

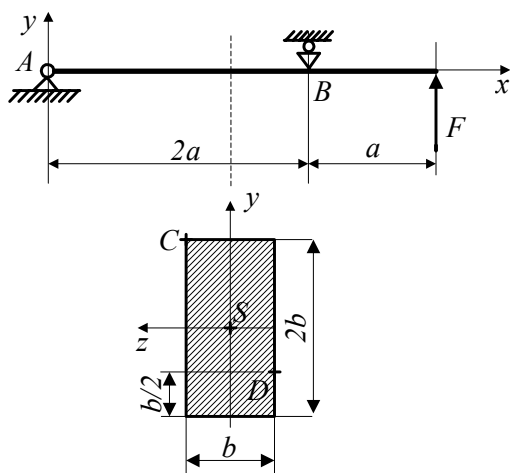
MECHANIKA-SZILÁRDSÁGTAN

12. hét gyakorlati anyaga

(kidolgozta : dr. Nagy Zoltán egy.adjunktus,
Bojtár Gergely egy.tanársegéd)

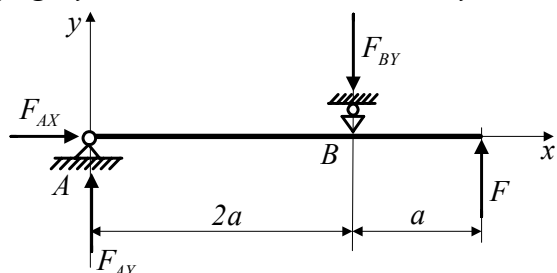
12.1 feladat : Prizmatikus rudak összetett igénybevételei (nyírás és hajlítás)

Adott : $a=0,4\text{ m}$, $b=45\text{ mm}$, $F=16\text{ kN}$, $\sigma_{meg}=125\text{ MPa}$.



- Feladat : a) Rajzolja meg az igénybevételi ábrákat és határozza meg a veszélyes keresztmetszet.
b) Rajzolja meg a veszélyes keresztmetszet y és z tengelyei mentén a feszültségeloszlást.
c) Írja fel a feszültségi tenzort a veszélyes keresztmetszet S, C, D pontjaiban.
d) Végezze el a tartó szilárdságtani ellenőrzését HMH elmélet szerint.

a) Igénybevételi ábrák, a tartó veszélyes keresztmetszete :

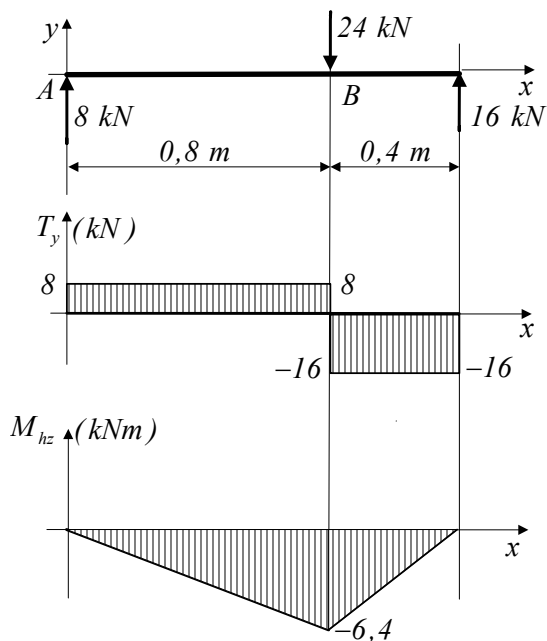


$$M_b = F a - F_{Ay} 2a = 0,$$

$$F_{Ay} = \frac{F a}{2a} = \frac{F}{2} = \frac{16}{2} = 8\text{ kN}(\uparrow),$$

$$M_a = F 3a - F_{By} 2a = 0,$$

$$F_{By} = \frac{3}{2} F = \frac{3}{2} 16 = 24\text{ kN}(\downarrow).$$

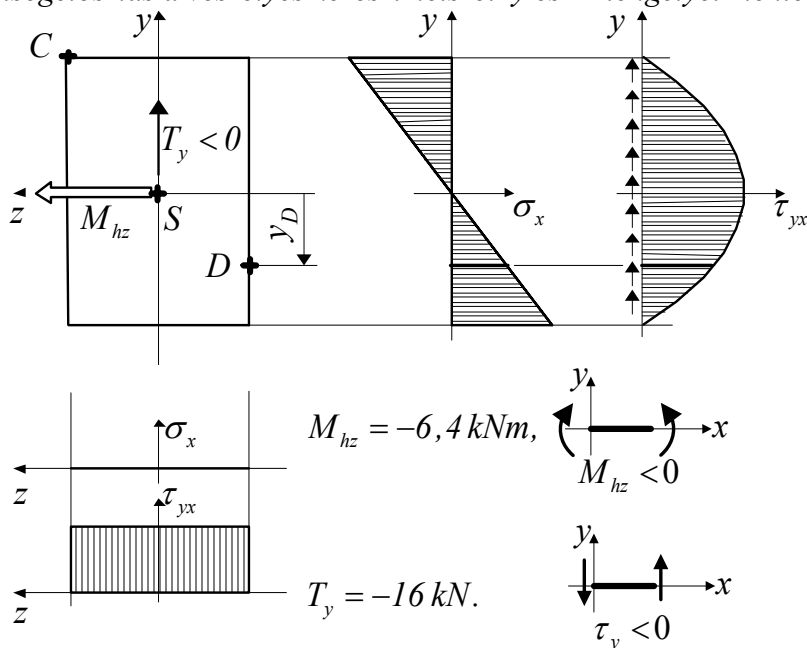


Veszélyes keresztmetszet : B^+

$$T_y(B^+) = -16\text{ kN}(\downarrow),$$

$$M_{hz}(B^+) = -6,4\text{ kNm}.$$

b) Feszültségeloszlás a veszélyes keresztmetszet y és z tengelyei mentén :



c) A feszültségi tenzor a veszélyes keresztmetszet S, C, D pontjaiban :

Keresztmetszeti jellemzők :

$$I_z = \frac{b(2b^3)}{12} = \frac{2b^4}{3} = \frac{2 \cdot 45^4}{3} = 2733750 \text{ mm}^4, \quad A = 2b^2 = 2 \cdot 45^2 = 4050 \text{ mm}^2.$$

$$S_z(y_D) = \frac{b}{2} \left[\left(\frac{2b}{2} \right)^2 - y_D^2 \right] = \frac{45}{2} [45^2 - 22,5^2] = 34171,875 \text{ mm}^3.$$

▪ A keresztmetszet C pontjában:

$$\sigma_x(C) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_C = \frac{M_{hz}}{I_z} (+b) = \frac{-6,4 \cdot 10^6}{2733750} 45 = -105,35 \text{ MPa}; \quad \tau_{xy} = 0 \text{ MPa},$$

$$\begin{bmatrix} F_{\equiv C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -105,35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

▪ A keresztmetszet S pontjában:

$$\sigma_x(S) = 0 \text{ MPa}; \quad \tau_{xy}(S) = -\frac{3}{2} \frac{T_y}{A} = -\frac{3}{2} \frac{(-16000)}{4050} = 5,925 \text{ MPa},$$

$$\begin{bmatrix} F_{\equiv S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5,925 & 0 \\ 5,925 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

▪ A keresztmetszet D pontjában:

$$\sigma_x(D) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_D = \frac{M_{hz}}{I_z} \left(-\frac{b}{2} \right) = \frac{-6,4 \cdot 10^6}{2733750} \left(-\frac{45}{2} \right) = 52,67 \text{ MPa};$$

$$\tau_{xy}(D) = -\frac{T_y S_z(y_D)}{I_z a(y_D)} = -\frac{T_y S_z(y_D)}{I_z b} = -\frac{-16 \cdot 10^3 \cdot 34171,875}{2733750 \cdot 45} = 4,44 \text{ MPa}.$$

$$\begin{bmatrix} F_{\equiv D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52,67 & 4,44 & 0 \\ 4,44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

d) A tartó szilárdságtani ellenőrzése HMH elmélet szerint :

Általános összefüggés : $\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_x^2 + \beta \tau_{xy}^2}$, ahol $\beta = 3$.

- A keresztmetszet **C** pontjában a redukált feszültség:

$$\sigma_{red}(C) = \sqrt{\sigma_x^2(C) + 3\tau_{xy}^2(C)} = \sqrt{(-105,35)^2 + 3 \cdot (0)^2} = 105,35 \text{ MPa} .$$

- A keresztmetszet **S** pontjában a redukált feszültség:

$$\sigma_{red}(S) = \sqrt{\sigma_x^2(S) + 3\tau_{xy}^2(S)} = \sqrt{(0)^2 + 3 \cdot (5,925)^2} = 10,27 \text{ MPa} .$$

- A keresztmetszet **D** pontjában a redukált feszültség:

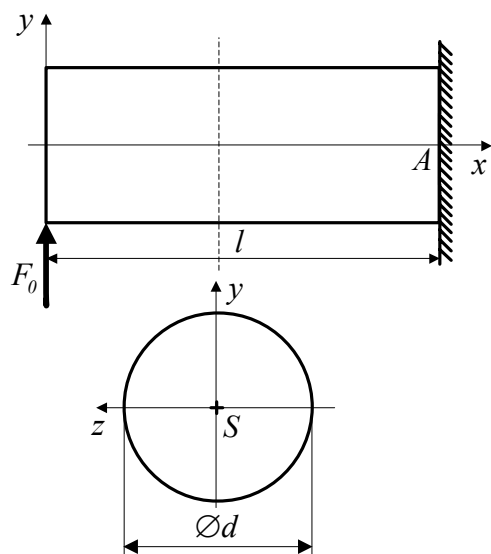
$$\sigma_{red}(D) = \sqrt{\sigma_x^2(D) + 3\tau_{xy}^2(D)} = \sqrt{(52,67)^2 + 3 \cdot (4,44)^2} = 53,23 \text{ MPa} .$$

A maximális redukált feszültség a **C** pontban ébred, így

$\sigma_{red}(C) = 105,35 \text{ MPa} < \sigma_{meg} = 125 \text{ MPa}$, a tartó szilárdságtanilag megfelel !

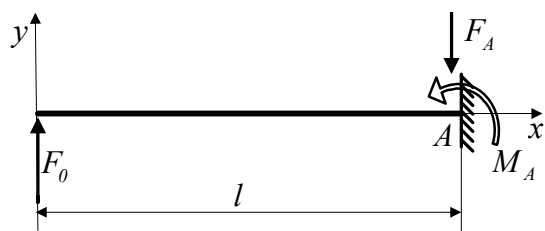
12.2 feladat : Prizmatikus rudak összetett igénybevételei (nyírás+hajlítás)

Adott : $R_{p0,2} = 80 \text{ MPa}$, $n=1,3$, $F_0 = 30 \text{ kN}$, $l = 0,2 \text{ m}$



- Feladat :** a) Rajzolja meg a tartó l szakaszán az igénybevételi ábrákat, és határozza meg a tartó veszélyes keresztmetszetét.
 b) Rajzolja meg a feszültségeloszlást a veszélyes keresztmetszet S pontján átmenő, y és z tengelyei mentén.
 c) Végezze el a tartó szilárdságtani méretezését MOHR elmélete szerint (méretezés hajlításra, szilárdságtani ellenőrzés hajlításra és nyírásra).

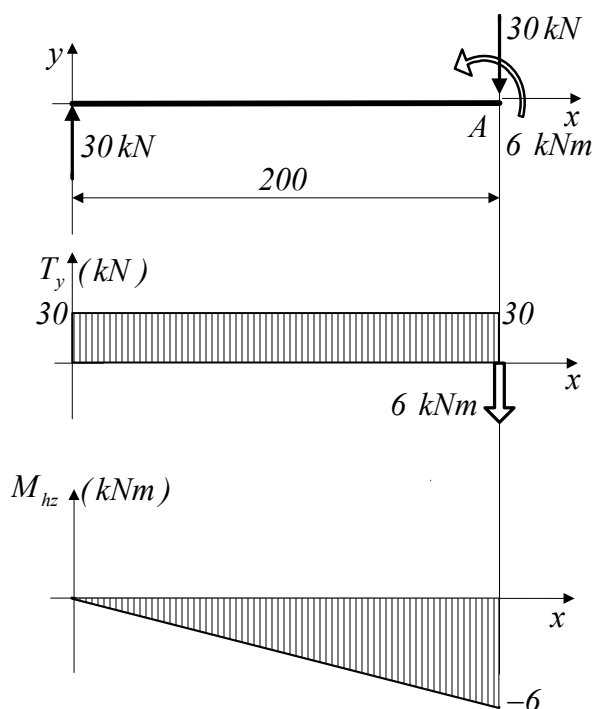
a) A tartó igénybevételi ábrái, veszélyes keresztmetszet :



Támasztó erőrendszer:

$$F_y = 0 = F_0 - F_A = 0 \Rightarrow F_A = F_0 = 30 \text{ kN} (\downarrow),$$

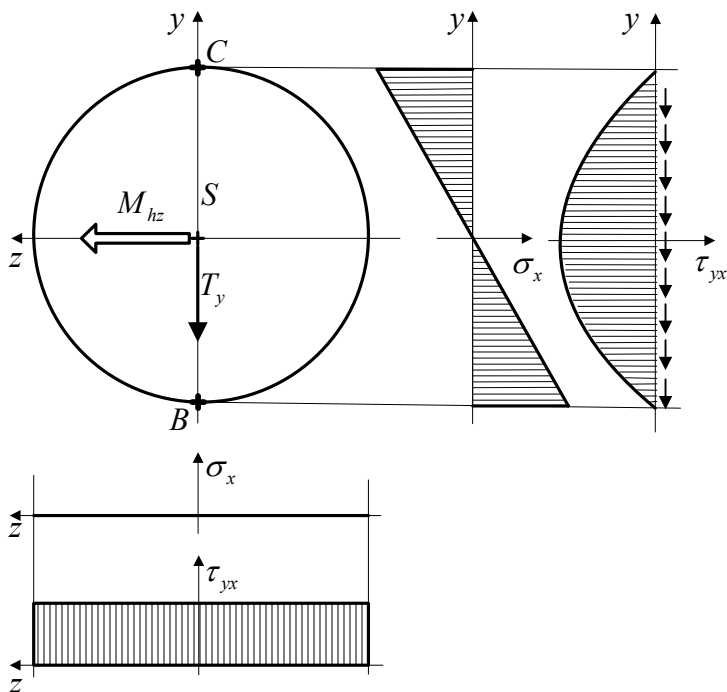
$$M_a = M_A - (F_0 l) = 0 \Rightarrow M_A = (30 \cdot 0,2) = 0,6 \text{ kNm}$$



b) A tartó veszélyes keresztmetszete:

A tartó befalazási, A jelű keresztmetszete.

b) Feszültségeloszlás a veszélyes keresztmetszet y és z tengelyei mentén :



$$M_{hz} = -6 \text{ kNm}, \quad \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ M_{hz} < 0 \end{array}$$

$$T_y = 30 \text{ kN}, \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \tau_y > 0 \end{array}$$

c) A tartó szilárdságtani méretezése MOHR elmélete szerint (méretezés hajlításra) :

$$\sigma_{x\max} = |\sigma_x(B)| = |\sigma_x(C)| = \frac{|M_{hz}|}{I_z} |y_{\max}| = \frac{|M_{hz}|}{K_z} \leq \sigma_{\text{meg}},$$

$$\text{ahol a megengedett feszültség } \sigma_{\text{meg}} = \frac{R_{p0,2}}{n} = \frac{80}{1,3} = 61,53 \text{ MPa},$$

$$\text{a keresztmetszeti tényező } K_z = \frac{I_z}{|y_{\max}|} = \frac{d^3 \pi}{32}.$$

$$\sigma_{x\max} = \frac{|M_{hz}|}{\frac{d^3 \pi}{32}} \leq \sigma_{\text{meg}} \Rightarrow \frac{32|M_{hz}|}{d^3 \pi} \leq \sigma_{\text{meg}} \Rightarrow \frac{32|M_{hz}|}{\sigma_{\text{meg}} \pi} \leq d^3,$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32|M_{hz}|}{\sigma_{\text{meg}} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6 \cdot 10^6}{57,14 \cdot \pi}} = 102,27 \text{ mm}.$$

A tartó átmérője (kerekítés után, a nagyobb biztonság felé térvé) : $d = 103 \text{ mm}$.

d) A tartó szilárdságtani ellenőrzése MOHR elmélete szerint (ellenőrzés hajlításra és nyírásra) :

Keresztmetszeti jellemzők :

$$I_z = \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{103^4 \cdot \pi}{64} = 5523786 \text{ mm}^4, \quad A = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{103^2 \pi}{4} = 8330 \text{ mm}^2.$$

▪ A keresztmetszet C pontjában:

$$\sigma_x(C) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_C = \frac{M_{hz}}{I_z} \left(+ \frac{d}{2} \right) = \frac{-6,4 \cdot 10^6}{5523786} 51,5 = -59,66 \text{ MPa}; \quad \tau_{xy} = 0 \text{ MPa},$$

$$\begin{bmatrix} F_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -59,66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

- A keresztmetszet **S** pontjában:

$$\sigma_x(S) = 0 \text{ MPa} ; \quad \tau_{xy}(S) = -\frac{4}{3} \frac{T_y}{A} = -\frac{4}{3} \frac{(30000)}{8330} = -4,8 \text{ MPa},$$

$$\begin{bmatrix} F_{\equiv S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4,8 & 0 \\ -4,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

- A keresztmetszet **B** pontjában:

$$\sigma_x(B) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_B = \frac{M_{hz}}{I_z} \left(-\frac{d}{2} \right) = \frac{-6,4 \cdot 10^6}{5523786} (-51,5) = 59,66 \text{ MPa} ; \quad \tau_{xy} = 0 \text{ MPa},$$

$$\begin{bmatrix} F_{\equiv B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59,66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

Általános összefüggés : $\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_x^2 + \beta \tau_{xy}^2}$, ahol $\beta = 4$.

- A keresztmetszet **C** pontjában a redukált feszültség:

$$\sigma_{red}(C) = \sqrt{\sigma_x^2(C) + 4\tau_{xy}^2(C)} = \sqrt{(-59,66)^2 + 4 \cdot (0)^2} = 59,66 \text{ MPa}.$$

- A keresztmetszet **S** pontjában a redukált feszültség:

$$\sigma_{red}(S) = \sqrt{\sigma_x^2(S) + 4\tau_{xy}^2(S)} = \sqrt{(0)^2 + 4 \cdot (-4,8)^2} = 9,6 \text{ MPa}.$$

- A keresztmetszet **B** pontjában a redukált feszültség:

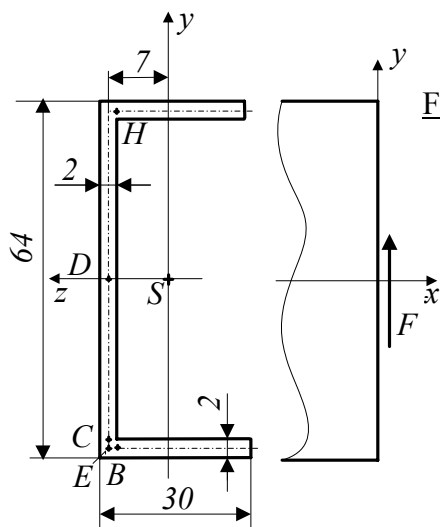
$$\sigma_{red}(B) = \sqrt{\sigma_x^2(B) + 4\tau_{xy}^2(B)} = \sqrt{(59,66)^2 + 4 \cdot (0)^2} = 59,66 \text{ MPa}.$$

A maximális redukált feszültség a **C** és a **B** pontokban ébred, így

$$\sigma_{red}(C) = \sigma_{red}(B) = 59,66 \text{ MPa} < \sigma_{meg} = 61,53 \text{ MPa}, \text{ a tartó szilárdságtanilag megfelel!}$$

12.3 feladat : Vékony szelvényű rudak nyírása és hajlítása

Adott : $\vec{F} = (2 \vec{j}) \text{ kN}$ és a keresztmetszet méretei.



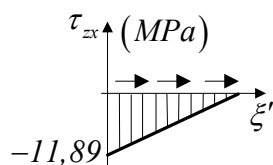
Feladat : a) A feszültségeloszlások megrajzolása a középvonal mentén.
b) A feszültségkoordináták meghatározása az övlemez, illetve a gerinclemez B, E, C, D, H pontjaiban.
c) A Q nyírási középpont meghatározása.

a) A feszültségeloszlások a középvonal mentén :

A keresztmetszet másodrendű nyomatéka a z tengelyre

$$I_z = \int_{(A)} y^2 dA = \int_{(I)} y^2 v ds = y_{|y=-31}^2 v \int_{s=0}^{29} ds + v \int_{s=29}^{91} (s-60)^2 ds + y_{|y=31}^2 v \int_{s=91}^{120} ds,$$

$$I_z = (-31)^2 \cdot 2 \cdot 29 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{31^3}{3} + 31^2 \cdot 2 \cdot (120 - 29) = 151,2 \cdot 10^3 \text{ mm}^4.$$



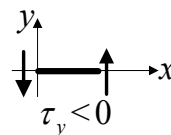
Elsőként a sarokpontban (E) ébredő csúsztató feszültséget határozzuk meg :

$$|\tau_{zx}(E)| = |\tau_{yx}(E)| = \left| \frac{T_y S_z(s_E)}{I_z v} \right|,$$

$$S_z(s_E) = \int_{(A)} y dA = \int_{(I)} y v ds = y_{|y=-31} v \int_{s=0}^{(29)} ds,$$

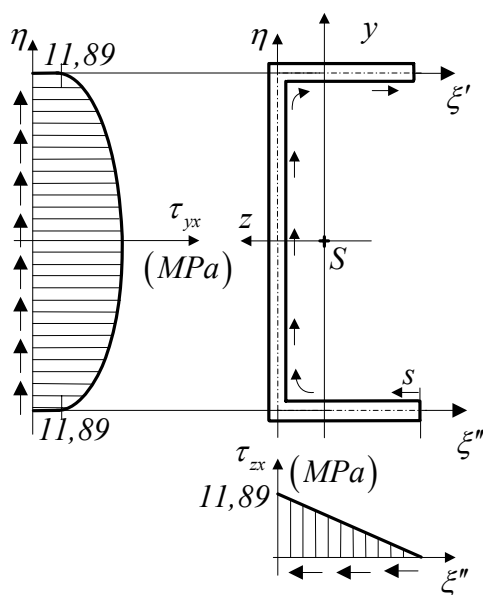
$$S_z(s_E) = (-31) \cdot 2 \cdot 29 = -1798 \text{ mm}^3.$$

$$T_y = -2000 \text{ N.}$$



$$|\tau_{zx}(E)| = |\tau_{yx}(E)| = \left| \frac{(-2000) \cdot (-1798)}{151200 \cdot 2} \right| = 11,89 \text{ MPa.}$$

Az övlemezekben ébredő nyírófeszültség előjelét a nyírófolyam irányítása alapján határozhatjuk meg.



b) A feszültségkoordináták az övlemez, illetve a gerinclemez B, C, D, H pontjaiban.

• B pontban : $\tau_{ex}(B) = \tau_{zx}(B) = \frac{T_y S_z(s_B)}{I_z v},$

$$S_z(s_B) = \int_{(A)} y dA = \int_{(l)} y v ds = y|_{y=-3l} v \int_{(s=0)}^{(28)} ds = (-31) \cdot 2 \cdot 28 = -1736 \text{ mm}^3.$$

$$\tau_{ex}(B) = \tau_{zx}(B) = \frac{T_y S_z(s_B)}{I_z v} = \frac{(-2000) \cdot (-1736)}{151200 \cdot 2} = 11,48 \text{ MPa}.$$

• **C pontban** : $\tau_{ex}(C) = \tau_{yx}(C) = \frac{T_y S_z(s_C)}{I_z v},$

$$S_z(s_C) = \int_{(A)} y dA = (-31) \cdot 2 \cdot 30 = -1860 \text{ mm}^3.$$

$$\tau_{ex}(C) = \tau_{yx}(C) = \frac{T_y S_z(s_C)}{I_z v} = \frac{(-2000) \cdot (-1860)}{151200 \cdot 2} = 12,3 \text{ MPa}.$$

• **D pontban** : $\tau_{ex}(D) = \tau_{yx}(D) = \frac{T_y S_z(s_D)}{I_z v},$

$$S_z(s_D) = \int_{(A)} y dA = (-31) \cdot 2 \cdot 28 + (-16) \cdot 2 \cdot 32 = -2760 \text{ mm}^3.$$

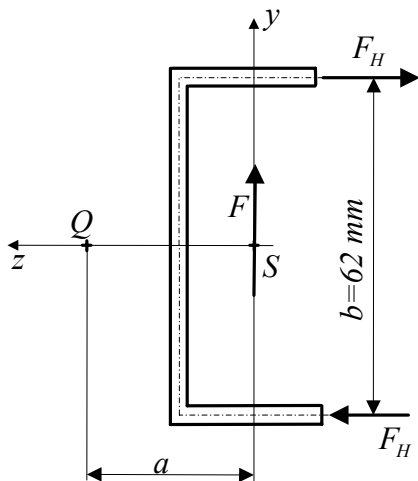
$$\tau_{ex}(D) = \tau_{zx}(D) = \frac{T_y S_z(s_D)}{I_z v} = \frac{(-2000) \cdot (-2760)}{151200 \cdot 2} = 18,25 \text{ MPa}.$$

• **H pontban** : $\tau_{ex}(H) = \tau_{(-z)x}(H) = -\tau_{zx}(H) = -\frac{T_y S_z(s_H)}{I_z v},$

$$S_z(s_H) = \int_{(A)} y dA = (-31) \cdot 2 \cdot 28 + (0) \cdot 2 \cdot 64 = -1736 \text{ mm}^3.$$

$$\tau_{ex}(H) = -\tau_{zx}(H) = -\frac{T_y S_z(s_H)}{I_z v} = -\frac{(-2000) \cdot (-1736)}{151200 \cdot 2} = -11,48 \text{ MPa}.$$

c) **A Q nyírási középpont** :



A feszültségi eredő y tengely irányában: $F = 2000 \text{ N}.$

A feszültségi eredő z tengely irányában:

$$F_H = \int_{s=0}^{29} \tau_{zx} v ds = \frac{I}{2} 11,89 \cdot 2 \cdot 29 = 344,81 \text{ N}.$$

A feszültségi eredők nyomatéka a Q ponti tengelyre:

$$M_q = F a - F_H b = 0.$$

A **Q** nyírási középpont a távolsága :

$$a = b \frac{F_H}{F} = 62 \frac{344,81}{2000} = 10,69 \text{ mm}.$$