

MECHANIKA-SZILÁRDSÁGTAN

3. hét gyakorlati anyaga

(kidolgozta : dr. Nagy Zoltán egy.adjunktus,
Bojtár Gergely egy.tanársegéd)

3.1. feladat : Szilárd test P pontjának feszültségi állapota

Adott : Ismert egy szilárd test P pontjának feszültségi állapota, valamint az $\vec{n}$ és $\vec{m}$ irány egységvektorok.

$$\underline{\underline{F}}_P = \begin{bmatrix} -40 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & -30 \\ 0 & -30 & 60 \end{bmatrix} \text{ MPa}, \quad \vec{n} = \left(\sqrt{2}/2 \vec{i} + \sqrt{2}/2 \vec{j} \right),$$

$$\vec{m} = \left(-\sqrt{2}/2 \vec{i} + \sqrt{2}/2 \vec{j} \right).$$

Feladat : a) Írja fel a P pontbeli x , y és z normálisú elemi felületen fellépő $\vec{\rho}_x$, $\vec{\rho}_y$ és $\vec{\rho}_z$ feszültségvektorokat.

b) Határozza meg az $\vec{n}$ normálisú elemi felületen fellépő σ_n normálfeszültséget !

c) Határozza meg az $\vec{m}$ normálisú elemi felületen ébredő $\vec{n}$ irányú τ_{nm} csúsztatófeszültséget !

d) Szemléltesse a feszültségi állapotot a P elemi környezetéből kiragadott elemi kockán !

a) A feszültségi tenzor diadikus alakja :

$$\underline{\underline{F}}_P = \vec{\rho}_x \circ \vec{i} + \vec{\rho}_y \circ \vec{j} + \vec{\rho}_z \circ \vec{k},$$

az egyes feszültségvektorok pedig :

$$\vec{\rho}_x = (-40\vec{i} + 20\vec{j}) \text{ MPa},$$

$$\vec{\rho}_y = (20\vec{i} - 30\vec{k}) \text{ MPa},$$

$$\vec{\rho}_z = (-30\vec{j} + 60\vec{k}) \text{ MPa}.$$

b) Az $\vec{n}$ normálisú elemi felületen fellépő σ_n normálfeszültség

$$\vec{\rho}_n = [\underline{\underline{F}}_P] \cdot \vec{n} \Rightarrow \vec{\rho}_n = \begin{bmatrix} -40 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & -30 \\ 0 & -30 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14,142 \\ 14,142 \\ -21,213 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

$$\sigma_n = \vec{\rho}_n \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} -14,142 & 14,142 & -21,213 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ MPa}.$$

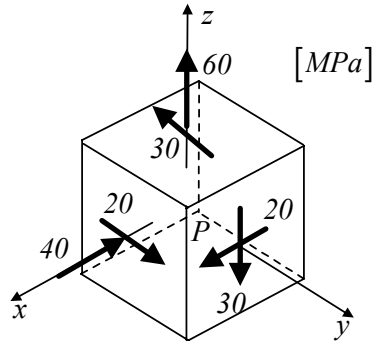
c) Az $\vec{m}$ normálisú elemi felületen ébredő $\vec{n}$ irányú τ_{nm} csúsztatófeszültség :

$$\vec{\rho}_m = [\underline{\underline{F}}_P] \cdot \vec{m},$$

$$\vec{\rho}_m = \begin{bmatrix} -40 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & -30 \\ 0 & -30 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42,426 \\ -14,142 \\ -21,213 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

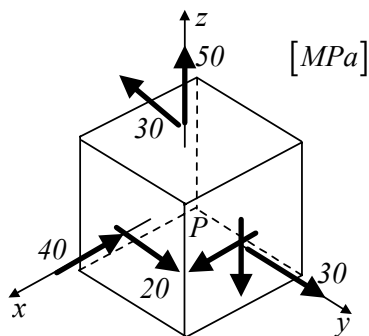
$$\tau_{nm} = \vec{\rho}_m \cdot \vec{n} = [42,426 \quad -14,142 \quad -21,213] \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = 20 \text{ MPa.}$$

d) A feszültségi állapot ábrázolása elemi kockán :



3.2. feladat : Szilárd test P pontjának feszültségi állapota

Adott : Ismert egy szilárd test P pontjának feszültségi állapota az elemi kockán.



Feladat : a) Határozza meg az P pontbeli σ_x, σ_y és σ_z normál feszültség, valamint τ_{xy}, τ_{yz} és τ_{xz} csúsztatófeszültség koordinátákat.
b) Írja fel a P pontbeli feszültségi tenzort !

a) A σ és τ feszültség koordináták:

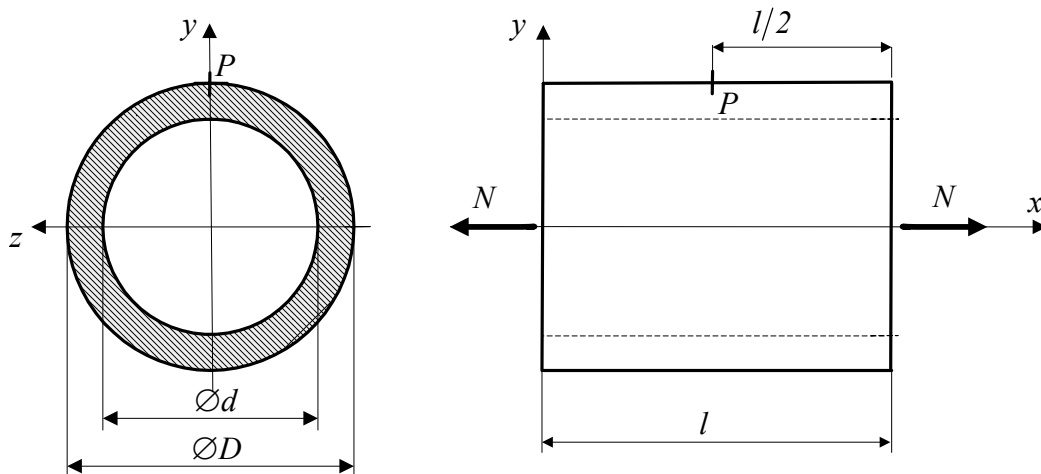
$$\sigma_x = -40 \text{ MPa} \quad , \quad \sigma_y = 30 \text{ MPa} \quad , \quad \sigma_z = 50 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 20 \text{ MPa} \quad , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = -30 \text{ MPa} \quad , \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0 \text{ MPa}.$$

b) A P pontbeli feszültség tenzor :

$$\left[\underline{\underline{F}}_P \right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 20 & 0 \\ 20 & 30 & -30 \\ 0 & -30 & 50 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

3.3. feladat : Vastagfalú cső húzása



Adott: $l = 40 \text{ mm}$, $d = 10 \text{ mm}$, $D = 20 \text{ mm}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0,33$, $N = 4000 \text{ N}$.

Feladat: a) A feszültségi tenzor meghatározása a P pontban.

b) A P pontbeli feszültségi állapot szemléltetése elemi kockán.

c) Az alakváltozási tenzor meghatározása a P pontban.

d) A P pont alakváltozási állapotának szemléltetése elemi triéderen.

e) A cső Δl_x hosszváltozásának meghatározása.

f) A cső ΔD külső átmérő változásának meghatározása.

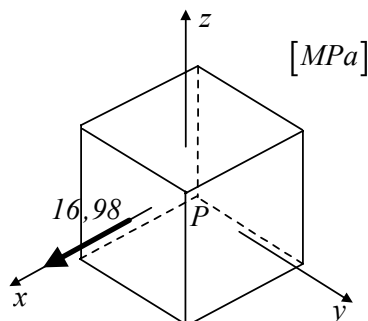
a) A feszültségi tenzor meghatározása a P pontban :

A szilárdságtani állapot a rúdban homogén

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{N}{\frac{(D^2 - d^2)\pi}{4}} = \frac{4000}{\frac{(20^2 - 10^2)\pi}{4}} = 16,98 \text{ MPa}.$$

$$[F]_P = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

b) A P pontbeli feszültségi állapot szemléltetése elemi kockán :



c) Az alakváltozási tenzor meghatározása a P pontban :

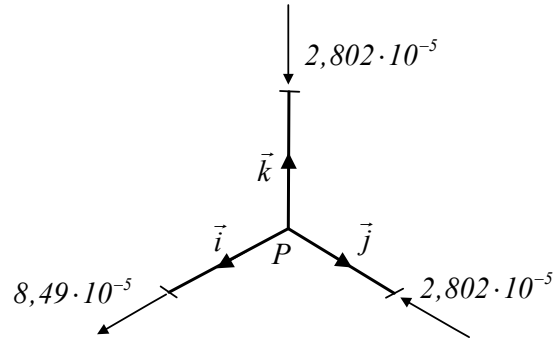
$$\text{Hosszirányú fajlagos nyúlás : } \sigma_x = E \varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{16,98}{2 \cdot 10^5} = 8,49 \cdot 10^{-5}.$$

$$\text{Keresztirányú fajlagos nyúlás : } \varepsilon_k = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = (-0,33) \cdot 8,49 \cdot 10^{-5} = -2,802 \cdot 10^{-5}.$$

A P pontbeli alakváltozási tenzor :

$$[A_P] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,49 & 0 & 0 \\ 0 & -2,802 & 0 \\ 0 & 0 & -2,802 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}.$$

d) A P pont alakváltozási állapotának szemléltetése az elemi triéderen :



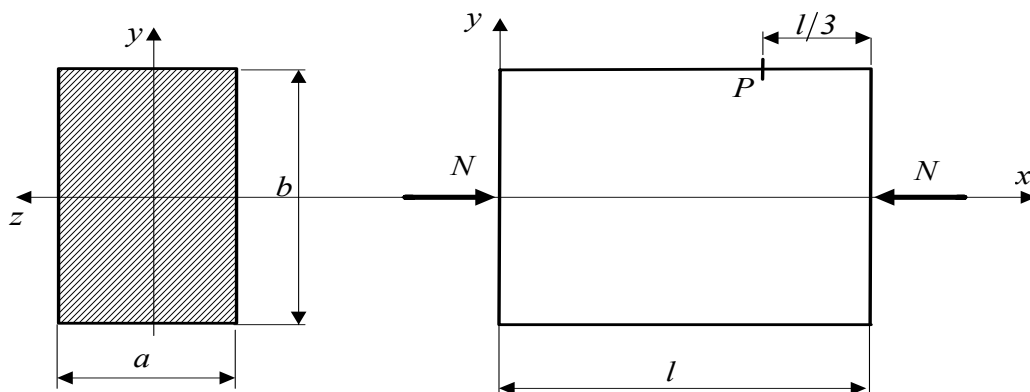
e) A cső Δl_x hosszváltozásának meghatározása :

$$\text{Az } x \text{ irányú fajlagos nyúlásból : } \varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l} \Rightarrow \Delta l_x = l \varepsilon_x = 40 \cdot (8,49 \cdot 10^{-5}) = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ mm.}$$

f) A cső ΔD külső átmérő változásának meghatározása :

$$\varepsilon_k = \frac{\Delta D}{D} \Rightarrow \Delta D = D \varepsilon_k = 20 \cdot (-2,802 \cdot 10^{-5}) = -5,6 \cdot 10^{-4} \text{ mm.}$$

3.4. feladat : Zömök rúd nyomása



Adott : $l = 60 \text{ mm}$, $a = 30 \text{ mm}$, $b = 40 \text{ mm}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$, $N = 6000 \text{ N}$.

Feladat: a) A feszültségi tenzor meghatározása a P pontban .

b) A P pontbeli feszültségi állapot szemléltetése elemi kockán.

c) Az alakváltozási tenzor meghatározása a P pontban.

d) A P pont alakváltozási állapotának szemléltetése elemi triéderen.

e) A prizmatikus rúd Δl_x hosszváltozásának meghatározása.

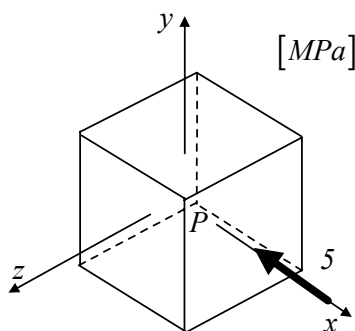
f) A keresztmetszet "a" jelű méretének Δa megváltozásának meghatározása.

g) A keresztmetszet "b" jelű méretének Δb megváltozásának meghatározása.

a) A feszültségi tenzor meghatározása a P pontban :

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{N}{ab} = \frac{-6000}{(30 \cdot 40)} = -5 \text{ MPa.} \Rightarrow [F]_P = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

b) A P pontbeli feszültségi állapot szemléltetése elemi kockán :



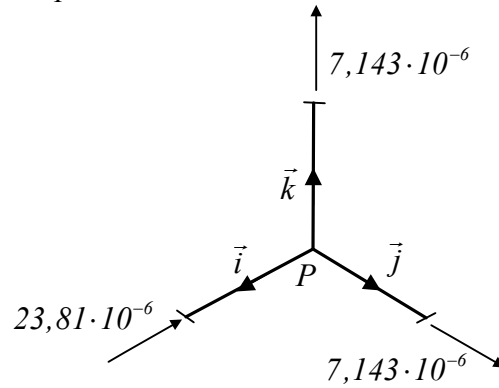
c) Az alakváltozási tenzor meghatározása a P pontban :

$$\text{Hosszirányú fajlagos nyúlás : } \sigma_x = E \varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{-5,0}{2,1 \cdot 10^5} = -2,381 \cdot 10^{-5}.$$

$$\text{Keresztirányú fajlagos nyúlás : } \varepsilon_k = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = (-0,3) \cdot (-2,381 \cdot 10^{-5}) = 7,143 \cdot 10^{-5}.$$

$$[A]_P = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23,81 & 0 & 0 \\ 0 & 7,143 & 0 \\ 0 & 0 & 7,143 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}.$$

d) A P pont alakváltozási állapotának szemléltetése elemi triéderen :



e) A prizmatikus rúd Δl_x hosszváltozásának meghatározása :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l} \Rightarrow \Delta l_x = \varepsilon_x l = (-23,81 \cdot 10^{-6}) \cdot 60 = -1,43 \cdot 10^{-3} \text{ mm.}$$

f) A keresztmetszet "a" jelű méretének Δa megváltozásának meghatározása :

$$\text{Keresztirányú fajlagos nyúlás : } \varepsilon_k = \varepsilon_z = \frac{\Delta a}{a} \Rightarrow \Delta a = \varepsilon_z a = (7,143 \cdot 10^{-6}) \cdot 30 = 2,14 \cdot 10^{-4} \text{ mm.}$$

g) A keresztmetszet "b" jelű méretének Δb megváltozásának meghatározása :

$$\text{Keresztirányú fajlagos nyúlás : } \varepsilon_k = \varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b} \Rightarrow \Delta b = \varepsilon_y b = (7,143 \cdot 10^{-6}) \cdot 40 = 2,86 \cdot 10^{-4} \text{ mm.}$$