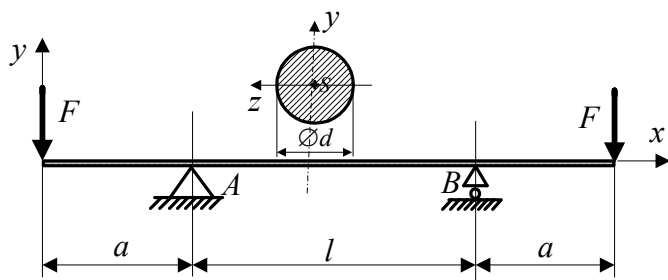


MECHANIKA-SZILÁRDSÁGTAN

5. hét gyakorlati anyaga

(kidolgozta : dr. Nagy Zoltán egy.adjunktus,
Bojtár Gergely egy.tanársegéd)

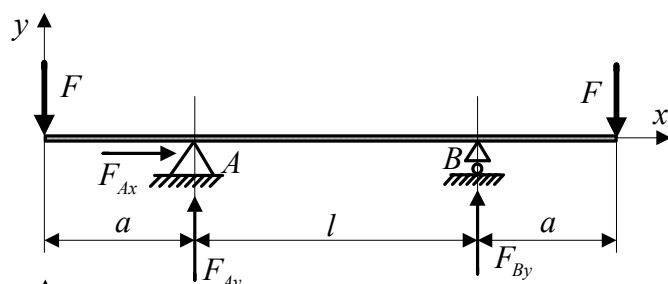
5.1. feladat : Kéttámaszú konzolos tartó szilárdságtani méretezése



Adott : $F = 200 \text{ kN}$, $a = 0,2 \text{ m}$, $l = 3 \text{ m}$.

$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_{\text{meg}} = 220 \text{ MPa}$.

Feladat : Szilárdságtani méretezés, $d = ?$



a) A tartó igénybevételi ábráinak megrajzolása,
a veszélyes keresztmetszet meghatározása.

Támasztó erőrendszer:

$$M_a = F_{By} l + F a - F(a + l) = 0,$$

$$F_{By} = F = 200 \text{ kN} (\uparrow).$$

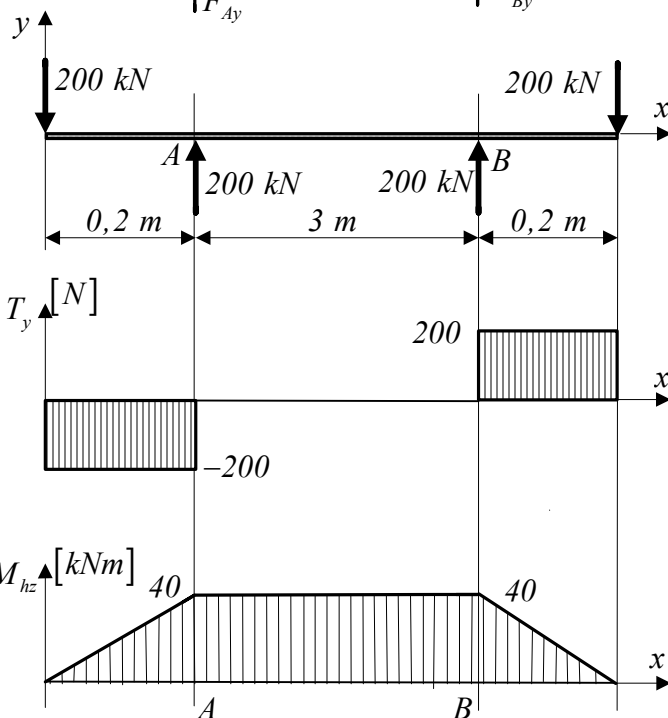
$$M_b = -F_{Ay} l + F(a + l) - F a = 0,$$

$$F_{Ay} = F = 200 \text{ kN} (\uparrow),$$

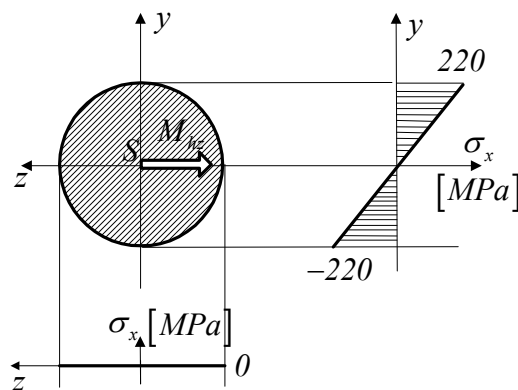
$$F_x = F_{Ax} = 0 \text{ N}.$$

$$M_{hz}(A) = 200 \cdot 0,2 = 40 \text{ kNm}.$$

Veszélyes keresztmetszet a tengely A és B jelű keresztmetszete között lévő összes keresztmetszet, így az A és B jelű keresztmetszet is.



b) A tartó szilárdságtani méretezése :



$$\sigma_{x \max} = \sigma_x(A) = \frac{|M_{hz \max}|}{K_z} \leq \sigma_{\text{meg}} \Rightarrow K_{z \text{ szüks}} = \frac{|M_{hz \max}|}{\sigma_{\text{meg}}},$$

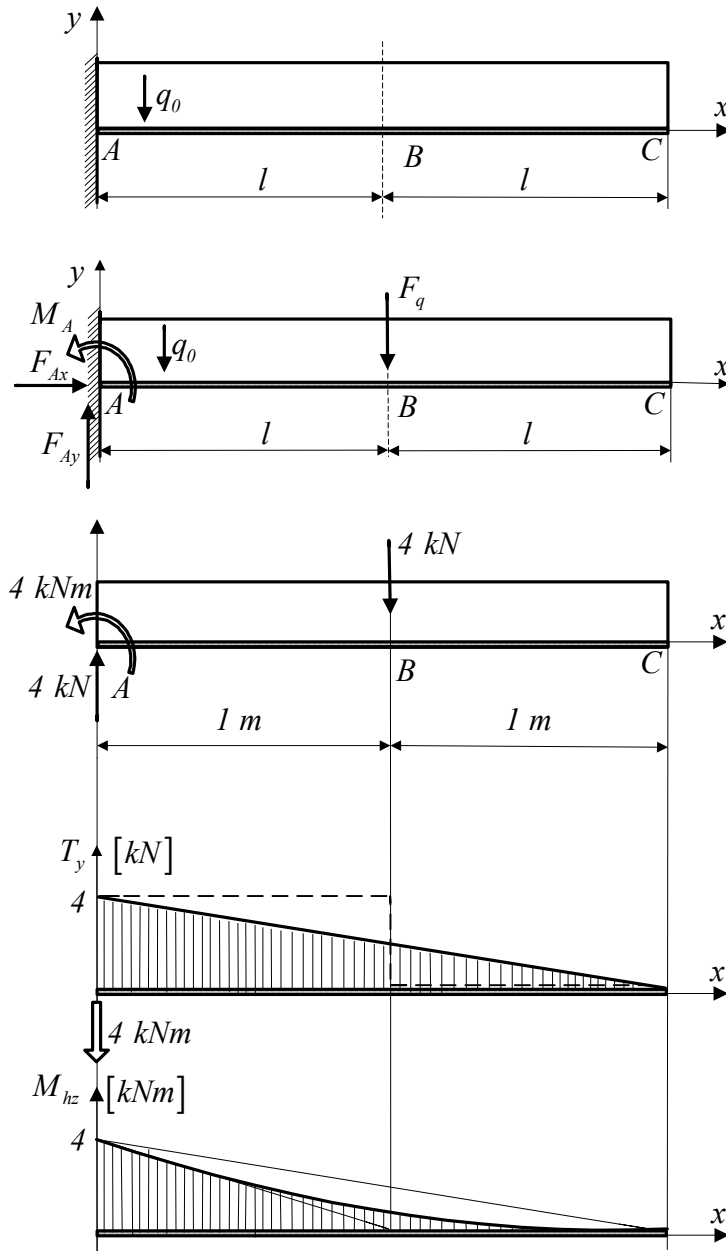
$$K_{z \text{ szüks}} = \frac{|M_{hz \max}|}{\sigma_{\text{meg}}} = \frac{40 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{220 \text{ N/mm}^2} = 181818,18 \text{ mm}^3.$$

$$K_{z \text{ szüks}} = \frac{d^3 \pi}{32} = 181818,18 \text{ mm}^3,$$

$$d_{\text{szüks}} = \sqrt[3]{\frac{K_{z \text{ szüks}} 32}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{181818,18 \cdot 32}{\pi}} = 122,8 \text{ mm},$$

$$d_{\text{szüks}} = 122,8 \text{ mm}.$$

5.2. feladat : Rugalmas szál differenciálegyenlete (lehajlás, szögelfordulás)



Adott : $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $I_z = 24 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$,
 $q_0 = 2 \text{ kN/m}$, $l = 1 \text{ m}$.

Feladat : a) A B és a C keresztmetszet S súlypontjának y irányú elmozdulásának (lehajlásának) meghatározása.
 b) A B és a C keresztmetszet z tengely körüli szögelfordulásának meghatározása.

Támasztó erőrendszer:

$$F_q = q_0 \cdot 2l = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \text{ kN} (\downarrow).$$

$$M_a = M_A - F_q \cdot l = 0,$$

$$M_A = F_q \cdot l = 4 \text{ kNm}.$$

$$F_y = F_{Ay} - F_q = 0,$$

$$F_{Ay} = F_q = 4 \text{ kN} (\uparrow),$$

$$F_x = F_{Ax} = 0.$$

Hajlítónyomaték egy tetszőleges keresztmetszetben :

$$M_{hz}(x) = M_A - F_A \cdot x + q_0 \cdot x \cdot \frac{x}{2},$$

$$M_{hz}(x) = 4 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^3 x + x^2 \quad (\text{Nm}).$$

a) A B és a C keresztmetszet S súlypontjának y irányú elmozdulásának (lehajlásának) meghatározása.

$$y'(x) = \int -\frac{M_{hz}(x)}{I_z E} dx,$$

$$y(x) = \int \left[\int -\frac{M_{hz}(x)}{I_z E} dx \right] dx =$$

$$= -\frac{1}{I_z E} \int \left[\int M_{hz}(x) dx \right] dx,$$

$$y(x) = -\frac{1}{4,8 \cdot 10^{10}} \int \left(4 \cdot 10^6 x - 2000 x^2 + \frac{x^3}{3} \right) dx =$$

$$y(x) = -\frac{1}{4,8 \cdot 10^{10}} \left(4 \cdot 10^6 \frac{x^2}{2} - 2000 \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + C_1 \right).$$

Peremfeltétel: a befalazásnál a lehajlás zérus
 $y(x=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$

$$y(x) = -\frac{1}{4,8 \cdot 10^{10}} \left(2 \cdot 10^6 x^2 - 2000 \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right).$$

A kérdéses metszetek y irányú lehajlása :

$$y_B = y(x=1000 \text{ mm}) = -29,51 \text{ mm} (\downarrow),$$

$$y_C = y(x=2000 \text{ mm}) = -83,33 \text{ mm} (\downarrow).$$

b) A B és a C keresztmetszet z tengely körüli φ_z szögelfordulásának meghatározása.

$$\varphi_z(x) = y'(x) = \int -\frac{M_{hz}(x)}{I_z E} dx,$$

$$\varphi_z(x) = -\frac{1}{4,8 \cdot 10^{10}} \left(4 \cdot 10^6 x - 2000 x^2 + \frac{x^3}{3} + C_2 \right),$$

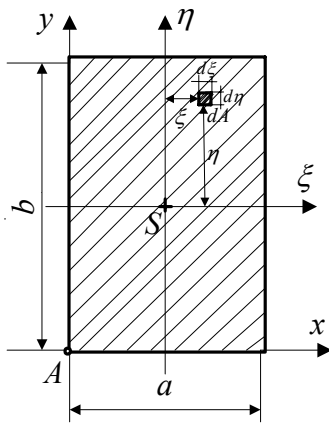
Peremfeltétel: a befalazásnál a szögelfordulás zérus, így $\varphi_z(x=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$

A kérdéses metszetek szögelfordulása :

$$\varphi_z(B) = \varphi_z(x=1000 \text{ mm}) = -4,861 \cdot 10^{-2} \text{ rad},$$

$$\varphi_z(C) = \varphi_z(x=2000 \text{ mm}) = -5,556 \cdot 10^{-2} \text{ rad}.$$

5.3. feladat : Keresztmetszet másodrendű nyomatékai



Adottak : A téglalap keresztmetszet méretei , $a = 30 \text{ mm}$, $b = 40 \text{ mm}$.

Feladat : a) A S súlyponti ξ, η tengelyekre számolt I_ξ, I_η és $I_{\xi\eta}$

tehetetlenségi nyomatékok meghatározása.

b) Az A ponti x, y tengelyekre számolt I_x, I_y és I_{xy} tehetetlenségi nyomatékok meghatározása.

a) A S súlyponti ξ, η tengelyekre számolt I_ξ, I_η és $I_{\xi\eta}$ tehetetlenségi nyomatékok meghatározása :

$$I_\xi = \int_{(A)} \eta^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \eta^2 d\eta d\xi = \frac{a b^3}{12} = \frac{30 \cdot 40^3}{12} = 16 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 = 16 \text{ cm}^4 ,$$

$$I_\eta = \int_{(A)} \xi^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \xi^2 d\eta d\xi = \frac{a^3 b}{12} = \frac{30^3 \cdot 40}{12} = 9 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 = 9 \text{ cm}^4 ,$$

$$I_{\xi\eta} = I_{\eta\xi} = \int_{(A)} \eta \xi dA = 0 .$$

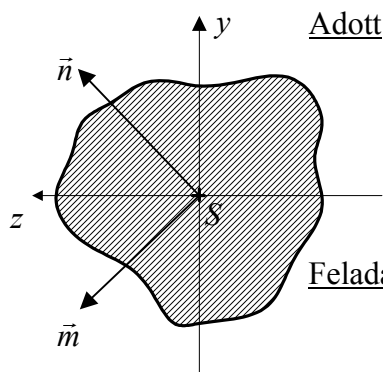
b) Az A ponti x, y tengelyekre számolt I_x, I_y és I_{xy} tehetetlenségi nyomatékok meghatározása a Steiner tétel felhasználásával :

$$I_x = I_\xi + A y_{AS}^2 = \frac{a b^3}{12} + a b \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{a b^3}{3} = \frac{30 \cdot 40^3}{3} = 64 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 = 64 \text{ cm}^4 ,$$

$$I_y = I_\eta + A x_{AS}^2 = \frac{a^3 b}{12} + a b \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{a^3 b}{3} = \frac{30^3 \cdot 40}{3} = 36 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 = 36 \text{ cm}^4 ,$$

$$I_{xy} = I_{yx} = I_{\xi\eta} + A x_{AS} y_{AS} = 0 + a b \left(\frac{a}{2} \right) \left(\frac{b}{2} \right) = \frac{a^2 b^2}{4} = \frac{30^2 \cdot 40^2}{4} = 36 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 = 36 \text{ cm}^4 .$$

5.4. feladat : Keresztmetszet tehetetlenségi tenzora, Mohr-féle tehetetlenségi kördiagram



Adott : A keresztmetszet S súlyponti tehetetlenségi tenzorának a mátrixa

$$[I_S] = \begin{bmatrix} I_y & -I_{yz} \\ -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 40 \\ 40 & 30 \end{bmatrix} \text{ cm}^4,$$

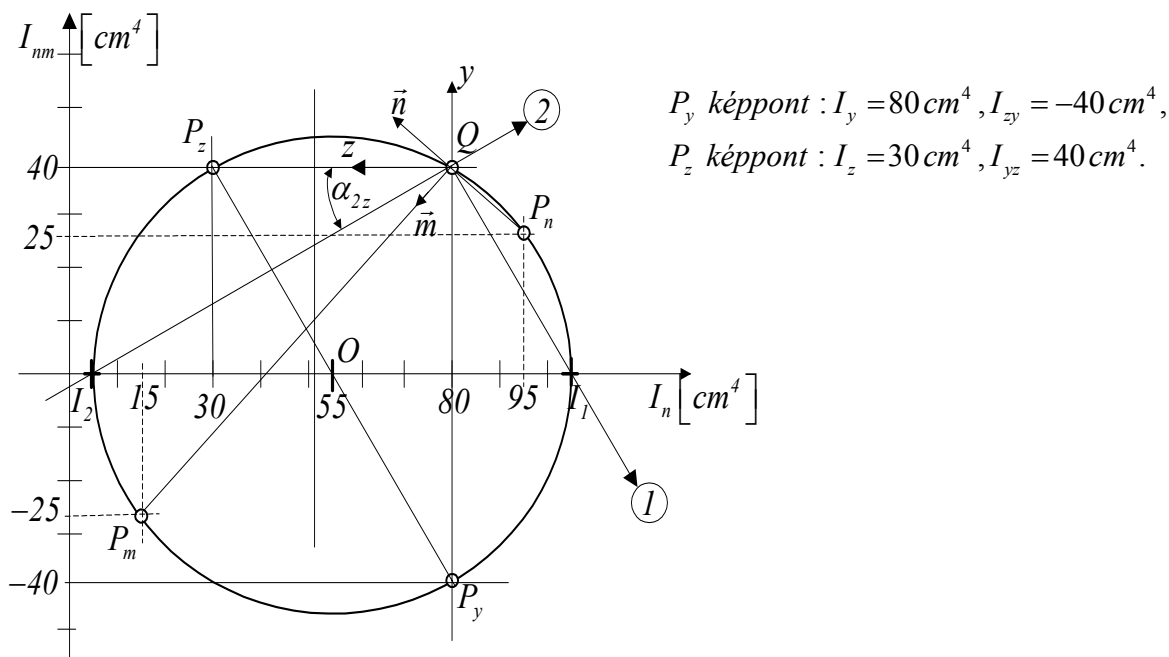
$$\vec{n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k} \right), \quad \vec{m} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k} \right).$$

Feladat: a) A Mohr-féle tehetetlenségi kördiagram megrajzolása.

b) A kördiagram alapján az I_1 és I_2 fő tehetetlenségi nyomatékok, és tehetetlenségi főirányok meghatározása.

c) Az adott $\vec{n}$ és $\vec{m}$ irányú tengelyekre számított I_n és I_m , valamint az az $\vec{n}$ és $\vec{m}$ irányú tengelypárra számított $I_{nm} = I_{mn}$ másodrendű tehetetlenségi nyomatékok meghatározása számítással.

a) A Mohr-féle tehetetlenségi kördiagram megrajzolása :



b) A kördiagram alapján az I_1 és I_2 fő tehetetlenségi nyomatékok, és tehetetlenségi főirányok meghatározása számítással :

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2} \right)^2 + I_{zy}^2} = \frac{30 + 80}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{80 - 30}{2} \right)^2 + (-40)^2} = \dots \Rightarrow$$

$$I_1 = 102,17 \text{ cm}^4,$$

$$I_2 = 7,83 \text{ cm}^4.$$

$$\text{tg} \alpha_{2z} = \frac{I_{yz}}{I_y - I_2} = \frac{40}{80 - 7,83} = 0,5542 \Rightarrow \alpha_{2z} = \arctg 0,5542 = 28,997^\circ.$$

c) Az adott $\vec{n}$ és $\vec{m}$ irányú tengelyekre számított I_n és I_m , valamint az $\vec{n}$ és $\vec{m}$ irányú tengelypárra számított $I_{nm} = I_{mn}$ másodrendű tehetetlenségi nyomatékok meghatározása számítással :

Az n tengelyre számított másodrendű nyomaték :

$$I_n = [\vec{n}] [\underline{I}_{\equiv S}] [\vec{n}] ,$$

$$\vec{I}_n = [\underline{I}_{\equiv S}] [\vec{n}] = \begin{bmatrix} 80 & 40 \\ 40 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84,853 \\ 49,497 \end{bmatrix} cm^4 ,$$

$$I_n = [\vec{n}] [\vec{I}_n] = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 84,853 \\ 49,497 \end{bmatrix} = 95 cm^4 .$$

Az m tengelyre számított másodrendű nyomaték :

$$I_m = [\vec{m}] [\underline{I}_{\equiv S}] [\vec{m}] ,$$

$$\vec{I}_m = [\underline{I}_{\equiv S}] [\vec{m}] = \begin{bmatrix} 80 & 40 \\ 40 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28,284 \\ -7,071 \end{bmatrix} cm^4 ,$$

$$I_m = [\vec{m}] [\vec{I}_m] = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -28,284 \\ -7,071 \end{bmatrix} = 15 cm^4 .$$

Az m, n tengelypárra számított másodrendű nyomaték :

$$I_{mn} = I_{nm} = -[\vec{m}] [\underline{I}_{\equiv S}] [\vec{n}] = -[\vec{n}] [\underline{I}_{\equiv S}] [\vec{m}] ,$$

$$I_{nm} = -[\vec{n}] [\underline{I}_{\equiv S}] [\vec{m}] = -\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 & 40 \\ 40 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = 25 cm^4 .$$

Az $\underline{I}_{\equiv S}$ súlyponti, másodrendű tehetetlenségi tenzor mátrixa az mn koordináta-rendszerben :

$$[\underline{I}_{\equiv S}]_{mn} = \begin{bmatrix} 95 & -25 \\ -25 & 15 \end{bmatrix} cm^4 .$$

Ellenőrzés szerkesztéssel :

A kördiagramban a Q normálisok pólusából párhuzamost húzunk az $\vec{n}$ és $\vec{m}$ egységvektorokkal .

Az így megrajzolt egyenesek és a kör metszéspontjai a P_m és P_n pontok.

A pontok koordinátái az I_m , I_n és $I_{mn} = I_{nm}$ tehetetlenségi nyomatékok.