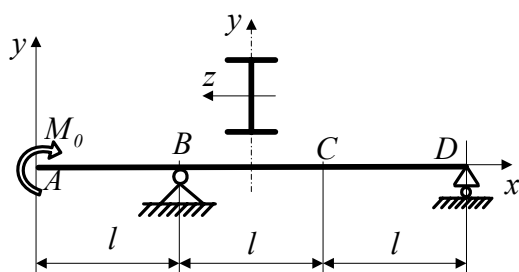


MECHANIKA-SZILÁRDSÁGTAN

13. hét gyakorlati anyaga

(kidolgozta : dr. Nagy Zoltán egy.adjunktus,
Bojtár Gergely egy.tanársegéd)

13.1 feladat : Prizmatikus rúdszerkezet elmozdulásának és szögelfordulásának számítása Betti tétellel



Adott: $l = 1200 \text{ mm}$, $M_0 = 2,3 \text{ kNm}$,
 $I_z = 171 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

- Feladat : a) Határozza meg a C jelű keresztmetszet y irányú v_C elmozdulását.
b) Határozza meg a C jelű keresztmetszet z tengely körüli φ_C szögelfordulását.
c) Határozza meg az A jelű keresztmetszet y irányú v_A elmozdulását.
d) Határozza meg az A jelű keresztmetszet z tengely körüli φ_A szögelfordulását.

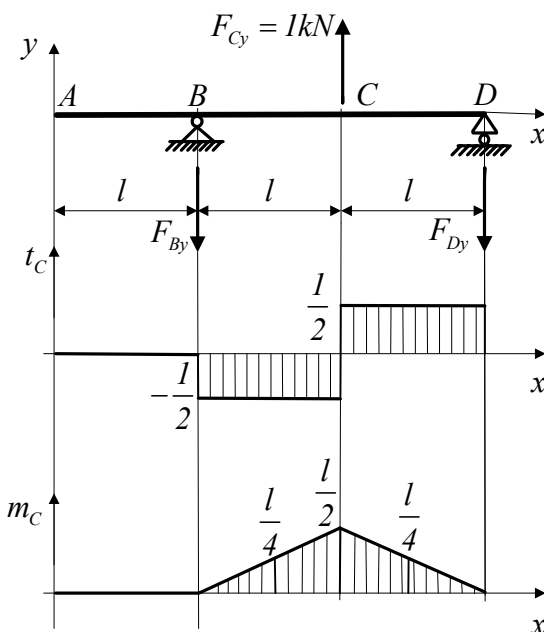
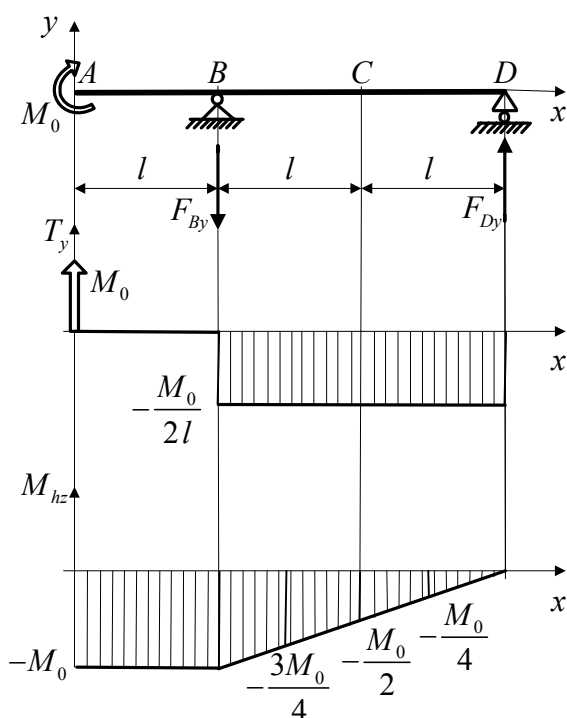
a) A C jelű keresztmetszet y irányú v_C elmozdulása:

1.ER : a tartó eredeti terhelése és a hozzá tartozó támasztó erők.

1.ER igénybevételei : $T'_y = T_y$,
 $M'_{hz} = M_{hz}$.

2.ER : a C pontban ható y irányú, egységnyi nagyságú F_{Cy} erő és a hozzá tartozó támasztó erők.

2.ER igénybevételei : $T''_y = F_{Cy} t_C$,
 $M''_{hz} = F_{Cy} m_C$.



Betti tétel : $W_{21} = U_{12}$, ahol $W_{21} = v_C F_{Cy}$, és $U_{12} = \int_{(l)} \frac{M'_{hz} M''_{hz}}{I_z E} dx$.

$$v_C F_{Cy} = \int_{(l)} \frac{M'_{hz} M''_{hz}}{I_z E} dx = \int_{(l)} \frac{M_{hz} F_{Cy} m_C}{I_z E} \Rightarrow v_C = \int_{(l)} \frac{M_{hz} m_C}{I_z E} dx.$$

Az elmozdulás kiszámítása :

$$v_C = \int_{(l)} \frac{M_{hz} m_C}{I_z E} dx = \frac{l}{I_z E} \left\{ \frac{l}{6} \left[0 + 4 \left(\frac{-3M_0}{4} \right) \frac{l}{4} + \left(\frac{-M_0}{2} \right) \frac{l}{2} \right] + \frac{l}{6} \left[\left(\frac{-M_0}{2} \right) \frac{l}{2} + 4 \left(\frac{-M_0}{4} \right) \frac{l}{4} + 0 \right] \right\},$$

$$v_C = -\frac{M_0 l^2}{4 I_z E} = -\frac{2,3 \cdot 10^6 \cdot 1200^2}{4 \cdot 171 \cdot 10^4 \cdot 2,1 \cdot 10^5} = -2,31 \text{ mm } (\downarrow).$$

Negatív előjel : a C pont lefelé, az $F_{Cy} = 1 \text{ kN}$ egységnyi erő irányításával ellentétesen mozdul el.

b) A C jelű keresztmetszet z tengely körüli φ_C szögelfordulása :

1.ER : a tartó eredeti terhelése és a hozzá tartozó támasztó erők.

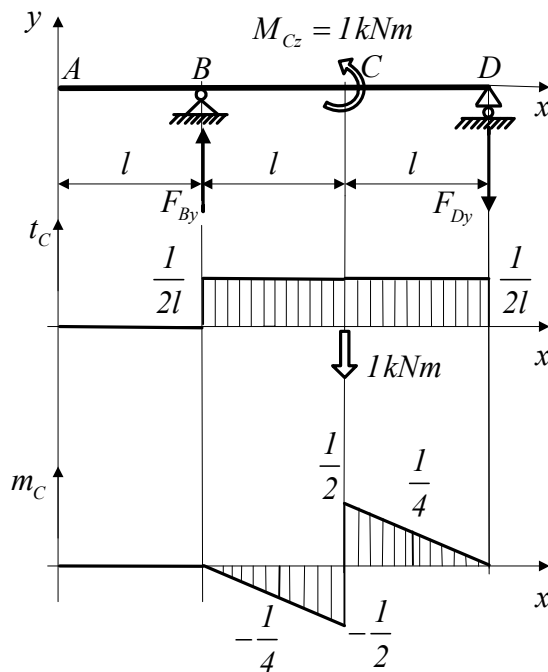
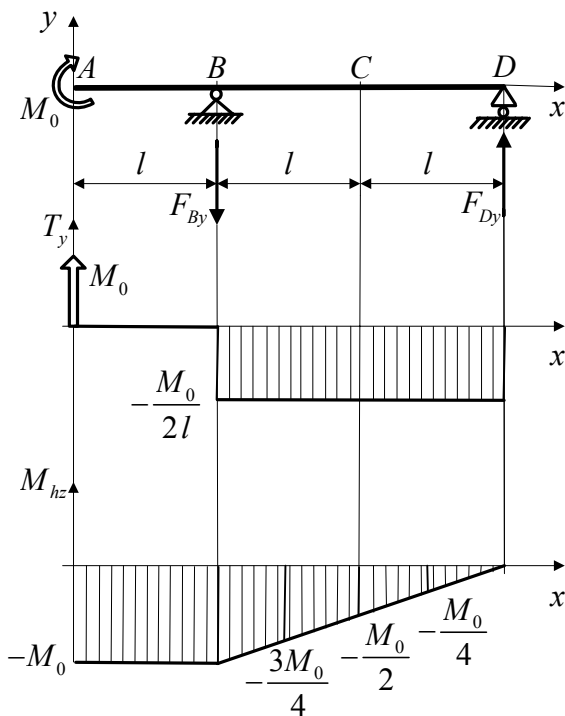
1.ER igénybevételei : $T'_y = T_y$,

$$M'_{hz} = M_{hz}.$$

2.ER : a C pontban ható z irányú, egységnyi nagyságú M_{Cz} nyomaték és a hozzá tartozó támasztó erők.

2.ER igénybevételei : $T''_y = M_{Cz} t_C$,

$$M''_{hz} = M_{Cz} m_C.$$



Betti tétel : $W_{21} = U_{12}$, ahol $W_{21} = \varphi_C M_{Cz}$, és $U_{12} = \int_{(l)} \frac{M'_{hz} M''_{hz}}{I_z E} dx$.

$$\varphi_C M_{Cz} = \int_{(l)} \frac{M'_{hz} M''_{hz}}{I_z E} dx = \int_{(l)} \frac{M_{hz} M_{Cz} m_C}{I_z E} \Rightarrow \varphi_C = \int_{(l)} \frac{M_{hz} m_C}{I_z E} dx.$$

A szögelfordulás kiszámítása :

$$\varphi_C = \int_{(l)} \frac{M_{hz} m_C}{I_z E} dx = \frac{l}{I_z E} \left\{ \frac{l}{6} \left[0 + 4 \left(\frac{-3M_0}{4} \right) \left(-\frac{l}{4} \right) + \left(\frac{-M_0}{2} \right) \left(-\frac{l}{2} \right) \right] + \frac{l}{6} \left[\left(\frac{-M_0}{2} \right) \frac{l}{2} + 4 \left(\frac{-M_0}{4} \right) \frac{l}{4} + 0 \right] \right\},$$

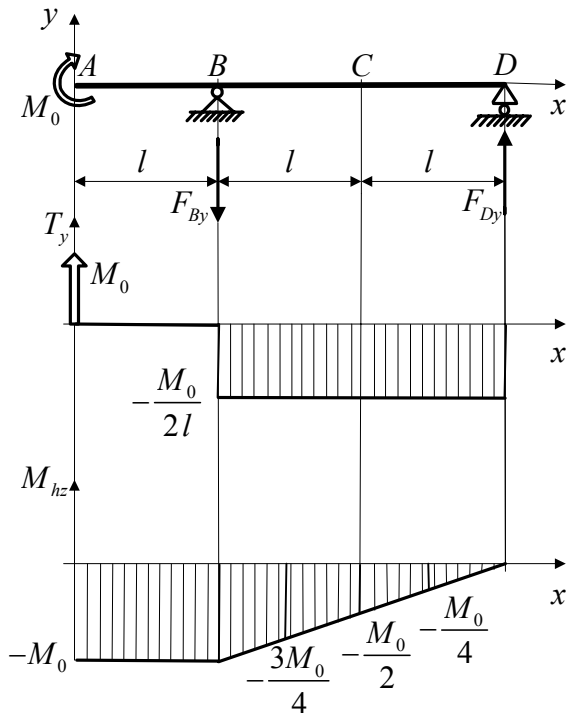
$$\varphi_C = \frac{M_0 l}{12 I_z E} = \frac{2,3 \cdot 10^6 \cdot 1200}{12 \cdot 171 \cdot 10^4 \cdot 2,1 \cdot 10^5} = 6,405 \cdot 10^{-1} \text{ radián } (\curvearrowright) \Rightarrow \varphi_C = 6,405 \cdot 10^{-1} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 36,7^\circ.$$

Pozitív előjel : a C keresztmetszet az $M_{Cz} = 1 \text{ kNm}$ egységnyi nyomatékvektor forgási értelmével megegyezően fordul el a z tengely körül.

c) Az A jelű keresztmetszet y irányú v_A elmozdulása :

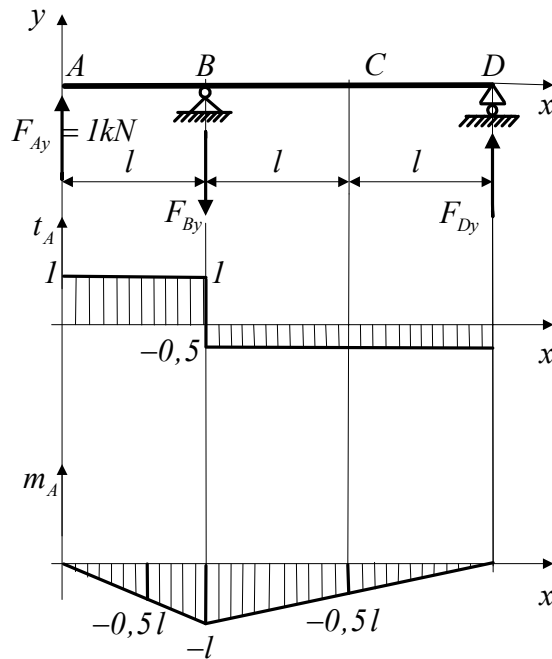
1.ER : a tartó eredeti terhelése és a hozzá tartozó támasztó erők.

1.ER igénybevételei : $T'_y = T_y$,
 $M'_{hz} = M_{hz}$.



2.ER : a C pontban ható y irányú, egységnyi nagyságú F_{Ay} erő és a hozzá tartozó támasztó erők.

2.ER igénybevételei : $T''_y = F_{Ay} t_A$,
 $M''_{hz} = F_{Ay} m_A$.



Betti tétel : $W_{21} = U_{12}$, ahol $W_{21} = v_A F_{Ay}$, és $U_{12} = \int_{(l)} \frac{M'_{hz} M''_{hz}}{I_z E} dx$.

$$v_A F_{Ay} = \int_{(l)} \frac{M'_{hz} M''_{hz}}{I_z E} dx = \int_{(l)} \frac{M_{hz} F_{Ay} m_A}{I_z E} dx \Rightarrow v_A = \int_{(l)} \frac{M_{hz} m_A}{I_z E} dx .$$

Az elmozdulás kiszámítása :

$$v_A = \int_{(l)} \frac{M_{hz} m_A}{I_z E} dx = \frac{l}{I_z E} \left\{ \frac{l}{6} \left[0 + 4(-M_0) \left(-\frac{l}{2} \right) + (-M_0)(-l) \right] + \frac{2l}{6} \left[(-M_0)(-l) + 4 \left(-\frac{M_0}{2} \right) \left(-\frac{l}{2} \right) + 0 \right] \right\} ,$$

$$v_C = \frac{7 M_0 l^2}{6 I_z E} = \frac{7 \cdot 2,3 \cdot 10^6 \cdot 1200^2}{6 \cdot 171 \cdot 10^4 \cdot 2,1 \cdot 10^5} = 10,76 \text{ mm } (\uparrow) .$$

Pozitív előjel : az A pont felfelé, az $F_{Ay} = 1 \text{ kN}$ egységnyi erő irányításával megegyezően mozdul el.

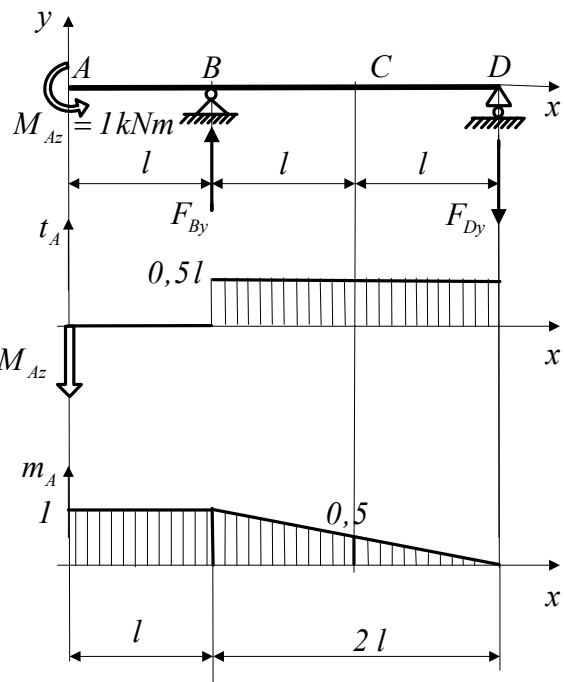
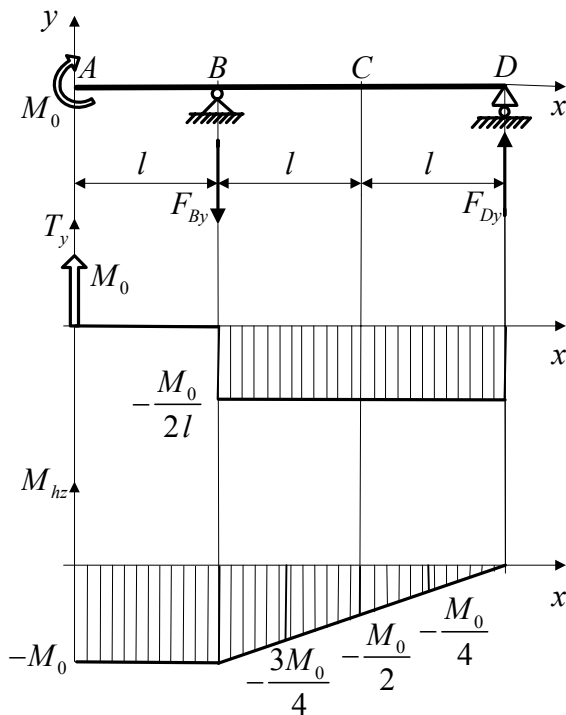
d) Az A jelű keresztmetszet z tengely körüli φ_A szögelfordulása :

1.ER : a tartó eredeti terhelése és a hozzá tartozó támasztó erők.

1.ER igénybevételei : $T'_y = T_y$,
 $M'_{hz} = M_{hz}$.

2.ER: az A pontban ható z irányú, egységnyi nagyságú M_{Az} nyomaték és a hozzá tartozó támasztó erők.

2.ER igénybevételei : $T''_y = M_{Az} t_A$,
 $M''_{hz} = M_{Az} m_A$.



Betti tétel : $W_{21} = U_{12}$, ahol $W_{21} = \varphi_C M_{Cz}$, és $U_{12} = \int_{(l)} \frac{M'_{hz} M''_{hz}}{I_z E} dx$.

$$\varphi_A M_{Az} = \int_{(l)} \frac{M'_{hz} M''_{hz}}{I_z E} dx = \int_{(l)} \frac{M_{hz} M_{Az} m_A}{I_z E} dx \Rightarrow \varphi_A = \int_{(l)} \frac{M_{hz} m_A}{I_z E} dx.$$

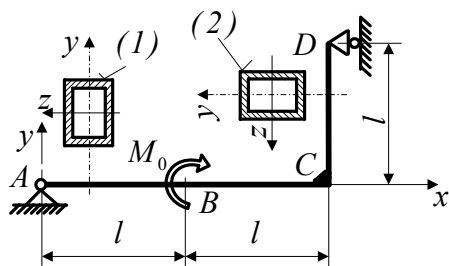
A szögelfordulás kiszámítása :

$$\varphi_A = \int_{(l)} \frac{M_{hz} m_A}{I_z E} dx = \frac{l}{I_z E} \left\{ \frac{l}{6} [(-M_0)(l) + 4(-M_0)(l) + (-M_0)(l)] + \frac{2l}{6} \left[(-M_0)(l) + 4 \left(-\frac{M_0}{2} \right) \frac{l}{2} + 0 \right] \right\},$$

$$\varphi_A = -\frac{5 M_0 l}{3 I_z E} = \frac{5 \cdot 2,3 \cdot 10^6 \cdot 1200}{3 \cdot 171 \cdot 10^4 \cdot 2,1 \cdot 10^5} = -1,28 \cdot 10^{-2} \text{ radián } (\curvearrowright) \Rightarrow \varphi_A = -1,28 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -0,733^\circ.$$

Negatív előjel : az A keresztmetszet az $M_{Az} = 1 \text{ kNm}$ egységnyi nyomatékvektor forgási értelmével ellentétesen fordul el a z tengely körül.

13.2 feladat : Prizmatikus rúdszerkezet elmozdulásának és szögelfordulásának számítása Betti tétellel



Adott: $l = 800 \text{ mm}$, $M_0 = 2 \text{ kNm}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$,
 $A = 563 \text{ mm}^2$, $I_z = 452000 \text{ mm}^4$.

Feladat: Határozza meg a C jelű keresztmetszet x irányú u_C elmozdulását.

A hajlítási és a húzási alakváltozási energia figyelembe vételével.

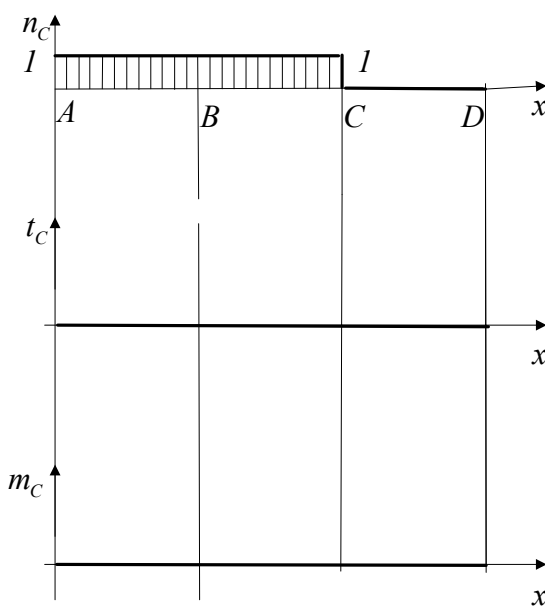
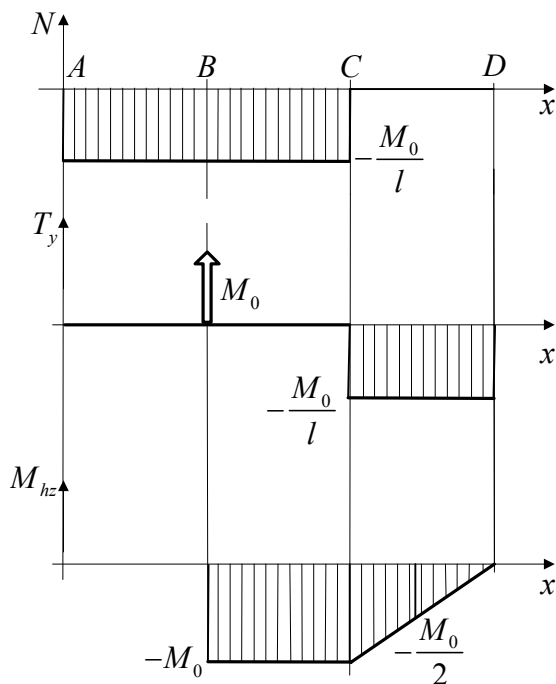
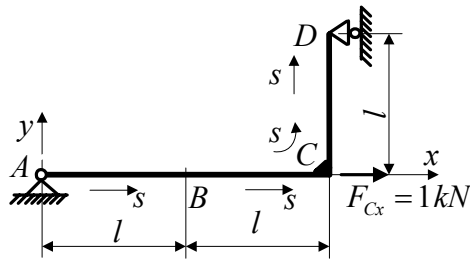
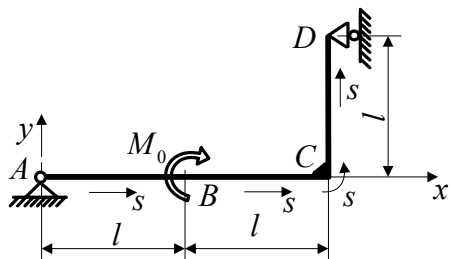
A C jelű keresztmetszet x irányú u_C elmozdulása :

1.ER : a tartó eredeti terhelése és a hozzá tartozó támasztó erők.

1.ER igénybevételei : $T'_y = T$,
 $N' = N$,
 $M'_{hz} = M_{hz}$.

2.ER : a C pontban ható x irányú, egységnyi nagyságú F_{Cx} erő és a hozzá tartozó támasztó erők.

2.ER igénybevételei : $T'' = F_{Cx} t_C$,
 $N'' = F_{Cx} n_C$,
 $M''_{hz} = F_{Cx} m_C$.



Betti tétel : $W_{21} = U_{12}$, ahol $W_{21} = u_C F_{Cx}$, és $U_{12} \approx U_H + U_N = \int_{(3l)} \frac{M'_{hz} M''_{hz}}{I_z E} dx + \int_{(3l)} \frac{N' N''}{A E} dx$.

$$u_x F_{Cx} = \int_{(3l)} \frac{M'_{hz} F_{Cx} m_C}{I_z E} dx + \int_{(3l)} \frac{N' F_{Cx} n_C}{A E} dx. \Rightarrow u_x = \int_{(3l)} \frac{M'_{hz} m_C}{I_z E} dx + \int_{(3l)} \frac{N' n_C}{A E} dx.$$

Az integrálok számítása :

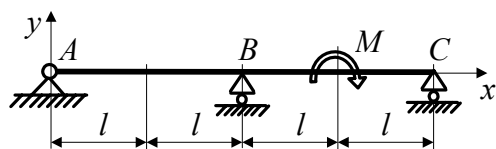
$$\bullet \int_{(3l)} \frac{M'_{hz} m_C}{I_Z E} dx = 0,$$

$$\bullet \int_{(3l)} \frac{N' n_C}{A E} dx = \frac{l}{A E} \left\{ \frac{2l}{6} \left[\left(-\frac{M_0}{l} \right) (l) + 4 \left(-\frac{M_0}{l} \right) (l) + \left(-\frac{M_0}{l} \right) (l) \right] \right\} = -\frac{2 M_0}{A E},$$

$$u_x = -\frac{2 M_0}{A E} = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^6}{563 \cdot 2,1 \cdot 10^5} = -3,38 \cdot 10^{-2} \text{ mm } (\leftarrow).$$

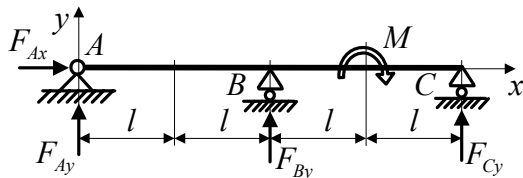
Negatív előjel : a C pont balra, az $F_{Cx} = 1 \text{ kN}$ egységnyi erő irányításával ellentétesen mozdul el.

13.3 feladat : Statikailag határozatlan rúdszerkezet támasztó erőinek számítása Castigliano tétellel



Adott: $l = 2000 \text{ mm}$, $M = 64 \text{ kNm}$,
 $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $I_z = 50000 \text{ mm}^4$.

Feladat: határozza meg a tartó támasztó erőrendszerét.



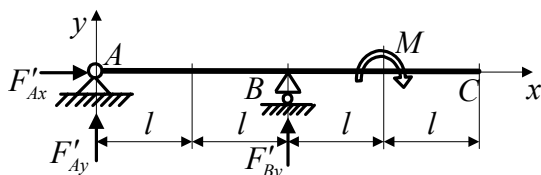
A statikai ismeretlenek száma : 4.

A statikai egyenletek száma : 3

A szerkezet statikailag egyszeresen határozatlan .

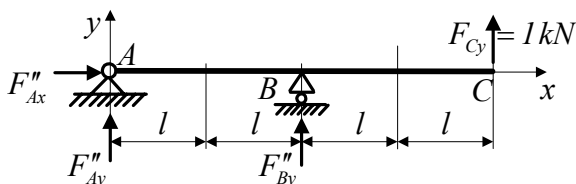
A statikailag határozottá tétel egy lehetséges megoldása : a C ponti görgős támaszt elhagyjuk, és az elhagyott kényszer hatásvonalában $F_{Cy} = 1 \text{ kN}$ egységnyi erőt működtetünk (statikailag határozott tartó kialakítása $\Rightarrow$ törzstartó).

Az eredeti terheléshez tartozó igénybe -
vételi ábrák : M_0, T_0 .

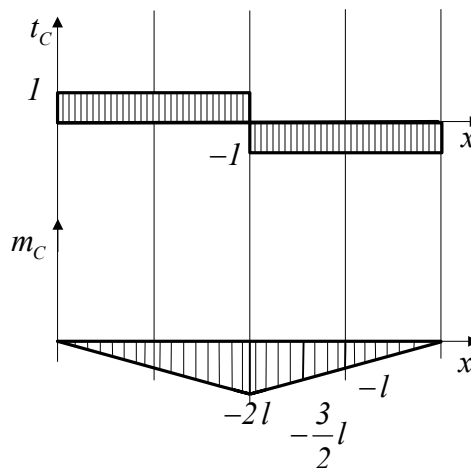
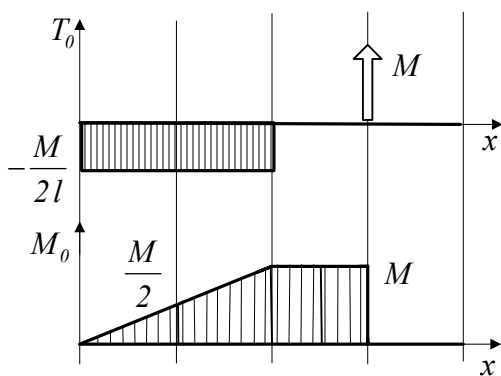


(törzstartó - statikailag határozott)

Az egységnyi $F_{Cy} = 1 \text{ kN}$ terheléshez
tartozó igénybevételei ábrák : m_C, t_C .



(törzstartó - statikailag határozott)



- Kinematikai korlátozás (a C pont függőleges , y irányú elmozdulása zérus) : $v_C = 0 \text{ mm}$ ($\uparrow$).

A nyírásból származó alakváltozási energiát elhanyagoljuk, a tartó igénybevétele hajlítás : $M_{hz} = (M_0 + F_{Cy} m_C)$.

Az alakváltozási energia : $U = \frac{1}{2} \int_{(4l)} \frac{M_{hz}^2}{I_z E} dx = \frac{1}{2} \int_{(4l)} \frac{(M_0 + F_{Cy} m_C)^2}{I_z E} dx$.

- Castigliano tételének alkalmazása :

$$v_C = 0 = \frac{\partial U}{\partial F_{Cy}} = \frac{\partial}{\partial F_{Cy}} \int_{(4l)} \frac{(M_0 + F_{Cy} m_C)^2}{2 I_z E} dx, \Rightarrow$$

$$F_{Cy} = - \frac{\int_{(4l)} M_0 m_C dx}{\int_{(4l)} m_C^2 dx} dx.$$

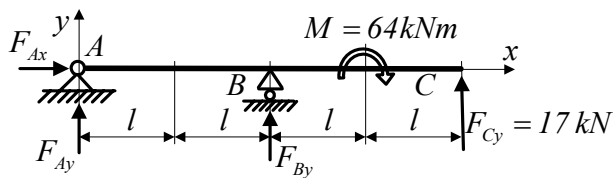
- Az integrálok számítása

$$\int_{(4l)} M_0 m_C dx = \frac{2l}{6} \left[0 + 4 \left(\frac{M}{2} \right) (-l) + (M)(-2l) \right] + \frac{l}{6} \left[(M)(-2l) + 4M \left(-\frac{3}{2}l \right) + (M)(-l) \right] = -\frac{17}{6} M l^2.$$

$$\int_{(4l)} m_C^2 dx = \frac{2l}{6} \left[0 + 4(-l)^2 + (-2l)^2 \right] + \frac{2l}{6} \left[(-2l)^2 + 4(-l)^2 + 0 \right] = \frac{32}{6} l^3.$$

$$F_{Cy} = - \frac{\int_{(4l)} M_0 m_C dx}{\int_{(4l)} m_C^2 dx} dx = - \frac{-\frac{17}{6} M l^2}{\frac{32}{6} l^3} = \frac{17}{32} \frac{M}{l} = \frac{17}{32} \frac{64}{2} = 17 \text{ kN} (\uparrow).$$

- A tartó további skalár koordinátáinak meghatározása statikai egyenletekből :



$$M_a = F_{Cy} 4l + F_{By} 2l - M = 0,$$

$$F_{By} = \frac{M - 4F_{Cy}l}{2l} = \frac{64 - 4 \cdot 17 \cdot 2}{2 \cdot 2} = -18 \text{ kN} (\downarrow).$$

$$M_b = F_{Cy} 2l - F_{Ay} 2l - M = 0,$$

$$F_{Ay} = \frac{F_{Cy} 2l - M}{2l} = F_{Cy} - \frac{M}{2l} = 17 - \frac{64}{2 \cdot 2} = 17 - 16 = 1 \text{ kN} (\uparrow).$$

$$\text{Ellenőrzés : } F_y = \sum F_{yi} = F_{Ay} + F_{By} + F_{Cy} = 1 - 18 + 17 = 0 \text{ kN}.$$

$$F_x = \sum F_{xi} = 0 \Rightarrow F_{Ax} = 0 \text{ kN}.$$