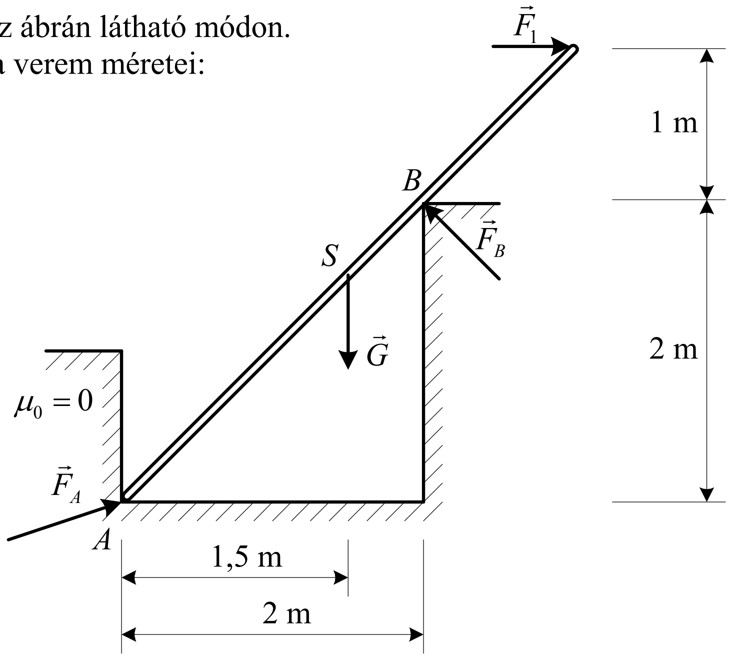
SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM **GÉPSZERKEZETTAN ÉS MECHANIKA TANSZÉK**

6. MECHANIKA-STATIKA GYAKORLAT
Kidolgozta: Triesz Péter egy. ts.

Négy erő egyensúlya, Culmann-szerkesztés, Ritter-számítás

6.1. Példa

Egy létrát egy verembe letámasztunk az ábrán látható módon.
Adott a létra súlya, valamint a létra és a verem méretei:



$\vec{G} = \left(-100\vec{j}\right)\mathrm{N}$.

A testek érintkező felülete sima.

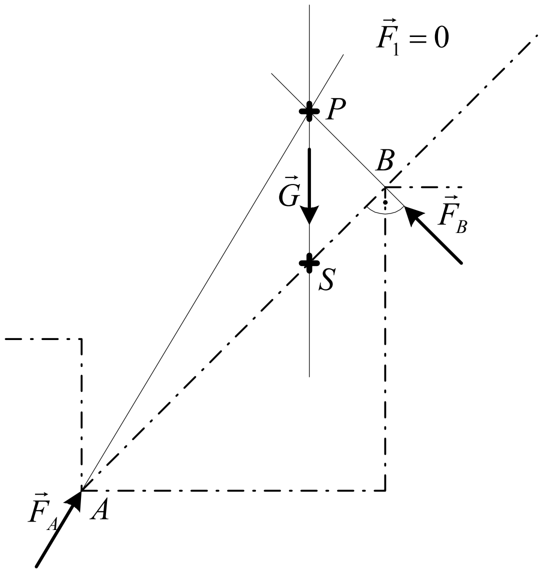
Feladat:

Határozza meg azt az $\vec{F}_{1\max}$ erőt, amelynek hatására a létra még éppen nem mozdul el!

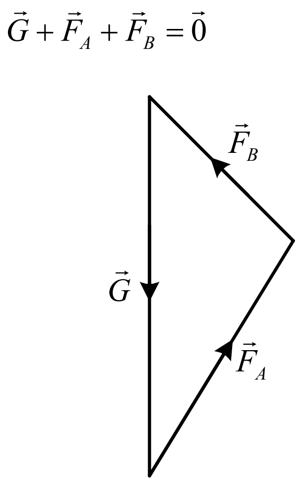
a. Szerkesztéssel (Culmann-szerkesztés) és
b. számítással (Ritter-számítás)!

Megoldás:

a. Elsőként vizsgáljuk meg azt az esetet, mikor a létrára nem hat vízszintes erő, vagyis $\vec{F}_1 = \vec{0}$. Ekkor három erő egyensúlyát vizsgálhatjuk a már tanult módon.

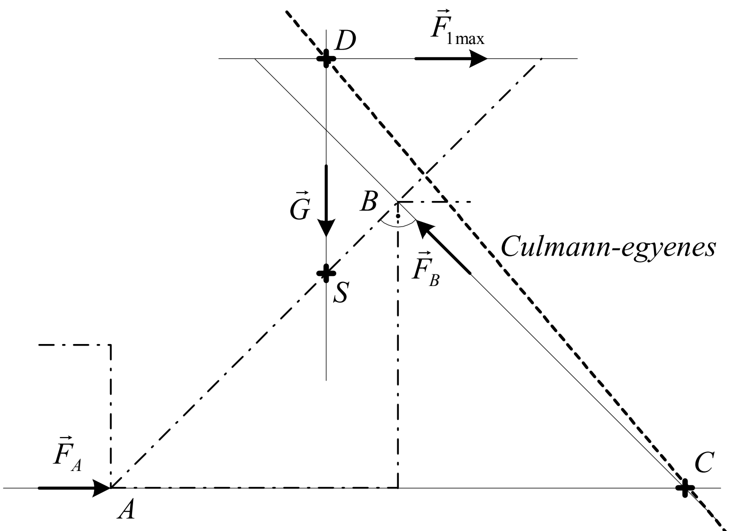


Szerkezeti ábra

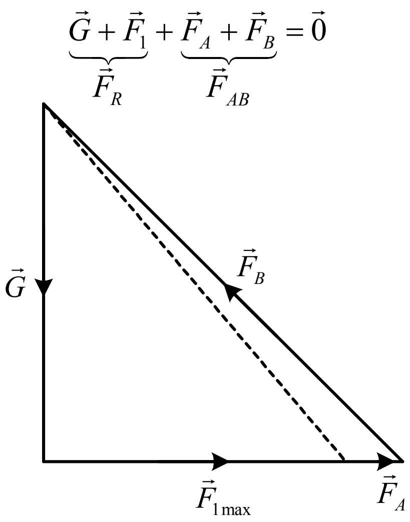


Erőábra

A másik határeset, mikor a legnagyobb vízszintes erő működik a létra felső végében. Ebben az esetben a létra még éppen nem mozdul meg, vagyis az A pontban ébredő támasztóerő függőleges összetevője éppen nullává válik. Tehát ismert mind a négy erőnek az iránya, egy erő – a súlyerő ismeretében az ún. Culmann-módszer segítségével megszerkeszthetők az ismeretlen támasztóerők, illetve a szintén ismeretlen $\vec{F}_{1\max}$ terhelés.



Szerkezeti ábra



Erőábra

b. A B támasznál minden esetben a létra hossztengelyére merőleges támasztóerő ébred, míg az A sarokban ébredő támasztóerő nagysága és iránya függ az $\vec{F}_1$ erő nagyságától. Nyomatéki egyenleteket és az $\vec{F}_B$ erőre vonatkozó geometriai összefüggést fel lehet írni:

$$M_a = 0 = -1{,}5G - 3F_1 + 4F_{By},$$
$$M_c = 0 = -4F_{Ay} + 2{,}5G - 3F_1,$$
$$M_d = 0 = -0{,}5G + 3F_{Ax} - 1\,F_{Ay},$$

és ismerjük az $\vec{F}_B$ erő irányát:

$$\mathrm{tg}45° = \frac{|F_{By}|}{|F_{Bx}|} = 1 \quad \Rightarrow \quad |F_{By}| = |F_{Bx}|.$$

A fenti egyenletekben az F_1 erő, mint változó paraméter szerepel.
Vizsgáljuk meg először azt az esetet, mikor ez az erő zérussal egyenlő. Ekkor

$$M_a = 0 = -1{,}5G + 4F_{By},$$
$$M_c = 0 = -4F_{Ay} + 2{,}5G,$$
$$M_d = 0 = -0{,}5G + 3F_{Ax} - 1\,F_{Ay},$$
$$|F_{Bx}| = |F_{By}|.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\vec{F}_A = \left(37{,}5\vec{i} + 62{,}5\vec{j}\right)\mathrm{N},$$
$$\vec{F}_B = \left(-37{,}5\vec{i} + 37{,}5\vec{j}\right)\mathrm{N}.$$

A másik eset az, amikor az F_1 erő eléri maximális értékét, vagyis amikor a létra elveszti stabilitását és megmozdul. Ez az a pillanat, mikor az $\vec{F}_A$ erő függőleges összetevője zérussá válik, vagyis $F_{Ay} = 0$. Az egyenletrendszer ebben az esetben:

$$M_a = 0 = -1{,}5G - 3F_1 + 4F_{By},$$
$$M_c = 0 = \quad 2{,}5G - 3F_1,$$
$$M_d = 0 = -0{,}5G + 3F_{Ax},$$
$$|F_{Bx}| = |F_{By}|.$$

A megoldás:

$$\vec{F}_{1\max} = \left(83{,}33\vec{i}\right)\mathrm{N},$$
$$\vec{F}_A = \left(16{,}66\vec{i}\right)\mathrm{N},$$
$$\vec{F}_B = \left(-100\vec{i} + 100\vec{j}\right)\mathrm{N}.$$

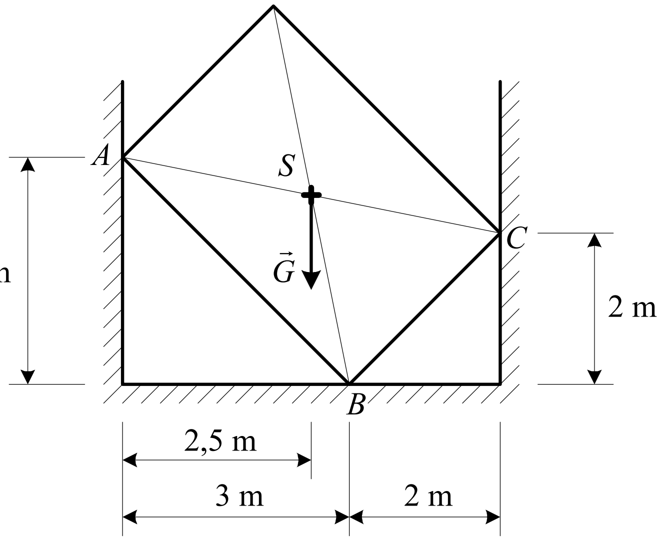
Az eredmények ellenőrzéséhez célszerű minden esetben a statika alapegyenleteit felhasználni.

<u>6.2. Példa</u>

Egy hasáb-jellegű testet az ábrán látható módon egy verembe helyezünk.
Adott a hasáb súlya és az ábráról leolvasható geometria méretek. A hasáb és a verem érintkezéseinél a súrlódás elhanyagolható:

$\vec{G} = \left(-400\vec{j}\right)\text{N},$

$\mu_0 \approx 0.$



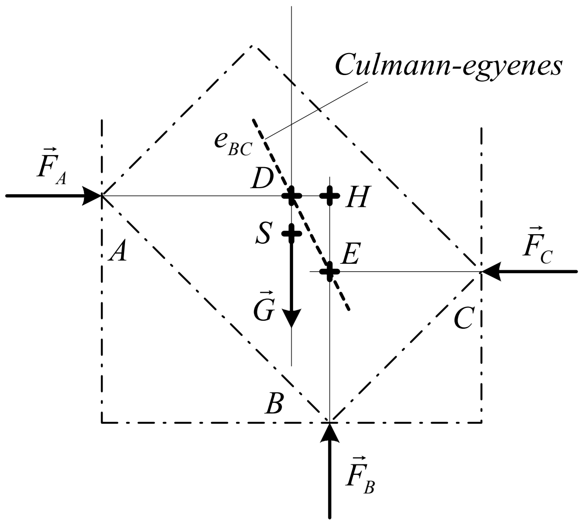
Feladat:

Határozza meg a támasztóerőket
a. szerkesztéssel,
b. számítással.

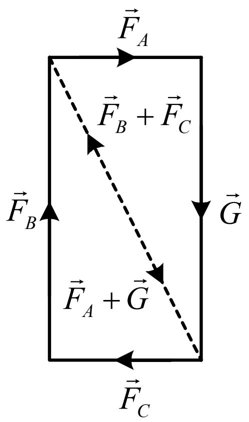
Megoldás:

a. A támasztóerők megszerkesztéséhez a Culmann-módszert alkalmazzuk.

$\vec{G} + \vec{F}_A + \underbrace{\vec{F}_B + \vec{F}_C}_{\vec{F}_{BC}} = \vec{0}.$ Az ábrán az $\vec{F}_{BC}$ erő hatásvonala a Culmann-egyenes.



Szerkezeti ábra



Erőábra

b. Nyomatéki egyenleteket felírva, az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$M_e = 0 = 0{,}5G - 1F_A$ (1),

$M_h = 0 = 0{,}5G - 1F_C$ (2),

$F_y = 0 = -G + F_B$ (3).

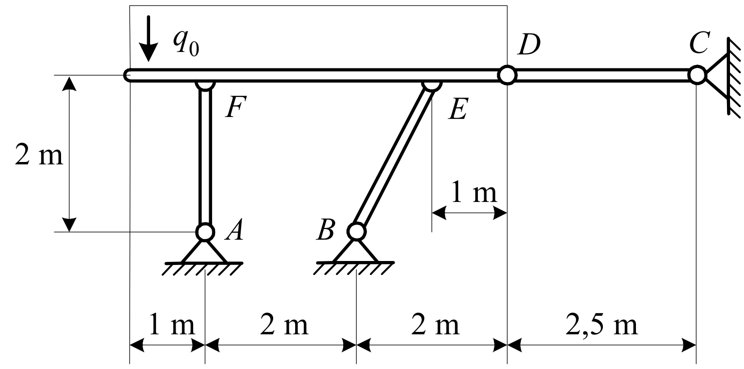
Az egyenletrendszer megoldása:

$$(1) \quad \Rightarrow \quad F_A = 0{,}5\,G = 200 \text{ N } (\rightarrow),$$
$$(2) \quad \Rightarrow \quad F_C = 0{,}5\,G = 200 \text{ N } (\leftarrow),$$
$$(3) \quad \Rightarrow \quad F_B = G = 400 \text{ N } (\uparrow).$$

$$\vec{F}_A = (200\vec{i}\,)\text{kN}, \qquad \vec{F}_B = (400\vec{j}\,)\text{kN}, \qquad \vec{F}_C = (-\,200\vec{i}\,)\text{kN}.$$

6.3. Példa

Az ábrán látható merev *FED* rudat három másik merev rúddal (*AF*, *BE* és *CD*) támasztottunk meg. Az *FED* rudat egy vonal mentén egyenletesen megoszló erőrendszer terheli.
Adott a szerkezet méretei és terhelése.



$q_0 = 4\,\text{kN/m}$

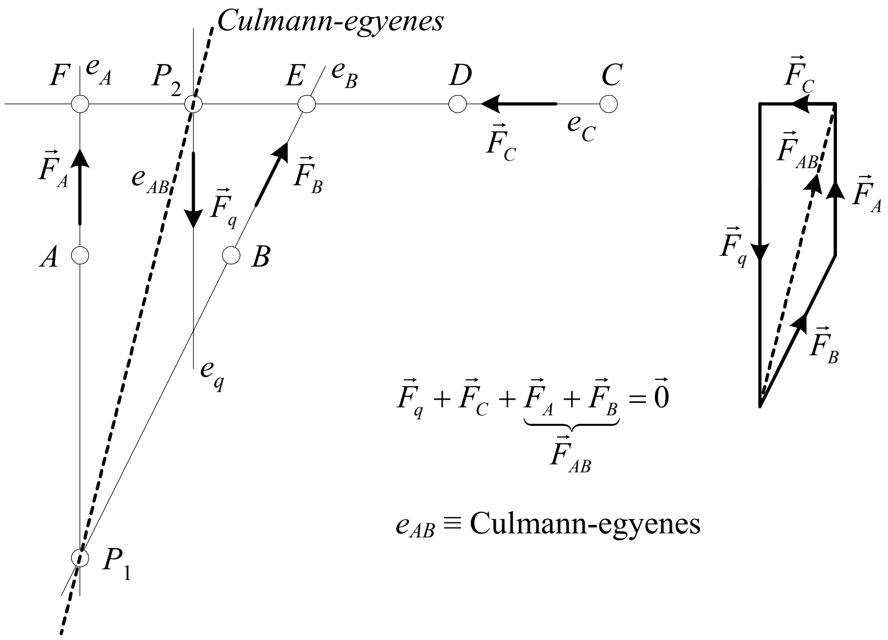
Feladat:

Határozza meg az *A*, a *B* és a *C* csuklókban ébredő támasztóerőket

a. szerkesztéssel és
b. számítással!

Megoldás:

a. A megoszló terhelő erőrendszer eredője: $F_q = q\,l = 4 \cdot 5 = 20\,\text{kN}$, ahol l a megoszló terhelés hossza, az eredő helye konstans megoszló terhelésnél a hossz felénél van. A támasztóerők meghatározása a Culmann-szerkesztéssel történik.



$$\vec{F}_q + \vec{F}_C + \underbrace{\vec{F}_A + \vec{F}_B}_{\vec{F}_{AB}} = \vec{0}$$

$e_{AB} \equiv$ Culmann-egyenes

Szerkezeti ábra   Erőábra

b. A támasztóerők kiszámíthatók az ún. Ritter-módszerrel, melynek lényege az, hogy a nyomatéki egyenleteket olyan keresztmetszetekre írjuk fel, amelyek a támasztóerők hatásvonalainak metszéspontjaiban helyezkednek el. A támasztó rudakban, így a csuklókban is csakis rúdirányú erők ébrednek, tehát a rudak iránya meghatározza a támasztóerők hatásvonalát.

A hatásvonalak az F az E, illetve egy távolabbi P pontban metszik egymást (ld. a fenti szerkezeti ábrát). A nyomatéki egyenletek rendre:

$$M_f = 0 = 3F_{By} - 1{,}5F_q \quad \Rightarrow \quad F_{By} = \frac{1{,}5F_q}{3} = 10\,\mathrm{kN}\,(\uparrow),$$

$$M_f = 0 = 6F_{Bx} - 1{,}5F_q \quad \Rightarrow \quad F_{Bx} = \frac{1{,}5F_q}{6} = 5\,\mathrm{kN}\,(\rightarrow),$$

$$M_e = 0 = -3F_A + 1{,}5F_q \quad \Rightarrow \quad F_A = \frac{1{,}5F_q}{3} = 10\,\mathrm{kN}\,(\uparrow),$$

$$M_p = 0 = -6F_C - 1{,}5F_q \quad \Rightarrow \quad F_C = \frac{-1{,}5F_q}{6} = -5\,\mathrm{kN}(\leftarrow).$$

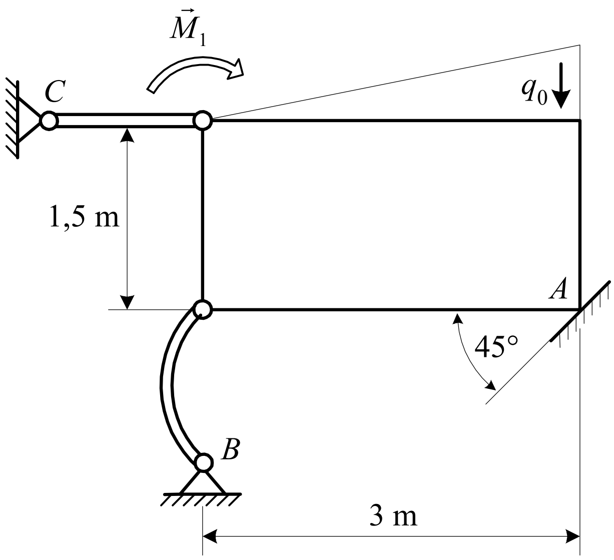
Az F keresztmetszetre felírt nyomatéki egyenleteknél azt a tételt lehet kihasználni, hogy egy erő a hatásvonala mentén bárhova eltolható, így ha az E pontba toljuk először, akkor csak az y irányú összetevőjének, ha pedig a P pontba toljuk, akkor az x összetevőjének lesz nyomatéka, mert a másik összetevő hatásvonala keresztülmegy az F keresztmetszeten.

$$\vec{F}_A = (10\vec{j})\mathrm{kN}, \qquad \vec{F}_B = (5\vec{i} + 10\vec{j})\mathrm{kN}, \quad \vec{F}_C = (-5\vec{i})\mathrm{kN}.$$

6.4. Példa

Az ábrán látható szerkezetet egy koncentrált nyomaték, és egy vonal mentén egyenletesen növekvő, megoszló erőrendszer terheli. Az A pontban az érintkező felület sima, $\mu \approx 0$.
Adott a szerkezet méretei és terhelése.

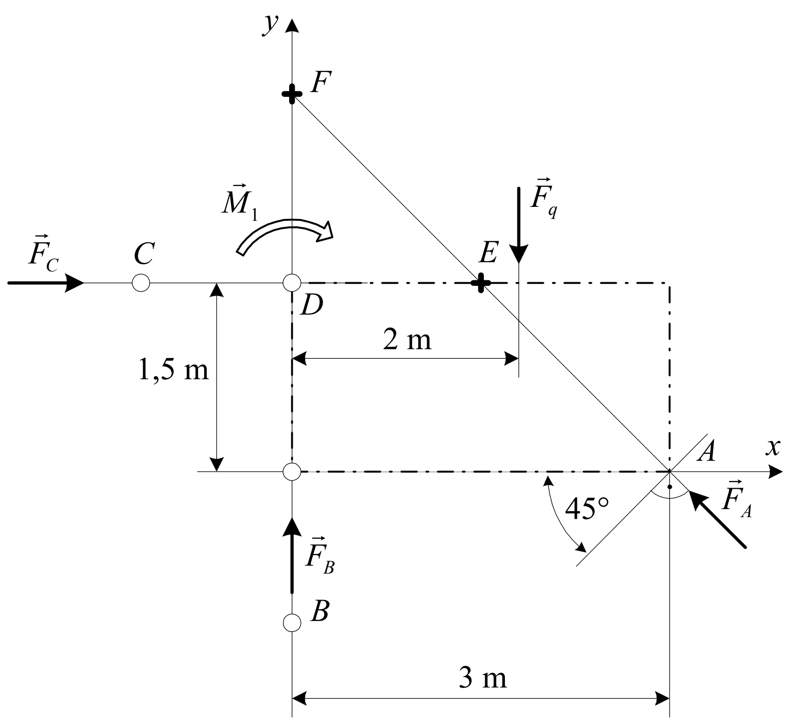
$q_{0\max} = 4$ kN/m,
$M_1 = 3$ kNm.



Feladat:

Számítsa ki az *A*, a *B* és a *C* csuklókban ébredő támasztóerőket!

Megoldás:



Elsőként a megoszló erőrendszer eredőjét és az eredő helyét kell meghatározni. Ebben az esetben az eredő nagysága egyenlő a háromszög területével. Természetesen definíció szerint, a már ismertetett módon felírva a határozott integrált ugyanerre az eredményre jutunk, tehát

$$F_q = \frac{q_{0\max} l}{2} = 6\ \text{kN}\,.$$

Az eredő hatásvonala áthalad a háromszög súlypontján, ami derékszögű háromszögek esetében a befogókat 1/3 – 2/3 arányban osztják (lásd a fenti ábrát).

A feladat Ritter-módszerrel megoldható. A nyomatéki egyenleteket a *D*, az *E* és az *F* keresztmetszetekre írjuk fel. Az *A* keresztmetszetnél ébredő támaszerő az érintkező felületek közös normálisával megegyező irányú. Esetünkben a támasztó síkra merőleges irányú, vagyis 45°-os szöget zár be a vízszintessel, ez az egyenletek felírásánál is figyelembe vehető.

$$M_d = 0 = 1{,}5 F_{Ay} - M_1 - 2F_q \quad \Rightarrow \quad F_{Ay} = \frac{M_1 + 2F_q}{1{,}5} = 10\ \text{kN}\,(\uparrow),$$

$$\text{tg}45° = \frac{|F_{Ay}|}{|F_{Ax}|} \quad \Rightarrow \quad F_{Ax} = F_{Ay} = 10\ \text{kN}\,(\leftarrow),$$

$$M_e = 0 = -1{,}5 F_B - M_1 - 0{,}5F_q \quad \Rightarrow \quad F_B = \frac{-M_1 - 0{,}5F_q}{1{,}5} = -4\ \text{kN}\,(\downarrow),$$

$$M_f = 0 = 1{,}5 F_C - M_1 - 2F_q \quad \Rightarrow \quad F_C = \frac{M_1 + 2F_q}{1{,}5} = 10\ \text{kN}(\rightarrow).$$

$$\vec{F}_A = \left(-10\vec{i} + 10\vec{j}\right)\text{kN}\,, \qquad \vec{F}_B = \left(-4\vec{j}\right)\text{kN}\,, \qquad \vec{F}_C = \left(10\vec{i}\right)\text{kN}\,.$$