SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM | **GÉPSZERKEZETTAN ÉS MECHANIKA TANSZÉK**

2. MECHANIKA-STATIKA GYAKORLAT
Kidolgozta: Triesz Péter egy. ts.

Vektoralgebra

2.1. Példa

Adott három erő vektora:

$$\vec{F}_1 = \left(40\vec{i} + 18\vec{j} - 26\vec{k}\right)\text{kN}$$
$$\vec{F}_2 = \left(-2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)\text{kN}$$
$$\vec{F}_3 = \left(F_{3y}\vec{j}\right)\text{kN}$$

Feladat:

Mekkora legyen F_{3y} koordináta, hogy a $\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_3\right) \perp \vec{F}_2$ feltétel teljesüljön?

Megoldás:

A feladat megoldásánál a merőleges vektorok skalárszorzatára vonatkozó összefüggést használjuk fel, miszerint:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad \text{ha} \qquad \vec{a} \perp \vec{b},$$

e szerint a fenti feltételre is igaz, hogy

$$\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_3\right) \cdot \vec{F}_2 = 0, \text{ behelyettesítve}$$

$$\left[40\vec{i} + \left(18 + F_{3y}\right)\vec{j} - 26\vec{k}\right] \cdot \left(-2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) = 0,$$

$$40(-2) + \left(18 + F_{3y}\right) \cdot 2 - 26 \cdot 3 = 0.$$

Az egyenletet megoldásaként adódik

$$F_{3y} = 61\,\text{kN}, \qquad \text{ezzel} \quad \vec{F}_3 = \left(61\vec{j}\right)\text{kN}$$

2.2. Példa

Adott egy erő és egy tengely irány-egységvektora:

$$\vec{F} = \left(25\vec{i} - 10\vec{j} + 4\vec{k}\right)\text{N},$$
$$\vec{e} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right).$$

Feladat:

a. Adja meg az $\vec{F}$ erő x,y,z irányú *skaláris koordinátáit*!
b. Adja meg az $\vec{F}$ erő x,y,z irányú *összetevőit*!
c. Számítsa ki az $\vec{F}$ erő $\vec{e}$ iránnyal párhuzamos $F_{\|}$ skaláris koordinátáját, illetve $\vec{F}_{\|}$ összetevőjét!
d. Számítsa ki az $\vec{F}$ erő $\vec{e}$ irányra merőleges $F_{\perp}$ skaláris koordinátáját, illetve $\vec{F}_{\perp}$ összetevőjét!

Megoldás:

a. Egy vektornak egy skaláris koordinátája úgy határozható meg, ha a vektort skalárisan szorozzuk a kérdéses irány-egységvektorral (az eredmény egy *skalár* szám):

$$F_x = \vec{F}\cdot\vec{i} = 25\vec{i}\cdot\vec{i} - 10\vec{j}\cdot\vec{i} + 4\vec{k}\cdot\vec{i} = 25\,\text{N},$$
$$F_y = \vec{F}\cdot\vec{j} = 25\vec{i}\cdot\vec{j} - 10\vec{j}\cdot\vec{j} + 4\vec{k}\cdot\vec{j} = -10\,\text{N},$$
$$F_z = \vec{F}\cdot\vec{k} = 25\vec{i}\cdot\vec{k} - 10\vec{j}\cdot\vec{k} + 4\vec{k}\cdot\vec{k} = 4\,\text{N},$$

$$\vec{F} = \left(F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}\right)\text{N}\,.$$

b. Egy vektor egy adott irányú összetevője úgy adható meg, ha a megfelelő skaláris koordinátáját szorozzuk az adott irány egységvektorával (az eredmény *vektor*):

$$\vec{F}_x = F_x\,\vec{i} = 25\vec{i}\ \text{N},$$
$$\vec{F}_y = F_y\,\vec{j} = -10\vec{j}\,\text{N},$$
$$\vec{F}_z = F_z\,\vec{k} = 4\vec{k}\ \text{N},$$

Az eredeti vektor előállítható az összetevők összegeként:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z\,.$$

c. Az erővektor az adott iránnyal párhuzamos skalár koordinátáját és összetevőjét az előző pontokban ismertetett módszerek segítségével kapjuk meg. Tulajdonképpen ez a feladatrész az előző két pontban leírt módszerek általánosítása.

$$F_{\|} = \vec{F} \cdot \vec{e} = 25\vec{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - 10\vec{j}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + 4\vec{k}\,0\vec{k} = \frac{15\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{N}\ (= 10{,}606\ \mathrm{N}),$$

$$\vec{F}_{\|} = F_{\|}\,\vec{e} = \frac{15\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) = \left(7{,}5\vec{i} + 7{,}5\vec{j}\right)\mathrm{N}\,,$$

ahol $\vec{e}$ egységvektor!

d. Egy vektor egy adott irányra merőleges skalár koordinátája a vektoriális szorzásra vonatkozó azonosságból számítható, mely szerint:

$$F_{\perp} = \left|\vec{F} \times \vec{e}\right| = \left|\left(25\vec{i} - 10\vec{j} + 4\vec{k}\right) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)\right| = \sqrt{628{,}5} = 25{,}07\ \mathrm{N}\,.$$

Egy vektor egy adott irányra merőleges összetevőjének számítására egy kicsit bonyolultabb összefüggés szolgál:

$$\vec{F}_{\perp} = \left(\vec{e} \times \vec{F}\right) \times \vec{e}\,.$$

Ennél jóval egyszerűbb megoldást az $\vec{F} = \vec{F}_{\|} + \vec{F}_{\perp}$ összefüggésből kapjuk, vagyis a merőleges összetevő meghatározható úgy, ha egyszerűen az előző pontban számolt párhuzamos összetevőt kivonjuk az eredeti vektorból:

$$\vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{\|} = \left(17{,}5\vec{i} - 17{,}5\vec{j} + 4\vec{k}\right)\mathrm{N}.$$

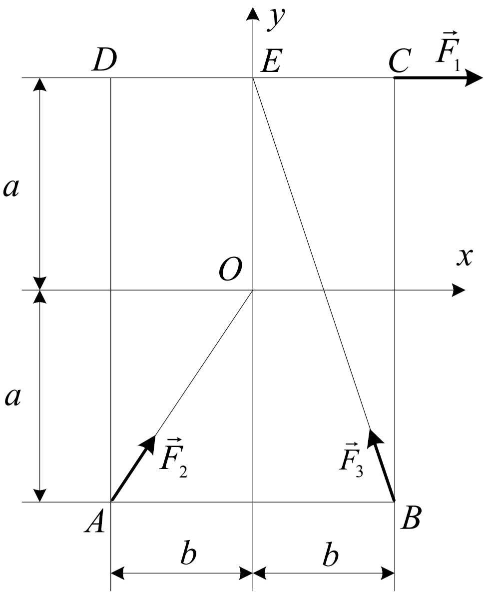
2.3. Példa

Adott az ábrán látható erőrendszer.

$a = 3\,\text{m}, \quad b = 2\,\text{m},$

$F_1 = 2\,\text{kN}, \quad F_2 = 5\,\text{kN},$

$F_3 = 6\,\text{kN}.$



Feladat:

a. Írja fel az erőrendszert alkotó erők vektorait!
b. Határozza meg az erők eredőjének vektorát, számítsa ki a nagyságát!
c. Számítsa ki az $\vec{F}$ eredő erő x tengellyel bezárt szögét!

Megoldás:

a. Az egyes erővektorok meghatározásához szükség van az irány-egységvektorukra, melyek az ábráról leolvashatók:

$$\vec{e}_1 = \vec{i}\,,$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{r}_{AO}}{|\vec{r}_{AO}|} = \frac{\left(2\vec{i} + 3\vec{j}\right)}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}\right),$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{r}_{BE}}{|\vec{r}_{BE}|} = \frac{\left(-2\vec{i} + 6\vec{j}\right)}{\sqrt{2^2 + 6^2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{j}\right).$$

Az erővektorok:

$$\vec{F}_1 = F_1\,\vec{e}_1 = \left(2\vec{i}\right)\text{kN}\,,$$

$$\vec{F}_2 = F_2\,\vec{e}_2 = \left(\frac{10}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{15}{\sqrt{13}}\vec{j}\right)\text{kN}\,,$$

$$\vec{F}_3 = F_3\,\vec{e}_3 = \left(-\frac{6}{\sqrt{10}}\vec{i} + \frac{18}{\sqrt{10}}\vec{j}\right)\text{kN}\,.$$

b. Az eredő erő:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \left(2{,}876\vec{i} + 9{,}852\vec{j}\right)\text{kN}\,,$$

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{2{,}876^2 + 97{,}069^2} = 10{,}263\,\text{kN}\,.$$

c. Az eredő erő hatásvonalának a vízszintes tengellyel bezárt szöge az egyenes iránytangensének definíciójával határozható meg:

$$\text{tg}\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{9{,}852}{2{,}876} = 3{,}425 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 73{,}73°\,.$$