

MECHANIKA-SZILÁRDSÁGTAN

8. hét gyakorlati anyaga

(kidolgozta : dr. Nagy Zoltán egy.adjunktus,
Bojtár Gergely egy.tanársegéd)

8.1 feladat : Feszültségi állapot szemléltetése

Adott : Ismert egy szilárd test P pontjában a feszültségi állapot és a test anyagjellemzői.

$$\sigma_x = 120 \text{ MPa} , \sigma_y = -80 \text{ MPa} , \sigma_z = 40 \text{ MPa} ,$$

$$\tau_{xy} = -30 \text{ MPa} , \tau_{yz} = 5 \text{ MPa} , \tau_{zx} = 0 \text{ MPa} , E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} , \nu = 0,3.$$

Feladat : a) Írja fel a feszültségi tenzor mátrixát !

b) Szemléltesse a P pontbeli feszültségi állapotot az elemi kockán.

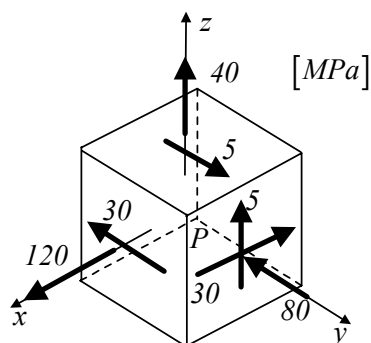
c) Határozza meg a P pontbeli alakváltozási tenzort.

d) Szemléltesse a P pontbeli alakváltozási állapotot az elemi triéderen .

a) A feszültségi tenzor mátrixa :

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & -30 & 0 \\ -30 & -80 & 5 \\ 0 & 5 & 40 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

b) A P pontbeli feszültségi állapot szemléltetése az elemi kockán :



c) A P pontbeli alakváltozási tenzor :

$$\text{Az általános Hooke-törvény alapján: } \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \underline{\underline{E}} \right),$$

ahol F_I az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor első skalár invariánsa $F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 120 - 80 + 40 = 80 \text{ MPa}$.

$$\text{A } G \text{ csúsztató rugalmassági modulusz : } G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0,3)} = 76923 \text{ MPa}.$$

A test P pontjában az alakváltozási koordináták :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right) = \frac{1}{2 \cdot 76923} \left(120 - \frac{0,3}{1+0,3} 80 \right) = 6,6 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2G} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right) = \frac{1}{2 \cdot 76923} \left((-80) - \frac{0,3}{1+0,3} 80 \right) = -6,4 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2G} \left(\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right) = \frac{1}{2 \cdot 76923} \left(40 - \frac{0,3}{1+0,3} 80 \right) = 1,4 \cdot 10^{-4},$$

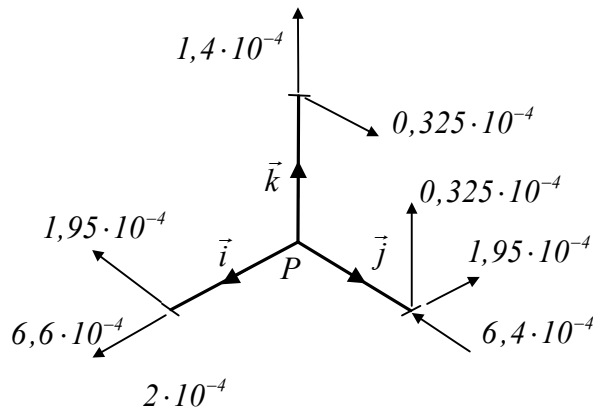
$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{yx} = \frac{1}{2G}\tau_{xy} = \frac{1}{2 \cdot 76923}(-30) = -1,95 \cdot 10^{-4},$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{zx} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{zy} = \frac{1}{2G}\tau_{yz} = \frac{1}{2 \cdot 76923}5 = 3,25 \cdot 10^{-5}.$$

Az alakváltozási tenzor : $[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,6 & -1,95 & 0 \\ -1,95 & -6,4 & 0,325 \\ 0 & 0,325 & 1,4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}.$

d) Az alakváltozási állapot szemléltetése az elemi triéderen :



8.2 feladat : Feszültségi állapot szemléltetése

Adott : Ismert egy szilárd test P pontja elemi környezetének alakváltozási állapota és a test anyagi jellemzői.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = 1,5 \cdot 10^{-4}, \varepsilon_y = -5 \cdot 10^{-4}, \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0, G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \nu = 0,3.$$

Feladat : a) Írja fel az alakváltozási tenzor mátrixát.

b) Határozza meg a P pontbeli feszültségi tenzort.

c) Szemléltesse a P pontbeli feszültségi állapotot az elemi kockán.

a) Az alakváltozási tenzor mátrixa :

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

b) A P pontbeli feszültségi tenzor :

$$\text{Az általános Hooke-törvény alapján : } \underline{F} = 2G \left(\underline{A} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{E} \right),$$

ahol A_I az $\underline{A}$ alakváltozási tenzor első skalár invariánsa $A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 1,5 - 5 + 1,5 = (-2 \cdot 10^{-4})$.

A test P pontjában az feszültségi koordináták :

$$\sigma_x = 2G \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right) = 2 \cdot 0,8 \cdot 10^5 \left[1,5 \cdot 10^{-4} + \frac{0,3}{1-2 \cdot 0,3} (-2 \cdot 10^{-4}) \right] = 0 \text{ MPa},$$

$$\sigma_y = 2G \left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right) = 2 \cdot 0,8 \cdot 10^5 \left[(-5 \cdot 10^{-4}) + \frac{0,3}{1-2 \cdot 0,3} (-2 \cdot 10^{-4}) \right] = -104 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z = 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right) = 2 \cdot 0,8 \cdot 10^5 \left[1,5 \cdot 10^{-4} + \frac{0,3}{1-2 \cdot 0,3} (-2 \cdot 10^{-4}) \right] = 0 \text{ MPa},$$

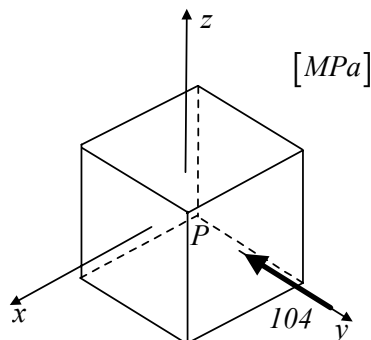
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G \gamma_{xy} = 0,$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G \gamma_{xz} = 0,$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = G \gamma_{yz} = 0.$$

$$\text{A feszültségi tenzor : } [\underline{F}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -104 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

c) A P pontbeli feszültségi állapotot szemléltetése az elemi kockán :



8.3 feladat : Feszültségi állapot szemléltetése

Adott : Ismert egy szilárd test P pontjában a feszültségi tenzor, továbbá az $\vec{n}, \vec{m}$ irány egységvektor.

$$\underline{\underline{F}}_P = \begin{bmatrix} 100 & 0 & -30 \\ 0 & -20 & 0 \\ -30 & 0 & 20 \end{bmatrix} \text{ MPa}, \quad \vec{n} = \left(\frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{k} \right),$$

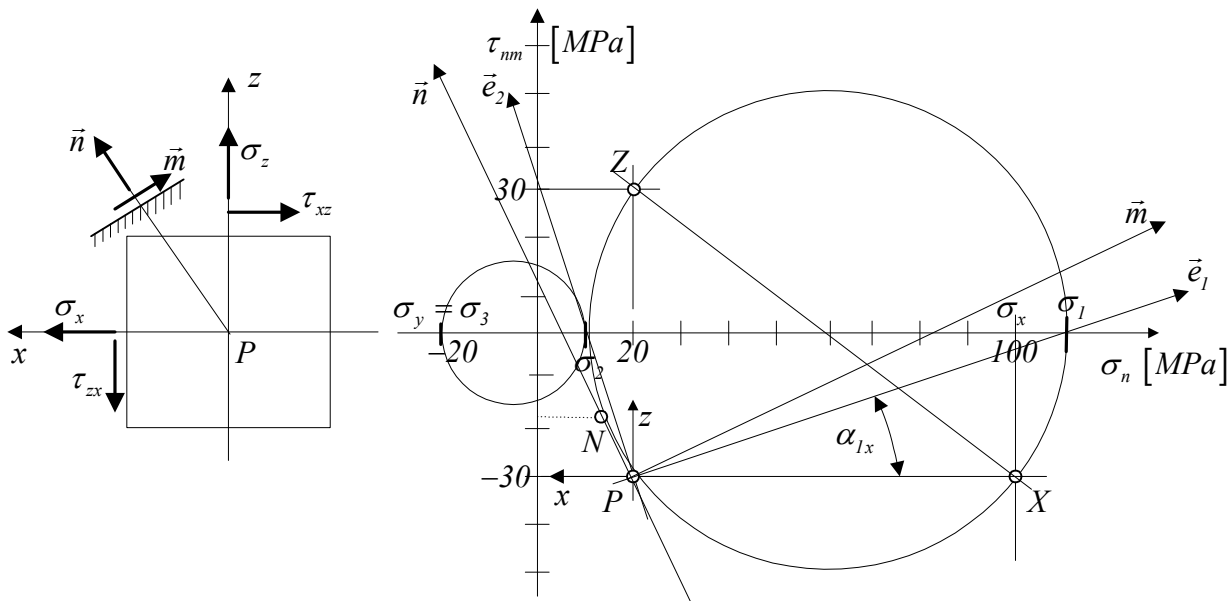
$$\vec{m} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{k} \right).$$

Feladat : a) Szemléltesse a P pontbeli feszültségi állapotot a Mohr-féle kördiagrammal.

b) Határozza meg a P pontbeli feszültségi főirányokat és a főfeszültségeket.

c) Határozza meg a σ_n és τ_{nm} feszültségkoordinátákat a feszültségi tenzorból, számítással.

a) A feszültségi állapot szemléltetése az xz sík részleges Mohr-féle körívdiagramja alapján :



b) Feszültségi főirányok és a főfeszültségek meghatározása számítással :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{100 + 20}{2} + \sqrt{\left(\frac{100 - 20}{2} \right)^2 + 30^2} = 110 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{100 + 20}{2} - \sqrt{\left(\frac{100 - 20}{2} \right)^2 + 30^2} = 10 \text{ MPa},$$

$$\sigma_3 = \sigma_y = -20 \text{ MPa}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{lx} = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_1 - \sigma_z} = \frac{30}{110 - 20} = 0,3333 \Rightarrow \alpha_{lx} = \arctg 0,3333 = 18,26^\circ.$$

c) A σ_n és τ_{nm} feszültségkoordináták számítása :

$$\vec{\rho}_n = \underline{\underline{F}}_P \cdot \vec{n},$$

$$[\vec{\rho}_n] = \begin{bmatrix} 100 & 0 & -30 \\ 0 & -20 & 0 \\ -30 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24,019 \\ 0 \\ 2,3205 \end{bmatrix} \text{ MPa},$$

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24,019 \\ 0 \\ 2,3205 \end{bmatrix} = 14,019 \text{ MPa},$$

$$\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_n = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24,019 \\ 0 \\ 2,3205 \end{bmatrix} = -19,641 \text{ MPa}.$$