8. MECHANIKA-STATIKA GYAKORLAT

Kidolgozta: Triesz Péter egy. ts.

Párhuzamos erőrendszerek eredője, súlypontszámítás

8.1. Példa

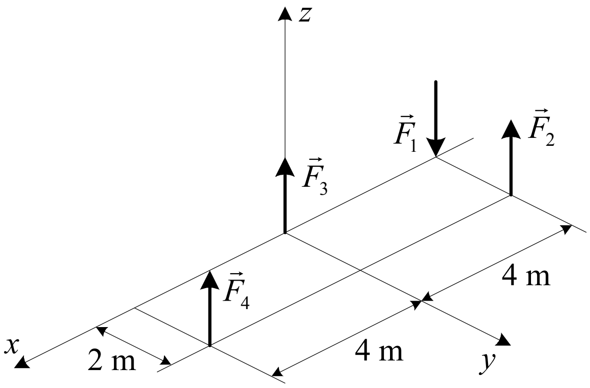
Adott:

Az ER iránya: $\vec{e} \equiv \vec{k}$

$F_1 = F_2 = 4\,\text{kN}$

$F_3 = 6\,\text{kN}$

$F_4 = 2\,\text{kN}$



Feladat:

a. Határozza meg az erőrendszer origóba redukált vektorkettősét!
b. Számítsa ki az erőrendszer K középpontjának helykoordinátáit!

Megoldás:

a. Az erők vektorai és a támadáspontjainak koordinátái.

$\vec{F}_1 = \left(-4\vec{k}\right)\text{kN}$ $\quad \vec{F}_2 = \left(6\vec{k}\right)\text{kN}$ $\quad \vec{F}_3 = \left(2\vec{k}\right)\text{kN}$ $\quad \vec{F}_4 = \left(4\vec{k}\right)\text{kN}$

$\vec{r}_1 = \left(-4\vec{i}\right)\text{m}$ $\quad \vec{r}_2 = \left(-4\vec{i} + 2\vec{j}\right)\text{m}$ $\quad \vec{r}_3 = \vec{0}$ $\quad \vec{r}_4 = \left(4\vec{i} + 2\vec{j}\right)\text{m}$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \left(8\vec{k}\right)\text{kN} = F\,\vec{e}\text{, ahol } \vec{e} = \vec{k}\,.$$

$$\sum_i \vec{r}_i F_i = \left(8\vec{i} + 20\vec{j}\right)\text{kNm},$$

$$\vec{r}_1 F_1 = \left(16\vec{i}\right)\text{kNm},$$

$$\vec{r}_2 F_2 = \left(-24\vec{i} + 12\vec{j}\right)\text{kNm},$$

$$\vec{r}_3 F_3 = \vec{0}\,\text{kNm},$$

$$\vec{r}_4 F_4 = \left(16\vec{i} + 8\vec{j}\right)\text{kNm},$$

$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \left(\sum \vec{r}_i F_i\right) \times \vec{e} = \left(20\vec{i} - 8\vec{j}\right)\text{kNm}\,.$$

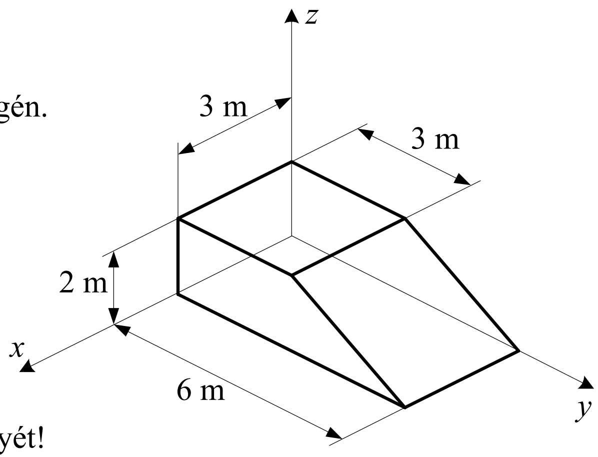
b.

$$\vec{r}_K = \frac{\sum_i \vec{r}_i \vec{F}_i}{\sum_i \vec{F}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_K = \dfrac{\sum_i x_i F_i}{\sum_i F_i} = \dfrac{-M_{Ay}}{F} = \dfrac{8}{8} = 1\,\text{m}, \\[2ex] y_K = \dfrac{\sum_i y_i F_i}{\sum_i F_i} = \dfrac{M_{Ax}}{F} = \dfrac{20}{8} = 2.5\,\text{m}. \end{cases}$$

8.2. Példa

Az ábrán látható test tömegeloszlása homogén.

Adott a test geometriája.

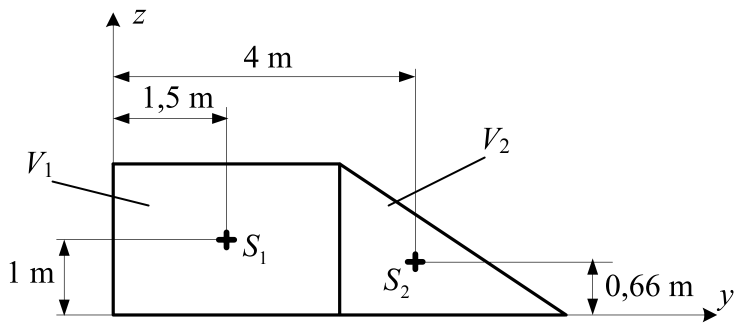


Feladat:

Határozza meg a test súlypontjának helyét!

Megoldás:

Az egyes testek térfogatai és súlypontjaik koordinátái:



$$V_1 = abc = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18\ \mathrm{m}^3, \qquad V_2 = \frac{abc}{2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{2} = 9\ \mathrm{m}^3.$$

$$x_{S1} = x_{S2} = 1{,}5\ \mathrm{m}, \qquad y_{S1} = 1{,}5\ \mathrm{m}, \qquad z_{S1} = 1{,}5\ \mathrm{m},$$

$$y_{S2} = 4\ \mathrm{m}, \qquad z_{S1} = 2/3\ \mathrm{m}.$$

Súlypont koordinátái:

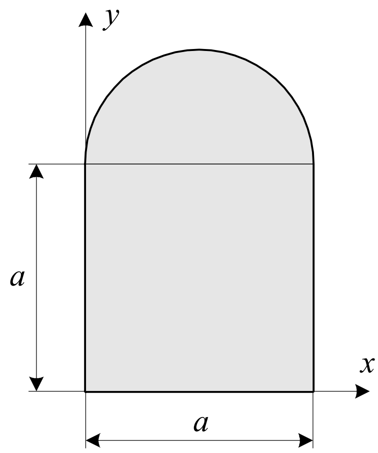
$$x_S = \frac{\sum_i x_{Si} V_i}{\sum_i V_i} = \frac{x_{S1}V_1 + x_{S2}V_2}{V_1 + V_2} = \frac{1{,}5 \cdot 18 + 1{,}5 \cdot 9}{27} = 1{,}5\ \mathrm{m},$$

$$y_S = \frac{\sum_i y_{Si} V_i}{\sum_i V_i} = \frac{y_{S1}V_1 + y_{S2}V_2}{V_1 + V_2} = \frac{1{,}5 \cdot 18 + 4 \cdot 9}{27} = \frac{7}{3} = 2{,}3\dot{3}\ \mathrm{m},$$

$$z_S = \frac{\sum_i z_{Si} V_i}{\sum_i V_i} = \frac{z_{S1}V_1 + z_{S2}V_2}{V_1 + V_2} = \frac{1 \cdot 18 + \frac{2}{3} \cdot 9}{27} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9} = 0{,}8\dot{8}\ \mathrm{m}.$$

8.3. Példa

Adott az ábrán látható síkidom jellemző mérete:



$a = 10\,\text{cm}$,

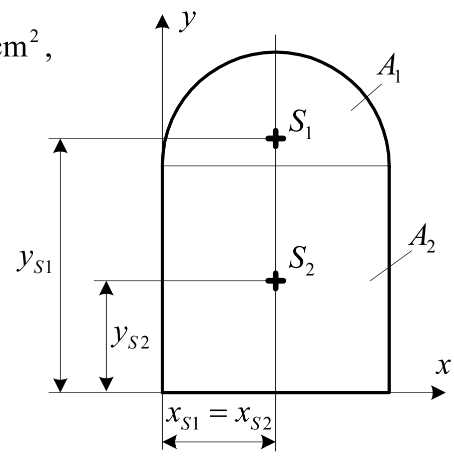
$\left(y_{félkör} = \dfrac{4R}{3\pi} \right)$.

Feladat:

Határozza meg a síkidom súlypontjának helyét!

Megoldás:

A síkidom felbontható egyszerű alakzatokra, egy négyzetre és egy félkörre. Ezeknek a területei, illetve súlypontjaik koordinátái:



$$A_1 = \frac{R^2\pi}{2} = \frac{a^2\pi}{8} = 39{,}27\,\text{cm}^2, \qquad A_2 = a^2 = 100\,\text{cm}^2,$$

$$x_{S1} = x_{S2} = \frac{a}{2} = 5\,\text{cm},$$

$$y_{S1} = a + \frac{4R}{3\pi} = a + \frac{2a}{3\pi} = 12{,}122\,\text{cm},$$

$$y_{S2} = \frac{a}{2} = 5\,\text{cm}.$$

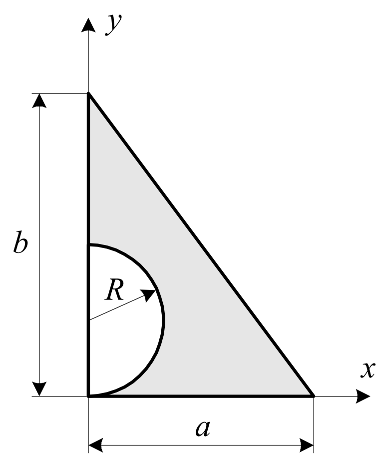
A síkidom súlypontjának koordinátái:

$$x_S = \frac{x_{S1}A_1 + x_{S2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{5 \cdot 39{,}27 + 5 \cdot 100}{39{,}27 + 100} = 5\,\text{cm},$$

$$y_S = \frac{y_{S1}A_1 + y_{S2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{12{,}122 \cdot 39{,}27 + 5 \cdot 100}{39{,}27 + 100} = 7{,}01\,\text{cm}.$$

8.4. Példa

Adott:

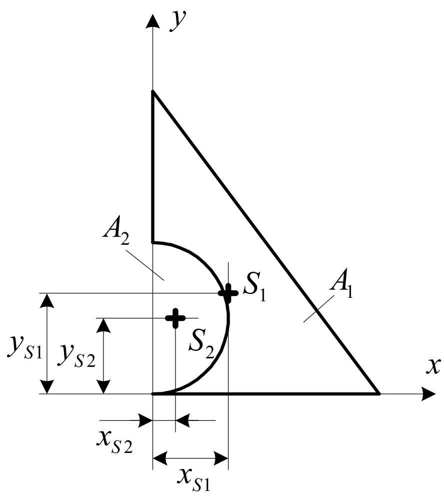


$$a = 30\ \text{cm}, \quad b = 40\ \text{cm}, \quad R = 10\ \text{cm}.$$

Feladat:

Határozza meg a síkidom súlypontjának helyét!

Megoldás:



$$A_1 = \frac{ab}{2} = 600\ \text{cm}^2, \qquad A_2 = \frac{R^2\pi}{2} = 157{,}08\ \text{cm}^2,$$

$$x_{S1} = \frac{a}{3} = 10\ \text{cm}, \qquad x_{S2} = \frac{4R}{3\pi} = 4{,}244\ \text{cm},$$

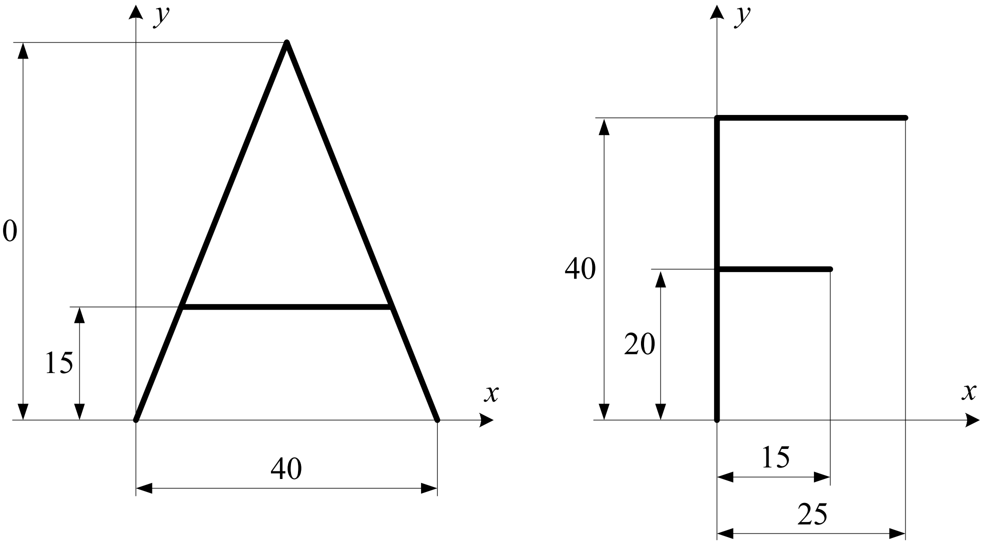
$$y_{S1} = \frac{b}{3} = 13{,}3\dot{3}\ \text{cm}, \qquad y_{S2} = R = 10\ \text{cm}.$$

$$x_S = \frac{x_{S1}A_1 - x_{S2}A_2}{A_1 - A_2} = \frac{10 \cdot 600 - 10 \cdot 157{,}08}{600 - 157{,}08} = 12{,}04\ \text{cm},$$

$$y_S = \frac{y_{S1}A_1 - y_{S2}A_2}{A_1 - A_2} = \frac{13{,}3\dot{3} \cdot 600 - 10 \cdot 157{,}08}{600 - 157{,}08} = 14{,}52\ \text{cm}.$$

8.5. Példa

Adott az ábrákon látható két betű.

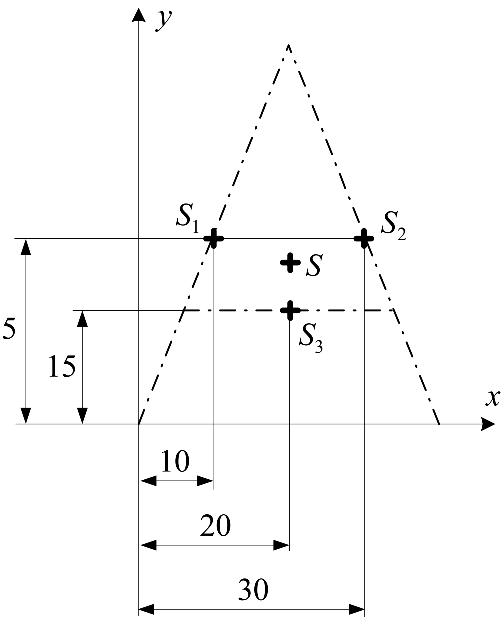


Feladat:

Határozza meg a merev rudakból álló betűk súlypontjának helyét!

Megoldás:

a. Az ábráról leolvashatók az egyes rudak hossza illetve súlypontjainak helyei:



$$l_1 = l_2 = \sqrt{20^2 + 50^2} = 53{,}58\ \text{mm},$$

$$\frac{40}{50} = \frac{l_3}{35} \quad \Rightarrow \quad l_3 = 35 \cdot \frac{4}{5} = 28\ \text{mm}.$$

$$x_{S1} = 10\ \text{mm}, \qquad y_{S1} = 25\ \text{mm},$$

$$x_{S2} = 30\ \text{mm}, \qquad y_{S2} = 25\ \text{mm},$$

$$x_{S3} = 20\ \text{mm}, \qquad y_{S3} = 15\ \text{mm}.$$

A súlypont koordinátái:

$$x_S = \frac{x_{S1}l_1 + x_{S2}l_2 + x_{S3}l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{(10+30)\,53{,}85 + 20 \cdot 28}{2 \cdot 53{,}85 + 28} = 20\ \text{mm},$$

$$y_S = \frac{y_{S1}l_1 + y_{S2}l_2 + y_{S3}l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{2 \cdot 25 \cdot 53{,}85 + 15 \cdot 28}{2 \cdot 53{,}85 + 28} = 22{,}94\ \text{mm}.$$

b.

$l_1 = 40\,\text{mm}$, $x_{S1} = 0\,\text{mm}$, $y_{S1} = 20\,\text{mm}$,

$l_2 = 25\,\text{mm}$, $x_{S2} = 12{,}5\,\text{mm}$, $y_{S2} = 20\,\text{mm}$,

$l_3 = 15\,\text{mm}$, $x_{S3} = 7{,}5\,\text{mm}$, $y_{S3} = 40\,\text{mm}$.

$$x_S = \frac{\sum x_{Si} l_i}{\sum l_i} = 5{,}3125\,\text{mm},$$

$$y_S = \frac{\sum y_{Si} l_i}{\sum l_i} = 23{,}75\,\text{mm}.$$