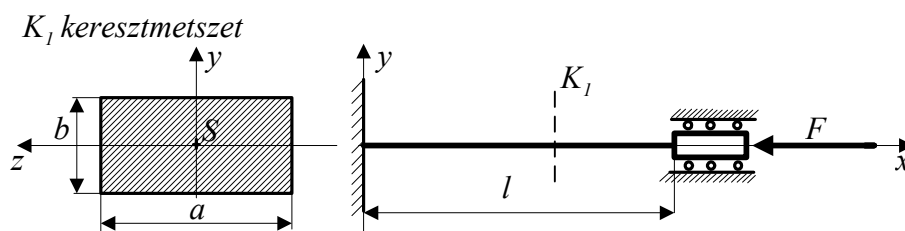


MECHANIKA-SZILÁRDSÁGTAN

7. hét gyakorlati anyaga

(kidolgozta : dr. Nagy Zoltán egy.adjunktus,
Bojtár Gergely egy.tanársegéd)

7.1. feladat : *Karcsú nyomott rúd kihajlása*



Adott : $a=80 \text{ mm}$, $b=120 \text{ mm}$, $l=4,4 \text{ m}$, $R_{p0,2} = 280 \text{ MPa}$, $R_A = 240 \text{ MPa}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $n_{krit} = 2$.

Feladat : a) A rúd keresztmetszeti és kihajlási jellemzőinek meghatározása.

b) A kritikus erő meghatározása..

c) A kihajlási határgörbe megrajzolása.

d) A rúd ellenőrzése kihajlásra, ha $F= 100 \text{ kN}$.

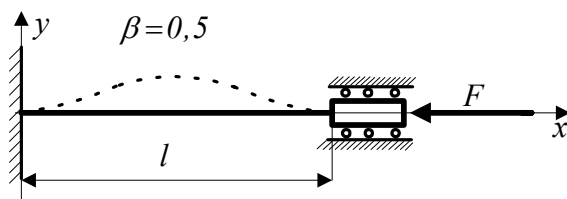
a) A rúd keresztmetszeti és kihajlási jellemzői:

$$I_{min} = I_2 = I_y = \frac{b a^3}{12} = \frac{120 \cdot 80^3}{12} = 5120000 \text{ mm}^4,$$

$$I_{max} = I_1 = I_z = \frac{a b^3}{12} = \frac{80 \cdot 120^3}{12} = 11520000 \text{ mm}^4,$$

$$A = a b = 120 \cdot 80 = 9600 \text{ mm}^2.$$

$$\text{A keresztmetszet minimális inerciasugara : } i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{5120000}{9600}} = 23,09 \text{ mm}.$$



A rúd kihajlási félhullámhossza :

$$l_0 = \beta l = 0,5 \cdot 4400 = 2200 \text{ mm}.$$

$$\text{A rúd karcsúsági tényezője : } \lambda = \frac{l_0}{i_{min}} = \frac{\beta l}{i_{min}} = \frac{0,5 \cdot 4400}{23,09} = 95,28.$$

$$\text{A rugalmas és rugalmas-képlékenységi tartomány határa : } \lambda_A = \pi \sqrt{\frac{E}{R_A}} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{240}} = 90,69.$$

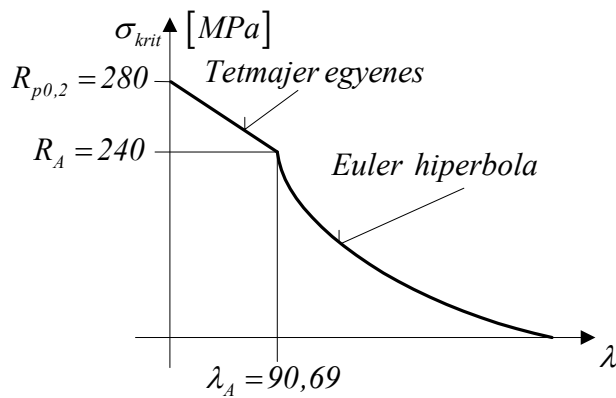
b) Az F_{krit} erő :

A kritikus feszültséget az Euler -féle hiperbola alapján kell meghatározni, mivel :

$$\lambda = 95,28 \geq \lambda_A = 90,69 \Rightarrow \sigma_{krit} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} = 3,41^2 \frac{2 \cdot 10^5}{95,28^2} = 217,43 \text{ MPa},$$

$$F_{krit} = \sigma_{krit} A = 217,43 \cdot 9600 = 2087328 \text{ N}.$$

c) A kihajlási határgörbe :



$$\sigma_{krit}(\lambda) = \begin{cases} R_{p0,2} - \frac{R_{p0,2} - R_A}{\lambda_A} \lambda, & \text{ha } \lambda \leq \lambda_A, \\ \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}, & \text{ha } \lambda \geq \lambda_A. \end{cases}$$

d) A rúd ellenőrzése kihajlásra, ha $F = 100 \text{ kN}$:

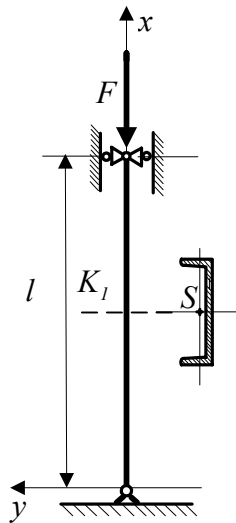
A tényleges feszültség : $\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{1 \cdot 10^6}{9600} = 104,17 \text{ MPa}.$

A kritikus feszültség : $\sigma_{krit} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} = 3,41^2 \frac{2 \cdot 10^5}{95,28^2} = 217,43 \text{ MPa}.$

Ellenőrzés : $\sigma_x \leq \frac{\sigma_{krit}}{n_{krit}},$

$$104,17 \leq \frac{217,43}{2} = 108,715 \Rightarrow \text{a rúd kihajlásra megfelel!}$$

7.2. feladat : Karcsú nyomott rúd kihajlása



Adott : $l = 1,2 \text{ m}$, $R_{p0,2} = 220 \text{ MPa}$, $R_A = 190 \text{ MPa}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $n = 1,5$,

A rúd profilja : U 80, MSz 326 , $A = 11 \text{ cm}^2$, $I_y = 106 \text{ cm}^4$, $I_z = 19,4 \text{ cm}^4$.

Feladat : a) A rúd keresztmetszeti és kihajlási jellemzőinek meghatározása.

b) A kihajlási határgörbe megrajzolása.

c) A kritikus erő meghatározása.

d) A rúd ellenőrzése kihajlásra, ha $F = 100 \text{ kN}$.

a) A rúd keresztmetszeti és kihajlási jellemzőinek meghatározása :

Az y és z tengelyek tehetetlenségi főtengelyek , így

$$I_1 = I_y = 106 \text{ cm}^4 , I_2 = I_z = 19,4 \text{ cm}^4 .$$

A keresztmetszet minimális inerciasugara :

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{19,4}{11}} = 1,328 \text{ cm} .$$

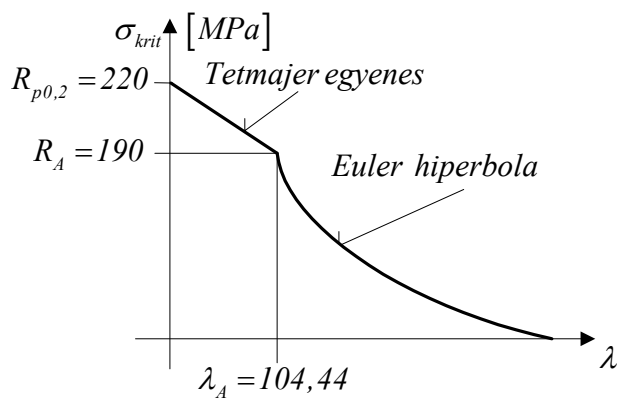
A rúd kihajlási félhullámhossza:

$$l_0 = \beta l = 1 \cdot 120 = 120 \text{ cm} .$$

A rúd karcsúsági tényezője : $\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{\beta l}{i_{\min}} = \frac{120}{1,328} = 90,36 .$

A rugalmas és rugalmas-képlékenységi tartomány határa: $\lambda_A = \pi \sqrt{\frac{E}{R_A}} = \pi \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5}{190}} = 104,44 .$

b) A kihajlási határgörbe :



$$\sigma_{\text{krit}}(\lambda) = \begin{cases} R_{p0,2} - \frac{R_{p0,2} - R_A}{\lambda_A} \lambda , & \text{ha } \lambda \leq \lambda_A , \\ \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} , & \text{ha } \lambda \geq \lambda_A . \end{cases}$$

c) A kritikus erő :

Mivel $\lambda = 90,36 \leq \lambda_A = 104,44$ a kritikus feszültséget a Tetmajer egyenes alapján kell meghatározni:

$$\sigma_{\text{krit}}(\lambda) = R_{p0,2} - \frac{R_{p0,2} - R_A}{\lambda_A} \lambda = 220 - \frac{220 - 190}{104,44} 90,36 = 194,07 \text{ MPa} ,$$

$$F_{\text{krit}} = \sigma_{\text{krit}} A = 194,07 \cdot 1100 = 213477 \text{ N} .$$

d) A rúd ellenőrzése kihajlásra, ha $F = 100 \text{ kN}$:

$$F = \frac{F_{\text{krit}}}{n} ,$$

$$100 \leq \frac{213,477}{1,5} = 142,3 \Rightarrow \text{a rúd kihajlásra megfelel!}$$

7.3 feladat : Feszültségi állapot szemléltetése

Adott : a P pontbeli feszültségi állapot, és három egymásra merőleges irány.

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k}, \\ \vec{m} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k}, \\ \vec{l} &= \vec{i}. \end{aligned}$$

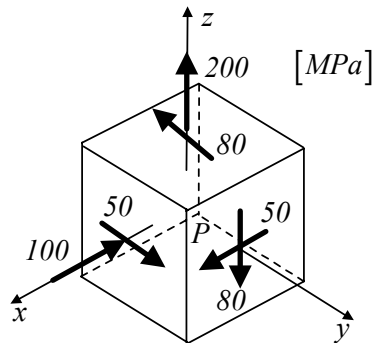
$$[\underline{F}_P] = \begin{bmatrix} -100 & 50 & 0 \\ 50 & 0 & -80 \\ 0 & -80 & 200 \end{bmatrix} \text{ MPa},$$

- Feladat : a) A $\vec{\rho}_x, \vec{\rho}_y$ és $\vec{\rho}_z$ feszültségvektorok meghatározása.
 b) A feszültségi állapot szemléltetése az elemi kockán.
 c) Az $\vec{m}$ normálisú lapon fellépő $\vec{\rho}_m$ feszültségvektor meghatározása.
 d) A σ_m és τ_{lm}, τ_{nm} feszültség koordináták kiszámítása.
 e) A $\vec{\rho}_m$ feszültségvektor szemléltetése az $\vec{l}, \vec{n}, \vec{m}$ koordináta – rendszerben.

- a) A $\vec{\rho}_x, \vec{\rho}_y$ és $\vec{\rho}_z$ feszültségvektorok :

$$\begin{aligned} [\vec{\rho}_x] &= [\underline{F}_P] \cdot [\vec{i}] = \begin{bmatrix} -100 & 50 & 0 \\ 50 & 0 & -80 \\ 0 & -80 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}, \\ [\vec{\rho}_y] &= [\underline{F}_P] \cdot [\vec{j}] = \begin{bmatrix} -100 & 50 & 0 \\ 50 & 0 & -80 \\ 0 & -80 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ -80 \end{bmatrix} \text{ MPa}, \\ [\vec{\rho}_z] &= [\underline{F}_P] \cdot [\vec{k}] = \begin{bmatrix} -100 & 50 & 0 \\ 50 & 0 & -80 \\ 0 & -80 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -80 \\ 200 \end{bmatrix} \text{ MPa}. \end{aligned}$$

- b) A feszültségi állapot szemléltetése az elemi kockán :



- c) Az $\vec{m}$ normálisú lapon fellépő $\vec{\rho}_m$ feszültségvektor :

$$\begin{aligned} [\vec{\rho}_m] &= [\underline{F}_P] \cdot [\vec{m}] = \begin{bmatrix} -100 & 50 & 0 \\ 50 & 0 & -80 \\ 0 & -80 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35,355 \\ -56,569 \\ 197,99 \end{bmatrix} \text{ MPa}, \\ \vec{\rho}_m &= (-35,355 \vec{i} - 56,569 \vec{j} + 197,99 \vec{k}) \text{ MPa}. \end{aligned}$$

d) A σ_m és τ_{lm} , τ_{nm} feszültség koordináták :

$$\sigma_m = \vec{\rho}_m \cdot \vec{m} = [-35,355 \quad -56,569 \quad 197,99] \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = 180 \text{ MPa.}$$

$$\tau_{lm} = \vec{\rho}_m \cdot \vec{l} = [-35,355 \quad -56,569 \quad 197,99] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -35,355 \text{ MPa.}$$

$$\tau_{nm} = \vec{\rho}_m \cdot \vec{n} = [-35,355 \quad -56,569 \quad 197,99] \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = 100 \text{ MPa.}$$

e) A $\vec{\rho}_m$ feszültségvektor az $\vec{l}, \vec{n}, \vec{m}$ koordináta – rendszerben :

$$\vec{\rho}_m = \vec{\sigma}_m + \vec{\tau}_m = (180\vec{m} - 35,355\vec{l} + 100\vec{n}) \text{ MPa.}$$

