SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM

GÉPSZERKEZETTAN ÉS MECHANIKA TANSZÉK

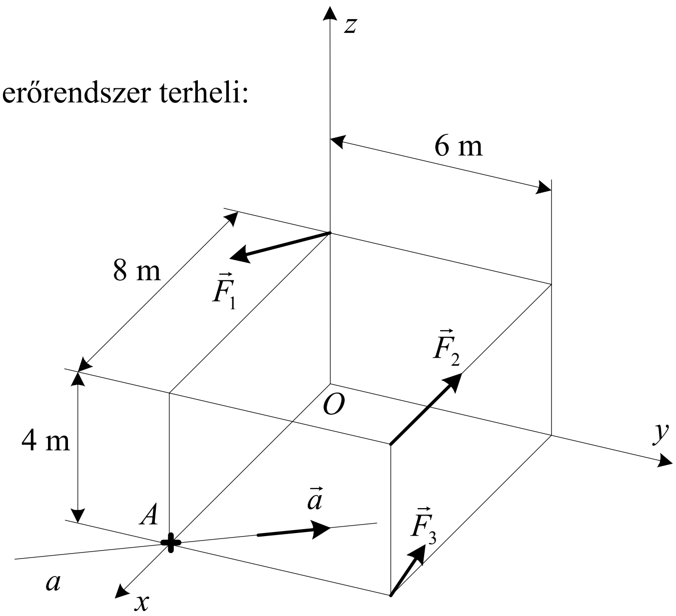
4. MECHANIKA – STATIKA GYAKORLAT

Kidolgozta: Triesz Péter egy. ts.

Erő, nyomaték, erőrendszer eredője, erőrendszerek egyenértékűsége

4.1. Példa:

A rajzon látható hasábot az alábbi erők alkotta erőrendszer terheli:



$$\vec{F}_1 = \left(4\vec{i} - 4\vec{j}\right)\text{kN},$$
$$\vec{F}_2 = \left(-2\vec{i}\right)\text{kN},$$
$$\vec{F}_3 = \left(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}\right)\text{kN},$$
$$\vec{a} = \left(-2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}\right)\text{m}.$$

Feladat:

Határozza meg

a. az erőrendszer origóra számított nyomatékát ($\vec{M}_O = ?$),
b. az erőrendszer *y*, illetve *z* tengelyekre számított nyomatékait ($M_y = ?$ és $M_z = ?$),
c. Az erőrendszer „*a*” tengelyre számított nyomatékát ($M_a = ?$)!

Megoldás:

a. Erőrendszer pontra számított nyomatékára az alapösszefüggés, ha az erőrendszert csak koncentrált erők alkotják:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right), \quad i = 1,2,\dots n,$$ ahol *n* a koncentrált erők száma.

Ez esetben három erő nyomatékát kell összegezni, azaz:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 .$$

A helyvektorok az ábráról leolvashatók:

$$\vec{r}_1 = \left(4\vec{k}\right)\text{m},$$
$$\vec{r}_2 = \left(8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}\right)\text{m},$$
$$\vec{r}_3 = \left(8\vec{i} + 6\vec{j}\right)\text{m}.$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \left(16\vec{i} + 16\vec{j}\right)\text{Nm},$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(-8\vec{j} + 12\vec{k}\right)\text{Nm},$$

$$\vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \left(24\vec{i} - 32\vec{j} + 12\vec{k}\right)\text{Nm},$$

$$\vec{M}_0 = \left(40\vec{i} - 24\vec{j} + 24\vec{k}\right)\text{Nm}.$$

b. Az adott koordinátatengelyekre számolt nyomatékok úgy határozhatók meg, hogy a megfelelő tengelyek irány-egységvektoraival kell skalárisan megszorozni az origóra számolt nyomaték vektorát:

$$M_y = \vec{M}_0 \cdot \vec{j} = -24 \text{ Nm},$$
$$M_z = \vec{M}_0 \cdot \vec{k} = 24 \text{ Nm}.$$

c. Erőrendszer „*a*” tengelyre számolt nyomatékának számítására az alábbi összefüggés szolgál:

$$M_a = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a$$

A képletből kitűnik, hogy a tengelyre számolt nyomaték két vektor skaláris szorzatával adódik, vagyis skaláris mennyiség, ellentétben a pontra számolt nyomatékkal, ami vektor mennyiség.

$$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^{3} \vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i = \vec{r}_{A1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{A2} \times \vec{F}_2 + \vec{r}_{A3} \times \vec{F}_3$$

Az A pontból az erők támadáspontjaiba mutató helyvektorok szintén az ábráról leolvashatók:

$$\vec{r}_{A1} = \left(-8\vec{i} + 4\vec{k}\right)\text{m},$$
$$\vec{r}_{A2} = \left(6\vec{j} + 4\vec{k}\right)\text{m},$$
$$\vec{r}_{A3} = \left(6\vec{j}\right)\text{m}.$$

$$\vec{r}_{A1} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \left(16\vec{i} + 16\vec{j} + 32\vec{k}\right)\text{Nm},$$

$$\vec{r}_{A2} \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(-8\vec{j} + 12\vec{k}\right)\text{Nm},$$

$$\vec{r}_{A3} \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \left(24\vec{i} - 12\vec{k}\right)\text{Nm},$$

$$\vec{M}_A = \left(40\vec{i} + 8\vec{j} + 32\vec{k}\right)\text{Nm}.$$

Az „a” tengely irány-egységvektora:

$$\vec{e}_A = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\left(-2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}\right)}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2}} = \left(-\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right).$$

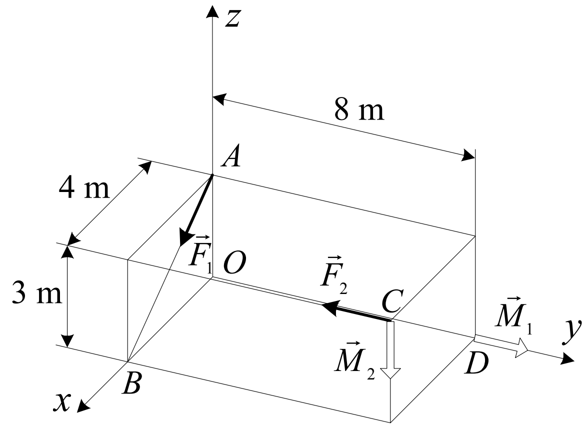
Az „a” tengelyre számolt nyomaték:

$$M_a = 40\left(-\frac{1}{3}\right) + 8 \cdot \frac{2}{3} + 32\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{88}{3}\,\text{Nm}\left(= -29{,}33\,\text{Nm}\right).$$

4.2. Példa:

Adott egy hasáb méreteivel, és az azt terhelő erőrendszer:

$$F_1 = F_2 = 5\,\text{MN}\left(= 5\cdot 10^6\ \text{N}\right),$$
$$M_1 = M_2 = 20\,\text{MNm}\left(= 20\cdot 10^6\ \text{Nm}\right).$$



Feladat:

Határozza meg

a. az erőrendszer origóra számított nyomatékát ($\vec{M}_O = ?$),
b. az erőrendszer C pontra számított nyomatékát ($\vec{M}_C = ?$),
c. az erőrendszer x, y, illetve z tengelyekre számított nyomatékait ($M_x = ?$, $M_y = ?$ és $M_z = ?$)!

Megoldás:

a. A nyomaték számítása annyiban módosul ennél a feladatnál, hogy ez esetben a koncentrált nyomatékokat is összegezni kell:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) + \sum_{j=1}^{m}\vec{M}_j, \quad i = 1,2,\ldots n; \quad j = 1,2,\ldots m.$$
$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$

Az erővektorok:

$$\vec{F}_1 = F_1 \cdot \vec{e}_1 = \left(4\vec{i} - 3\vec{k}\right)\text{MN}, \qquad \vec{F}_2 = F_2 \cdot \vec{e}_2 = \left(-5\vec{j}\right)\text{MN}.$$

A nyomatékvektorok:

$$\vec{M}_1 = M_1\,\vec{f}_1 = \left(20\vec{j}\right)\text{MNm}, \qquad \vec{M}_2 = M_2\,\vec{f}_2 = \left(-20\vec{k}\right)\text{MNm},$$

ahol $\vec{f}_1$ és $\vec{f}_2$ a nyomatékok irány-egységvektorai, az ábráról leolvashatók.

Az erők támadáspontjainak helyvektorai:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_A = \left(3\vec{k}\right)\text{m}, \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_C = \left(4\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}\right)\text{m}.$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \left(12\vec{j}\right)\text{MNm},$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 8 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \left(15\vec{i} - 20\vec{k}\right)\text{MNm},$$

$$\vec{M}_O = \left(15\vec{i} + 32\vec{j} - 40\vec{k}\right)\text{MNm}.$$

b.

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_{Ci} \times \vec{F}_i\right) + \sum_{j=1}^{m}\vec{M}_j.$$

$$\vec{r}_{C1} = \vec{r}_{CA} = \left(-4\vec{i} - 8\vec{j}\right)\text{m}, \quad \vec{r}_{C2} = \vec{0}.$$

$$\vec{r}_{C1} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -8 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \left(24\vec{i} - 12\vec{j} + 32\vec{k}\right)\text{MNm},$$

$$\vec{r}_{C2} \times \vec{F}_2 = \vec{0},$$

$$\vec{M}_C = \left(24\vec{i} + 8\vec{j} + 12\vec{k}\right)\text{MNm}.$$

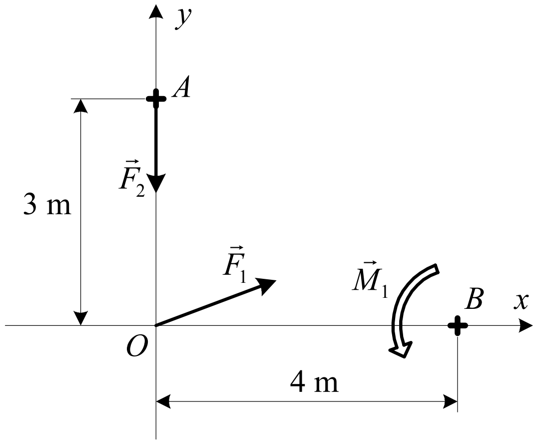
c.

$$M_x = \vec{M}_O \cdot \vec{i} = 15\ \text{MNm},$$
$$M_y = \vec{M}_O \cdot \vec{j} = 32\ \text{MNm},$$
$$M_z = \vec{M}_O \cdot \vec{k} = -40\ \text{MNm}.$$

4.3. Példa:

Adott egy síkbeli erőrendszer:

$$\vec{F}_1 = \left(8\vec{i} + 3\vec{j}\right)\text{kN},$$
$$\vec{F}_2 = \left(-5\vec{j}\right)\text{kN},$$
$$\vec{M}_1 = \left(12\vec{k}\right)\text{kNm}.$$



Feladat:

Határozza meg

a. az erőrendszer origóba redukált vektorkettősét, ($\vec{F} = ?$, $\vec{M}_0 = ?$),
b. az eredő erő hatásvonalát ($x_e = ?$, $y_e = ?$)!

Megoldás:

a.

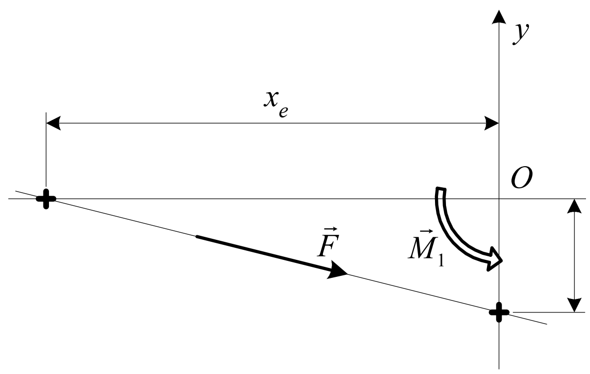
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_i = \left(8\vec{i} - 2\vec{j}\right)\text{kN}.$$

Mivel mindkét erőnek zérus a nyomatéka az origóra (az egyiknek a hatásvonala átmegy rajta, a másiknak támadáspontja), ezért

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_1 = \left(12\vec{k}\right)\text{kNm}.$$

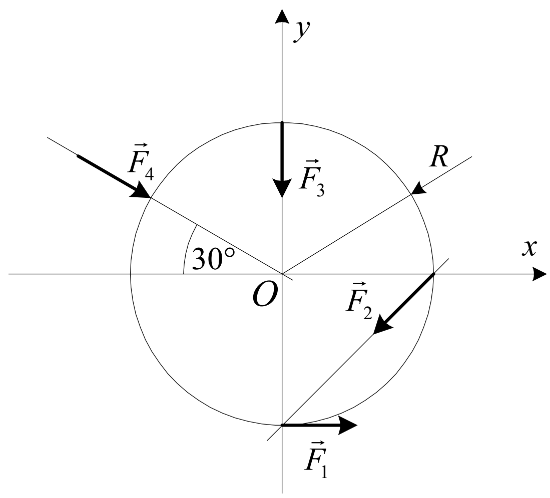
b. Síkbeli erőrendszer esetén a nyomaték definíciójának felhasználásával vezethetők le a következő összefüggések:

$$x_e = \frac{M_{0z}}{F_y} = \frac{12}{-2} = -6\ \text{m}, \qquad \text{és} \qquad y_e = \frac{M_{0z}}{-F_x} = \frac{12}{8} = -1{,}5\ \text{m}.$$



4.4. Példa:

Adott az ábrán látható síkbeli erőrendszer:



$$F_1 = 6\,\text{kN},\quad F_2 = 8\,\text{kN},$$
$$F_3 = 4\,\text{kN},\quad F_4 = 12\,\text{kN},$$
$$R = 2\,\text{m}.$$

Feladat:

Határozza meg

a. az erőrendszer origóba redukált vektorkettősét, ($\vec{F} = ?$, $\vec{M}_0 = ?$),

b. az eredő erő hatásvonalát ($x_e = ?$, $y_e = ?$)!

Megoldás:

a.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i\,,\quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right).$$

Az erővektorok:

$$\vec{F}_1 = F_1\,\vec{e}_1 = \left(6\vec{i}\right)\text{kN}\,,$$
$$\vec{F}_2 = F_2\,\vec{e}_2 = 8\left(-\cos 45°\vec{i} - \sin 45°\vec{j}\right) = \left(-4\sqrt{2}\vec{i} - 4\sqrt{2}\vec{j}\right)\text{kN}\,,$$
$$\vec{F}_3 = F_3\,\vec{e}_3 = \left(-4\vec{j}\right)\text{kN}\,,$$
$$\vec{F}_4 = F_4\,\vec{e}_4 = 12\left(\cos 30°\vec{i} - \sin 30°\vec{j}\right) = \left(6\sqrt{3}\vec{i} - 6\vec{j}\right)\text{kN}\,.$$

Az eredő:

$$\vec{F} = \left(10{,}735\vec{i} - 15{,}657\vec{j}\right)\text{kN}\,.$$

Az erők támadáspontjainak helyvektorai:

$$\vec{r}_1 = \left(-2\vec{j}\right)\text{m}\,,\qquad \vec{r}_2 = \left(2\vec{i}\right)\text{m}\,,\quad \vec{r}_3 = \left(2\vec{j}\right)\text{m}\,,\quad \vec{r}_4 = \left(-\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}\right)\text{m}\,.$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(12\vec{k}\right)\text{kNm}\,,$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ -4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \left(-8\sqrt{2}\vec{k}\right)\text{kNm},$$

$$\vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0},$$

$$\vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 6\sqrt{3} & -6 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

Az origóra számolt nyomaték:

$$\vec{M}_0 = \left(0{,}686\vec{k}\right)\text{kNm}.$$

b.

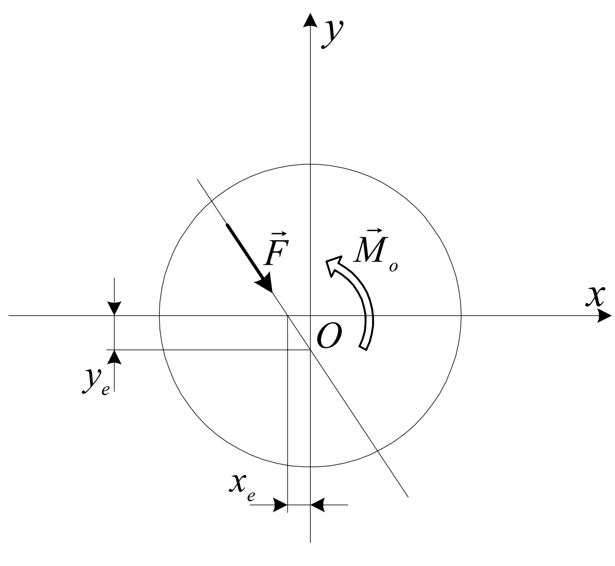
$$x_e = \frac{M_{0z}}{F_y} = -0{,}044\ \text{m}, \qquad \text{és} \qquad y_e = \frac{M_{0z}}{-F_x} = -0{,}064\ \text{m}.$$

Megjegyzés:

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_x \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -0{,}044 & 0 & 0 \\ 10{,}735 & -15{,}657 & 0 \end{vmatrix} = \left(0{,}686\vec{k}\right)\text{kNm},$$

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_y \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -0{,}064 & 0 \\ 10{,}735 & -15{,}657 & 0 \end{vmatrix} = \left(0{,}686\vec{k}\right)\text{kNm}.$$

A fenti két számítás azt a fontos tételt támasztja alá, hogy egy erő vektora a hatásvonala mentén bárhova eltolható, hatása változatlan marad a nyomaték vonatkozásában.

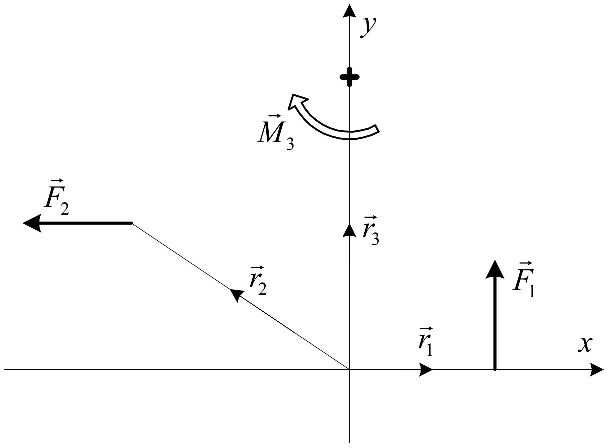


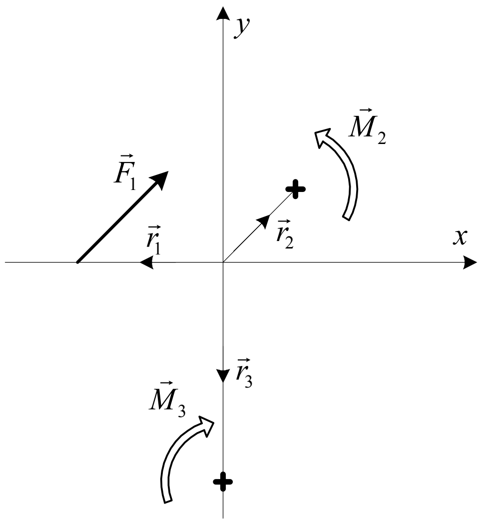
4.5. Példa:

Adott két síkbeli erőrendszer:

$$(\mathrm{ER})': \quad \vec{r}_1 = \left(2\vec{i}\right)\mathrm{m}, \quad \vec{F}_1 = \left(4\vec{j}\right)\mathrm{N}, \quad \vec{r}_2 = \left(-3\vec{i} + 2\vec{j}\right)\mathrm{m}, \quad \vec{F}_2 = \left(-2\vec{i}\right)\mathrm{N}, \quad \vec{r}_3 = \left(4\vec{j}\right)\mathrm{m}, \quad \vec{M}_3 = \left(-3\vec{k}\right)\mathrm{N},$$

$$(\mathrm{ER})'': \quad \vec{r}_1 = \left(-2\vec{i}\right)\mathrm{m}, \quad \vec{F}_1 = \left(3\vec{i} + 3\vec{j}\right)\mathrm{N}, \quad \vec{r}_2 = \left(\vec{i} + \vec{j}\right)\mathrm{m}, \quad \vec{M}_2 = \left(5\vec{k}\right)\mathrm{N}, \quad \vec{r}_3 = \left(-3\vec{j}\right)\mathrm{m}, \quad \vec{M}_3 = \left(-\vec{k}\right)\mathrm{N}.$$





Feladat:

Állapítsa meg, hogy a két erőrendszer egyenértékű-e!

Megoldás:

Két, vagy több erőrendszer egymással egyenértékű, ha egy tetszőleges pontra – origóra – redukált vektorkettősük egyenlők.

1-es erőrendszer:

$$\vec{F}' = \sum_i \vec{F}_i', \quad \vec{M}_O' = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i' + \sum_j \vec{M}_j',$$

$$\vec{F}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \left(-2\vec{i} + 4\vec{j}\right)\mathrm{N}, \quad F' = 2\sqrt{5}\ \mathrm{N},$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \left(8\vec{k}\right)\mathrm{Nm}, \quad \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \left(4\vec{k}\right)\mathrm{Nm},$$

$$\vec{M}_0' = \left(9\vec{k}\right)\mathrm{Nm},$$

$$x_e' = \frac{M_0'}{F_y'} = -4{,}5\ \mathrm{m}, \quad y_e' = -\frac{M_0'}{F_x'} = -2{,}25\ \mathrm{m}.$$

2-es erőrendszer:

$$\vec{F}'' = \sum_i \vec{F}_i'', \quad \vec{M}_O'' = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i'' + \sum_j \vec{M}_j'',$$

$$\vec{F}'' = \vec{F}_1 = \left(3\vec{i} + 3\vec{j}\right)\mathrm{N}, \quad F'' = 3\sqrt{2}\ \mathrm{N},$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \left(-6\vec{k}\right)\mathrm{Nm},$$

$$\vec{M}_0'' = \left(-2\vec{k}\right)\mathrm{Nm},$$

$$x_e'' = \frac{M_0''}{F_y''} = -0{,}66\ \mathrm{m}, \quad y_e'' = -\frac{M_0''}{F_x''} = 0{,}66\ \mathrm{m}.$$

A fenti eredményekből következik, hogy a két erőrendszer nem egyenértékű.