SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM **GÉPSZERKEZETTAN ÉS MECHANIKA TANSZÉK**

5. MECHANIKA – STATIKA GYAKORLAT

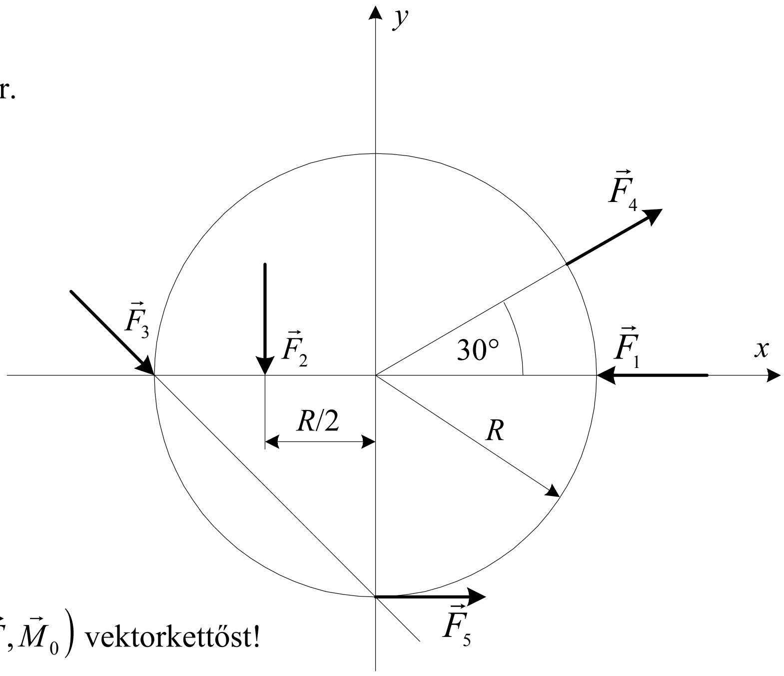
Kidolgozta: Szabó Tamás egy. doc.,
Triesz Péter egy. ts.

Erőrendszer eredő vektorkettőse, párhuzamos erőrendszer, vonal mentén megoszló erőrendszerek

5.1. Példa

Adott az ábrán látható erőrendszer.

$F_1 = 3\,\text{kN}$,
$F_2 = 4\,\text{kN}$,
$F_3 = 4\,\text{kN}$,
$F_4 = 5\,\text{kN}$,
$F_5 = 2\,\text{kN}$,
$R = 3\,\text{m}$.



Feladat:

a. Határozza meg az eredő $\left(\vec{F}, \vec{M}_0\right)$ vektorkettőst!
b. Határozza meg az $\vec{F}$ eredő erőt szerkesztéssel!

Megoldás:

a. Első lépésként az erők vektorait kell meghatározni. Az ábráról leolvashatók az erők irány-egységvektorai.

$$\vec{F}_1 = F_1\,\vec{e}_1 = 3\left(-\vec{i}\right) = \left(-3\vec{i}\right)\text{kN},$$
$$\vec{F}_2 = F_2\,\vec{e}_2 = 4\left(-\vec{j}\right) = \left(-4\vec{j}\right)\text{kN},$$
$$\vec{F}_3 = F_3\,\vec{e}_3 = 4\left(\cos 45°\vec{i} - \sin 45°\vec{j}\right) = \left(2\sqrt{2}\vec{i} - 2\sqrt{2}\vec{j}\right)\text{kN},$$
$$\vec{F}_4 = F_4\,\vec{e}_4 = 5\left(\cos 30°\vec{i} + \sin 30°\vec{j}\right) = \left(2{,}5\sqrt{3}\vec{i} + 2{,}5\vec{j}\right)\text{kN},$$
$$\vec{F}_5 = F_5\,\vec{e}_5 = 2\left(\vec{i}\right) = \left(2\vec{i}\right)\text{kN}.$$

Az eredő erő:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \left(6{,}158\vec{i} - 4{,}328\vec{j}\right)\text{kN}.$$

Az erőrendszer origóra számolt nyomatékához meg kell határozni az egyes erők origóra vett nyomatékát, majd ezeket összegezzük:

$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i .$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \left(3\vec{i}\right)\times\left(-3\vec{i}\right) = \vec{0},$$
$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \left(-1{,}5\vec{i}\right)\times\left(-4\vec{j}\right) = \left(6\vec{k}\right)\text{kNm},$$
$$\vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \left(-3\vec{i}\right)\times\left(2\sqrt{2}\vec{i} - 2\sqrt{2}\vec{j}\right) = \left(6\sqrt{2}\vec{k}\right)\text{kNm},$$
$$\vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = \left(1{,}5\sqrt{3}\vec{i} + 1{,}5\vec{j}\right)\times\left(2{,}5\sqrt{3}\vec{i} + 2{,}5\vec{j}\right) = \vec{0},$$
$$\vec{r}_5 \times \vec{F}_5 = \left(-3\vec{j}\right)\times\left(2\vec{i}\right) = \left(6\vec{k}\right)\text{kNm}.$$

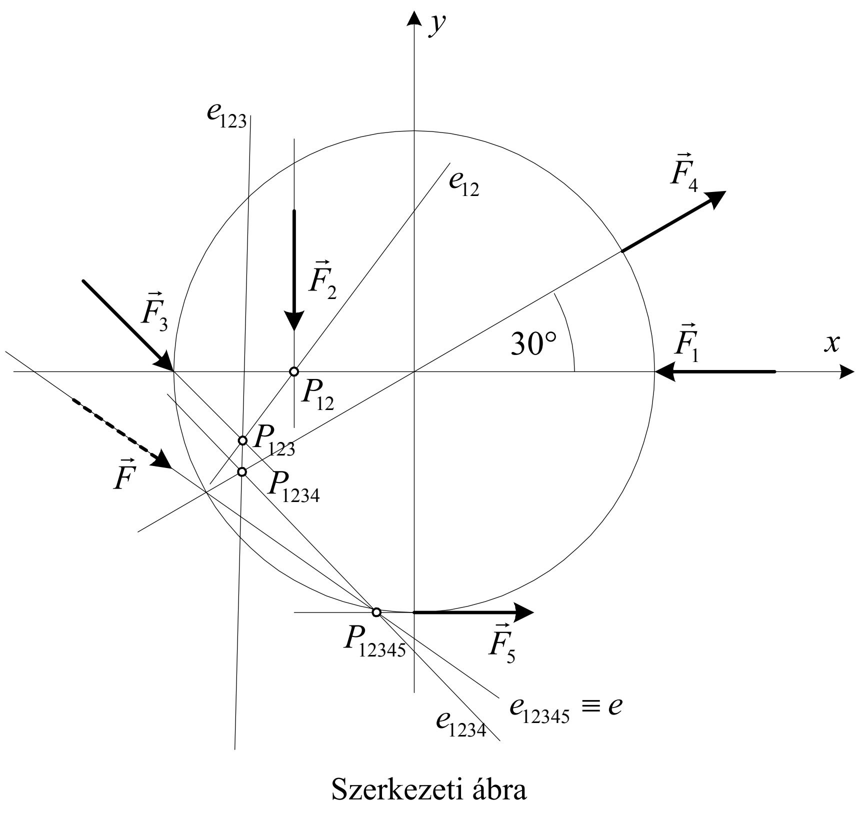
$$\vec{M}_0 = \left(20{,}485\vec{k}\right)\text{kNm}.$$

Az eredő erő hatásvonalának helye is meghatározandó:

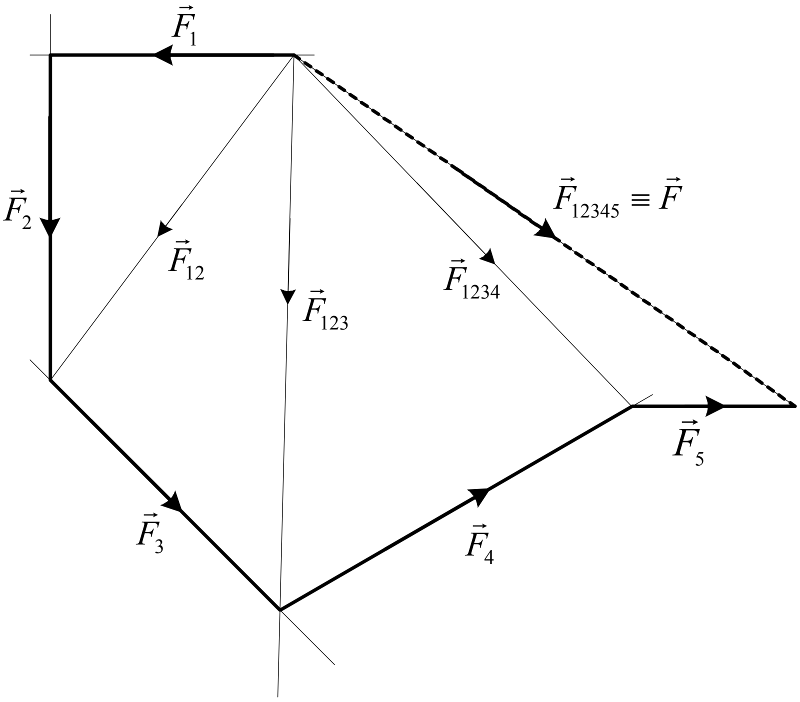
$$x_e = \frac{M_{0z}}{F_y} = \frac{20{,}485}{-4{,}328} = -4{,}733\ \text{m},$$
$$y_e = -\frac{M_{0z}}{F_x} = -\frac{20{,}485}{6{,}158} = -3{,}326\ \text{m}.$$

b. Részeredő-sokszög szerkesztésénél azt az alaptételt használjuk fel, miszerint két erő eredőjének hatásvonala átmegy a két erő hatásvonalának metszéspontján. Elsőként megszerkesztjük az $\vec{F}_1$ és $\vec{F}_2$ erők eredőjét, majd az $\vec{F}_{12}$ és $\vec{F}_3$ erőkét, stb.., míg megkapjuk az erőrendszer eredőjét, illetve annak hatásvonalát.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}_{\vec{F}_{12}} + \vec{F}_3}_{\vec{F}_{123}} + \vec{F}_4}_{\vec{F}_{1234}} + \vec{F}_5}_{\vec{F}}$$



Szerkezeti ábra

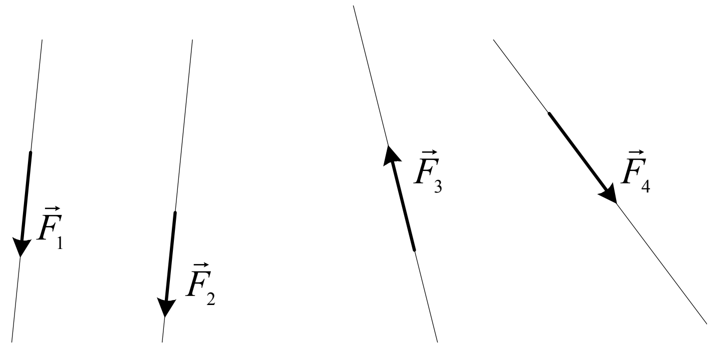

$\vec{F}_1$
$\vec{F}_2$
$\vec{F}_{12}$
$\vec{F}_{123}$
$\vec{F}_{1234}$
$\vec{F}_{12345} \equiv \vec{F}$
$\vec{F}_5$
$\vec{F}_3$
$\vec{F}_4$

Erőábra

5.2. Példa

Adott az ábrán látható erőrendszer.

$F_1 = 2\text{ kN}$,
$F_2 = 3\text{ kN}$,
$F_3 = 3\text{ kN}$,
$F_4 = 5\text{ kN}$.



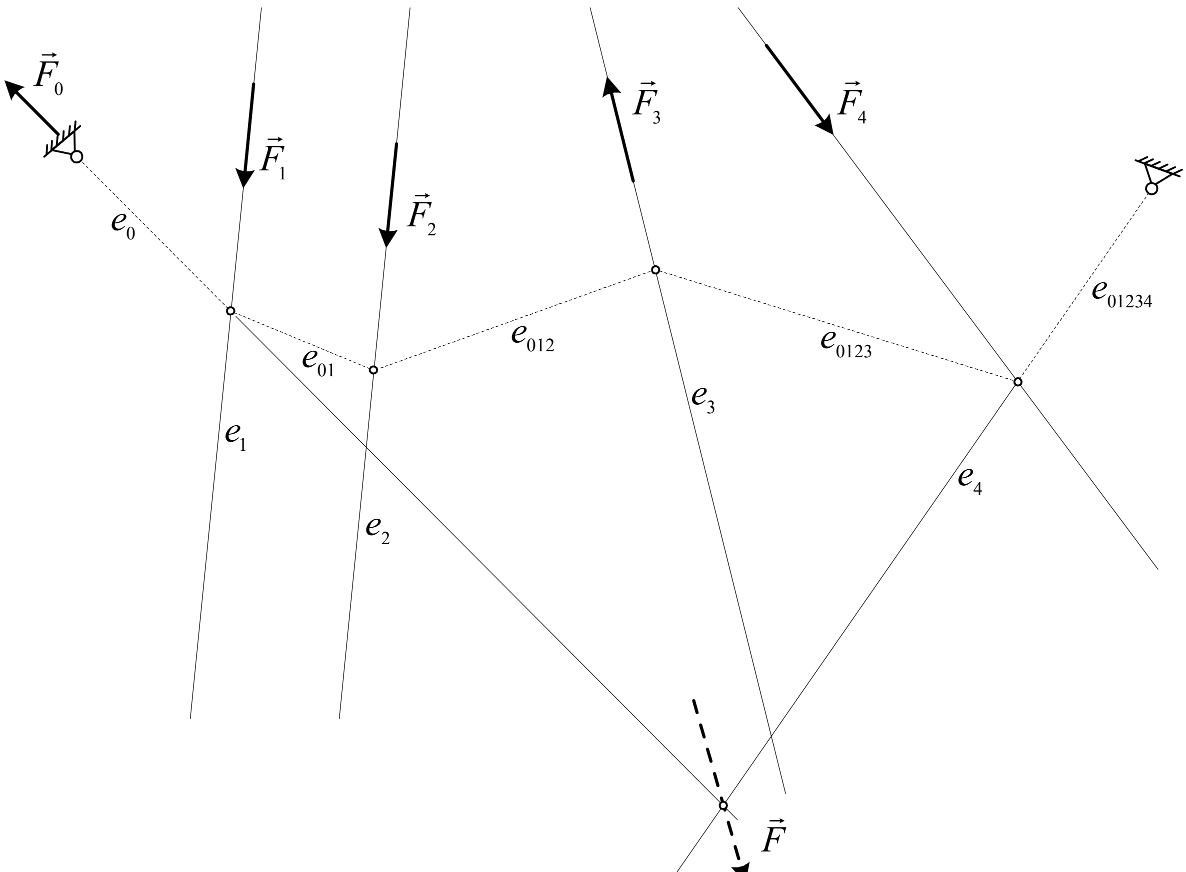
Feladat:

Kötélsokszög módszert alkalmazva határozza meg az erőrendszer eredőjét és hatásvonalának helyét!

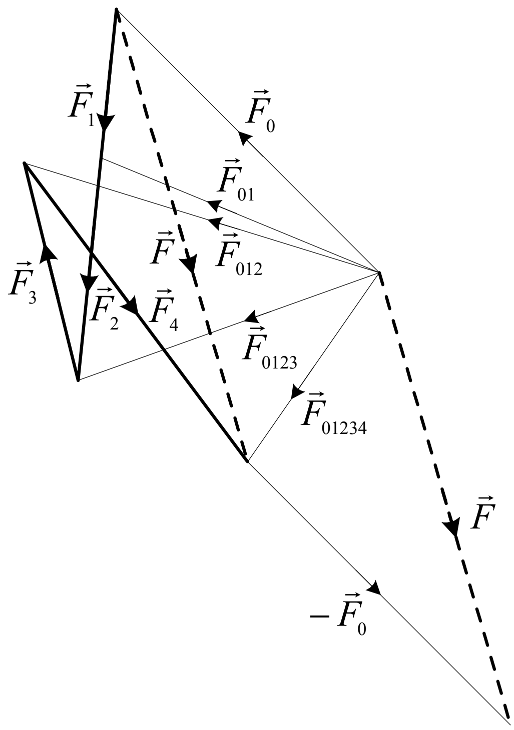
Megoldás:

A szerkesztéshez alapul vesszük az előző pontban leírt részeredő-sokszög módszert, azzal a különbséggel, hogy itt működtetünk még két olyan erőt, melyek ez eredeti erőrendszertől függetlenül egyensúlyban vannak, azaz:

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 - \vec{F}_0$$



Szerkezeti ábra



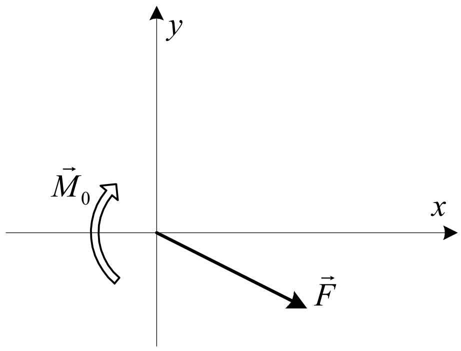
Erőábra

Az egyes részeredők hatásvonalai egy olyan szerkezeti ábrát adnak ki, mintha az erők egy súlytalan kötelet terhelnének, és feszítenének ki. Innen ered magának a módszernek a neve is.

5.3. Példa

Ismert egy erőrendszer eredő vektorkettőse.

$$\vec{F} = \left(4\vec{i} - 2\vec{j}\right)\text{kN},$$
$$\vec{M}_0 = \left(-24\vec{k}\right)\text{kNm}.$$



Feladat:

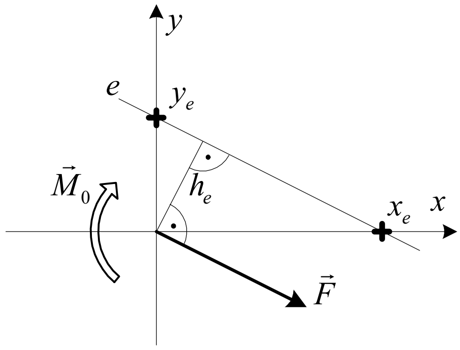
a. Határozza meg az eredő erő hatásvonalának helyét, és
b. a hatásvonal origótól vett távolságát!

Megoldás:

a.

$$x_e = \frac{M_{0z}}{F_y} = \frac{-24}{-2} = 12\,\text{m},$$

$$y_e = -\frac{M_{0z}}{F_x} = -\frac{-24}{4} = 6\,\text{m}.$$



b.

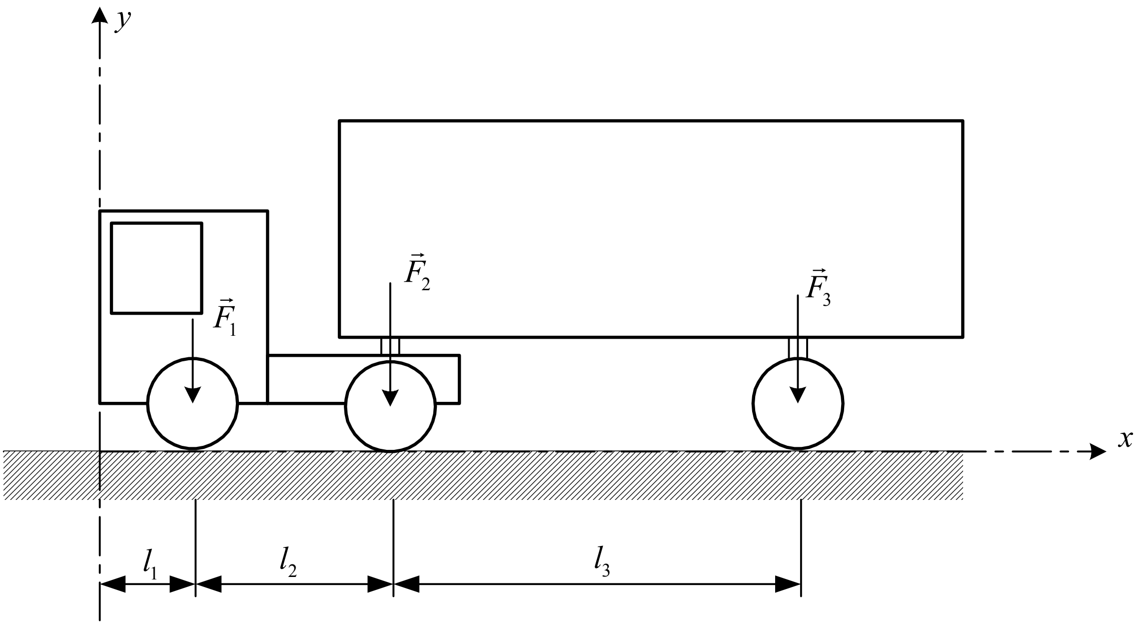
$$h_e = \frac{\left|\vec{M}_0\right|}{\left|\vec{F}\right|} = \frac{24}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = 5{,}366\,\text{m}.$$

5.4. Példa

Az ábrán vázolt nyerges vontató tengelyterhelése $\vec{F}_1 = \left(-30\vec{j}\right)kN$, $\vec{F}_2 = \left(-75\vec{j}\right)kN$ és $\vec{F}_3 = \left(-60\vec{j}\right)kN$, az erők jármű elejétől mért távolságai rendre: $l_1 = 1,5m$, $l_2 = 4,5m$ és $l_3 = 9m$.

Feladat:

Határozza meg számítással és a kötélsokszög szerkesztés alkalmazásával a párhuzamos erőrendszer $\vec{G}$ eredőjét (azaz a jármű súlyát), és a súlypontjának x_s koordinátáját!



Számítással:

A tengelyterhelések egy párhuzamos erőrendszert alkotnak. Az erőrendszer eredője megegyezik a jármű súlyvektorával:

$$\vec{G} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -30\vec{j} - 75\vec{j} - 60\vec{j} = \left(-165\vec{j}\right)kN .$$

A jármű súlya:

$$\left|\vec{G}\right| = G = 165kN .$$

A három $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\right)'$ erőből álló erőrendszer-, valamint az eredő $\left(\vec{G}\right)$ súlyerő nyomatéka a z-tengelyre megegyezik:

$$M_z' = M_z''$$

$$M_z' = F_{1y}\, l_1 + F_{2y}\left(l_1 + l_2\right) + F_{3y}\left(l_1 + l_2 + l_3\right) = -30 \cdot 1,5 - 75 \cdot 6 - 60 \cdot 15 = -1395kNm ,$$

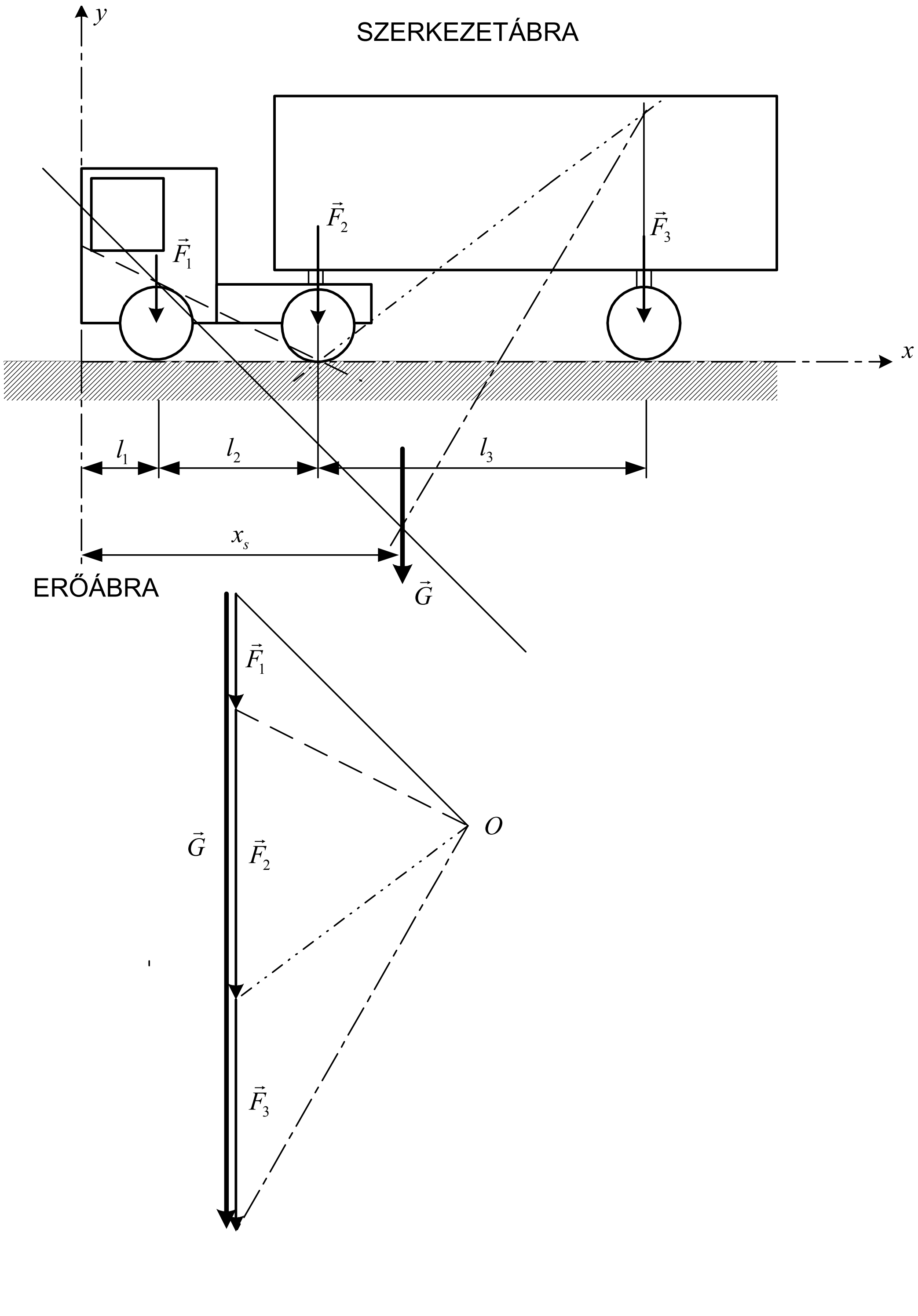
$$M_z'' = -Gx_s ,$$

azaz $x_s = \dfrac{M_z'}{G} = \dfrac{1395}{165} = 8,45m$.

Szerkesztéssel:

A kötélsokszög szerkesztést alkalmazzuk az eredő vektor meghatározásához. A szerkesztés lépései a szerkezetábrán és az erőábrán felváltva is végrehajtható. A két ábrán az azonos típusú vonalak párhuzamosak.

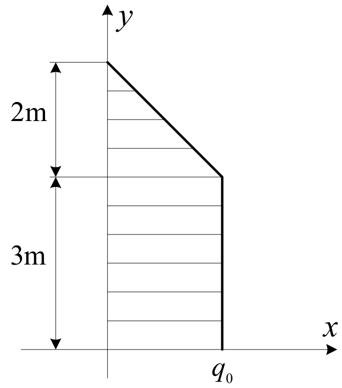
Az erőábrán a három erőt egymásután rendre felmérjük. Az O pont helye tetszőlegesen megválasztható. Az *O* pontból az erők végpontjaiba húzott segédvonalak a részeredőket képviselik, a szerkezeti ábrán ezekkel párhuzamosat rajzolunk az erők hatásvonalaival képzett metszéspontjaiból. Végül az első (folytonos) és az utolsó (szimpla pontvonal) segédvonal metszéspontján megy át az eredő súlyerő vektor.



5.5. Példa

Adott az ábrán látható megoszló erőrendszer intenzitásának legnagyobb értéke:

$q_0 = 4$ kN/m.



Feladat:

Határozza meg a megoszló erőrendszer eredőjét, illetve annak hatásvonalának helyét!

Megoldás:

Síkbeli megoszló erőrendszer eredő vektorkettősének meghatározására az alábbi két összefüggés szolgál:

$$\vec{F}_q = \int_{(l)} \vec{q}(y)dy\,,$$

$$\vec{M}_0 = \int_{(l)} \vec{r} \times d\vec{F}_q = \int_{(l)} \left[y\,\vec{j} \times q(y)\vec{i}\, \right]dy = -\left[\int_{(l)} y\; q(y)dy \right]\vec{k}\;.$$

A határozott integrálok a Simpson-formulával is számíthatók, mely közelítő formula első-, másod- és harmadfokú polinomokra pontos értéket ad:

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx \approx \frac{l}{6}\left(f_a + 4f_k + f_b\right),$$

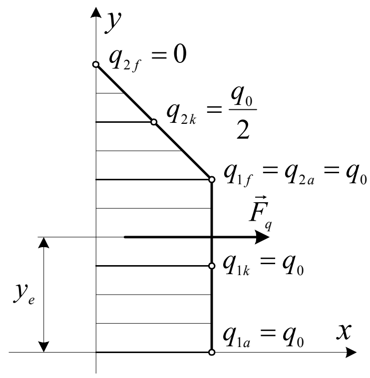
ahol $x \in [a,b]$, $l = b - a$, $f_a = f(x = a)$, $f_k = f\left(x = \dfrac{a+b}{2}\right)$, $f_b = f(x = b)$.

Mivel az integrálás egyik szükséges feltétele az, hogy csak folytonos függvényeken értelmezett, ezért feladatunkban szakaszonként kell ezt elvégezni.

$$\vec{F}_{q1} = \int_{y=0}^{3} q_1(y)dy\,\vec{i} \approx \frac{3}{6}(4 + 4\cdot 4 + 4)\vec{i} = \left(12\vec{i}\,\right)\text{kN},$$

$$\vec{F}_{q2} = \int_{y=3}^{5} q_2(y)dy\,\vec{i} \approx \frac{2}{6}(4 + 4\cdot 2 + 0)\vec{i} = \left(4\vec{i}\,\right)\text{kN},$$

$$\vec{F}_q = \vec{F}_{q1} + \vec{F}_{q2} = \left(16\vec{i}\,\right)\text{kN}.$$



$$\vec{M}_{01} = -\int_{y=0}^{3} y\, q_1(y)\, dy\, \vec{k} \approx -\frac{3}{6}\left(0 \cdot 4 + 4 \cdot 1{,}5 \cdot 4 + 3 \cdot 4\right)\vec{k} = \left(-18\vec{k}\right)\text{kNm},$$

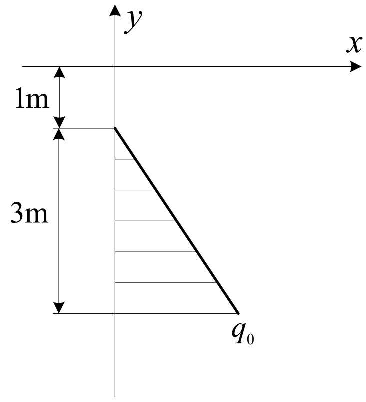
$$\vec{M}_{02} = -\int_{y=3}^{5} y\, q_2(y)\, dy\, \vec{k} \approx -\frac{2}{6}\left(3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0\right)\vec{k} = \left(-\frac{88}{6}\vec{k}\right)\text{kNm},$$

$$\vec{M}_{0} = \vec{M}_{01} + \vec{M}_{02} = \left(-\frac{196}{6}\vec{k}\right)\text{kNm}.$$

$$y_e = -\frac{M_{oz}}{F_{qx}} = \frac{196}{6 \cdot 16} = 2{,}042\ \text{m}$$

5.6. Példa

Adott az ábrán látható megoszló erőrendszer intenzitásának legnagyobb értéke:



$q_0 = 4$ kN/m.

Feladat:

Határozza meg a megoszló erőrendszer eredőjét, illetve annak hatásvonalának helyét!

Megoldás:

$$\vec{F}_q = \int_{y=-4}^{-1} q(y)dy\,\vec{i} \approx \frac{3}{6}(4+4\cdot 2+0)\vec{i} = (6\vec{i})\text{kN}.$$

$$\vec{M}_0 = -\int_{y=-4}^{-1} y\,q(y)dy\,\vec{k} \approx -\frac{3}{6}[(-4)\cdot 4+4\cdot(-2{,}5)\cdot 2+(-1)\cdot 0]\vec{k} = (18\vec{k})\text{kNm}$$

$$y_e = -\frac{M_{oz}}{F_{qx}} = \frac{-18}{6} = -3\text{ m}$$