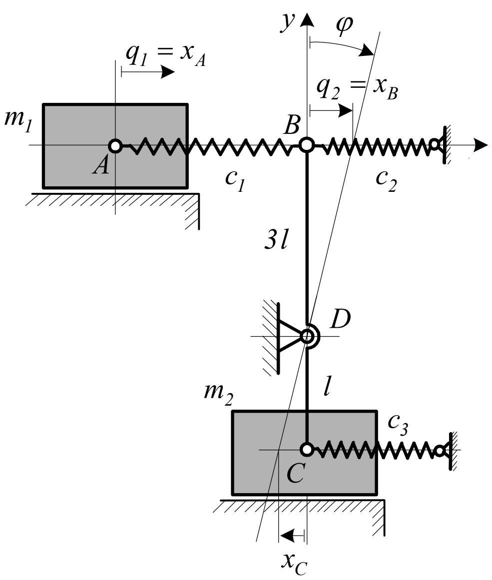
REZGÉSTAN GYAKORLAT

Kidolgozta: Dr. Nagy Zoltán egyetemi adjunktus

13. feladat: Két szabadságfokú csillapítatlan szabad rezgőrendszer



Adott: a két tömegből és a BC súlytalan rúdból álló, szabad rezgést végző rezgőrendszer.
$c_1 = c_2 = 4 \cdot 10^{-4}$ m/N, $l = 1$ m,
$c_3 = 0{,}1111111 \cdot 10^{-4}$ m/N, $m_1 = m_2 = 18$ kg,
$\overline{BD} = 3l$, $\overline{DC} = l$.

Feladat: Határozza meg az ábrán látható rezgőrendszer mozgásegyenlet-rendszerét kis szögelfordulások esetén mátrixos formában, számszerű adatokkal.

Kidolgozás:

A rezgőrendszer szabadságfoka: $i = 2$. Az általános koordináták legyenek: $q_1 = x_A$ és $q_2 = x_B$.
A B és a C pontok közötti D csuklós megtámasztás miatt kis szögelfordulások esetén írható:

$$tg\varphi = \frac{x_B}{3l} = \frac{x_C}{l} \Rightarrow x_C = \frac{x_B}{3}.$$

Az általános koordináták és deriváltjaik:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = x_A \ , \ q_2 = x_B \\ \dot{q}_1 = \dot{x}_A \ , \ \dot{q}_2 = \dot{x}_B \\ \ddot{q}_1 = \ddot{x}_A \ , \ \ddot{q}_2 = \ddot{x}_B \end{array}\right\} \quad \underline{\underline{q}} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} \ , \quad \underline{\underline{\ddot{q}}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{x}_B \end{bmatrix}.$$

A *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet-rendszer: $\frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{q}_i}\right) - \frac{dE}{dq_i} = 0$, (i=1, 2).

A rendszer kinetikai energiája:

$$E = \frac{1}{2}m_1 v_A^2 + \frac{1}{2}m_2 v_C^2 = \frac{1}{2}m_1 v_A^2 + \frac{1}{2}m_2 v_C^2 = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{\dot{x}_B}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_A^2 + \frac{1}{18}m_2 \dot{x}_B^2.$$

A rugókban felhalmozódott alakváltozási energia:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2}\frac{\left(x_B - x_A\right)^2}{c_1} + \frac{1}{2}\frac{x_B{}^2}{c_2} + \frac{1}{2}\frac{x_C{}^2}{c_3} = \frac{1}{2}\frac{\left(x_B - x_A\right)^2}{c_1} + \frac{1}{2}\frac{x_B{}^2}{c_2} + \frac{1}{2}\frac{(x_B/3)^2}{c_3},$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{\left(x_B - x_A\right)^2}{c_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{9\,c_3}\right)x_B{}^2.$$

Az első mozgásegyenlet felírása (i=1):

Az egyenlet bal oldalán álló mennyiségek:

$$\frac{dE}{d\dot{q}_1}=\frac{dE}{d\dot{x}_A}=m_1\dot{x}_A \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{x}_A}\right)=m_1\ddot{x}_A\,.$$

$$\frac{dE}{dq_1}=\frac{dE}{dx_A}=0.$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_{c1}=-\frac{dU}{dq_1}=-\frac{dU}{dx_A}=-\left[\frac{\left(x_B-x_A\right)}{c_1}(-1)\right]=-\left(\frac{1}{c_1}x_A-\frac{1}{c_1}x_B\right).$$

A második mozgásegyenlet felírása (i=2):

Az egyenlet bal oldalán álló mennyiségek:

$$\frac{dE}{d\dot{q}_2}=\frac{dE}{d\dot{x}_B}=\frac{1}{9}m_2\dot{x}_B \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{x}_B}\right)=\frac{1}{9}m_2\ddot{x}_B\,.$$

$$\frac{dE}{dq_2}=\frac{dE}{dx_B}=0\,.$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_{c2}=-\frac{dU}{dq_2}=-\frac{dU}{dx_B}=-\left[\frac{\left(x_B-x_A\right)}{c_1}\left(+1\right)+\left(\frac{1}{c_2}+\frac{1}{9c_3}\right)x_B\right]=-\left[-\frac{1}{c_1}x_A+\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{9c_3}\right)x_B\right].$$

A két szabadságfokú rezgőrendszer mozgásegyenlet-rendszere:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_A+\frac{1}{c_1}x_A\qquad\qquad\qquad\quad -\frac{1}{c_1}x_B&=0\\ \frac{1}{9}m_2\ddot{x}_B-\frac{1}{c_1}x_A+\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{9c_3}\right)x_B&=0 \end{aligned}\right\}$$

A mozgásegyenlet-rendszer mátrixos alakban felírva:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9}m_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}}\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{x}_B \end{bmatrix}}_{\underline{\ddot{x}}}+\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} & -\frac{1}{c_1} \\ -\frac{1}{c_1} & \left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{9c_3}\right) \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}}\underbrace{\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}}_{\underline{x}}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{x}=\underline{0}.$$

$$\text{A tömegmátrix: } \underline{\underline{M}}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9}m_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\text{kg}\,,$$

$$\text{a rugómátrix: } \underline{\underline{C}}=\begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} & -\frac{1}{c_1} \\ -\frac{1}{c_1} & \left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{9c_3}\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2500 & -2500 \\ -2500 & 15000 \end{bmatrix}\frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

A rezgőrendszer mozgásegyenlet-rendszere a példa adataival:

$$\begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{x}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2500 & -2500 \\ -2500 & 15000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$