Dr. Égert János
Dr. Molnár Zoltán
Dr. Pere Balázs

ALKALMAZOTT MECHANIKA

UNIVERSITAS-GYŐR Nonprofit Kft. ♦ Győr, 2010

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
MŰSZAKI TUDOMÁNYI KAR
ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK

ALKALMAZOTT MECHANIKA az egyetemi mesterképzésben résztvevő mérnök-hallgatók számára

Írta: Dr. Égert János – Dr. Molnár Zoltán - Dr. Pere Balázs

Lektorálta: Dr. Szabó Tamás tszv. egyetemi docens
Miskolci Egyetem, Robert Bosch Mechatronikai Tanszék

ISBN:

Kiadja az UNIVERSITAS-GYŐR Nonprofit Kft.
Felelős kiadó: a Kft mindenkori ügyvezetője.
Műszaki szerkesztő: Nagy Zoltán.
Készült a Palatia Nyomda és Kiadó Kft. nyomdájában.
Felelős vezető Radek József.

Tartalomjegyzék

0. BEVEZETÉS . . . .

1. MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ . . . .

1.1.Vektorok és vektorműveletek . . . .

1.2. Gyakorló feladatok vektorműveletekre . . . .

1.3. Mátrixalgebrai összefoglaló . . . .

1.4. Vektorok skaláris, kétszeres vektoriális és diadikus szorzata . . . .

1.5. Mátrix sajátértékei és sajátvektorai . . . .

1.6. Tenzorok előállítása . . . .

1.7. Gyakorló feladatok mátrixokra tenzorokra . . . .

2. ALAPFOGALMAK . . . .

3. ERŐRENDSZEREK . . . .

3.1. Koncentrált erő megadása . . . .

3.2. Erő nyomatéka . . . .

3.3.1.Erő pontra számított nyomatéka . . . .

3.3.2. Erő tengelyre számított nyomatéka . . . .

3.3.3. Összefüggés két pontra számított nyomaték között . . . .

3.3. Erő nyomatéki vektortere . . . .

3.4. Koncentrált erőrendszerek . . . .

3.4.1. Erőpár / koncentrált nyomaték . . . .

3.4.2. Általános erőrendszer . . . .

3.4.3. Erőrendszer eredő / redukált vektorkettőse . . . .

3.5. Erőrendszerek egyenértékűsége . . . .

3.5.1. Az egyenértékűség értelmezése . . . .

3.5.2. Az egyenértékűség feltételei (kritériumai) . . . .

3.5.3.A kritériumok bizonyítása . . . .

3.5.4. A statikai egyenletek jellege . . . .

3.6. Erőrendszer egyensúlya . . . .

3.6.1. Az egyensúly értelmezése . . . .

3.6.2. Az egyensúly feltételei (kritériumai) . . . .

3.7. Gyakorló feladatok erőrendszerekre . . . .

4. TÉRBELI STATIKAI FELADATOK . . . .

4.1. Közös ponton támadó erőrendszerek . . . .

4.2. Szétszórt erőrendszerek . . . .

4.3. Gyakorló feladatok térbeli statikai feladatokra . . . .

5. RUDAK IGÉNYBEVÉTELEI, IGÉNYBEVÉTELI ÁBRÁI . . . .

5.1. Az igénybevételek értelmezése . . . .

5.2. Az igénybevételek meghatározása . . . .

5.3. Az igénybevételi ábrák / igénybevételi függvények . . . .

5.3.1. A megoszló terhelés hatása . . . .

5.3.2. A koncentrált erő hatása . . . .
5.3.3. A koncentrált nyomaték hatása . . . .
5.3.4. Az egyensúlyi egyenletek integrál alakja . . . .
5.3.5. Általánosítás térbeli esetre . . . .
5.3.6. Az igénybevételi ábrák megrajzolásának gondolatmenete . . . .
5.4. Gyakorló feladatok rudak igénybevételeire és igénybevételi ábráira . . . .

6. SZILÁRDSÁGTANI ÁLLAPOTOK . . . .
6.1. Alapfogalmak . . . .
6.2. Az elmozdulási állapot . . . .
6.3. Az alakváltozási állapot . . . .
6.4. A feszültségi állapot . . . .
6.5. Gyakorló feladatok szilárdságtani állapotokra . . . .

7. RUDAK EGYSZERŰ IGÉNYBEVÉTELEI . . . .
7.1. Prizmatikus rúd húzása, zömök rúd nyomása . . . .
7.2. Húzott-nyomott rudak tönkremenetele . . . .
7.3. Kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak csavarása . . . .
7.4. Prizmatikus rudak egyenes hajlítása . . . .
7.5. Gyakorló feladatok rudak egyszerű igénybevételeire . . . .

8. RUDAK ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEI . . . .
8.1. Tönkremeneteli elméletek . . . .
8.2. Húzás-nyomás és egyenes hajlítás . . . .
8.3. Kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak húzás-nyomása és csavarása . . . .
8.4. Kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak hajlítása és csavarása . . . .
8.5. Nyírás és hajlítás . . . .
8.6. Gyakorló feladatok rudak összetett igénybevételeire . . . .

9. RÚDSZERKEZETEK ALAKVÁLTOZÁSA . . . .
9.1. Statikailag határozott rúdszerkezetek elmozdulása, szögelfordulása . . . .
9.2. Statikailag határozatlan szerkezetek támasztóerői . . . .

10. RUGALMASSÁGTANI EGYENLETEK . . . .
10.1. Egyensúlyi egyenletek. . . . .
10.2. Kinematikai (kompatibilitási, geometriai) egyenletek . . . .
10.3. Anyagegyenletek – általános Hooke törvény . . . .
10.4. Peremfeltételek . . . .
10.5. A kompatibilitási egyenletek más alakjai . . . .
10.6. Gyakorló feladatok a rugalmasságtan egyenleteire . . . .

11. A RUGALMASSÁGTAN 2D FELADATAI . . . .
11.1. A sík alakváltozás . . . .
11.2. Az általánosított sík-feszültségi állapot . . . .
11.3. Forgásszimmetrikus feladatok . . . .
11.4. Síkfeladatok megoldása feszültség-függvénnyel . . . .

11.4.1. A sík-alakváltozás és az általánosított sík-feszültségi állapot összehasonlítása . . . .
11.4.2. Az Airy-féle feszültség-függvény . . . .
11.5. Síkbeli forgásszimmetrikus feladatok . . . .
11.5.1. Vastag falú csövek . . . .
11.5.2. Gyorsan forgó csőtengelyek, tengelyek . . . .
11.6. Gyakorló feladatok a rugalmasságtan 2D feladataira . . . .

12. KINEMATIKA, KINETIKA . . . .
12.1. Anyagi pont mozgása . . . .
12.1.1. A mozgásfüggvény, a pályagörbe . . . .
12.1.2. A sebességfüggvény, a sebességvektor . . . .
12.1.3. A gyorsulásfüggvény, a gyorsulásvektor . . . .
12.1.4. A mozgásjellemzők közötti kapcsolat . . . .
12.1.5. Gyakorló feladatok anyagi pont mozgására . . . .
12.2. Merev test mozgása . . . .
12.2.1. Alapfogalmak . . . .
12.2.2. Merev test sebességállapota . . . .
12.2.3. Az elemi síkmozgás . . . .
12.2.4. Merev test gyorsulásállapota . . . .
12.2.5. Gyakorló feladatok merev test mozgására . . . .
12.3. Merev test kinetikája . . . .
12.3.1. Merev test tömegeloszlásának jellemzői . . . .
12.3.2. Merev test impulzusa, impulzusnyomatéka . . . .
12.3.3. Merev test kinetikai energiája . . . .
12.3.4. Merev testre ható erőrendszer teljesítménye . . . .
12.3.5. Merev testre ható erőrendszer munkája . . . .
12.3.6. Az impulzustétel . . . .
12.3.7. A perdület tétel . . . .
12.3.8. Energiatétel, munkatétel . . . .
12.3.9. Merev test kényszermozgása . . . .
12.3.10.Gyakorló feladatok merev test kinetikájára . . . .

13. DINAMIKAI FELADATOK . . . .
13.1. Forgó tömegek kiegyensúlyozása . . . .
13.1.1. A tömegkiegyensúlyozás célkitűzése . . . .
13.1.2. A tömegkiegyensúlyozás megvalósítása . . . .
13.2. Forgórészek meghajtása és üzemeltetése . . . .
13.3. Testek ütközése . . . .
13.3.1. Feltételezések, fogalmak . . . .
13.3.2. Testek centrikus ütközése . . . .
13.3.3. Testek excentrikus ütközése . . . .

14. IRODALOM . . . .

0. BEVEZETÉS

Az Alkalmazott Mechanika tárgy a Széchenyi István Egyetem Műszaki Tudományi Karán a Mechatronikai mérnöki, a Közlekedésmérnöki és a Logisztikai mérnöki egyetemi mesterképzési (MSc) szak tantervében szereplő kötelező tantárgy.

A tantárgy az egyetemi alapképzés mechanika oktatását meghaladó színvonalon, igényes matematikai apparátus felhasználásával, rendkívül tömören, vázlatszerűen foglalja össze a mérnöki munkához szükséges statika, szilárdságtan, kinematika és kinetika leglényegesebb fogalmait és összefüggéseit. Ezzel lehetőséget teremt az egyetemi alapképzést az adott szakon folytató hallgatóknak mechanikai ismereteik bővített, magasabb színvonalú megerősítésére, a korábban kevesebb mechanikai ismeretet szerzett hallgatóknak pedig tudásuk egyetemi szintre hozására. A tananyag összeállításánál a szerzők arra törekedtek, hogy a mérnöki mechanikának a fenti MSc szakok számára fontos fejezeteire térjenek ki.

Az elméleti tananyagot kidolgozott gyakorló feladatok, valamint további ki nem dolgozott gyakorló feladatok egészítik ki, amelyek önálló gyakorlásra is lehetőséget biztosítanak. Az önálló feladatmegoldásnak az elméleti anyag megértése és megtanulása, valamint a kidolgozott feladatok gondolatmenetének megértése után célszerű neki kezdeni. A tananyag elsajátítása a félév során folyamatos munkát igényel. A vizsgára történő eredményes felkészüléshez célszerű a tananyaggal heti 3-4 órát intenzíven foglalkozni és a jegyzetből 15-20 oldalnyi anyagot feldolgozni.

A jegyzet - az előadásokon, gyakorlatokon és konzultációkon történő részvételt feltételezve - segítséget szándékoznak nyújtani a nappali tagozatos hallgatóknak a tantárgy elsajátításához és a vizsgára történő eredményes felkészüléshez. Hasznos segédeszközök lehetnek azonban a levelező tagozatos egyetemi mesterképzésben résztvevő hallgatók számára is, akik nagyobb részt önállóan készülnek fel a félévközi házi feladatok megoldására és a vizsgára.

Az eredményes felkészüléshez a hallgatók az Alkalmazott Mechanika Tanszék honlapján a http://www.sze.hu/am/ címen további oktatási segédanyagokat, kidolgozott elméleti kérdéseket találnak.

Az Alkalmazott Mechanika tantárgy anyagának elsajátításához a jegyzet szerzői eredményes munkát kívánnak.

A szerzők ezen a helyen mondanak köszönetet Dr. Szabó Tamás tanszékvezető egyetemi docensnek, a jegyzet lektorának hasznos és érdemi szakmai észrevételeiért, amelyek a jegyzet végleges változatába beépültek.

Győr, 2010. március.

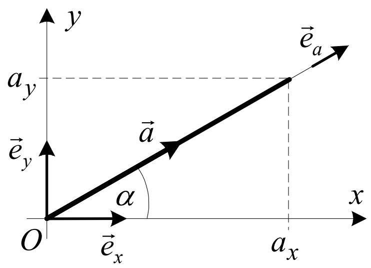
1. MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ

1.1. Vektorok és vektorműveletek

Skaláris mennyiség: olyan geometriai, vagy fizikai mennyiség, amelyet nagyság, (előjel) és mértékegység jellemez.

Vektor mennyiség: irányított geometriai, vagy fizikai mennyiség, amelyet nagyság (előjel), irány és mértékegység jellemez.

a) Vektor megadása:



Egységvektorok: $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$.

Az egységvektorok hossza egységnyi: $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = 1$.

Egy tetszőleges vektor megadása egységvektorokkal: $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$.

Ha ismert az $\vec{a}$ vektor hossza és az x tengellyel bezárt szöge, akkor az előző összefüggésből:

$$\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha\,\vec{e}_x + |\vec{a}|\sin\alpha\,\vec{e}_y = |\vec{a}|(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y) = |\vec{a}|\,\vec{e}_a$$

Az $\vec{a}$ vektor hosszát a Pithagorasz-tétel segítségével számíthatjuk ki: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

Könnyen belátható az is, hogy $\vec{e}_a$ vektor egységvektor:

$$|\vec{e}_a| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1.$$

A vektorok közötti műveletek a vektorok támadásponthoz, vagy hatásvonalhoz kötöttségétől függetlenül érvényesek.

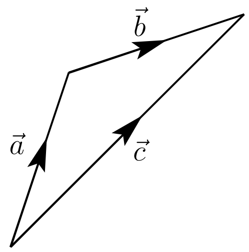
b) Vektorok összeadása:

Legyen adott két vektor: $\vec{a} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y$, $\quad \vec{b} = b_x\,\vec{e}_x + b_y\,\vec{e}_y$.

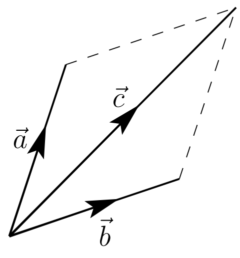
A két vektor összegének kiszámítása:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y) + (b_x\,\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y) = \underbrace{(a_x + b_x)}_{c_x}\vec{e}_x + \underbrace{(a_y + b_y)}_{c_y}\vec{e}_y = \vec{c}.$$

A két vektor összegének megszerkesztése:



Háromszög szabály



Paralelogramma szabály

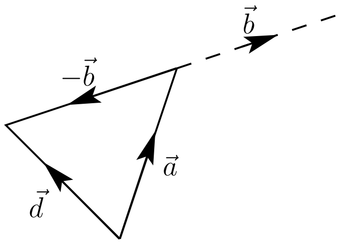
c) <u>Vektorok kivonása:</u>

Legyen adott két vektor: $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$, $\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y$.

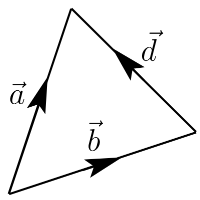
A két vektor különbségének kiszámítása:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y) - (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y) = \underbrace{(a_x - b_x)}_{d_x} \vec{e}_x + \underbrace{(a_y - b_y)}_{d_y} \vec{e}_y = \vec{d}$$

Két vektor különbségének megszerkesztése:



$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{d}$



$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$

d) <u>Vektorok skaláris szorzása (az eredmény skaláris mennyiség):</u>

A skaláris szorzás értelmezése: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$.

A skaláris szorzás kiszámítása: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Az $\vec{a} \cdot \vec{b}$ jelölés kiejtése (kiolvasása): á skalárisan szorozva bével.

Egységvektorok skaláris szorzata: $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$, $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1$, $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$,

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$, $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$, $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$.

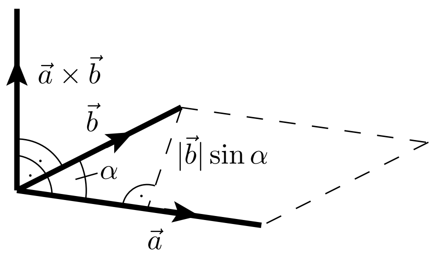
Az eredmény általánosítása: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ és $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$.

Az $\vec{a} \perp \vec{b}$ jelölés kiejtése (kiolvasása): á merőleges bére.

e) <u>Vektorok vektoriális szorzata (az eredmény vektor):</u>

A vektoriális szorzás értelmezése:

Az eredményvektor nagysága: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \underbrace{|\vec{b}| \sin\alpha}_{\text{a paralelo-gramma magassága}}$.



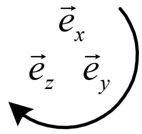
Az eredményvektor irányát ún. jobbkéz szabállyal kapjuk meg: ha jobb kézzel az $\vec{a}$ vektort a $\vec{b}$ vektorba forgatjuk, akkor a jobb kéz hüvelykujja adja meg az eredményvektor irányát.

Az eredményvektor merőleges a szorzásban szereplő mindkét vektorra.

A vektoriális szorzás kiszámítása:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{e}_x(a_yb_z-b_ya_z)-\vec{e}_y(a_xb_z-b_xa_z)+\vec{e}_z(a_xb_y-b_xa_y)\,.$$

Egységvektorok vektoriális szorzata:



$\vec{e}_x\times\vec{e}_x=\vec{0}$, $\quad\vec{e}_y\times\vec{e}_y=\vec{0}$, $\quad\vec{e}_z\times\vec{e}_z=\vec{0}$,

$\vec{e}_x\times\vec{e}_y=\vec{e}_z$, $\quad\vec{e}_y\times\vec{e}_z=\vec{e}_x$, $\quad\vec{e}_z\times\vec{e}_x=\vec{e}_y$,

$\vec{e}_y\times\vec{e}_x=-\vec{e}_z$, $\quad\vec{e}_x\times\vec{e}_z=-\vec{e}_y$, $\quad\vec{e}_z\times\vec{e}_y=-\vec{e}_x$.

<u>Szabály:</u>
- Ha két egységvektort az ábrán látható nyíllal megegyező sorrendben szorzunk össze vektoriálisan, akkor pozitív előjellel kapjuk a harmadik egységvektort.
- Ha két egységvektort az ábrán látható nyíllal ellentétes sorrendben szorzunk össze vektoriálisan, akkor negatív előjellel kapjuk a harmadik egységvektort.

Az eredmény általánosítása: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\quad\Rightarrow\quad\vec{a}\,\|\,\vec{b}$.

f) <u>Vektorok kétszeres vektoriális szorzata (az eredmény vektor):</u>

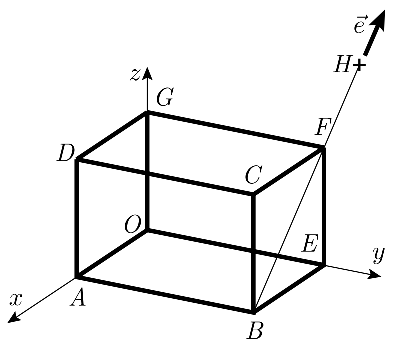
$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, vagy $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

Kiszámítás kétféle úton lehetséges:
- a két vektoriális szorzásnak a kijelölt sorrendben történő elvégzésével,
- a kifejtési szabállyal:

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$, ill. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

1.2. Gyakorló feladatok vektorműveletekre

1.2.1. feladat: Helyvektorok felírása, összegzése, abszolút értékének meghatározása



<u>Adott:</u> egy hasáb, valamint a H pont helye:

$\overline{AB}=8$ m, $\quad\overline{BE}=3$ m,

$\overline{AD}=6$ m, $\quad\overline{FH}=0{,}5\,\overline{BF}$.

<u>Feladat:</u> a) A H pont $\vec{r}_H$ helyvektorának meghatározása.

b) A H-ból a B pontba mutató $\vec{r}_{HB}$ helyvektor meghatározása.

<u>Kidolgozás:</u>

a) A H pont $\vec{r}_H$ helyvektorának meghatározása:

$\vec{r}_H=\vec{r}_{OF}+\vec{r}_{FH}$.

$\vec{r}_{OF}=\vec{r}_F=(8e_y+6\vec{e}_z)$ m,

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}_{BF}}{|\vec{r}_{BF}|} = \frac{1}{\sqrt{45}}(-3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z)\ \text{m}\,,\quad \vec{r}_{BF} = (-3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z)\ \text{m}\,,$$

$$|\vec{r}_{BF}| = \sqrt{x_{BF}^2 + z_{BF}^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}\ \text{m}\,,$$

$$|\vec{r}_{FH}| = 0{,}5\sqrt{45}\ \text{m}\,,$$

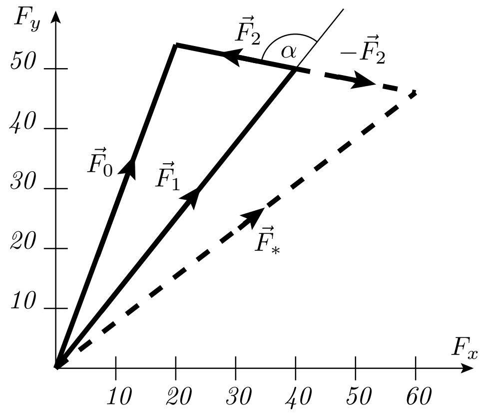
$$\vec{r}_{FH} = |\vec{r}_{FH}|\,\vec{e} = \frac{\sqrt{45}}{2}\frac{1}{\sqrt{45}}(-3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z) = (-1{,}5\vec{e}_x + 3\vec{e}_z)\ \text{m}\,,$$

$$\vec{r}_H = (8\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) + (-1{,}5\vec{e}_x + 3\vec{e}_z) = (-1{,}5\vec{e}_x + 8\vec{e}_y + 9\vec{e}_z)\ \text{m}\,.$$

b) A H-ból a B pontba mutató $\vec{r}_{HB}$ helyvektor meghatározása.

$$\vec{r}_{HB} = -\frac{3}{2}|\vec{r}_{BF}|\,\vec{e} = -\frac{3}{2}\sqrt{45}\frac{1}{\sqrt{45}}(-3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z)\ \text{m}\,,\ \vec{r}_{HB} = (4{,}5\vec{e}_x - 9\vec{e}_z)\ \text{m}\,.$$

1.2.2. feladat: Vektorok összege, különbsége, egymással bezárt szöge



Adott: $\vec{F}_1 = (40\vec{e}_x + 50\vec{e}_y)\ \text{N}\,,$

$\vec{F}_2 = (-20\vec{e}_x + 4\vec{e}_y)\ \text{N}\,.$

Feladat:

a) A két erő $\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ összegvektorának meghatározása.

b) A két erő $\vec{F}_* = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ különbségvektorának meghatározása.

c) A két erővektor által bezárt α_{12} szög meghatározása.

Kidolgozás:

a) A két erő $\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ összegvektorának meghatározása:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (40\vec{e}_x + 50\vec{e}_y) + (-20\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) = (20\vec{e}_x + 54\vec{e}_y)\ \text{N}\,.$$

b) A két erő $\vec{F}_* = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ különbségvektorának meghatározása:

$$\vec{F}_* = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = (40\vec{e}_x + 50\vec{e}_y) - (-20\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) = (60\vec{e}_x - 46\vec{e}_y)\ \text{N}\,.$$

c) A két erővektor által bezárt α_{12} szög meghatározása:

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = |\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2}{|\vec{F}_1||\vec{F}_2|}\,.$$

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = 40(-20) + 50\cdot 4 = -800 + 200 = -600\ \text{N}^2\,, |\vec{F}_1| = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} = \sqrt{40^2 + 50^2} = 64{,}03\ \text{N}\,,$$

$$|\vec{F}_2| = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} = \sqrt{20^2 + 4^2} = 20{,}40\ \text{N}\,, \cos\alpha = \frac{-600}{64{,}03\cdot 20{,}40} = -0{,}45934\,,$$

$$\alpha = \arccos(-0{,}45934) = 117{,}34°\,.$$

1.2.3. feladat: Vektor koordinátái és összetevői

Adott:

$\vec{a} = (10\vec{e}_x + 5\vec{e}_y)$ m.

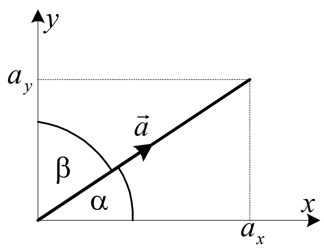
Feladat:

a) Az $\vec{a}$ vektor x és y irányú skaláris koordinátáinak meghatározása.

b) Az $\vec{a}$ vektor x és y irányú összetevőinek meghatározása.

Kidolgozás:

a) A vektor koordinátatengely irányú koordinátáinak meghatározása (skaláris mennyiségek):



A skaláris szorzás értelmezéséből:

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{e}_x = |\vec{a}||\vec{e}_x| \cos\alpha = |\vec{a}| \cos\alpha ,$$

$$a_y = \vec{a} \cdot \vec{e}_y = |\vec{a}||\vec{e}_y| \cos\beta = |\vec{a}| \cos\beta .$$

A skaláris koordináták kiszámítása:

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{e}_x = (10\vec{e}_x + 5\vec{e}_y) \cdot \vec{e}_x = 10\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + 5\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = 10 \text{ m},$$

$$a_y = \vec{a} \cdot \vec{e}_y = (10\vec{e}_x + 5\vec{e}_y) \cdot \vec{e}_y = 10\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y + 5\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 5 \text{ m}.$$

b) A vektor koordinátatengely irányú összetevői (vektor mennyiségek):

$$\vec{a}_x = a_x \vec{e}_x = (10\vec{e}_x) \text{ m}, \quad \vec{a}_y = a_y \vec{e}_y = (5\vec{e}_y) \text{ m}.$$

1.2.4. feladat: Vektor koordinátái és összetevői

Adott:

$\vec{b} = (6\vec{e}_x + 6\vec{e}_y)$ m,

$\vec{a} = (12\vec{e}_x + 4\vec{e}_y)$ m.

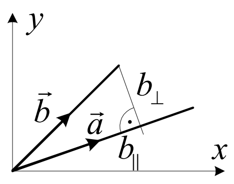
Feladat:

a) A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányú $b_{\parallel}$ és $\vec{a}$ irányra merőleges $b_{\perp}$ skaláris koordinátáinak meghatározása.

b) A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányú $\vec{b}_{\parallel}$ és $\vec{a}$ irányra merőleges $\vec{b}_{\perp}$ összetevőinek meghatározása.

Kidolgozás:

a) Adott irányú koordináták meghatározása:



A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányú koordinátája ($\vec{a}$ irányra eső vetülete):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \underbrace{|\vec{b}| \cos\alpha}_{b_{\parallel}} \quad \Rightarrow \quad b_{\parallel} = |\vec{b}| \cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 96 \text{ m}^2 ,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \approx 12{,}65 \text{ m},$$

$$b_{\parallel} = \frac{96}{12{,}65} = 7{,}59 \text{ m}.$$

A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányra merőleges koordinátája (az $\vec{a}$ irányra merőleges vetülete):

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \underbrace{|\vec{b}| \sin\alpha}_{b_{\perp}} \quad \Rightarrow \quad b_{\perp} = |\vec{b}| \sin\alpha = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 12 & 4 & 0\\ 6 & 6 & 0\end{vmatrix}=\vec{e}_z(72-24)=(48\vec{e}_z)\ \text{m}^2, \quad |\vec{a}\times\vec{b}|=48\ \text{m}^2,\ |\vec{a}|=12{,}65\ \text{m}.$$

$$b_\perp=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|}=\frac{48}{12{,}65}=3{,}79\ \text{m}.$$

b) Adott irányú összetevők meghatározása:

A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányú összetevője:

$$\vec{e}_a=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{12{,}65}(12\vec{e}_x+4\vec{e}_y)=(0{,}9486\,\vec{e}_x+0{,}3162\vec{e}_y),$$

$$\vec{b}_\parallel=b_\parallel\,\vec{e}_a=7{,}59(0{,}9486\vec{e}_x+0{,}3162\vec{e}_y)=(7{,}2\vec{e}_x+2{,}4\vec{e}_y)\ \text{m}.$$

A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányra merőleges összetevője:

$$\vec{b}_\perp=\underbrace{\left(\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}\times\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)}_{\vec{e}_\perp}\underbrace{|\vec{b}|\sin\alpha}_{b_\perp}=\left(\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha}\times\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)|\vec{b}|\sin\alpha=\frac{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}}{|\vec{a}|^2}.$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}=(48\vec{e}_z)\times(12\vec{e}_x+4\vec{e}_y)=(-192\vec{e}_x+576\vec{e}_y)\ \text{m}^3,$$

$$\vec{b}_\perp=\frac{-192\vec{e}_x+576\vec{e}_y}{160}=(-1{,}2\vec{e}_x+3{,}6\vec{e}_y)\,\text{m}.$$

Ellenőrzés: $\vec{b}=\vec{b}_\parallel+\vec{b}_\perp=(7{,}2\vec{e}_x+2{,}4\,\vec{e}_y)+(-1{,}2\vec{e}_x+3{,}6\,\vec{e}_y)=(6\vec{e}_x+6\vec{e}_y)\,\text{m}$.

1.2.5. feladat: Vektorok skaláris szorzata

Adott: $\vec{F}_1=(40\vec{e}_x+18\vec{e}_y-26\vec{e}_z)\ \text{kN}$,

$\vec{F}_2=(-2\vec{e}_x+2\vec{e}_y+3\vec{e}_z)\ kN$,

$\vec{F}_3=(F_{3y}\vec{e}_y)$.

Kérdés:

Mekkora legyen F_{3y}, ha azt akarjuk, hogy $(\vec{F}_1+\vec{F}_3)$ merőleges legyen $\vec{F}_2$-re?

Kidolgozás:

Ha $\vec{a}\perp\vec{b}$, akkor $\vec{a}\cdot\vec{b}=0=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\underbrace{\alpha}_{90^\circ}=0$.

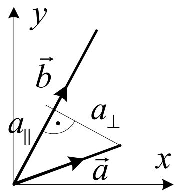
Ezért teljesülnie kell az $(\vec{F}_1+\vec{F}_3)\cdot\vec{F}_2=0$ összefüggésnek.

$$(\vec{F}_1+\vec{F}_3)\cdot\vec{F}_2=\left[40\vec{e}_x+(18+F_{3y})\vec{e}_y-26\vec{e}_z\right]\cdot(-2\vec{e}_x+2\vec{e}_y+3\vec{e}_z)=0,$$

$$-40\cdot2+(18+F_{3y})2-26\cdot3=0, \qquad -80+36+2F_{3y}-78=0,$$

$$2F_{3y}=122 \quad\Rightarrow\quad F_{3y}=61\text{kN}.$$

1.2.6. feladat: Vektor koordinátái és összetevői



Adott:

$\vec{a}=(3\vec{e}_x+\vec{e}_y)$ N, $\vec{b}=(4\vec{e}_x+2\vec{e}_y)$ N.

Feladat:

a) Az $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ irányú $a_{\parallel}$ és a $\vec{b}$ irányra merőleges $a_{\perp}$ skaláris koordinátáinak meghatározása.

b) Az $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ irányú $\vec{a}_{\parallel}$ és a $\vec{b}$ irányra merőleges $\vec{a}_{\perp}$ összetevőinek meghatározása.

Megoldás:

a) Az $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ irányú $a_{\parallel}$ és a $\vec{b}$ irányra merőleges $a_{\perp}$ skaláris koordinátái:

$a_{\parallel}=2{,}235$ N, $a_{\perp}=2{,}235$ N.

b) Az $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ irányú $\vec{a}_{\parallel}$ és a $\vec{b}$ irányra merőleges $\vec{a}_{\perp}$ összetevői:

$\vec{a}_{\parallel}\approx(\vec{e}_x+2\vec{e}_y)$ N, $\vec{a}_{\perp}\approx(2\vec{e}_x-\vec{e}_y)$ N.

1.3. Mátrixalgebrai összefoglaló

a) Mátrix értelmezése, jelölése:

Mátrix: Skaláris mennyiségeknek, számoknak megadott szabály szerint táblázatba rendezett halmaza.

Mátrix jelölése: $\left[\underline{\underline{A}}\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$.

A mátrixokat kétszer aláhúzott betűvel, a mátrixok elemeit (koordinátáit) alsó indexes betűvel jelöljük. Pl. $\underline{\underline{A}},\underline{\underline{a}}$ és a_{13}, a_2 stb.

Az a_{13} mátrixelem az $\underline{\underline{A}}$ mátrix első sorában és harmadik oszlopában van.

Mátrix mérete: Például a fenti (2x3)-as méretű $\left[\underline{\underline{A}}\right]$ mátrixnak két sora és három oszlopa van.

Az a_{13} mátrix elem jelölés kiejtése (kiolvasása): á egy három.

Oszlopmátrix: $\left[\underline{\underline{a}}\right]=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, sormátrix: $\left[\underline{\underline{a}}^T\right]=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$.

Az oszlopmátrixnak egy oszlopa, a sormátrixnak egy sora van.
A sormátrix ugyanannak az oszlopmátrixnak a transzponáltja. A sormátrixot a mátrix betűjelének felső indexébe írt T betű jelöli.

b) Mátrixműveletek:

A műveleteket (2×2)-es, (2x1)-es és (1x2)-es mátrixokra mutatjuk be.

- *Mátrix transzponáltja (tükrözés a főátlóra):*

A mátrix főátlóját az azonos indexű elemek alkotják.

$$\left[\underline{\underline{A}}\right]=\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} \quad \Rightarrow \quad \left[\underline{\underline{A}}^T\right]=\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}.$$

A transzponálási művelet jele: T (a mátrix felső indexében).

A transzponálás oszlopmátrixból sormátrixot, sormátrixból pedig oszlopmátrixot hoz létre.

Az $\underline{\underline{A}}^T$ jelölés kiejtése (kiolvasása): á transzponált.

- *Mátrixok összeadása, kivonása:*

Csak azonos méretű mátrixok adhatók össze, vonhatók ki egymásból.

$\underline{\underline{A}} \pm \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} \pm \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (a_{11} \pm b_{11}) & (a_{12} \pm b_{12}) \\ (a_{21} \pm b_{21}) & (a_{22} \pm b_{22}) \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}.$$

- *Mátrix szorzás (sor-oszlop kombináció):*

Csak olyan mátrixok szorozhatók össze, amelyek teljesítik azt a feltételt, hogy az első szorzótényező oszlopainak száma megegyezik a második szorzótényező sorainak számával.

$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21}) & (a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22}) \\ (a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21}) & (a_{21}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22}) \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}.$$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{b} = \underline{c}$,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1} \\ b_{2} \end{bmatrix}}_{(2\times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (a_{11}\, b_{1} + a_{12}\, b_{2}) \\ (a_{21}\, b_{1} + a_{22}\, b_{2}) \end{bmatrix}}_{(2\times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1} \\ c_{2} \end{bmatrix}}_{(2\times 1)}.$$

$\underline{a}^T\, \underline{\underline{B}} = \underline{d}^T$,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1} & a_{2} \end{bmatrix}}_{(1\times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (a_{1}\, b_{11} + a_{2}\, b_{21}) & (a_{1}\, b_{12} + a_{2}\, b_{22}) \end{bmatrix}}_{(1\times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_{1} & d_{2} \end{bmatrix}}_{(1\times 2)}.$$

c) <u>Különleges mátrixok:</u>

- *Egységmátrix:* $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tulajdonsága: $\underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}}$.

Az egységmátrix a főátlójában 1-es koordinátákat, a főátlóján kívül 0 elemeket tartalmaz. Az egységmátrixszal történő szorzás nem változtatja meg a megszorzott mátrixot.

- *Szimmetrikus mátrix:* $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$

A mátrix elemei megegyeznek a főátlóra vett tükörképükkel.

Például $\left[\underline{\underline{A}}\right]=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 9\end{bmatrix}$ szimmetrikus mátrix.

- *Ferdeszimmetrikus mátrix:* $\underline{\underline{A}}^T=-\underline{\underline{A}}$.

A mátrix bármelyik eleme megegyezik a főátlóra vett tükörképének mínusz egyszeresével. Ebből az következik, hogy a főátlóban csak zérus elemek lehetnek.

Például $\left[\underline{\underline{A}}\right]=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 3 & 0\end{bmatrix}$ ferdeszimmetrikus mátrix.

1.4. Vektorok skaláris, kétszeres vektoriális és diadikus szorzata

Egyes vektor szorzások mátrixok szorzataként is elvégezhetők.

a) <u>Vektorok skaláris szorzata:</u>

A skaláris szorzás értelmezése: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$.

(α a vektorok között bezárt szög, $\alpha\leq\pi$.)

A skaláris szorzás kiszámítása mátrixszorzással:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{bmatrix}a_x & a_y & a_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_x\\ b_y\\ b_z\end{bmatrix}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z .$$

Az első szorzó tényező koordinátáit sormátrixba, a második szorzó tényező koordinátáit oszlopmátrixba rendezzük és a szorzást a mátrixszorzás szabályai szerint (sor-oszlop kombináció) végezzük el.

A szorzás eredménye egy skaláris mennyiség.

b) <u>Vektorok diadikus szorzata:</u>

Legyen adott az $\vec{a},\vec{b}$ és $\vec{c}$ tetszőleges vektor.

Két vektor diadikus szorzatának jelölése: $\vec{a}\circ\vec{b}$, elnevezése: diád.

Az $\vec{a}\circ\vec{b}$ jelölés kiejtése (kiolvasása): á diád bé.

Két vektor diadikus szorzatát a szorzás tulajdonságainak megadásával értelmezzük:

- a diadikus szorzás és a skaláris szorzás *asszociatív* (csoportosítható, azaz szorzások elvégzésének sorrendje felcserélhető):

  $(\vec{a}\circ\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\circ(\vec{b}\cdot\vec{c})$,

- a diád a skaláris szorzás szempontjából *nem kommutatív* (nem mindegy, hogy egy diádot jobbról, vagy balról szorzunk meg skalárisan egy vektorral, mert más eredményt kapunk):

  $\vec{c}\cdot(\vec{a}\circ\vec{b})\neq(\vec{a}\circ\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Ha a szorzás a fenti összefüggéseket kielégíti, akkor a szorzás diadikus.

Két vektor diadikus szorzatának kiszámítása jobbsodrású, derékszögű koordinátarendszerben:

$$\left[\vec{a}\circ\vec{b}\right]=\begin{bmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_x & b_y & b_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_x\,b_x & a_x\,b_y & a_x\,b_z\\ a_y\,b_x & a_y\,b_y & a_y\,b_z\\ a_z\,b_x & a_z\,b_y & a_z\,b_z\end{bmatrix}.$$

Az első szorzó tényező koordinátáit oszlopmátrixba, a második szorzó tényező koordinátáit sormátrixba rendezzük és a szorzást a mátrix szorzás szabályai szerint (sor-oszlop kombináció) végezzük el. A szorzás eredménye egy kilenc skaláris mennyiséget tartalmazó mátrix.

Egységvektorok diadikus szorzata:

$$\left[\vec{e}_x \circ \vec{e}_x\right] = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \left[\vec{e}_y \circ \vec{e}_y\right] = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\left[\vec{e}_z \circ \vec{e}_z\right] = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \left[\vec{e}_x \circ \vec{e}_y\right] = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\left[\vec{e}_x \circ \vec{e}_z\right] = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \left[\vec{e}_y \circ \vec{e}_z\right] = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\left[\vec{e}_y \circ \vec{e}_x\right] = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \left[\vec{e}_z \circ \vec{e}_x\right] = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},$$

$$\left[\vec{e}_z \circ \vec{e}_y\right] = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

A skalár számmal történő szorzás mindig diadikus, vagy más szóhasználattal általános szorzás.

1.5. Mátrix sajátértékei és sajátvektorai

a) A sajátérték feladat kitűzése:

Létezik-e olyan $\underline{\underline{n}}$ oszlopmátrix, amellyel az $\underline{\underline{A}}$ négyzetes mátrixot megszorozva, az $\underline{\underline{n}}$ oszlopmátrix valahányszorosát kapjuk:

$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{n}} = \lambda\,\underline{\underline{n}}$, ahol a λ skaláris mennyiség?

Ha létezik ilyen $\underline{\underline{n}}$ oszlopmátrix, akkor ezt az $\underline{\underline{A}}$ négyzetes mátrix sajátvektorának, a λ skaláris mennyiséget pedig az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékének nevezzük.

b) A sajátérték feladat megoldása:

A sajátérték feladat megoldását egy (2x2)-es mátrixon mutatjuk be.
Az előző egyenletet részletesen kiírva és bal oldalra rendezve:

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_x\\ n_y\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}n_x\\ n_y\end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_x\\ n_y\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}n_x\\ n_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

és a szorzásokat elvégezve, az n_x, n_y ismeretlenre homogén lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk:

$$(a_{11}-\lambda)\,n_x + a_{12}\,n_y = 0,$$
$$a_{21}\,n_x + (a_{11}-\lambda)\,n_y = 0.$$

Az egyenletrendszer nem triviális (nullától különböző) megoldásának feltétele az, hogy a rendszer mátrixából képezett determinánsnak el kell tűnnie:

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{11}-\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

A determinánst kifejtve kapjuk a *karakterisztikus egyenletet*:

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0\,.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai a mátrix sajátértékei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}\,.$$

A homogén lineáris algebrai egyenletrendszernek csak $\lambda=\lambda_1$ és $\lambda=\lambda_2$ esetén van nemtriviális megoldása.
A mátrix sajátértékeit növekvő sorrendben szokás sorszámozni.

Ha az egyes λ_i (i=1,2) sajátértékeket behelyettesítjük a homogén lineáris algebrai egyenletrendszerbe, akkor az egyenletrendszer megoldható az n_{ix}, n_{iy} ismeretlenre:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda_i)\,n_{ix} + a_{12}\,n_{iy} &= 0 \\ a_{21}\,n_{ix} + (a_{11}-\lambda_i)\,n_{iy} &= 0 \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; \begin{aligned} n_{ix} &= \dots \\ n_{iy} &= \dots \end{aligned}\;,\quad \text{ahol i=1,2.}$$

Az λ_i (i=1,2) sajátértékek behelyettesítése esetén azonban az egyenletrendszer egyenletei egymástól nem lineárisan függetlenek, ezért az egyik egyenletet el kell hagyni és a másik egyenletből csak az n_{ix}/n_{iy}, vagy n_{iy}/n_{ix} (i=1,2) hányados határozható meg.

Az n_{ix} és n_{iy} értékét akkor kapjuk meg egyértelműen, ha az $\underline{\underline{n}}_i^T = \left[n_{ix}\; n_{iy}\right]$ sajátvektoroktól megköveteljük, hogy egységvektorok legyenek:

$\sqrt{n_{ix}^2 + n_{iy}^2} = 1$,   i=1,2.

1.6. Tenzorok előállítása

a) <u>Tenzor értelmezése és tulajdonságai:</u>

Tenzor: Homogén lineáris vektor-vektor függvény által megvalósított leképezés (hozzárendelés).

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{v}\,.$$

A $\underline{\underline{T}}$ tenzor a tetszőleges $\vec{v}$ vektorhoz a $\vec{w}$ képvektort rendeli hozzá.

A vektor-vektor függvény olyan függvénykapcsolat, amelynek $\vec{v}$ értelmezési tartománya és $\vec{w}$ értékkészlete is vektor mennyiség.

A tenzor tulajdonságai:

Homogén lineáris: Ha egy vektort két másik vektor lineáris kombinációjaként állítunk elő, akkor a vektor képvektora egyenlő a lineáris kombinációban szereplő vektorok képvektorainak lineáris kombinációjával:

Ha $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$ és $\vec{w}_1 = f(\vec{v}_1)$, $\vec{w}_2 = f(\vec{v}_2)$, akkor

$\vec{w} = f(\vec{v}) = f(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \lambda_2 f(\vec{v}_2) = \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2$.

Az összefüggésekben λ_1 és λ_2 tetszőleges skaláris együtthatók.

Következmény: A zérus vektorhoz zérus vektort rendel hozzá: $\vec{0} = f(\vec{0})$.

A tenzor koordináta-rendszertől független fizikai (geometriai, mechanikai) mennyiség.

b) <u>Tenzor előállítása jobbsodratú, derékszögű descartesi koordináta-rendszerben:</u>

- *Tenzor megadása:* - a tenzor koordinátáival (mátixával) és
  - a koordináta-rendszerrel történik.

- *Tenzor koordinátáinak jelölése mátrixba rendezve:*

$$\left[\underline{\underline{T}}\right]_{xyz} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$$

- *Tenzor előállítása derékszögű descartesi KR-ben:*

<u>1. Tétel:</u> - Térbeli esetben minden tenzor egyértelműen megadható három egymásra merőleges egységvektor és ezek képvektorai (három értékpár) ismeretében.
- Síkbeli esetben minden tenzor egyértelműen megadható két egymásra merőleges egységvektor és ezek képvektorai (két értékpár) ismeretében.

<u>2. Tétel:</u> - Térbeli esetben minden tenzor előállítható három diád összegeként.
- Síkbeli esetben minden tenzor előállítható két diád összegeként.

Legyen ismert három értékpár:

$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = f(\vec{e}_x)$, $\quad \vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$,

$\vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = f(\vec{e}_y)$, $\quad \vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$,

$\vec{e}_z \rightarrow \vec{c} = f(\vec{e}_z)$, $\quad \vec{c} = c_x \vec{e}_x + c_y \vec{e}_y + c_z \vec{e}_z$.

A tenzor diadikus előállítása: $\underline{\underline{T}} = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y + \vec{c} \circ \vec{e}_z)$.

A tenzor mátrixa: $\left[\underline{\underline{T}}\right]_{xyz} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix}$.

A tenzor mátrixát a diadikus előállításban kijelölt diadikus szorzások és az összeadások elvégzésével kapjuk.

A tenzor mátrixának oszlopai az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ képvektorok koordinátáit tartalmazzák. A mátrix első sorában a képvektorok x koordinátái, a második sorban a képvektorok y koordinátái, a harmadik sorban a képvektorok z koordinátái állnak.

1.7. Gyakorló feladatok mátrixokra, tenzorokra

1.7.1. feladat: Mátrix műveletek

Adott: $\left[\underline{\underline{A}}\right]=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 7 & 3\end{bmatrix}$, $\left[\underline{\underline{B}}\right]=\begin{bmatrix}-12 & 4\\ -6 & 3\end{bmatrix}$.

Feladat:

a) Az $\underline{\underline{A}}^T$ és $\underline{\underline{B}}^T$ transzponált mátrixok meghatározása.

b) Az $\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}$ összegmátrix és az $\underline{\underline{A}}-\underline{\underline{B}}$ különbségmátrix meghatározása.

c) Az $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ szorzatmátrix meghatározása.

Kidolgozás:

a) Az $\underline{\underline{A}}^T$ és $\underline{\underline{B}}^T$ transzponált mátrixok meghatározása:

$$\underline{\underline{A}}^T=\begin{bmatrix}2 & 7\\ -4 & 3\end{bmatrix},\quad \underline{\underline{B}}^T=\begin{bmatrix}-12 & -6\\ 4 & 3\end{bmatrix}.$$

b) Az $\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}$ összegmátrix és az $\underline{\underline{A}}-\underline{\underline{B}}$ különbségmátrix meghatározása:

$$\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 7 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-12 & 4\\ -6 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 0\\ 1 & 6\end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{A}}-\underline{\underline{B}}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 7 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-12 & 4\\ -6 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -8\\ 13 & 0\end{bmatrix}.$$

c) Az $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ szorzatmátrix meghatározása.

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 7 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-12 & 4\\ -6 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(-12)+(-4)(-6) & 2\cdot 4+(-4)3\\ 7(-12)+3(-6) & 7\cdot 4+3\cdot 3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-48 & -4\\ -102 & 37\end{bmatrix}.$$

1.7.2. feladat: Skaláris, diadikus és mátrix szorzás gyakorlása

Adott: $\vec{a}=(4\,\vec{e}_x+6\vec{e}_y-\vec{e}_z)$ m,

$\vec{b}=\left(-3\,\vec{e}_x+\vec{e}_y-\vec{e}_z\right)$ m,

$\vec{c}=\left(-2\vec{e}_y-6\,\vec{e}_z\right)$ m.

Feladat:

a) Az $\vec{a}\cdot\vec{b}$ és az $\vec{a}\circ\vec{b}$ szorzatok meghatározása.

b) Az $(\vec{a}\circ\vec{b})\cdot\vec{c}$ és a $\vec{c}\cdot(\vec{a}\circ\vec{b})$ szorzat meghatározása.

Kidolgozás:

a) Az $\vec{a}\cdot\vec{b}$ és az $\vec{a}\circ\vec{b}$ szorzatok meghatározása:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{bmatrix}4 & 6 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ -1\end{bmatrix}=4\,(-3)+6\cdot 1+(-1)\,(-1)=-5\ \mathrm{m}^2,$$

$$\vec{a}\circ\vec{b}=\left(4\,\vec{e}_x+6\vec{e}_y-\vec{e}_z\right)\circ\left(-3\,\vec{e}_x+\vec{e}_y-\vec{e}_z\right)=$$

$$=\Big[\left(-12\,\vec{e}_x-18\vec{e}_y+3\vec{e}_z\right)\circ\vec{e}_x+\left(4\,\vec{e}_x+6\vec{e}_y-\vec{e}_z\right)\circ\vec{e}_y+$$

$$+\left(-4\,\vec{e}_x-6\vec{e}_y+\vec{e}_z\right)\circ\vec{e}_z\Big]\ \mathrm{m}^2.$$

A szögletes zárójelben lévő diádok első szorzó tényezőinek koordinátái a tenzor mátrixának oszlopaiban jelennek meg:

$$\left[\vec{a}\circ\vec{b}\right]=\begin{bmatrix}4\\ 6\\ -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12 & 4 & -4\\ -18 & 6 & -6\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}\ \mathrm{m}^2.$$

b) Az $(\vec{a}\circ\vec{b})\cdot\vec{c}$ és a $\vec{c}\cdot(\vec{a}\circ\vec{b})$ szorzat meghatározása:

- Az értelmezés alapján:

$$(\vec{a}\circ\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\circ(\vec{b}\cdot\vec{c})=$$

$$=\left(4\,\vec{e}_x+6\vec{e}_y-\vec{e}_z\right)\circ\Big[\left(-3\,\vec{e}_x+\vec{e}_y-\vec{e}_z\right)\cdot\left(-2\vec{e}_y-5\,\vec{e}_z\right)\Big]=$$

$$=\left(4\,\vec{e}_x+6\vec{e}_y-\vec{e}_z\right)\circ\left[-2+5\right]=\left(12\,\vec{e}_x+18\vec{e}_y-3\vec{e}_z\right)\ \mathrm{m}^3,$$

- Mátrixszorzással:

$$\left[(\vec{a}\circ\vec{b})\right]\left[\vec{c}\right]=\begin{bmatrix}-12 & 4 & -4\\ -18 & 6 & -6\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -2\\ -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8+20\\ -12+30\\ 2-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\ 18\\ -3\end{bmatrix}\ \mathrm{m}^3.$$

A kétféleképp előállított eredmény természetesen megegyezik.

- Az értelmezés alapján:

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\circ\vec{b})=(\vec{c}\cdot\vec{a})\circ\vec{b}=$$

$$=\Big[\left(-2\vec{e}_y-5\,\vec{e}_z\right)\cdot\left(4\,\vec{e}_x+6\vec{e}_y-\vec{e}_z\right)\Big]\circ\left(-3\,\vec{e}_x+\vec{e}_y-\vec{e}_z\right)=$$

$$=\left[-12+5\right]\circ\left(-3\,\vec{e}_x+\vec{e}_y-\vec{e}_z\right)=(21\vec{e}_x-7\vec{e}_y+7\vec{e}_z)\,.$$

- Mátrixszorzással:

$$\left[\vec{c}\right]\left[(\vec{a}\circ\vec{b})\right]=\begin{bmatrix}0 & -2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-12 & 4 & -4\\ -18 & 6 & -6\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}(36-15) & (-12+5) & (12-5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21 & -7 & 7\end{bmatrix}\mathrm{m}^3\,.$$

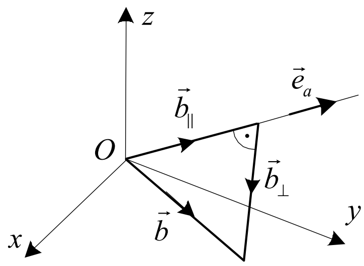
A kétféleképp előállított eredmény természetesen megegyezik.

1.7.3. feladat: Vektor adott irányra merőleges összetevőjének meghatározása

Adott:

$\vec{b} = (20\,\vec{e}_x + 40\vec{e}_y - 30\vec{e}_z)$ m,

$\vec{e}_a = (0{,}8\vec{e}_y - 0{,}6\vec{e}_z)$,



Feladat:

a) A $\vec{b}$ vektor $\vec{e}_a$ egységvektorral párhuzamos $\vec{b}_{\|}$ összetevőjének meghatározása.

b) A $\vec{b}$ vektor $\vec{e}_a$ egységvektorra merőleges $\vec{b}_{\perp}$ összetevőjének meghatározása kétszeres vektoriális szorzással.

c) A $\vec{b}$ vektor $\vec{e}_a$ egységvektorra merőleges $\vec{b}_{\perp}$ összetevőjének meghatározása a kifejtési szabállyal.

Kidolgozás:

a) A $\vec{b}_{\|}$ párhuzamos összetevő meghatározása:

$$\vec{b}_{\|} = (\vec{e}_a \cdot \vec{b})\,\vec{e}_a = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0{,}8 & -0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ -30 \end{bmatrix} \right) \vec{e}_a = (32 + 18)\,\vec{e}_a = 50\,\vec{e}_a$$

$$\vec{b}_{\|} = 50\,\vec{e}_a = 50(0{,}8\vec{e}_y - 0{,}6\vec{e}_z) = (4\vec{e}_y - 30\vec{e}_z)\,\text{m}.$$

b) A $\vec{b}_{\perp}$ merőleges összetevő meghatározása kétszeres vektoriális szorzással:

$$\vec{b}_{\perp} = (\vec{e}_a \times \vec{b}) \times \vec{e}_a\,.$$

$$(\vec{e}_a \times b) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0{,}8 & -0{,}6 \\ 20 & 40 & -30 \end{vmatrix} = \vec{e}_x(-24 + 24) - \vec{e}_y(12) + \vec{e}_z(-16)\,,$$

$$(\vec{e}_a \times \vec{b}) \times \vec{e}_a = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & -12 & -16 \\ 0 & 0{,}8 & -0{,}6 \end{vmatrix} = \vec{e}_x(7{,}2 + 12{,}8) - \vec{e}_y(0) + \vec{e}_z(0)\,.$$

$$\vec{b}_{\perp} = (\vec{e}_a \times \vec{b}) \times \vec{e}_a = (20\,\vec{e}_x)\,\text{m}.$$

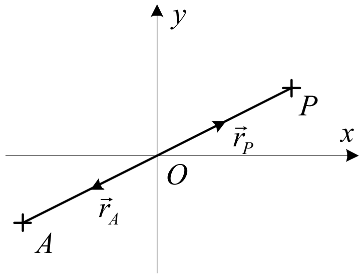
c) A $\vec{b}_{\perp}$ összetevő meghatározása a kifejtési szabállyal:

$$\vec{b}_{\perp} = (\vec{e}_a \times \vec{b}) \times \vec{e}_a = \vec{b}(\vec{e}_a \cdot \vec{e}_a) - \vec{e}_a(\vec{b} \cdot \vec{e}_a) = \vec{b} - \vec{b}_{\|}\,.$$

$$\vec{b}_{\perp} = \vec{b} - \vec{b}_{\|} = (20\vec{e}_x + 40\vec{e}_y - 30\vec{e}_z) - (40\vec{e}_y - 30\,\vec{e}_z) = (20\vec{e}_x)\,\text{m}.$$

1.7.4. feladat: Tenzor előállítása

<u>Adott:</u> $\vec{r}_P = (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y)$ m.



<u>Feladat:</u>

a) Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítása, amely az *xy* sík helyvektoraiból a helyvektoroknak a koordináta-rendszer *O* kezdőpontjára tükrözött vektorait állítja elő.

b) Meghatározni azt az $\vec{r}_A$ vektort, amely az $\vec{r}_P$ vektor origóra vett tükörképe.

<u>Kidolgozás:</u>

a) A tenzor előállítása:

Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$\vec{e}_x \;\rightarrow\; \vec{a} = -\vec{e}_x$, $\qquad$ $\vec{e}_y \;\rightarrow\; \vec{b} = -\vec{e}_y$.

A két értékpárból a tenzor: $\quad T = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y)$.

A tenzor mátrixa: $\left[\underline{\underline{T}}\right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

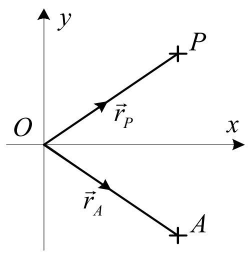
b) Az origóra tükrözött $\vec{r}_A$ képvektor meghatározása:

$$\vec{r}_A = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$\vec{r}_A = (-4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y) \quad$ m.

1.7.5. feladat: Tenzor előállítása

<u>Adott:</u> $\vec{r}_P = (4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y)$ m.



<u>Feladat:</u>

a) Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítása, amely az *xy* sík helyvektoraiból a helyvektoroknak a koordináta-rendszer *x* tengelyére tükrözött vektorait állítja elő.

b) Meghatározni azt az $\vec{r}_A$ vektort, amely az $\vec{r}_P$ vektor *x* tengelyre vett tükörképe.

<u>Kidolgozás:</u>

a) A tenzor előállítása:

Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = \vec{e}_x$, $\qquad \vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = -\vec{e}_y$.

A két értékpárból a tenzor: $\quad T = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y)$

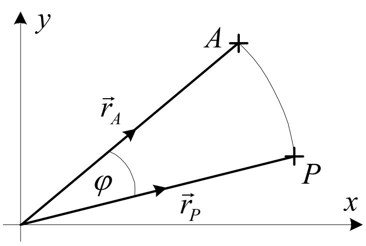
A tenzor mátrixa: $\left[\underline{\underline{T}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) Az x tengelyre tükrözött $\vec{r}_A$ képvektor meghatározása:

$$\vec{r}_A = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$\vec{r}_A = (4\vec{e}_x - 3\vec{e}_y)$ m .

1.7.6. feladat: Tenzor előállítása



Adott: $\varphi = 30^\circ$, $\vec{r}_P = (4\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ m.

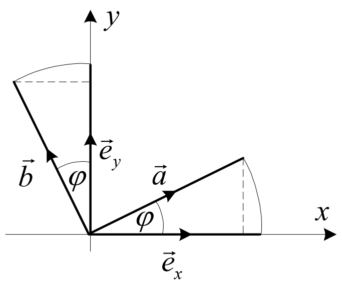
Feladat:

a) Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítása, amely az xy sík helyvektoraiból a helyvektorok z tengely körül φ szöggel elforgatott vektorait állítja elő.

b) Meghatározni azt az $\vec{r}_A$ vektort, amelyet az $\vec{r}_P$ vektor φ szöggel történő elforgatásával kapunk.

Kidolgozás:

a) A tenzor előállítása:



Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = (\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y)$,

$\vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = (-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y)$.

A két értékpárból a tenzor:

$T = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y)$

A diádok kiszámítása:

$$\left[\vec{a} \circ \vec{e}_x\right] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & 0 \\ a_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left[\vec{b} \circ \vec{e}_y\right] = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_x \\ 0 & b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\varphi \\ 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

A tenzor mátrixa: $\left[\underline{\underline{T}}\right] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}866 \end{bmatrix}$.

b) Az elforgatott $\vec{r}_A$ vektor meghatározása:

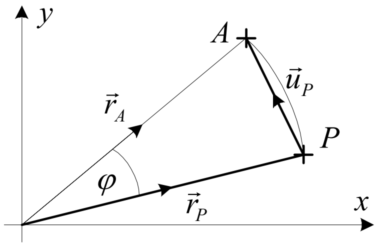
$$\vec{r}_A = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,5 \\ 0,5 & 0,866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,964 \\ 2,866 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_A = (2,964\vec{e}_x + 2,866\vec{e}_y) \quad \text{m}.$$

1.7.7. feladat: Tenzor előállítása

<u>Adott:</u>

$\varphi = 45^\circ$, $\vec{r}_P = (5\vec{e}_x + 2\vec{e}_y)$ m.



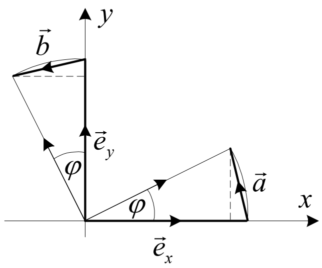
<u>Feladat:</u>

a) Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítása, amely az *xy* sík helyvektoraihoz a helyvektorok *z* tengely körül φ szöggel történő elforgatásakor a helyvektorok végpontjainak elmozdulás vektorait rendeli hozzá.

b) Meghatározni $\vec{r}_P$ vektor végpontjának $\vec{u}_P$ elmozdulás vektorát a φ szöggel történő elforgatásnál.

<u>Kidolgozás:</u>

a) A $\underline{\underline{T}}$ tenzor előállítása:



Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$$\vec{e}_x \;\rightarrow\; \vec{a} = -(1-\cos\varphi)\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y ,$$

$$\vec{e}_y \;\rightarrow\; \vec{b} = -\sin\varphi\,\vec{e}_x - (1-\cos\varphi)\vec{e}_y .$$

A két értékpárból a tenzor:

$$T = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y) .$$

A tenzor mátrixa:

$$\left[\underline{\underline{T}}\right] = \begin{bmatrix} (\cos\varphi - 1) & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & (\cos\varphi - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,293 & -0,707 \\ 0,707 & -0,293 \end{bmatrix}.$$

b) Az $\vec{u}_P$ elmozdulásvektor meghatározása:

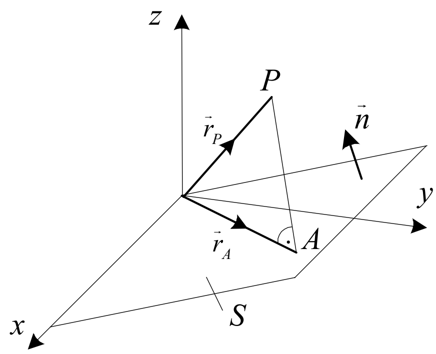
$$\vec{u}_P = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} -0,293 & -0,707 \\ 0,707 & -0,293 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,879 \\ 2,949 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_P = (-2,879\vec{e}_x + 2,949\vec{e}_y) \quad \text{m}.$$

1.7.8. feladat: Tenzor előállítása

Adott: $\vec{n} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_z)$, $\vec{r}_P = (5\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 10\vec{e}_z)$ m.

Feladat:



a) Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítása, amely a tér minden helyvektorához a helyvektoroknak az $\vec{n}$ normálisú *S* síkba eső vetületvektorát rendeli hozzá.

b) Meghatározni $\vec{r}_P$ vektornak az adott $\vec{n}$ normálisú *S* síkba eső $\vec{r}_A$ vetületvektorát.

A vetületvektort úgy kapjuk, hogy az $\vec{r}_P$ vektor végpontját merőlegesen vetítjük az *S* síkra.

Kidolgozás:

a) A $\underline{\underline{T}}$ tenzor előállítása:

A tetszőleges $\vec{v}$ vektor *S* síkba eső $\vec{w}$ vetületvektora:

$$\vec{w} = \vec{n} \times (\vec{v} \times \vec{n}) = \vec{v}\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{n})}_{=1} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v}) = \vec{v} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v}).$$

Térbeli esetben a tenzort három értékpárja határozza meg:

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = \vec{e}_x - \vec{n}\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{e}_x)}_{=0} = \vec{e}_x,$$

$$\vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = \vec{e}_y - \vec{n}\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{e}_y)}_{=-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \vec{e}_y - \frac{\vec{n}}{\sqrt{2}} = \vec{e}_y - \frac{1}{2}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\vec{e}_z = \left(\frac{1}{2}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\vec{e}_z\right),$$

$$\vec{e}_z \rightarrow \vec{c} = \vec{e}_z - \vec{n}\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{e}_z)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \vec{e}_z + \frac{\vec{n}}{\sqrt{2}} = \vec{e}_z + \frac{1}{2}\vec{e}_y - \frac{1}{2}\vec{e}_z = \left(\frac{1}{2}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\vec{e}_z\right).$$

A három értékpárból a tenzor: $T = (\vec{a}\circ\vec{e}_x + \vec{b}\circ\vec{e}_y + \vec{c}\circ\vec{e}_z)$.

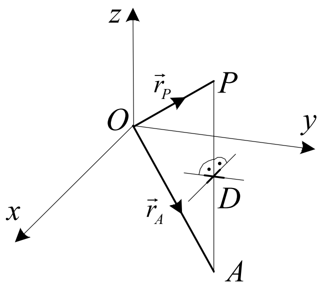
A tenzor mátrixa: $\left[\underline{\underline{T}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$.

b) Az $\vec{r}_P$ vektornak az adott $\vec{n}$ normálisú síkba eső $\vec{r}_A$ vetületvektorának meghatározása:

$$\vec{r}_A = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ m.}$$

$$\vec{r}_A = (5\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \text{ m.}$$

1.7.9. feladat: Tenzor előállítása



Adott: $\vec{r}_P = (3\,\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 6\vec{e}_z)$ m.

Feladat:

a) Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítása, amely a tér minden helyvektorához a helyvektoroknak az *xy* síkra vett tükörkép-vektorát rendeli hozzá.

b) Meghatározni $\vec{r}_P$ vektornak az *xy* síkra vett $\vec{r}_A$ tükörkép-vektorát.

A tükörkép-vektort a következőképpen kapjuk: Az $\vec{r}_P$ vektor végpontját merőlegesen vetítjük az *xy* síkra. A *D* pont a vetítő egyenes döféspontja az *xy* síkon.

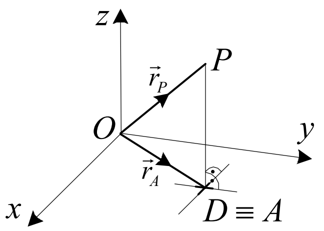
Megoldás:

a) A hozzárendelést megvalósító tenzor mátrixa:

$$\left[\underline{\underline{T}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Az $\vec{r}_A$ tükörkép-vektor: $\vec{r}_A = (3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 6\vec{e}_z)$ m.

1.7.10. feladat: Tenzor előállítása



Adott: $\vec{r}_P = (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 8\vec{e}_z)$ m.

Feladat:

a) Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítása, amely a tér minden helyvektorához a helyvektoroknak az *xy* síkba eső vetületvektorát rendeli hozzá.

b) Meghatározni $\vec{r}_P$ vektornak az *xy* síkba eső $\vec{r}_A$ vetületvektorát.

A vetületvektort úgy kapjuk, hogy az $\vec{r}_P$ vektor végpontját merőlegesen vetítjük az *xy* síkra. A *D* pont a vetítő egyenes döféspontja az *xy* síkon. A vetületvektor a *D* pontba mutató vektor.

Megoldás:

a) A hozzárendelést megvalósító tenzor mátrixa:

$$\left[\underline{\underline{T}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Az $\vec{r}_A$ vetületvektor: $\vec{r}_A = (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y)$ m.