2. ALAPFOGALMAK

A mechanika a fizika egyik (klasszikus) részterülete.

A mechanika tárgya: testek (anyagi pontok, anyagi pontrendszerek) helyzetváltoztató mozgásainak és az ezeket létrehozó hatásoknak (erőknek) a vizsgálata.

A vizsgált testek halmazállapota szerint beszélhetünk:
- szilárd halmazállapotú testek mechanikájáról és
- folyadékok és gázok mechanikájáról.

Az alkalmazott (mérnöki/műszaki) mechanika tárgya:

A mechanika általános törvényeinek és eljárásainak alkalmazása szilárd halmazállapotú testekből álló szerkezetek mérnöki feladatainak megoldására.

Test/szerkezet: az az objektum, amit vizsgálunk.

Az alkalmazott mechanika részterületei:

- *Statika:* a nyugalomban levő anyagi pontok és merev testek mechanikája.
- *Szilárdságtan:* a nyugalomban levő szilárd testek mechanikája.
- *Kinematika:* feladata az anyagi pontok és merev testek mozgásának leírása.
- *Dinamika:* feladata az anyagi pontok és merev testek mozgását létrehozó hatások (erők / nyomatékok) leírása.
- *Rezgéstan:* feladata az anyagi pontok, a merev és szilárd testek időben periodikusan változó erők / nyomatékok hatására létrejövő mozgásainak leírása.

Alapvető mérnöki mechanikai feladatok:

- *Tartós nyugalom biztosítása*
  Pl.: épületek, hidak, csővezetékek, tartályok, tartószerkezetek, stb.
- *Előírt mozgások biztosítása*
  Pl.. járművek, daruk, robotok, liftek, megmunkáló-gépek, stb.
- *Szerkezetek integritásának biztosítása (a gép, szerkezet biztonságosan üzemeljen)*
  Pl.. a híd ne omoljon össze, a gépkocsi kereke menet közben ne szakadjon le, stb.

A mérnöki mechanikában nem valóságos testeket (anyagi rendszereket), hanem modelleket vizsgálunk. A modellezés mindig a valóságos viszonyok leegyszerűsítését jelenti.

Test modellek:

A test modell olyan idealizált test, vagy testekből álló rendszer, amelynek a vizsgálat szempontjából lényeges tulajdonságait megtartjuk, a vizsgálat szempontjából lényegtelennek ítélt tulajdonságait pedig elhanyagoljuk.

- *Merev test:* olyan test modell, amelyben a bármely két pont távolsága állandó (a pontok távolsága erő hatására sem változik meg).
- *Szilárd test:* olyan test modell, amely alakváltozásra képes (a test pontjainak távolsága erő hatására megváltozhat).
- *Rúd:* olyan test modell, amelynek egyik mérete lényegesen nagyobb, mint a másik kettő; a rúd mechanikai modellje egy vonal, a rúd középvonala.

- *Anyagi pont:* olyan merev test, amelynek mozgása egyetlen pontjának mozgásával jellemezhető.
- *Anyagi pontrendszer:* anyagi pontok halmaza/összessége.

3. ERŐRENDSZEREK

3.1. Koncentrált erő megadása

Erő: egy testnek egy másik testre gyakorolt hatása.

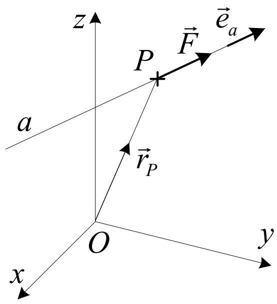
Koncentrált erő: ha egy test pontszerű érintkezéssel gyakorol hatást a másik testre.

A koncentrált erő vektor mennyiség: nagyság, irány, (előjel és mértékegység), támadáspont, hatásvonal jellemzi.

Mértékegysége: $N = kgm/s^2$ - Newton.

1 N az az erő, amely 1 kg tömegű testre hatva 1 m/s^2 gyorsulást hoz létre.

Kötött erővektor: az $\vec{F}$ koncentrált erőt a P ponthoz köütjük.



$\vec{F}$ - a koncentrált, kötött erővektor,

P - az erővektor támadáspontja,

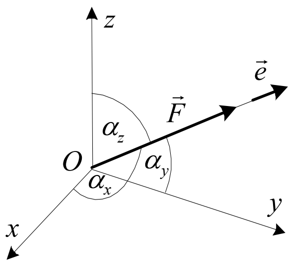
a - az erővektor hatásvonala,

$\vec{e}_a$ - a hatásvonal irány egységvektora.

A kötött koncentrált erővektor megadása támadáspontjának $\vec{r}_P$ helyvektorával és az $\vec{F}$ erővektorral történik.

Koncentrált erő megadása:

a) megadási lehetőség:



$\vec{F} = F\,\vec{e}$,

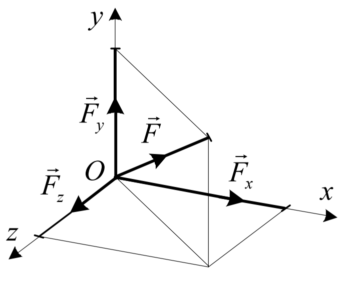
$\vec{e}$ - az erő irány egységvektora,

F – az erő $\vec{e}$ irányú koordinátája (előjeles skalár szám),

$\vec{e} = \cos\alpha_x \vec{e}_x + \cos\alpha_y \vec{e}_y + \cos\alpha_z \vec{e}_z$,

$|\vec{e}| = 1 = \cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z$.

b) megadási lehetőség:



$\vec{F} = \underbrace{F_x\vec{e}_x}_{\vec{F}_x} + \underbrace{F_y\vec{e}_y}_{\vec{F}_y} + \underbrace{F_z\vec{e}_z}_{\vec{F}_z}$,

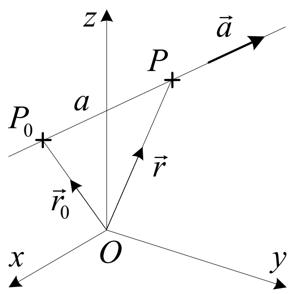
$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$.

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – a koordináta-rendszer *x, y, z* irányú egységvektorai,

$\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ – az erő összetevői, F_x, F_y, F_z – az erő skaláris koordinátái.

Az erő nagysága (abszolút értéke): $|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$.

Egyenes egyenlete:



P_0 - az egyenes egy rögzített pontja,
P - az egyenes futópontja,
$\vec{a}$ - az egyenes irányvektora ($|\vec{a}| \neq 1$).

Az egyenes egyenlete: $\vec{a} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{0}$,

$$\vec{a} \times \vec{r} \underbrace{- \vec{a} \times \vec{r}_0}_{\vec{b}} = \vec{0} .$$

Az egyenes egyenletének Plücker vektoros alakja: $\vec{a} \times \vec{r} + \vec{b} = \vec{0}$.

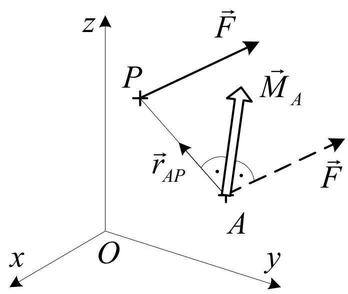
$\vec{a}, \vec{b}$ Plücker vektorok és $\vec{a} \perp \vec{b}$, azaz $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0}$.

$\vec{b}$ az $\vec{a}$ irányvektor nyomatéka a koordináta-rendszer O kezdőpontjára.

3.2. Erő nyomatéka

Nyomaték: az erő forgató hatása.

a) Erő pontra számított nyomatéka:



$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}$ - A pontra számított nyomaték vektor mennyiség.

A nyomaték nagysága: $|\vec{M}_A| = |\vec{r}_{AP}||\vec{F}| \sin\varphi$.

A nyomatékvektor merőleges az $\vec{r}_{AP}$ és az $\vec{F}$ vektorok által meghatározott síkra úgy, hogy az $\vec{r}_{AP}$, $\vec{F}$, és $\vec{M}_A$ jobbsodratú vektorhármast alkotnak (jobbkéz szabály).

A pontra számított nyomaték az erő egy adott pont körüli forgató hatása.

b) Erő tengelyre számított nyomatéka:

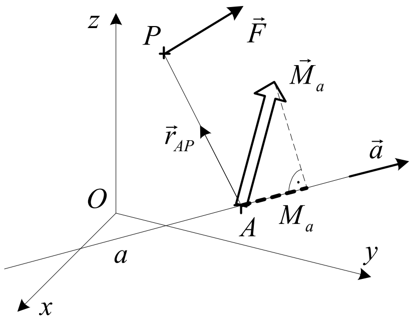
Tengely: irányított egyenes $\Rightarrow$ egy egyenesen két tengely vehető fel.

Tengely egyenlete: $\vec{a} \times \vec{r} + \vec{b} = \vec{0}$, ahol

$\vec{a}$ a tengely irányvektora és

$\vec{b}$ az $\vec{a}$ irányvektor nyomatéka a koordináta-rendszer O pontjára.

A tengelyre számított nyomaték az erő egy adott tengely körüli forgató hatása.



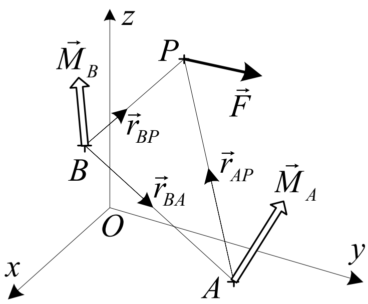
$M_a = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a$ - A tengelyre számított nyomaték (előjeles) skalár mennyiség.

$\vec{e}_a = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ - a tengely irány egységvektora.

A tengelyre számított nyomaték a tengely bármely A pontjára számított nyomatéknak a tengelyre eső (előjeles) vetülete.

A KR tengelyeire számított nyomatékok: $M_x = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_x$, $M_y = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_y$, $M_z = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_z$.

c) <u>Összefüggés két pontra számított nyomaték között:</u>



$\vec{r}_{BP} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{AP}$

A nyomaték értelmezéséből:

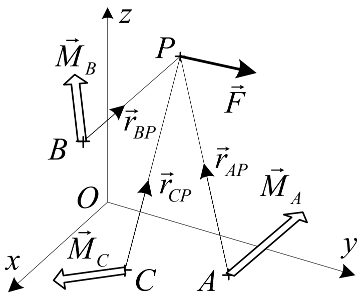
$$\vec{M}_B = \vec{r}_{BP} \times \vec{F} = \underbrace{\vec{r}_{AP} \times \vec{F}}_{\vec{M}_A} + \vec{r}_{BA} \times \vec{F}\,.$$

$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$, vagy $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{r}_{AB}$.

3.3. Erő nyomatéki vektortere

<u>Vektortér / vektormező</u>: a geometriai tér, vagy a vizsgált test minden pontjához hozzárendelünk egy vektort.

<u>Nyomatéki vektortér:</u>



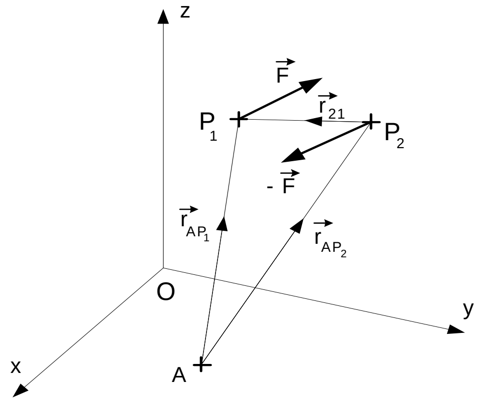
- Az $\vec{F}$ erő nyomatékát kiszámítjuk a tér minden egyes pontjára.
- A tér minden egyes pontjához hozzákötjük az adott pontra számított nyomatékvektort.
- Ezek a nyomatékvektorok alkotják az $\vec{F}$ erő nyomatéki vektorterét.

3.4. Koncentrált erőrendszerek

a) <u>Erőpár / koncentrált nyomaték:</u>

<u>Erőpár:</u> két azonos nagyságú ellentétes irányú, párhuzamos hatásvonalú erő.

Speciális erőrendszer: $\vec{F}_1 = \vec{F}$, $\vec{F}_2 = -\vec{F}$



$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP_1} \times \vec{F} - \vec{r}_{AP_2} \times \vec{F} = \underbrace{(\vec{r}_{AP_1} - \vec{r}_{AP_2})}_{=\vec{r}_{21}} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{AP_1} = \vec{r}_{AP_2} + \vec{r}_{21}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{21} \times \vec{F} = \vec{M}_B \, .$$

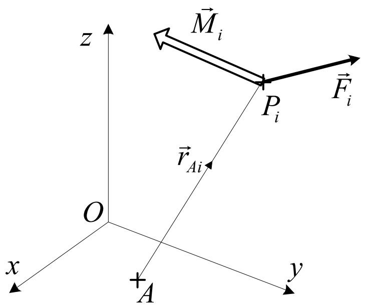
Erőpár nyomatéka a tér bármely pontjára ugyanannyi.

Erőpár homogén nyomatéki vektorteret hoz létre.

Az erőpár a tér bármely pontjához köthető, az erőpár vektor nem változik.

b) <u>Általános (szétszórt) erőrendszer:</u>

Az erőrendszer megadása: $\vec{F}_i (i = 1, 2, ...n)$, $\vec{M}_i (i = 1, 2, ...n)$.



Az erőrendszer általános esetben erőkből és erőpárokból (koncentrált nyomatékokból) állhat.

Az erőrendszer eredő erővektora: $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$.

Az erőrendszer eredő nyomatékvektora: $\vec{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{AP_i} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$.

c) <u>Erőrendszer eredő/redukált vektorkettőse:</u>

Az eredő vektorkettős: - eredő erő,
- megadott pontra számított eredő nyomaték.

Az eredő jelölése: $\left[\vec{F}(A), \vec{M}(A)\right]$.

$$\vec{F}(A) = \vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \, , \quad \vec{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{M}_i + \vec{r}_{AP_i} \times \vec{F}_i \right).$$

Az eredő vektorkettős a nyomatéki tér vonatkozásában egyértelműen jellemzi az erőrendszert.

A redukált vektorkettős bevezetésével az általános erőrendszer problémáját egy erő feladatára vezettük vissza:

- Az erőrendszer eredő erővektora a tér bármely pontjába redukálva ugyanannyi:

$$\vec{F}(A)=\vec{F}(B)=\vec{F}$$

- Az erőrendszer *B* pontra számított nyomatéka

$$\vec{M}_B=\vec{M}_A+\vec{F}\times\vec{r}_{AB}$$

Az A pontbeli redukált vektorkettős ismeretében az erőrendszernek a tér bármely *B* pontjába számított nyomaték meghatározható.

3.5. Erőrendszerek egyenértékűsége

a) Az egyenértékűség értelmezése:

Két erőrendszer egymással egyenértékű, ha azonos nyomatéki vektorteret hoznak létre.

Jelölés: $\underbrace{(E')}_{\text{egyik ER}} \overset{M}{=} \underbrace{(E'')}_{\text{másik ER}}$ $\overset{M}{=}$ - az erőrendszerek közötti egyenlőség a nyomatéki tér vonatkozásában áll fenn.

A két erőrendszernek a tér minden egyes pontjára számított nyomatéka ugyanaz a vektor.

b) Az egyenértékűség feltételei (kritériumai):

Két erőrendszer egyenértékűsége három, egymástól független feltétel (rendszer) teljesülése esetén áll fenn. Ezek közül bármelyik feltétel teljesülése elegendő az egyenértékűség fennállásához.

1. $\vec{F}'=\vec{F}''$, $\vec{M}'_A=\vec{M}''_A$. — Az A pont a tér egy tetszőleges, rögzített pontja.

2. $\vec{M}'_A=\vec{M}''_A$, $\vec{M}'_B=\vec{M}''_B$, $\vec{M}'_C=\vec{M}''_C$. — Az A, B, C a tér három, nem egy egyenesre eső (nem kolineáris) pontja

3. $M'_i=M''_i$, (i=1,2, …,6) — Hat tetszőleges, de lineárisan független tengelyre számított nyomaték egyenlő

A lineáris függetlenség definícióját később adjuk meg.

Lineárisan független például: - tetraéder oldalélei,
- háromszög alapú hasáb oldalélei.

A kritériumokat szokás a statika egyenleteinek is nevezni.

c) A kritériumok bizonyítása:

1. kritérium: $\vec{F}'=\vec{F}''$, $\vec{M}'_A=\vec{M}''_A$.

Kérdés: ebből következően fennáll-e a tér bármely B pontjára $\vec{M}'_B=\vec{M}''_B$?

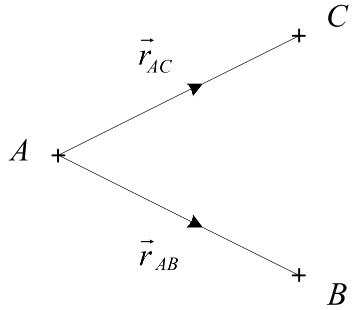
Bizonyítás:

$$\left.\begin{aligned}\vec{M}_B{}'&=\vec{M}_A{}'+\vec{F}'\times\vec{r}_{AB}\\ \vec{M}_B{}''&=\underbrace{\vec{M}_A{}''}_{\vec{M}'_A}+\underbrace{\vec{F}''}_{\vec{F}'}\times\vec{r}_{AB}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \vec{M}_B{}'=\vec{M}_B{}''.$$

Az 1. kritériumból: $\vec{F}' = \vec{F}''$ és $\vec{M}'_A = \vec{M}''_A$.

Mivel B a tér bármely pontja lehet, ezért az 1. kritérium egyenleteinek teljesülése elegendő az egyenértékűség biztosításához.

<ins>2. kritérium:</ins> $\vec{M}'_A = \vec{M}''_A$,
$\vec{M}'_B = \vec{M}''_B$,
$\vec{M}'_C = \vec{M}''_C$.



<ins>Kérdés:</ins> ennek a három vektoregyenletnek a teljesülése elegendő-e az egyenértékűséghez?

<ins>Bizonyítás:</ins>

$$\left.\begin{aligned} \vec{M}_B' &= \vec{M}_A' + \vec{F}' \times \vec{r}_{AB} \\ \vec{M}_B'' &= \vec{M}_A' + \vec{F}'' \times \vec{r}_{AB} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \vec{M}_C' &= \vec{M}_A' + \vec{F}' \times \vec{r}_{AC} \\ \vec{M}_C'' &= \vec{M}_A'' + \vec{F}'' \times \vec{r}_{AC} \end{aligned}\right\}$$

Az egyenleteket egymásból kivonva és a 2. kritérium egyenleteit figyelembe véve:

$$\vec{0} = \vec{0} + \left(\vec{F}' - \vec{F}''\right) \times \vec{r}_{AB}, \qquad \vec{0} = \vec{0} + \left(\vec{F}' - \vec{F}''\right) \times \vec{r}_{AC}.$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\vec{F}' - \vec{F}''\right) \parallel \vec{r}_{AB}, \qquad \left(\vec{F}' - \vec{F}''\right) \parallel \vec{r}_{AC}.$$

Mivel $\vec{r}_{AB}$ nem $\parallel \vec{r}_{AC}$ (mert az A, B, C pontok nem esnek egy egyenesre) ezért az $\left(\vec{F}' - \vec{F}''\right)$ csak akkor lehet párhuzamos mindkettővel, ha zérus vektor.

$$\vec{F}' - \vec{F}'' = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}' = \vec{F}''.$$

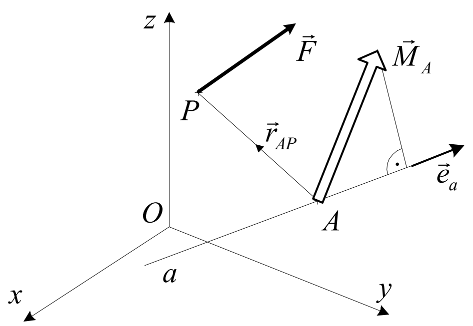
Ezzel a problémát visszavezettük az 1. kritériumra: $\vec{F}' = \vec{F}''$, $\vec{M}'_A = \vec{M}''_A$.

<ins>3. kritérium:</ins> $M'_i = M''_i$, (i=1,2, …,6).

<ins>Kérdés:</ins> a fenti hat skalár egyenlet teljesülése biztosítja-e az erőrendszerek egyenértékűségét.

<ins>Bizonyítás</ins>:

Először átalakítjuk a tengelyre számított nyomaték összefüggését:



A tengely egyenlete: $\vec{a} \times \vec{r} + \vec{b} = \vec{0}$

A tengelyre számított nyomaték:

$$M_a = \vec{e}_a \cdot \vec{M}_A = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \vec{M}_A = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \left(\vec{M}_O + \vec{F} \times \vec{r}_{OA}\right).$$

A skaláris szorzást elvégezve:

$$M_a = \frac{1}{|\vec a|}\Big[\vec a\cdot\vec M_O + \underbrace{\vec a\cdot\left(\vec F\times\vec r_{OA}\right)}_{\vec F\cdot\underbrace{(\vec r_{OA}\times\vec a)}_{\vec b}}\Big] \quad = \quad \frac{1}{|\vec a|}\left(\vec a\cdot\vec M_O + \vec F\cdot\vec b\right).$$

A hat tengely egyenlete:

$$\vec a_i\times\vec r + \vec b_i = \vec 0, \qquad \vec a_i \neq 0, \qquad \vec a_i\cdot\vec b_i = 0, \qquad \left(i = 1,2,3,4,5,6\right).$$

A tengelyre számított nyomatékok:

$$M'_{ai} = \frac{1}{|\vec a_i|}\left(\vec a_i\cdot M'_O + \vec b_i\cdot\vec F'\right), \qquad M''_{ai} = \frac{1}{|\vec a_i|}\left(\vec a_i\cdot M''_O + \vec b_i\cdot\vec F''\right)$$

3. kritérium: $M'_{ai} = M''_{ai}$.

A tengelyre számított nyomatékokat behelyettesítve és egy oldalra rendezve:

$$\vec a_i\cdot\left(\vec M'_O - \vec M''_O\right) + \vec b_i\cdot\left(\vec F' - \vec F''\right) = 0\,.$$

A zárójelben álló mennyiségek koordinátáinak jelölése:

$$\vec M'_O - \vec M''_O = M_x\vec e_x + M_y\vec e_y + M_z\vec e_z\,,$$

$$\vec F' - \vec F'' = F_x\vec e_x + F_y\vec e_y + F_z\vec e_z\,.$$

A jelölést behelyettesítve a kritériumba, az

$$\begin{aligned}
a_{1x}M_x + a_{1y}M_y + a_{1z}M_z + b_{1x}F_x + b_{1y}F_y + b_{1z}F_z &= 0,\\
a_{2x}M_x + a_{2y}M_y + a_{2z}M_z + b_{2x}F_x + b_{2y}F_y + b_{2z}F_z &= 0,\\
a_{3x}M_x + a_{3y}M_y + a_{3z}M_z + b_{3x}F_x + b_{3y}F_y + b_{3z}F_z &= 0,\\
a_{4x}M_x + a_{4y}M_y + a_{4z}M_z + b_{4x}F_x + b_{4y}F_y + b_{4z}F_z &= 0,\\
a_{5x}M_x + a_{5y}M_y + a_{5z}M_z + b_{5x}F_x + b_{5y}F_y + b_{5z}F_z &= 0,\\
a_{6x}M_x + a_{6y}M_y + a_{6z}M_z + b_{6x}F_x + b_{6y}F_y + b_{6z}F_z &= 0
\end{aligned}$$

homogén lineáris algebrai egyenletrendszert kapjuk az $M_x, M_y, M_z, F_x, F_y, F_z$ ismeretlenekre. Keressük az $M_x = M_y = M_z = F_x = F_y = F_z = 0$ megoldást (triviális megoldást).

A triviális megoldás feltétele az, hogy a rendszer determinánsának zérusnak kell lennie:

$$\det\begin{vmatrix}
a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} & b_{1x} & b_{1y} & b_{1z}\\
a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} & b_{2x} & b_{2y} & b_{2z}\\
a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} & b_{3x} & b_{3y} & b_{3z}\\
a_{4x} & a_{4y} & a_{4z} & b_{4x} & b_{4y} & b_{4z}\\
a_{5x} & a_{5y} & a_{5z} & b_{5x} & b_{5y} & b_{5z}\\
a_{6x} & a_{6y} & a_{6z} & b_{6x} & b_{6y} & b_{6z}
\end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Ezzel a feltétellel értelmezzük hat tengely lineáris függetlenségét is.

Definíció: Hat tengely lineárisan független, ha Plücker vektorainak koordinátáit tartalmazó determináns nem zérus.

A homogén lineáris algebrai egyenletrendszer zérus (triviális) megoldása esetén:

$$\vec{M}'_O - \vec{M}''_O = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{M}'_O = \vec{M}''_O .$$

$$\vec{F}' - \vec{F}'' = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F}' = \vec{F}'' .$$

Ezzel 3. kritériumot is visszavezettük az 1. kritériumra, amit már bebizonyítottunk.

d) A statikai egyenletek jellege:

1. kritérium:

$$\underbrace{\begin{matrix} F'_x = F''_x \\ F'_y = F''_y \\ F'_z = F'' \end{matrix}}_{\text{vetületi egyenletek}} \qquad \underbrace{\begin{matrix} M'_{Ax} = M''_{Ax} \\ M'_{Ay} = M''_{Ay} \\ M'_{Az} = M''_{Az} \end{matrix}}_{\text{nyomatéki egyenletek}}$$

6 db. független skalár egyenlet.

2. kritérium:

$$\vec{M}'_A = \vec{M}''_A , \quad \vec{M}'_B = \vec{M}''_B , \quad \vec{M}'_C = \vec{M}''_C .$$

9 db. skalár egyenlet, de ebből csak 6 db. lineárisan független.

3. kritérium:

$$M'_i = M''_i , \quad \left(i = 1,2,3,4,5,6\right).$$

6 db. független skalár egyenlet.

3.6. Erőrendszer egyensúlya

a) Az egyensúly értelmezése:

Egy erőrendszer egyensúlyi, ha zérus nyomatéki vektorteret hoz létre.

$$\left(E\right) \overset{M}{=} \left(0\right)$$

Az erőrendszernek a tér minden egyes pontjára számított nyomatékvektora zérus.

b) Az egyensúly feltételei (kritériumai):

Erőrendszer egyensúlya három, egymástól független feltétel (rendszer) teljesülése esetén áll fenn. Ezek közül bármelyik feltétel teljesülése elegendő az egyenértékűség fennállásához.

1. $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{M}_A = \vec{0}$. — Az A pont a tér egy tetszőleges, rögzített pontja.

2. $\vec{M}_A = \vec{0}$, $\vec{M}_B = \vec{0}$, $\vec{M}_C = \vec{0}$. — Az A, B, C a tér három, nem egy egyenesre eső (nem kolineáris) pontja

3. $M_i = 0$, (i=1,2, …,6) — Hat tetszőleges, de lineárisan független tengelyre számított nyomaték egyenlő