

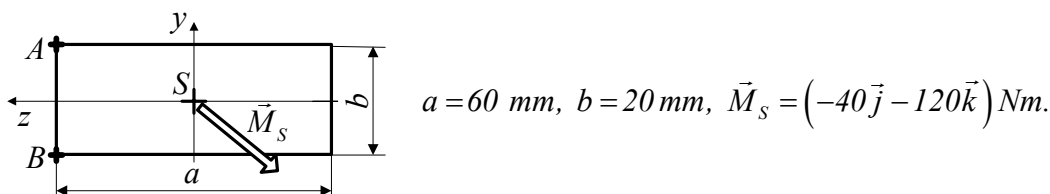
MECHANIKA-SZILÁRDSÁGTAN

10. hét gyakorlati anyaga

(kidolgozta : dr. Nagy Zoltán egy.adjunktus,
Bojtár Gergely egy.tanársegéd)

10.1 feladat : *Ferde hajlítás*

Adott : A rúd K keresztmetszetének méretei és terhelése:



- Feladat :
- Határozza meg és számítsa ki a feszültségi tenzort az **A** és **B** pontokban.
 - Számítsa ki a zérusvonal egyenletét és ábrázolja a zérusvonalat.
 - Rajzolja meg a feszültségeloszlást a keresztmetszet y és z tengelye mentén.
Határozza meg a keresztmetszet veszélyes pontjait.
 - Rajzolja meg a feszültségeloszlást a keresztmetszet **S** pontján átmenő, a zérusvonalra merőleges η tengelye mentén.
 - Számítsa ki a keresztmetszeten fellépő maximális feszültséget.

a) Feszültségi tenzor az **A** és **B** pontokban :

A keresztmetszet igénybevétele ferde hajlítás : $M_{hy} = -40 \text{ Nm}$, $M_{hz} = 120 \text{ Nm}$.

Keresztmetszeti jellemzők : $I_y = \frac{a^3 b}{12} = \frac{60^3 \cdot 20}{12} = 360000 \text{ mm}^4$, $I_z = \frac{b^3 a}{12} = \frac{20^3 \cdot 60}{12} = 40000 \text{ mm}^4$.

Feszültségállapot az **A** és **B** pontokban :

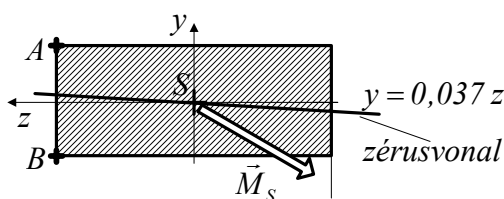
$$\sigma_x(A) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_A + \frac{M_{hy}}{I_y} z_A = \frac{120 \cdot 10^3}{40000} 10 + \frac{-40 \cdot 10^3}{360000} 30 = 30 - 3,33 = 26,67 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_x(B) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_B + \frac{M_{hy}}{I_y} z_B = \frac{120 \cdot 10^3}{40000} (-10) + \frac{-40 \cdot 10^3}{360000} 30 = -30 - 3,33 = -33,33 \text{ MPa}.$$

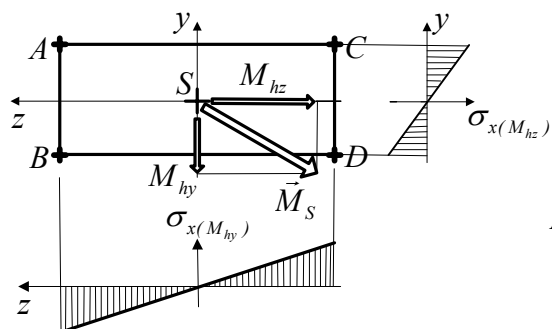
A feszültségi tenzorok : $\underline{\underline{F_A}} = \begin{bmatrix} 26,67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$, $\underline{\underline{F_B}} = \begin{bmatrix} -33,33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{MPa}].$

b) A zérusvonal egyenlete és ábrázolása:

$$\sigma_x = \frac{M_{hz}}{I_z} y + \frac{M_{hy}}{I_y} z = 0 \Rightarrow y = y(z) = -\frac{M_{hy}}{M_{hz}} \frac{I_z}{I_y} z = -\underbrace{\frac{M_{hy}}{M_{hz}}}_{\tan \alpha} \underbrace{\frac{I_z}{I_y}}_{\tan \beta} z = -\frac{-40 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^3} \frac{40 \cdot 10^3}{360000} z = 0,037 z.$$

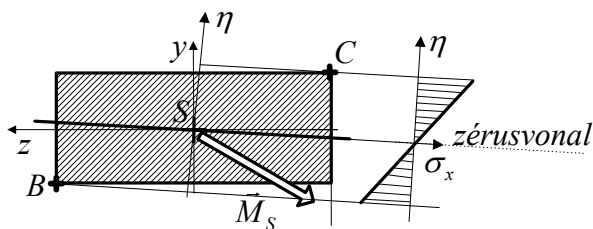


c) Feszültségeloszlás a keresztmetszet y és z tengelye mentén, veszélyes pontok :



A keresztmetszet veszélyes pontjai : **B** és a **C** pontok.

d) Feszültségeloszlás a keresztmetszet S pontján átmenő, a zérusvonalra merőleges η tengelye mentén:

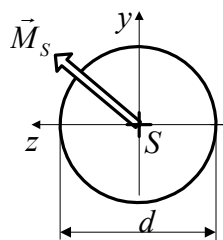


e) Keresztmetszeten fellépő maximális feszültség :

$$\sigma_{x_{max}} = |\sigma_x(B)| = |\sigma_x(C)| = 33,33 \text{ MPa}.$$

10.2 feladat : Kör keresztmetszetű prizmatikus rúd egyenes hajlítása

Adott : A rúd K keresztmetszetének anyagi jellemzője és terhelése :



$$\sigma_{meg} = 150 \text{ MPa}, \quad \vec{M}_S = (40\vec{j} + 30\vec{k}) \text{ Nm}.$$

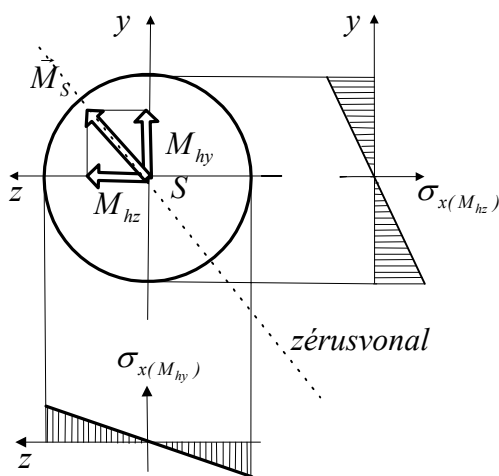
Feladat : a) Feszültségeloszlás ábrázolása a keresztmetszet z és y tengelyei mentén.

Számítsa ki a zérusvonal egyenletét és ábrázolja a zérusvonalat.

b) Rajzolja meg a feszültségeloszlást a keresztmetszet S pontján átmenő, a zérusvonalra merőleges η tengely mentén. A keresztmetszet veszélyes pontjainak meghatározása.

d) A keresztmetszet méretezése feszültségcsúcsra.

a) Feszültségeloszlás a keresztmetszet z és y tengelyei mentén, zérusvonal egyenlete :



Keresztmetszeti jellemzők :

$$I_y = I_z = \frac{d^4 \pi}{64} \Rightarrow \tan \alpha = \tan \beta \Rightarrow \text{egyenes hajlítás!}$$

A keresztmetszet igénybevétele :

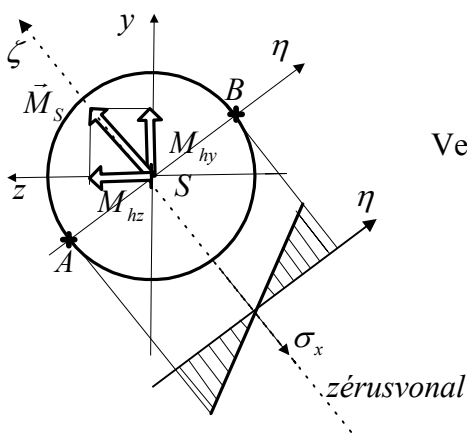
$$M_{hy} = 40 \text{ Nm}, \quad M_{hz} = -30 \text{ Nm}.$$

A zérusvonal egyenlete:

$$\sigma_x = \frac{M_{hz}}{I_z} y + \frac{M_{hy}}{I_y} z = 0,$$

$$y = y(z) = -\frac{M_{hy}}{M_{hz}} \frac{I_z}{I_y} z = -\tan \alpha \frac{I_z}{I_y} z = -\frac{30 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^3} z = 0,75 z.$$

b) Feszültségeloszlás a keresztmetszet S pontján átmenő, a zérusvonalra merőleges η tengely mentén, a keresztmetszet veszélyes pontjai :



Veszélyes pontok : **A** és **B** pontok .

c) A keresztmetszet méretezése feszültségcsúcsra :

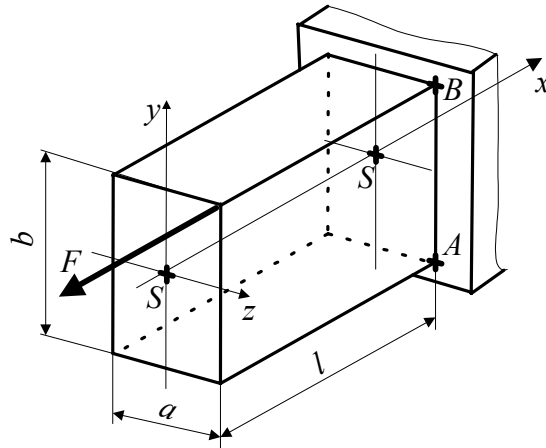
$$M_{h\zeta} = -\sqrt{M_{hy}^2 + M_{hz}^2} = -\sqrt{40^2 + (-30)^2} = -50 \text{ Nm},$$

$$\sigma_x(B) = \frac{M_{h\zeta}}{I_{\zeta}} \eta_B = \frac{M_{h\zeta}}{\frac{d^4 \pi}{64}} \left(-\frac{d}{2} \right) = \frac{-50 \cdot 10^3}{\frac{d^4 \pi}{64}} \left(-\frac{d}{2} \right) = \frac{1600 \cdot 10^3}{d^3 \pi} \leq \sigma_{meg} = 150 \text{ MPa},$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{1600 \cdot 10^3}{150 \cdot \pi}} = 15,03 \text{ mm} \Rightarrow d = 16 \text{ mm}.$$

10.3 feladat : Excentrikus húzás-nyomás

Adott : $l = 1\text{ m}$, $a = 20\text{ mm}$, $b = 30\text{ mm}$, $F = 10\text{ kN}$.

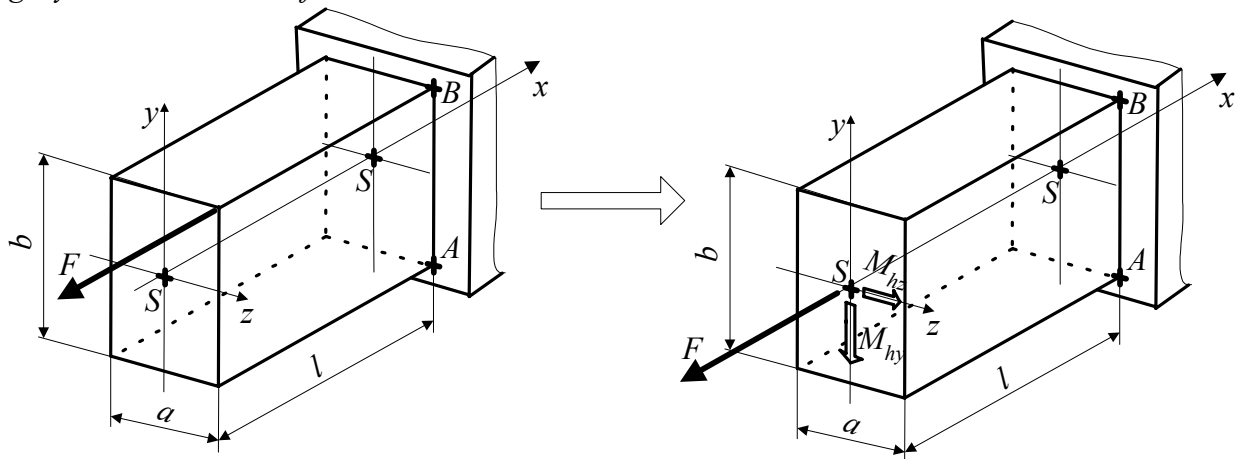


Feladat : a) Igénybevételek meghatározása a rúd befalazási keresztmetszetében.

b) A feszültségi tenzor felírása és kiszámítása a befalazási keresztmetszet S , A és B pontjában.

c) Rajzolja meg a feszültségeloszlást a befalazási keresztmetszet S pontján átmenő, y és z tengelyei mentén.

a) Igénybevételek a rúd befalazási keresztmetszetében :



Helyezzük át az F erőt a keresztmetszet S súlypontjába. A redukálás után ébredő nyomatékok :

$$M_{hy} = F \frac{a}{2} = 10 \cdot 10^3 \cdot \frac{20}{2} = 10^5 \text{ Nmm},$$

$$M_{hz} = F \frac{b}{2} = 10 \cdot 10^3 \cdot \frac{30}{2} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Nmm}.$$

A keresztmetszet igénybevétele : húzás + ferde hajlítás.

b) A feszültségi tenzor a befalazási keresztmetszet S , A és B pontjaiban :

Keresztmetszeti jellemzők :

$$I_z = \frac{a b^3}{12} = \frac{20 \cdot 30^3}{12} = 45000 \text{ mm}^4, \quad I_y = \frac{b a^3}{12} = \frac{30 \cdot 20^3}{12} = 20000 \text{ mm}^4, \quad A = a b = 20 \cdot 30 = 600 \text{ mm}^2.$$

A keresztmetszet tetszőleges pontjában a σ_x feszültség:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} y + \frac{M_{hy}}{I_y} z,$$

$$\sigma_x = \sigma_{x(N)} + \sigma_{x(M_{hz})} + \sigma_{x(M_{hy})}.$$

Feszültségállapot az S pontban :

$$\sigma_x(S) = \sigma_{x(N)} = \frac{N}{A} = \frac{10 \cdot 10^3}{20 \cdot 30} = 16,67 \text{ MPa},$$

$$\sigma_x(S) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_S = \frac{M_{hy}}{I_y} z_S = 0, \text{ mert } y_S = z_S = 0.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F}}_S = \begin{bmatrix} 16,67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

Feszültségállapot az A pontban :

$$\sigma_x(A) = \sigma_{x(N)} = \frac{N}{A} = \frac{10 \cdot 10^3}{20 \cdot 30} = 16,67 \text{ MPa},$$

$$\sigma_x(A) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_A = \frac{M_{hy}}{I_y} \left(-\frac{b}{2}\right) = \frac{1,5 \cdot 10^5}{45000} \left(-\frac{30}{2}\right) = -50 \text{ MPa}, \Rightarrow \underline{\underline{F}}_A = \begin{bmatrix} 16,67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

$$\sigma_x(A) = \frac{M_{hy}}{I_y} z_A = \frac{M_{hy}}{I_y} \left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 \cdot 10^5}{20000} \left(\frac{20}{2}\right) = 50 \text{ MPa}.$$

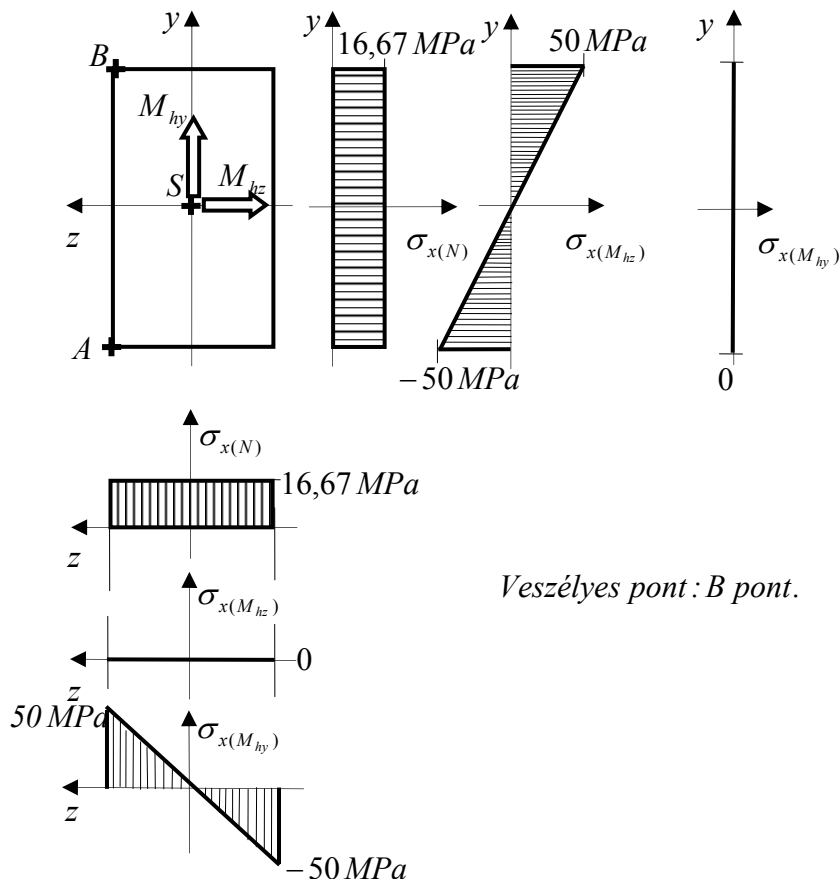
Feszültségállapot a B pontban :

$$\sigma_x(B) = \sigma_{x(N)} = \frac{N}{A} = \frac{10 \cdot 10^3}{20 \cdot 30} = 16,67 \text{ MPa},$$

$$\sigma_x(B) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_B = \frac{M_{hy}}{I_y} \left(\frac{b}{2}\right) = \frac{1,5 \cdot 10^5}{45000} \left(\frac{30}{2}\right) = 50 \text{ MPa}, \Rightarrow \underline{\underline{F}}_B = \begin{bmatrix} 116,67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

$$\sigma_x(B) = \frac{M_{hy}}{I_y} z_B = \frac{M_{hy}}{I_y} \left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 \cdot 10^5}{20000} \left(\frac{20}{2}\right) = 50 \text{ MPa}.$$

c) Feszültségeloszlás a befalazási keresztmetszet S pontján átmenő, y és z tengelyei mentén:



Veszélyes pont : B pont.