

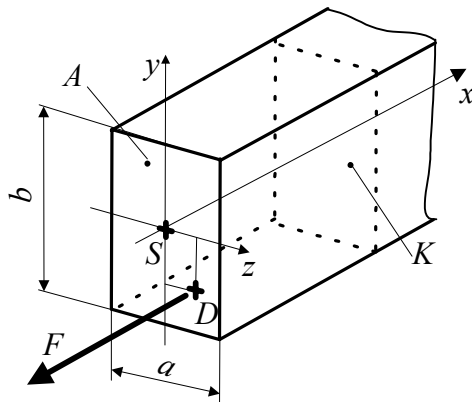
MECHANIKA-SZILÁRDSÁGTAN

11. hét gyakorlati anyaga

(kidolgozta : dr. Nagy Zoltán egy.adjunktus,
Bojtár Gergely egy.tanársegéd)

11.1 feladat : Prizmatikus rudak összetett igénybevételei (excentrikus húzás-nyomás)

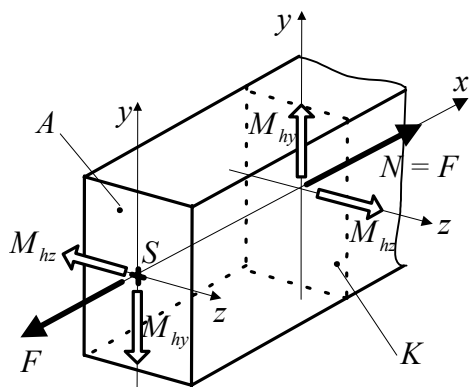
Adott : Ismertek az adott keresztmetszet geometriai méretei és a keresztmetszet D pontjában ható terhelés. $a=20\text{ mm}$, $b=40\text{ mm}$, $F=6\text{ kN}$, $D(0,-10,5)\text{ mm}$.



- Feladat : a) Határozza meg a K keresztmetszet igénybevételét.
b) Rajzolja meg a K keresztmetszet y és z tengelyei mentén a feszültségeloszlást.
c) Határozza meg a zérusvonal egyenletét és ábrázolja a zérusvonalat a K keresztmetszeten.
Határozza meg a K keresztmetszet veszélyes pontjait.
d) Számítsa ki a MOHR és HMMH elmélet szerinti maximális redukált feszültséget.

a) A K keresztmetszet igénybevétele :

Redukáljuk az F erőt az A jelű keresztmetszet S pontjába :



$$N = F = 6000\text{ N} ,$$

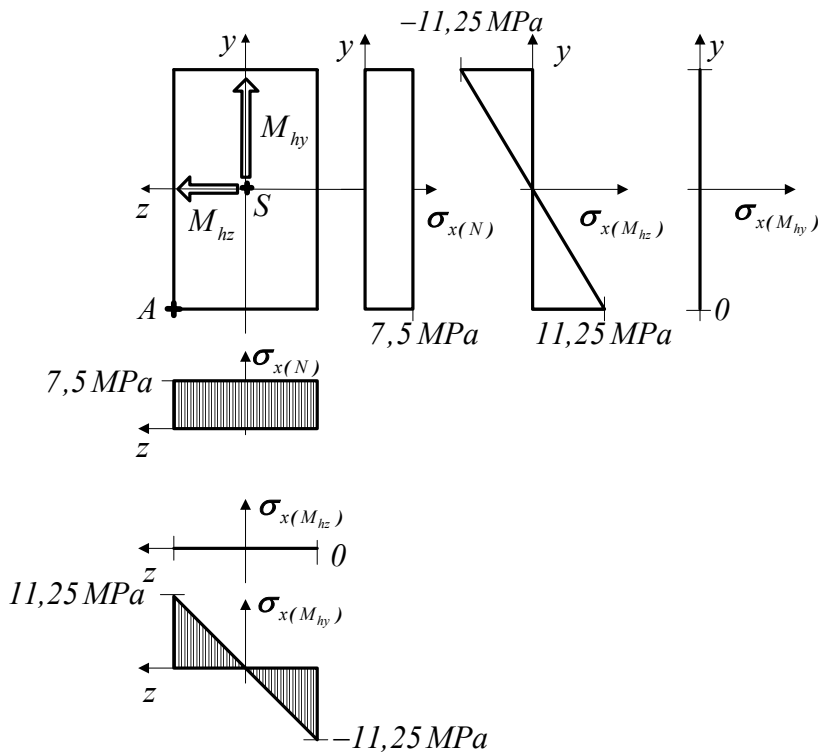
$$M_{hy} = z_D F = 0,005 \cdot 6000 = 30\text{ Nm} ,$$

$$M_{hz} = y_D F = (-0,01) \cdot 6000 = -60\text{ Nm} .$$

A keresztmetszet igénybevétele :

húzás + ferde hajlítás.

b) Feszítésgeloszlás a K keresztmetszet y és z tengelyei mentén :



c) A zérusvonal egyenlete és ábrázolása , keresztmetszet veszélyes pontjai :

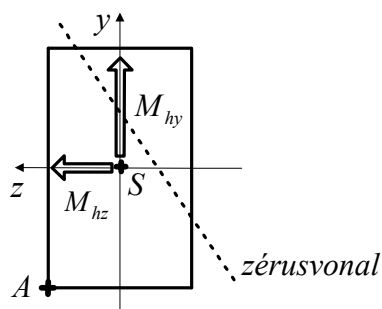
Keresztmetszeti jellemzők :

$$I_y = \frac{a^3 b}{12} = \frac{20^3 \cdot 40}{12} = 26666,67 \text{ mm}^4, \quad I_z = \frac{a b^3}{12} = \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 106666,67 \text{ mm}^4, \quad A = a b = 20 \cdot 40 = 800 \text{ mm}^2.$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} y + \frac{M_{hy}}{I_y} z = \frac{N}{A} + \frac{y_D F}{I_z} y + \frac{z_D F}{I_y} z = 0,$$

$$y = y(z) = -\frac{I_z}{I_y} \frac{z_D}{y_D} z - \frac{I_z}{y_D A} = -\frac{106666,67 \cdot 5}{26666,67 \cdot (-10)} z - \frac{106666,67}{(-10) \cdot 800} = 2z + 13,33.$$

Zérusvonal egyenlete : $y = 2z + 13,33$.



Veszélyes pont : A pont

d) Maximális redukált feszültség a keresztmetszet veszélyes pontjában MOHR és a HMM elmélet szerint :

$$\sigma_{red \max} = \sigma_{red}(A) = \sigma_{red}(MOHR) = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{zy}^2} = \sigma_x(A),$$

$$\sigma_{red \max} = \sigma_{red}(A) = \sigma_{red}(HMM) = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{zy}^2} = \sigma_x(A).$$

Feszültségállapot az A pontban:

$$\sigma_{x(N)} = \frac{N}{A} = \frac{6000}{800} = 7,5 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{x(M_{hz})} = \frac{M_{hz}}{I_z} y_A = \frac{-60 \cdot 10^3}{106666,67} (-20) = 11,25 \text{ MPa},$$

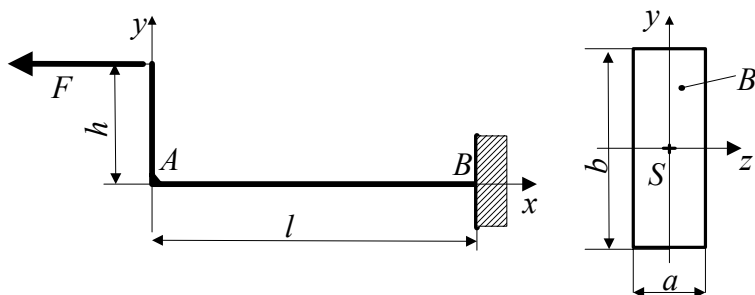
$$\sigma_{x(M_{hy})} = \frac{M_{hy}}{I_y} z_A = \frac{30 \cdot 10^3}{26666,67} 10 = 11,25 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_x(A) = \sigma_{x(N)} + \sigma_{x(M_{hz})} + \sigma_{x(M_{hy})} = 7,5 + 11,25 + 11,25 = 30 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{red}(A) = \sigma_{red}(MOHR) = \sigma_{red}(MOHR) = 30 \text{ MPa}.$$

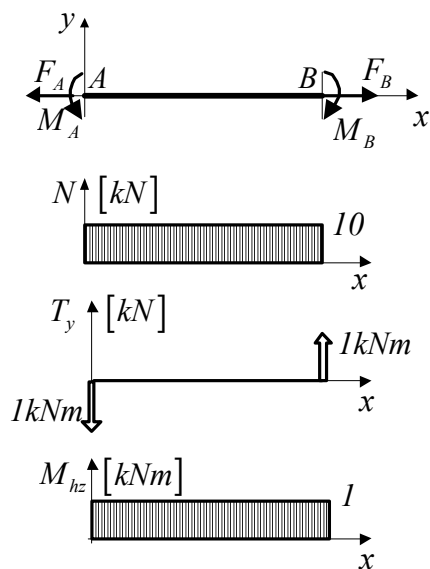
11.2 feladat : Prizmatikus rudak összetett igénybevételei (húzás+hajlítás)

Adott : $R_{p0,2} = 80 \text{ MPa}$, $n=1,2$, $b=2a$, $F=10 \text{ kN}$, $l=800 \text{ mm}$, $h=100 \text{ mm}$.



- Feladat : a) Rajzolja meg a tartó AB szakaszán az igénybevételi ábrákat .
 b) A tartó veszélyes keresztmetszetének meghatározása.
 c) Rajzolja meg a feszültségeloszlást a veszélyes keresztmetszet S pontján átmenő, y és z tengelyei mentén.
 d) Végezze el a tartó szilárdságtani méretezését hajlításra.
 e) Végezze el a tartó ellenőrzését húzás+hajlításra.

a) A tartó AB szakaszának igénybevételi ábrái :



Redukáljuk az F erőt a tartó A jelű keresztmetszetének S pontjába :

$$F_A = F = 10 \text{ kN} (\leftarrow),$$

$$M_A = h F = 0,1 \cdot 10 = 1 \text{ kNm}.$$

Támasztó erőrendszer:

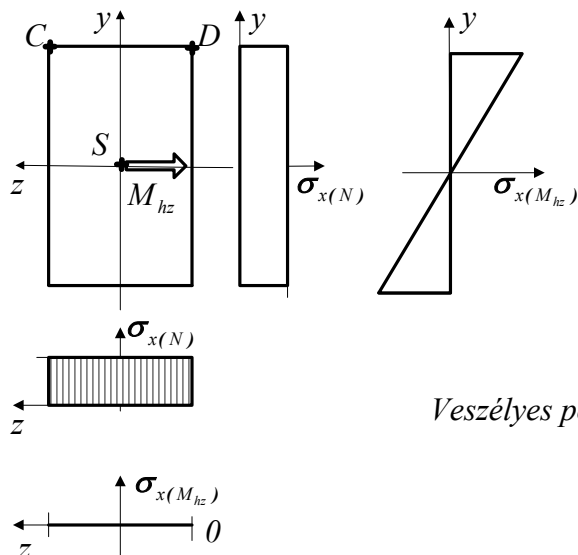
$$F_x = F_B - F_A = 0 \Rightarrow F_B = F_A = 10 \text{ kN} (\rightarrow),$$

$$M_a = M_A - M_B = 0 \Rightarrow M_B = M_A = 1 \text{ kNm}.$$

b) A tartó veszélyes keresztmetszete:

Az AB szakaszon belül minden keresztmetszet.

c) Feszültségeloszlás a veszélyes keresztmetszet S pontján átmenő, y és z tengelyei mentén :



Veszélyes pontok: a CD élen lévő összes pont.

d) A tartó szilárdságtani méretezése hajlításra :

Keresztmetszeti jellemző :

$$I_z = \frac{ab^3}{12} = \frac{a(2a)^3}{12} = \frac{8a^4}{12} = \frac{2a^4}{3}.$$

$$\text{A megengedett feszültség : } \sigma_{meg} = \frac{R_{p0,2}}{n} = \frac{80}{1,2} = 66,667 \text{ MPa}.$$

$$\text{Maximális feszültség : } \sigma_{xmax} = \sigma_x(C) = \frac{M_{hz}}{I_z} \frac{b}{2} = \frac{M_{hz}}{\frac{2a^4}{3}} \frac{2a}{2} = \frac{3M_{hz}}{2a^3}.$$

$$\sigma_x(C) = \sigma_{meg} \Rightarrow \frac{3M_{hz}}{2a^3} = \sigma_{meg} \Rightarrow \frac{3 \cdot 10^6}{2a^3} \leq 66,667 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^6}{2 \cdot 66,667}} \leq a \Rightarrow a \geq 28,23 \text{ mm},$$

a biztonság felé térve : $a = 30 \text{ mm}$, $b = 60 \text{ mm}$.

e) A tartó ellenőrzése húzás+hajlításra :

Az $a = 30 \text{ mm}$, $b = 60 \text{ mm}$ -es méretek alapján a tényleges keresztmetszeti jellemzők :

$$I_z = \frac{ab^3}{12} = \frac{30 \cdot 60^3}{12} = 540000 \text{ mm}^4, \quad A = ab = 30 \cdot 60 = 2400 \text{ mm}^2.$$

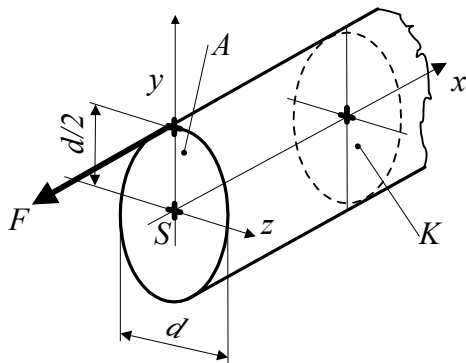
$$\text{Maximális feszültség : } \sigma_{xmax} = \sigma_x(C) = \frac{N_x}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} \frac{b}{2} = \frac{10 \cdot 10^3}{2400} + \frac{10^6}{540000} \frac{60}{2},$$

$$\sigma_{xmax} = \sigma_x(C) = 5,56 + 55,56 = 61,12 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{xmax} = 61,12 \text{ MPa} \leq \sigma_{meg} = 66,667 \text{ MPa}, \text{ a tartó szilárdságtanilag megfelel !}$$

11.3 feladat : Excentrikus húzás-nyomás

Adott : $d = 60 \text{ mm}$, $F = 8 \text{ kN}$.



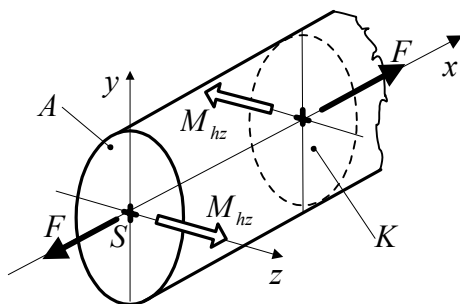
Feladat : a) Határozza meg a tartó K jelű keresztmetszetének igénybevételét.

b) Határozza meg a K keresztmetszet veszélyes pontjait. Rajzolja meg a keresztmetszet y és z tengelyei mentén a feszültségeloszlást.

c) Határozza meg a zérusvonal egyenletét és ábrázolja a zérusvonalat a K keresztmetszeten.

d) Számítsa ki a K keresztmetszeten fellépő maximális σ_x feszültséget.

a) A tartó K jelű keresztmetszetének igénybevétele :



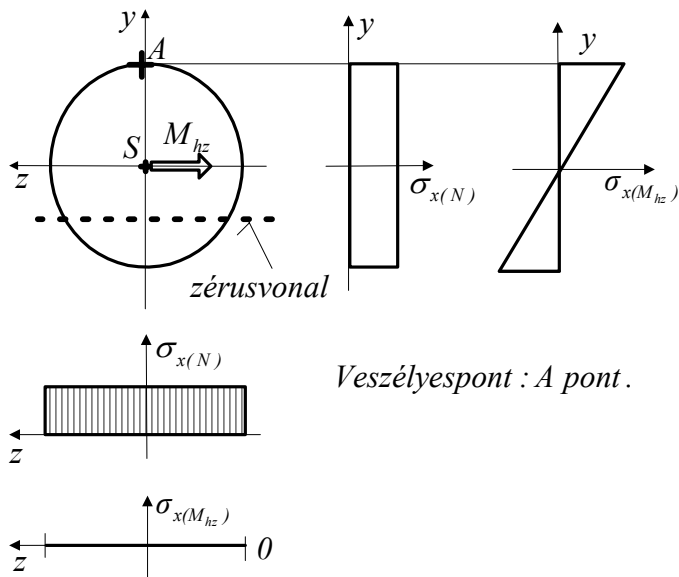
Redukáljuk az F erőt a tartó A jelű keresztmetszetének S pontjába:

$$N_x = F = 8 \text{ kN} (\leftarrow),$$

$$M_{hz} = \frac{d}{2} F = \frac{0,06}{2} 8000 = 240 \text{ Nm}.$$

A K keresztmetszet igénybevétele : húzás+hajlítás.

b) Feszültségeloszlás a K keresztmetszet y és z tengelyei mentén .



Veszélyes pont : A pont .

c) Zérusvonal egyenlete :

$$\text{Keresztmetszeti jellemzők : } I_z = \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{60^4 \pi}{64} = 636172,51 \text{ mm}^4, \quad A = \frac{d^2 \pi}{4} = 2827,43 \text{ mm}^2.$$

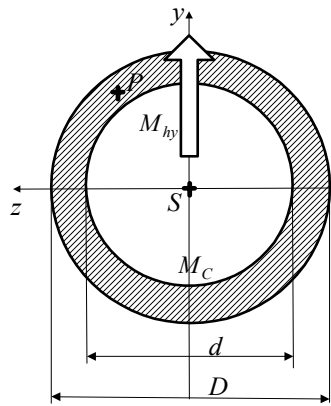
$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} y = 0 \Rightarrow y = -\frac{N I_z}{A M_{hz}} = -\frac{8000 \cdot 636172,51}{2827,43 \cdot 240 \cdot 10^3} = -7,5 \Rightarrow y = y(z) = -7,5.$$

d) A K keresztmetszeten fellépő maximális σ_x feszültség :

$$\sigma_{x_{max}} = \sigma_x(A) = \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} y_A = \frac{8000}{2827,43} + \frac{240 \cdot 10^3}{636172,51} \frac{60}{2} = 2,83 + 11,32 = 14,15 \text{ MPa.}$$

11.4 feladat : Csavarás-egyenes hajlítás

Adott : $D = 2d$, $M_{hy} = 30 \text{ Nm}$, $M_C = 20 \text{ Nm}$, $\sigma_{meg} = 130 \text{ N/mm}^2$.



Feladat : a) Határozza meg a P ponti feszültségi tenzor mátrixát az $R\varphi z$ és az xyz koordináta-rendszerben .

b) Rajzolja meg a keresztmetszet y és z tengelyei mentén a feszültségeloszlást.

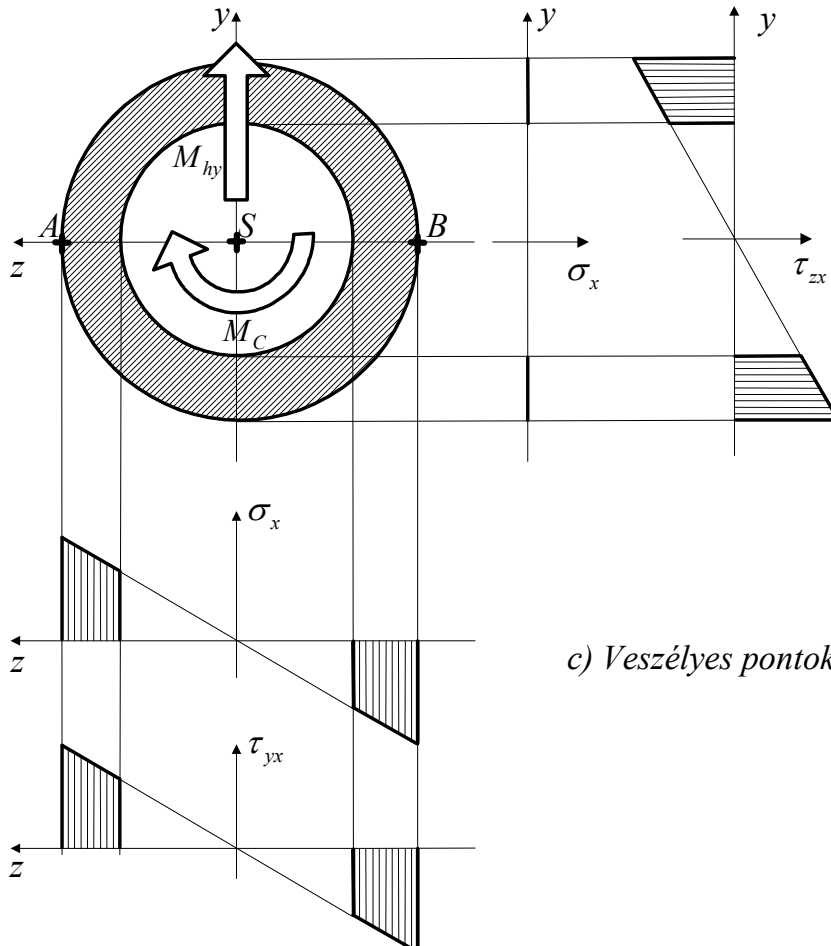
c) Határozza meg a keresztmetszet veszélyes pontjait.

d) Végezze el a tartó méretezését a MOHR és a HMH elmélet szerint .

a) A P ponti feszültségi tenzor mátrixa az $R\varphi z$ és az xyz koordináta-rendszerben :

$$\left[\underline{\underline{F}}_P \right]_{R,\varphi,z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi x} \\ 0 & \tau_{x\varphi} & \sigma_x \end{bmatrix} , \quad \left[\underline{\underline{F}}_P \right]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

b) A keresztmetszet y és z tengelyei menti feszültségeloszlás :



c) Veszélyes pontok : A és B .

d) A tartó méretezése a MOHR és a HMM elmélet szerint :

$$\text{Redukált nyomaték } M_{red} = \sqrt{M_{hy}^2 + \beta \frac{M_c^2}{4}},$$

$$\text{Keresztmetszeti jellemző : } K_y = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{64} \frac{2}{D} = \frac{([2d]^4 - d^4)\pi}{64} \frac{2}{2d} = \frac{(16d^4 - d^4)\pi}{64d} = \frac{15d^3\pi}{64},$$

$$\text{Redukált feszültség : } \sigma_{red} = \frac{M_{red}}{K_y}.$$

- A MOHR elmélet esetén a β tényező értéke : $\beta = 4$, ekkor $M_{red} = \sqrt{30^2 + 4 \frac{(-20)^2}{4}} = 36,06 \text{ Nm}.$

$$\sigma_{red} = \frac{M_{red}}{K_y} \leq \sigma_{meg} \Rightarrow \frac{36,06 \cdot 10^3}{\frac{15d^3\pi}{64}} \leq 130 \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{64 \cdot 36,06 \cdot 10^3}{15 \cdot \pi \cdot 130}} = 7,22 \text{ mm}.$$

$$\text{Átmérők : } d = 7,22 \text{ mm} , D = 2d = 14,44 \text{ mm}.$$

- A HMM elmélet esetén a β tényező értéke : $\beta = 3$, ekkor $M_{red} = \sqrt{30^2 + 3 \frac{(-20)^2}{4}} = 34,64 \text{ Nm}.$

$$\sigma_{red} = \frac{M_{red}}{K_y} \leq \sigma_{meg} \Rightarrow \frac{34,64 \cdot 10^3}{\frac{15d^3\pi}{64}} \leq 130 \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{64 \cdot 34,64 \cdot 10^3}{15 \cdot \pi \cdot 130}} = 7,13 \text{ mm}.$$

$$\text{Átmérők : } d = 7,13 \text{ mm} , D = 2d = 14,26 \text{ mm}.$$

- A biztonság felé térünk el, amennyiben a nagyobb átmérőket választjuk (HMM elmélet) :

$$\text{Végleges átmérők : } d = 7,22 \text{ mm} , D = 2d = 14,44 \text{ mm}.$$