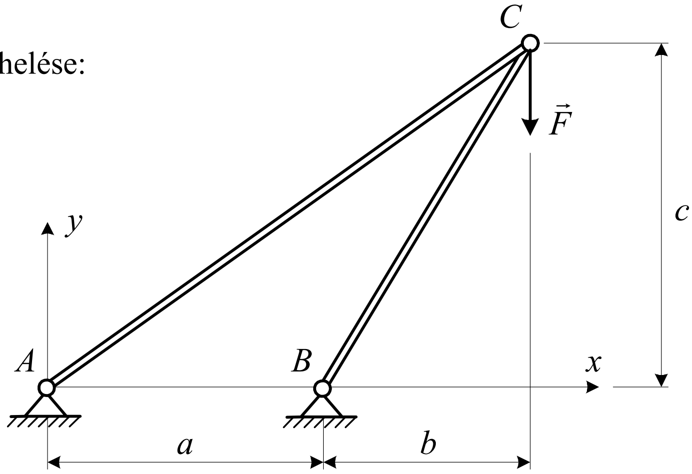
Három erő egyensúlya

<u>3.1. Példa:</u>

Adott egy emelőszerkezet méretei, és terhelése:

$a = 2\ \text{m} \quad b = 1{,}5\ \text{m}$

$c = 2{,}5\ \text{m} \quad F = 10\ \text{kN}$



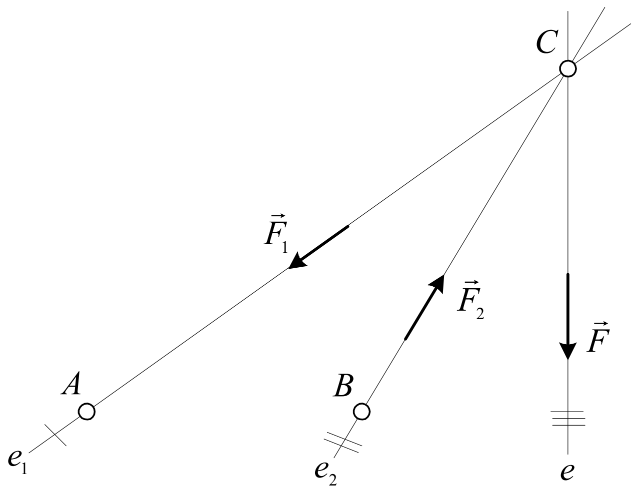
Feladat:

Határozza meg az $\vec{F}_1$ és $\vec{F}_2$ támasztóerőket

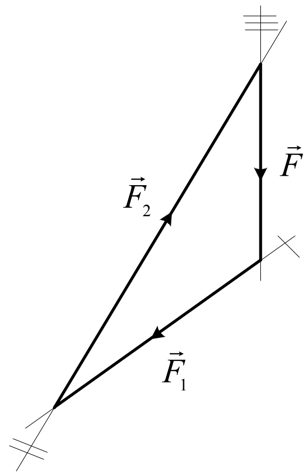
a. szerkesztéssel,
b. számítással.

Megoldás:

a. A rudak a végein terheltek, így a támaszerők rúdirányúak, meghatározásukhoz két ábrát, egy szerkezeti és egy erőábrát kell szerkeszteni.



Szerkezeti ábra



Erőábra

Az erőábráról az erőléptéknek megfelelően lemérhetők a támasztóerők nagyságai, $F_1 \approx 13\ \text{kN}$ és $F_2 \approx 20{,}5\ \text{kN}$.

b. A statika alapegyenlete:

$$\vec{0} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}\ .$$

A terhelő erő vektora $\vec{F} = \left(-10\vec{j}\right)\text{kN}$.
Behelyettesítés után a skaláregyenletek:

$$0 = F_{1x} + F_{2x},$$
$$0 = F_{1y} + F_{2y} - 10.$$

Látható, hogy a két egyenletben négy ismeretlen van, viszont ismertek a rudak irányai, és így az erők hatásvonalai is. Ezek ismeretében az erők irány-egységvektorai meghatározhatók a következőképpen:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|} = \frac{3{,}5\vec{i} + 2{,}5\vec{j}}{\sqrt{3{,}5^2 + 2{,}5^2}} = \frac{7\vec{i} + 5\vec{j}}{\sqrt{7^2 + 5^2}} = \left(\frac{7}{\sqrt{74}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{74}}\vec{j} \right),$$
$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{r}_{BC}}{|\vec{r}_{BC}|} = \frac{1{,}5\vec{i} + 2{,}5\vec{j}}{\sqrt{1{,}5^2 + 2{,}5^2}} = \frac{3\vec{i} + 5\vec{j}}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \left(\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{34}}\vec{j} \right).$$

Ha ismert egy vektor irány-egységvektora, akkor maga a vektor az alábbiak szerint felírható:

$$\vec{F}_1 = F_1\,\vec{e}_1 = \left(\frac{7F_1}{\sqrt{74}}\vec{i} + \frac{5F_1}{\sqrt{74}}\vec{j} \right)\text{kN},$$
$$\vec{F}_2 = F_2\,\vec{e}_2 = \left(\frac{3F_2}{\sqrt{34}}\vec{i} + \frac{5F_2}{\sqrt{34}}\vec{j} \right)\text{kN}.$$

Ezek skalárkoordinátáit visszahelyettesítve a megfelelő helyekre a statika alapegyenletében, már csak két ismeretlen marad a két skaláregyenletben:

$$0 = \frac{7}{\sqrt{74}}F_1 + \frac{3}{\sqrt{34}}F_2\ ,$$
$$10 = \frac{5}{\sqrt{74}}F_1 + \frac{5}{\sqrt{34}}F_2.$$

Az egyenletrendszert megoldva megkapjuk a támaszerők nagyságának pontos értékét:

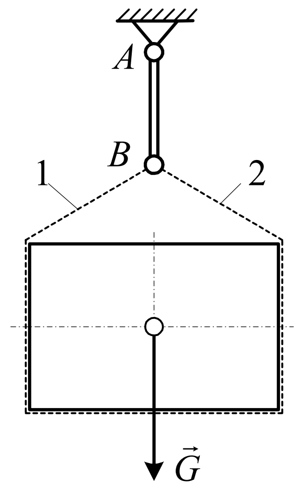
$$F_1 = -\frac{3\sqrt{74}}{2}\text{ kN} = -12{,}903\text{ kN} \qquad \text{és} \qquad F_2 = \frac{7\sqrt{34}}{2}\text{ kN} = 20{,}408\text{ kN}.$$

A támaszerők vektorai pedig:

$$\vec{F}_1 = -\frac{3\sqrt{74}}{2}\left(\frac{7}{\sqrt{74}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{74}}\vec{j} \right) = \left(-10{,}5\vec{i} - 7{,}5\vec{j}\right)\text{kN},$$
$$\vec{F}_2 = \frac{7\sqrt{34}}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{34}}\vec{j} \right) = \left(10{,}5\vec{i} + 17{,}5\vec{j}\right)\text{kN}.$$

Az F_1 erő negatív előjele utal arra, hogy az erő a feltételezett iránnyal ellentétes irányban hat, mely a szerkesztés eredményeként már korábban adódott.

3.2. Példa:



Az előző feladatban ismertetett emelővel egy $G = 10\,\mathrm{kN}$ súlyú terhet emelünk, amely az ábrán látható módon, acélsodronnyal van kötözve. Az acélsodrony $K_{\max} = 8\,\mathrm{kN}$ kötélerőt képes elviselni.

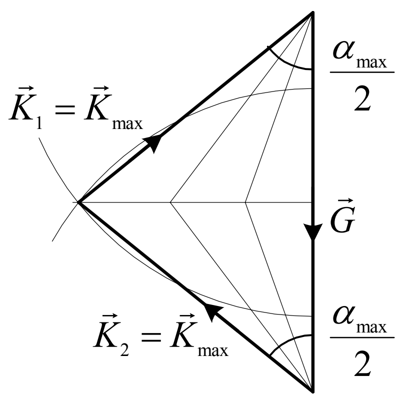
Feladat:

Mekkora lehet a két kötélág közötti maximális szög, hogy a kötél ne szakadjon el? A feladatot oldja meg

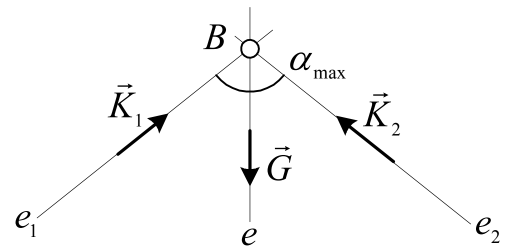
a. szerkesztéssel és
b. számítással!

Megoldás:

a. Ennél a feladatnál először az erőábrát rajzoljuk meg, majd ennek alapján a szerkezeti ábrát.



Erőábra



Szerkezeti ábra

Az erőábrában legelőször a súlyerőnek megfelelő szakaszt vesszük fel. Feltételezve azt, hogy a teher szimmetrikusan van kötözve, a súlyerő mindkét végéből a maximális kötélerőnek megfelelő távolsággal körzőzzünk. A metszéspontot a súlyerő kezdő- illetve végpontjával összekötve adódik a nyílfolyam-folytonos vektorháromszög. Az erők hatásvonalával párhuzamosokat húzva egy közös metszésponton át (B) adódik a szerkezeti ábra, ahonnan lemérhető a kötélágak legnagyobb nyílásszöge: $\alpha_{\max} \approx 100°$.

b. Számításhoz felhasználható az erőábra. A súlyerő vektora: $\vec{G} = (-10\vec{j})\,\mathrm{kN}$, a kötélerők: $\vec{K}_1 = (K_{1x}\vec{i} + K_{1y}\vec{j})$, illetve $\vec{K}_2 = (K_{2x}\vec{i} + K_{2y}\vec{j})$, ahol

$$K_{1x} = K_1 \sin\frac{\alpha_{\max}}{2} \qquad \text{és} \qquad K_{1y} = K_1 \cos\frac{\alpha_{\max}}{2},$$

$$K_{2x} = K_2 \sin\frac{\alpha_{\max}}{2} \qquad \text{és} \qquad K_{2y} = K_2 \cos\frac{\alpha_{\max}}{2}.$$

A statika alapegyenlete erre a feladatra:

$$\vec{0} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \vec{G}$$

Skaláregyenletekkel:

$$0 = K_{1x} + K_{2x} \qquad \Rightarrow \quad 0 = K_1 \sin\frac{\alpha_{\max}}{2} + K_2 \sin\frac{\alpha_{\max}}{2},$$

$$0 = K_{1y} + K_{2y} - 10 \quad \Rightarrow \quad 0 = K_1 \cos\frac{\alpha}{2} + K_2 \cos\frac{\alpha}{2} - 10 \qquad \text{és}$$

$$K_1 = K_2 = K_{\max} = 8\ \text{kN}.$$

Behelyettesítve a (3)-as egyenletet a (2)-ba és átrendezve kapjuk:

$$\cos\frac{\alpha_{\max}}{2} = \frac{10}{16} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_{\max} = 102{,}64°.$$

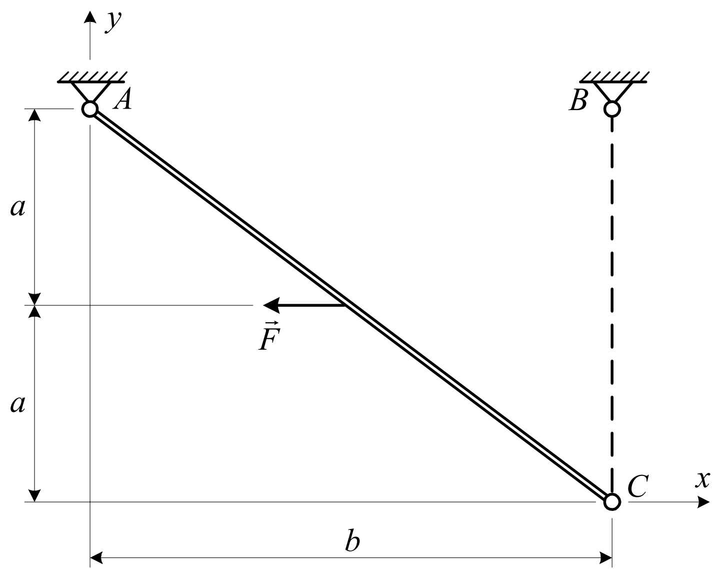
Megjegyzés:

A példa rámutat arra, hogy mennyire fontos az emelőszerkezetek működtetésére illetve a terhek kötözésére előírt szabályok betartása. A fenti példában számolt kötélágak közötti nyílásszög összefüggésben van a kötözéshez használt acélsodrony hosszával. Tehát a legfontosabb következtetés, ami levonható, hogy a terhek kötözésénél előnyösebb, ha hosszabb sodronyt használunk kötözésre.

3.3. Példa:

Adott az ábrán látható szerkezet geometriai méretei és terhelése:

$a = 1{,}5\ \text{m}$,
$b = 4\ \text{m}$,
$F = 12\ \text{kN}$.



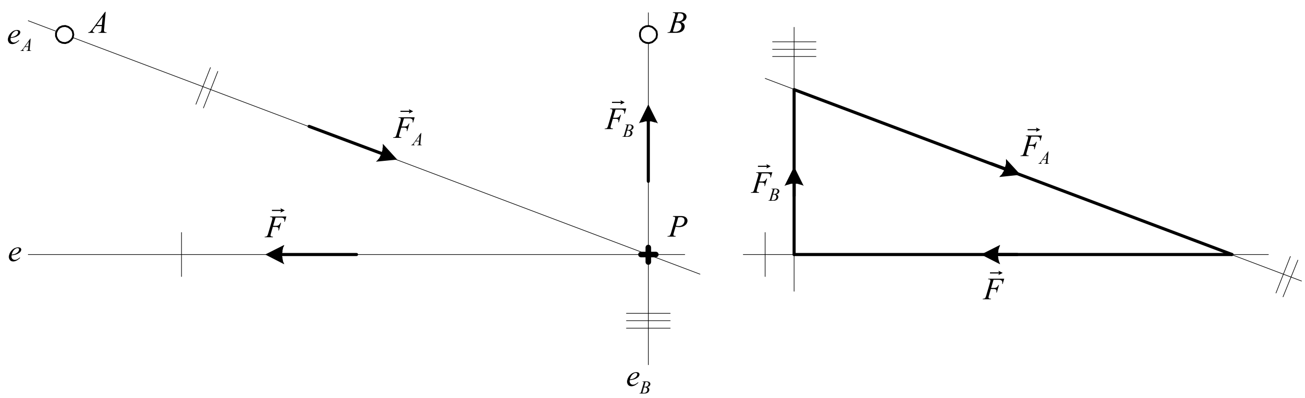
Feladat:

Az $\vec{F}_A$ és $\vec{F}_B$ támasztóerők meghatározása

a. szerkesztéssel és
b. számítással.

Megoldás:

a. A már megszokott módon először egy szerkezeti, majd egy erőábrát szerkesztünk, melyekből lemérhetők a támasztóerők közelítő nagyságai, valamint irányai.



Szerkezeti ábra — Erőábra

Támasztóerők nagyságai: $F_A \approx 13\ \text{kN}$, $F_B \approx 4{,}5\ \text{kN}$.

b. A szerkezetet terhelő erő és a támasztóerők irány-egységvektorai:

$$\vec{e} = -\vec{i}, \qquad \vec{e}_B = \vec{j}, \qquad \vec{e}_A = \frac{\vec{r}_{AP}}{|\vec{r}_{AP}|} = \left(\frac{8}{\sqrt{73}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{73}}\vec{j}\right), \text{ ahol}$$

$$\vec{r}_{AP} = \vec{r}_P - \vec{r}_A = \left(4\vec{i} - 1{,}5\vec{j}\right)\text{m}.$$

Az erővektorok:

$$\vec{F} = \left(-12\vec{i}\right)\text{kN}, \ \vec{F}_A = F_A\,\vec{e}_A = \left(\frac{8F_A}{\sqrt{73}}\vec{i} - \frac{3F_A}{\sqrt{73}}\vec{j}\right)\text{kN}, \ \vec{F}_B = F_B\,\vec{e}_B = \left(F_B\vec{j}\right)\text{kN}.$$

A statika alapegyenlete:

$$\vec{0} = \vec{F} + \vec{F}_A + \vec{F}_B \,.$$

Skaláregyenletekkel:

$$0 = -12 + \frac{8}{\sqrt{73}} F_A \,,$$
$$0 = -\frac{3}{\sqrt{73}} F_A + F_B \,.$$

Az egyenletrendszer megoldásai:

$$F_A = \frac{3}{2}\sqrt{73} = 12{,}816 \text{ kN}, \qquad F_B = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ kN} \,.$$

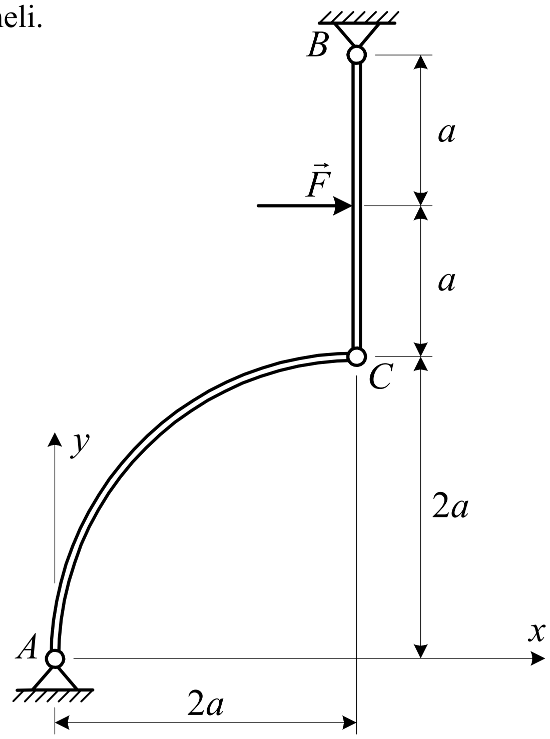
A támasztóerők vektorai:

$$\vec{F}_A = F_A \, \vec{e}_A = \left(12\vec{i} - 4{,}5\vec{j}\right)\text{kN} \,,$$
$$\vec{F}_B = F_B \, \vec{e}_B = \left(4{,}5\vec{j}\right)\text{kN} \,.$$

3.4. Példa

Az ábrán látható szerkezetet egy koncentrált erő terheli.
Adott a szerkezet geometriai méretei és a terhelőerő:

$a = 1\,\text{m}$,
$F = 60\,\text{N}$.



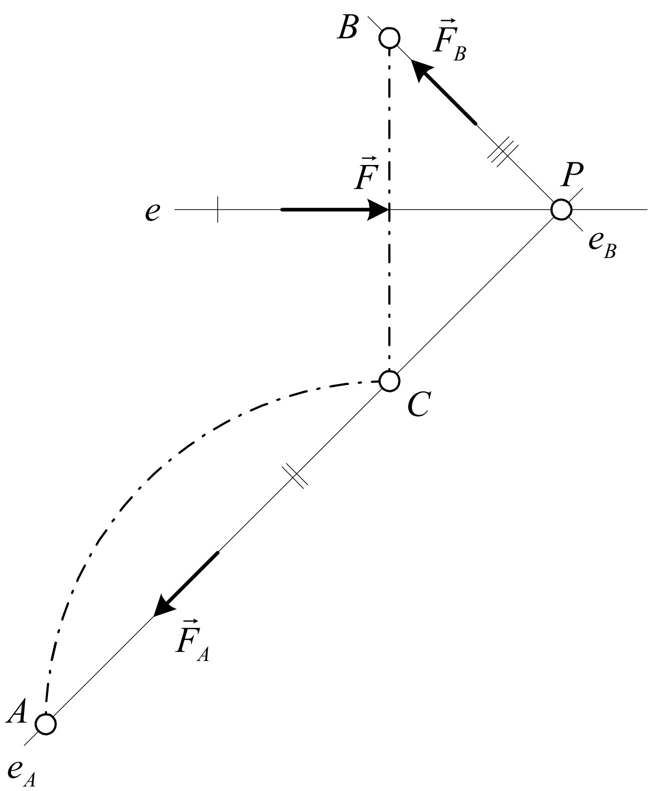
Feladat:

Az $\vec{F}_A$ és $\vec{F}_B$ támasztóerők meghatározása

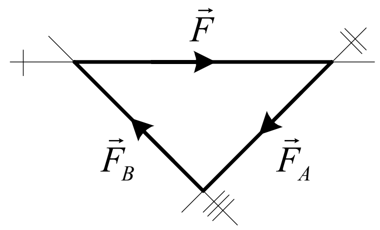
a. szerkesztéssel és
b. számítással.

Megoldás:

a. A szerkesztéshez a szerkezeti, és az erőábra:



Szerkezeti ábra



Erőábra

Ennél a szerkesztésnél is figyelembe vesszük azt, hogy a az AC görbe vonalú szerkezetrészt a támasztóerőkön kívül más erő nem terheli, ezért a támasztóerő hatásvonalának át kell haladjon mind az A illetve a C csuklóponton. A két támasztóerő illetve a terhelőerő közös metszéspontja az ábrán látható P pont. Az erőábra már könnyen adódik a szerkezeti ábrából. A támasztóerők nagyságát lemérve az erőléptéknek megfelelően kapjuk az eredményt:

$$F_A = F_B \approx 42{,}5\,\mathrm{N}\,.$$

b. A támasztóerők számításának első lépéseként meg tudjuk határozni a támasztóerők irány-egységvektorát:

$$\vec{e}_A = \frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right),$$

$$\vec{e}_B = \frac{\vec{r}_{BP}}{|\vec{r}_{BP}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right).$$

Ezek ismeretében felírhatók az ismeretlen támasztóerők vektorai, valamint a terhelő erő vektora is könnyen meghatározható, hiszen a vízszintes x tengellyel párhuzamos.

$$\vec{F}_A = F_A\,\vec{e}_A = \left(\frac{F_A\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{F_A\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)\mathrm{N}\,,$$

$$\vec{F}_B = F_B\,\vec{e}_B = \left(\frac{F_B\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{F_B\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)\mathrm{N}\,,$$

$$\vec{F} = F\,\vec{e} = \left(60\vec{i}\right)\mathrm{N}\,.$$

A statika alapegyenlete:

$$\vec{0} = \vec{F} + \vec{F}_A + \vec{F}_B\,,$$

skaláregyenletekkel:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 60 + \frac{F_A\sqrt{2}}{2} + \frac{F_B\sqrt{2}}{2} \\ 0 &= \frac{F_A\sqrt{2}}{2} - \frac{F_B\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow\; F_A = -\frac{60}{\sqrt{2}} = F_B\,, \\ &\Rightarrow\; F_A = F_B\,. \end{aligned}$$

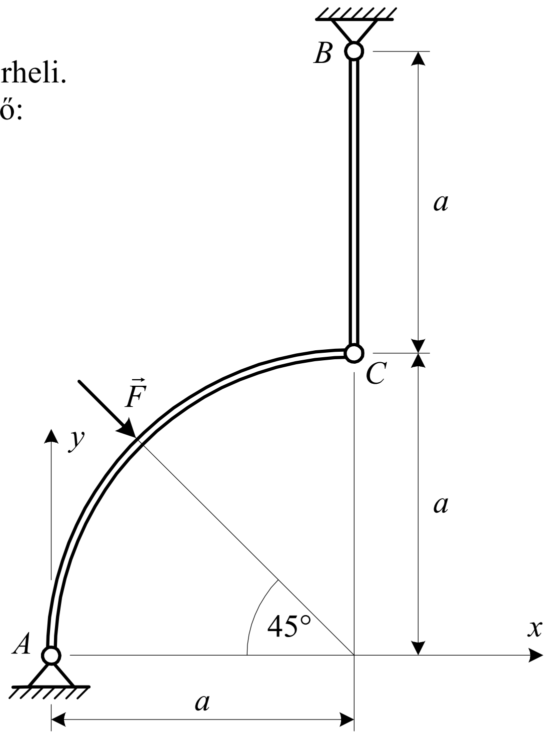
Az egyenletrendszer megoldásaként a támasztóerők nagysága adódott. A negatív előjel arra utal, hogy mindkét támasztóerő irányát (lásd feljebb a két irány-egységvektort) ellentétes irányúnak tételeztük fel, mint ahogy azok valójában ébrednek. A támasztóerők vektorai:

$$\vec{F}_A = F_A\,\vec{e}_A = \left(-30\vec{i} - 30\vec{j}\right)\mathrm{N}\,, \qquad \text{és} \qquad \vec{F}_B = F_B\,\vec{e}_B = \left(-30\vec{i} + 30\vec{j}\right)\mathrm{N}\,.$$

3.5. <u>Példa</u>

Az ábrán látható szerkezetet egy koncentrált erő terheli.
Adott a szerkezet geometriai méretei és a terhelőerő:

$a = 2\,\mathrm{m}$,
$F = 80\,\mathrm{N}$.



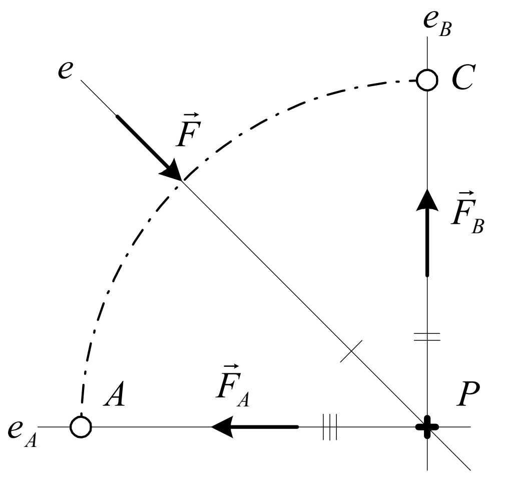
Feladat:

Az $\vec{F}_A$ és $\vec{F}_B$ támasztóerők meghatározása

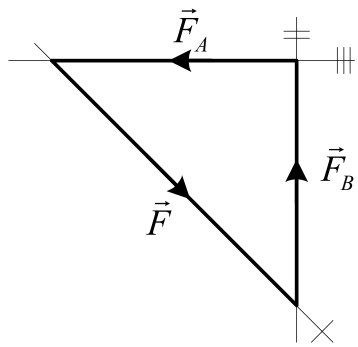
a. szerkesztéssel és
b. számítással.

Megoldás:

a. A szerkesztéshez a szerkezeti, és az erőábra:



Szerkezeti ábra



Erőábra

Most a BC rúd az, amelyben csak rúdirányú erők ébrednek, így az $\vec{F}_B$ erő is rúdirányú lesz. A szerkezeti- és az erőábra ennek megfelelően van megszerkesztve.

b. Az adott koncentrált erő 45°-os szöget zár be a vízszintessel, ennek a szögnek a szögfüggvényeivel megadható a terhelő erő vektorának az irány-egységvektora:

$$\vec{e} = \left[(\cos 45°)\vec{i} - (\sin 45°)\vec{j}\right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right), \qquad \text{ezzel}$$

$$\vec{F} = F\,\vec{e} = \left(40\sqrt{2}\vec{i} - 40\sqrt{2}\vec{j}\right)\text{N}.$$

A támasztóerők párhuzamosak a koordináta-rendszer x illetve y tengelyeivel, azaz az ismeretlen támasztóerők vektorai:

$$\vec{F}_A = \left(F_A\vec{i}\right)\text{N},$$
$$\vec{F}_B = \left(F_B\vec{j}\right)\text{N}.$$

A statika alapegyenlete három erő egyensúlyára:

$$\vec{0} = \vec{F} + \vec{F}_A + \vec{F}_B,$$

skaláregyenletekkel:

$$0 = 40\sqrt{2} + F_A \quad \Rightarrow \quad F_A = -40\sqrt{2}\text{ N } (\leftarrow),$$
$$0 = -40\sqrt{2} + F_B \quad \Rightarrow \quad F_B = 40\sqrt{2}\text{ N } (\uparrow).$$

A végeredmény, vagyis a támasztóerők vektorai:

$$\vec{F}_A = \left(-40\sqrt{2}\vec{i}\right)\text{N}, \qquad \text{illetve} \qquad \vec{F}_B = \left(40\sqrt{2}\vec{j}\right)\text{N}.$$