

Dr. Égert János
Dr. Molnár Zoltán
Dr. Nagy Zoltán

ALKALMAZOTT MECHANIKA



UNIVERSITAS-GYŐR Nonprofit Kft. ♦ Győr, 2010



SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
MŰSZAKI TUDOMÁNYI KAR
ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK

ALKALMAZOTT MECHANIKA egyetemi mesterképzésben résztvevő mérnök-hallgatók számára

Írta: Dr. Égert János – Dr. Molnár Zoltán - Dr. Nagy Zoltán

Lektorálta: Dr. Szabó Tamás tszv. egyetemi docens
Miskolci Egyetem, Robert Bosch Mechatronikai Tanszék

ISBN:

© UNIVERSITAS-GYŐR Nonprofit Kft., 2010

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, illetve rövidített változata kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában nem sokszorosítható.

Kiadja az UNIVERSITAS-GYŐR Nonprofit Kft.
Felelős kiadó: a Kft. mindenkori ügyvezetője.
Műszaki szerkesztő: Nagy Zoltán.
Készült a Palatia Nyomda és Kiadó Kft. nyomdájában.
Felelős vezető Radek József.

Tartalomjegyzék

0. BEVEZETÉS	
1. MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ	
1.1. Vektorok és vektorműveletek	
1.2. Gyakorló feladatok vektorműveletekre	
1.3. Mátrixalgebrai összefoglaló	
1.4. Vektorok skaláris, kétszeres vektoriális és diadikus szorzata	
1.5. Mátrix sajátértékei és sajátvektorai	
1.6. Tenzorok előállítása	
1.7. Gyakorló feladatok vektorokra, mátrixokra, tenzorokra	
1.8. Differenciálegyenletek	
1.8.1. Közönséges lineáris differenciálegyenletek	
1.8.2. Euler típusú differenciálegyenletek	
2. ALAPFOGALMAK	
3. ERŐRENDSZEREK	
3.1. Koncentrált erő megadása	
3.2. Erő nyomatéka	
3.3. Erő nyomatéki vektortere	
3.4. Koncentrált erőrendszerek	
3.5. Erőrendszerek egyenértékűsége	
3.6. Erőrendszer egyensúlya	
3.7. Gyakorló feladatok erőrendszerekre	
4. TÉRBELI STATIKAI FELADATOK	
4.1. Közös ponton támadó erőrendszerek	
4.2. Szétszórt erőrendszerek	
4.3. Gyakorló feladatok térbeli és síkbeli statikai feladatokra	
5. RUDAK IGÉNYBEVÉTELEI, IGÉNYBEVÉTELI ÁBRÁI	
5.1. Az igénybevételek értelmezése	
5.2. Az igénybevételek meghatározása	
5.3. Az igénybevételi ábrák / igénybevételi függvények	
5.3.1. A megoszló terhelés hatása	
5.3.2. A koncentrált erő hatása	
5.3.3. A koncentrált nyomaték hatása	
5.3.4. Az egyensúlyi egyenletek integrál alakja	
5.3.5. Általánosítás térbeli esetre	
5.3.6. Az igénybevételi ábrák megrajzolásának gondolatmenete	
5.4. Gyakorló feladatok rudak igénybevételeire és igénybevételi ábráira	
6. SZILÁRDSÁGTANI ÁLLAPOTOK	
6.1. Alapfogalmak	
6.2. Az elmozdulási állapot	

6.3.	Az alakváltozási állapot	
6.4.	A feszültségi állapot	
6.5.	Gyakorló feladatok szilárdságtani állapotokra	
7.	RUDAK EGYESZÉRŰ IGÉNYBEVÉTELEI	
7.1.	Prizmatikus rúd húzása, zömök rúd nyomása	
7.2.	Húzott-nyomott rudak tönkremenetele	
7.3.	Kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak csavarása	
7.4.	Prizmatikus rudak egyenes hajlítása	
7.5.	Gyakorló feladatok rudak egyszerű igénybevételeire	
8.	RUDAK ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEI	
8.1.	Tönkremeneteli elméletek	
8.2.	Húzás-nyomás és egyenes hajlítás	
8.3.	Kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak húzás-nyomása és csavarása	
8.4.	Kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak hajlítása és csavarása	
8.5.	Nyírás és hajlítás	
8.6.	Gyakorló feladatok rudak összetett igénybevételeire	
9.	RÚDSZERKEZETEK ALAKVÁLTOZÁSA	
9.1.	Statikailag határozott rúdszerkezetek elmozdulása, szögelfordulása	
9.2.	Statikailag határozatlan szerkezetek támasztóerői	
10.	RUGALMASSÁGTANI EGYENLETEK	
10.1.	Egyensúlyi egyenletek	
10.2.	Kinematikai (kompatibilitási, geometriai) egyenletek	
10.3.	Anyagegyenletek – általános Hooke törvény	
10.4.	Peremfeltételek	
10.5.	A kompatibilitási egyenletek más alakjai	
10.6.	Gyakorló feladatok a rugalmasságtan egyenleteire	
11.	A RUGALMASSÁGTAN 2D FELADATAI	
11.1.	A sík alakváltozás	
11.2.	Az általánosított sík-feszültségi állapot	
11.3.	Forgásszimmetrikus feladatok	
11.4.	Síkfeladatok megoldása feszültség-függvénnyel	
11.4.1.	A sík-alakváltozás és az általánosított sík-feszültségi állapot össze- használat	
11.4.2.	Az Airy-féle feszültség-függvény	
11.5.	Síkbeli forgásszimmetrikus feladatok	
11.5.1.	Vastag falú csövek	
11.5.2.	Gyorsan forgó csőtengelyek, tengelyek	
11.6.	Gyakorló feladatok a rugalmasságtan 2D feladataira	
12.	KINEMATIKA, KINETIKA	
12.1.	Anyagi pont mozgása	

12.1.1.	A mozgásfüggvény, a pályagörbe	
12.1.2.	A sebességfüggvény, a sebességvektor	
12.1.3.	A gyorsulásfüggvény, a gyorsulásvektor	
12.1.4.	A mozgásjellemzők közötti kapcsolat	
12.1.5.	Gyakorló feladatok anyagi pont mozgására	
12.2.	Merev test mozgása	
12.2.1.	Alapfogalmak	
12.2.2.	Merev test sebességállapota	
12.2.3.	Az elemi síkmozgás	
12.2.4.	Merev test gyorsulásállapota	
12.2.5.	Gyakorló feladatok merev test mozgására	
12.3.	Merev test kinetikája	
12.3.1.	Merev test tömegeloszlásának jellemzői	
12.3.2.	Merev test impulzusa, impulzusnyomatéka	
12.3.3.	Merev test kinetikai energiája	
12.3.4.	Merev testre ható erőrendszer teljesítménye	
12.3.5.	Merev testre ható erőrendszer munkája	
12.3.6.	Az impulzustétel	
12.3.7.	A perdület tétel	
12.3.8.	Energiatétel, munkatétel	
12.3.9.	Merev test kényszermozgása	
12.3.10.	Gyakorló feladatok merev test kinetikájára	
13.	DINAMIKAI FELADATOK	
13.1.	Forgó tömegek kiegyensúlyozása	
13.1.1.	A tömegkiegyensúlyozás célkitűzése	
13.1.2.	A tömegkiegyensúlyozás megvalósítása	
13.2.	Forgórészek meghajtása és üzemeltetése	
13.3.	Testek ütközése	
13.3.1.	Feltételezések, fogalmak	
13.3.2.	Testek centrikus ütközése	
13.3.3.	Testek excentrikus ütközése	
14.	IRODALOM	

0. BEVEZETÉS

Az Alkalmazott Mechanika tárgy a Széchenyi István Egyetem Műszaki Tudományi Karán a Mechatronikai mérnöki, a Közlekedésmérnöki és a Logisztikai mérnöki egyetemi mesterképzési (MSc) szak tantervében szereplő kötelező tantárgy.

A tantárgy az egyetemi alapképzés mechanika oktatását meghaladó színvonalon, igényes matematikai apparátus felhasználásával, rendkívül tömören, vázlatszerűen foglalja össze a mérnöki munkához szükséges statika, szilárdságtan, kinematika és kinetika leglényegesebb fogalmait és összefüggéseit. Ezzel lehetőséget teremt az egyetemi alapképzést az adott szakon folytató hallgatóknak mechanikai ismereteik bővített, magasabb színvonalú megerősítésére, a korábban kevesebb mechanikai ismeretet szerzett hallgatóknak pedig tudásuk egyetemi szintre hozására. A tananyag összeállításánál a szerzők arra törekedtek, hogy a mérnöki mechanikának a fenti MSc szakok számára fontos fejezeteire térjenek ki.

A jegyzet első fejezete az anyag megértéséhez szükséges matematikai ismereteket foglalja össze. A mechanikai elméleti tananyagot kidolgozott gyakorló feladatok, valamint további ki nem dolgozott gyakorló feladatok egészítik ki, amelyek önálló gyakorlásra is lehetőséget biztosítanak. Az önálló feladatmegoldásnak az elméleti anyag megértése és megtanulása, valamint a kidolgozott feladatok gondolatmenetének megértése után célszerű neki kezdeni. A tananyag elsajátítása a félév során folyamatos munkát igényel. A vizsgára történő eredményes felkészüléshez célszerű a tananyaggal heti 3-4 órát intenzíven foglalkozni és a jegyzetből 15-20 oldalnyi anyagot feldolgozni.

A jegyzet - az előadásokon, gyakorlatokon és konzultációkon történő részvételt feltételezve - segítséget szándékoznak nyújtani a nappali tagozatos hallgatóknak a tantárgy elsajátításához és a vizsgára történő eredményes felkészüléshez. Hasznos segédeszköz lehet azonban a levelező tagozatos egyetemi mesterképzésben résztvevő hallgatók számára is, akik nagyobb részt önállóan készülnek fel a félévközi házi feladatok megoldására és a vizsgára.

Az eredményes felkészüléshez a hallgatók az Alkalmazott Mechanika Tanszék honlapján a <http://www.sze.hu/am/> címen további oktatási segédanyagokat, kidolgozott elméleti kérdéseket találnak.

Az Alkalmazott Mechanika tantárgy anyagának elsajátításához a jegyzet szerzői eredményes munkát kívánnak.

A szerzők ezen a helyen mondanak köszönetet Dr. Szabó Tamás tanszékvezető egyetemi docensnek, a jegyzet lektorának hasznos és érdemi szakmai észrevételeiért, amelyek a jegyzet végleges változatába beépültek. Köszönet illeti Aczél Ákos egyetemi tanársegédet is a jegyzet nyers változatának alapos átnézéséért és korrekciós javaslataiért.

Győr, 2010. december

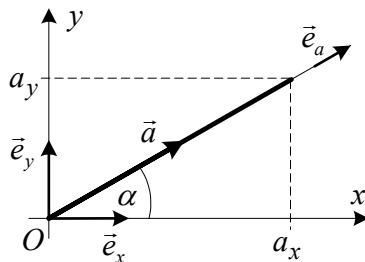
1. MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ

1.1. Vektorok és vektorműveletek

Skaláris mennyiség: olyan geometriai, vagy fizikai mennyiség, amelyet nagyság, (előjel) és mértékegység jellemez.

Vektor mennyiség: irányított geometriai, vagy fizikai mennyiség, amelyet nagyság (előjel), irány és mértékegység jellemez.

a) Vektor megadása:



Egységvektorok: $\vec{e}_x, \vec{e}_y$.

Az egységvektorok hossza egységnyi:

$$|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = 1.$$

Egy tetszőleges vektor megadása egységvektorokkal: $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$.

Ha ismert az $\vec{a}$ vektor hossza és az x tengellyel bezárt szöge, akkor az előző összefüggésből:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha \vec{e}_x + |\vec{a}| \sin \alpha \vec{e}_y = |\vec{a}| (\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y) = |\vec{a}| \vec{e}_a$$

Az $\vec{a}$ vektor hosszát a Pithagorasz-tétel segítségével számíthatjuk ki: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

Könnyen belátható az is, hogy $\vec{e}_a$ vektor egységvektor:

$$|\vec{e}_a| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1.$$

A vektorok közötti műveletek a vektorok támadáspontjához, vagy hatásvonalhoz kötöttségtől függetlenül érvényesek.

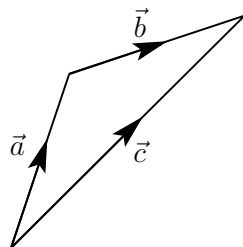
b) Vektorok összeadása:

Legyen adott két vektor: $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y, \quad \vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y$.

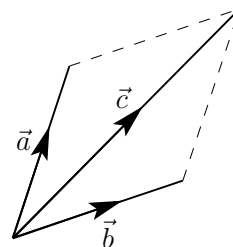
A két vektor összegének kiszámítása:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y) + (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y) = \underbrace{(a_x + b_x)}_{c_x} \vec{e}_x + \underbrace{(a_y + b_y)}_{c_y} \vec{e}_y = \vec{c}.$$

A két vektor összegének megszerkesztése:



Háromszög szabály



Paralelogramma szabály

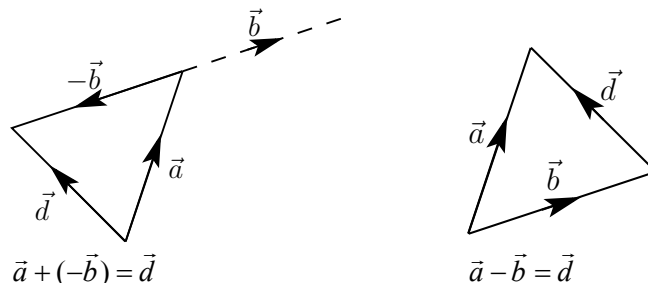
c) Vektorok kivonása:

Legyen adott két vektor: $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$, $\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y$.

A két vektor különbségének kiszámítása:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y) - (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y) = \underbrace{(a_x - b_x)}_{d_x} \vec{e}_x + \underbrace{(a_y - b_y)}_{d_y} \vec{e}_y = \vec{d}$$

Két vektor különbségének megszerkesztése:



d) Vektorok skaláris szorzása (az eredmény skaláris mennyiség):

A skaláris szorzás értelmezése: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$.

A skaláris szorzás kiszámítása: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Az $\vec{a} \cdot \vec{b}$ jelölés kiejtése (kiolvasása): a skalárisan szorozva bével.

Egységvektorok skaláris szorzata: $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$, $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1$, $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$,
 $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$, $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$, $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$.

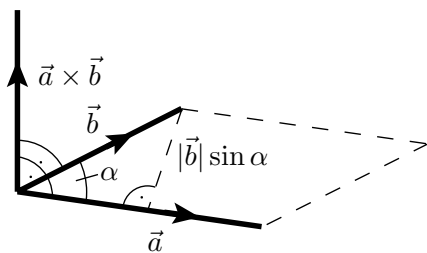
Az eredmény általánosítása: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ és $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Az $\vec{a} \perp \vec{b}$ jelölés kiejtése (kiolvasása): a merőleges bére.

e) Vektorok vektoriális szorzata (az eredmény vektor):

A vektoriális szorzás értelmezése:

Az eredményvektor nagysága: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \underbrace{|\vec{b}| \sin \alpha}_{\text{a paralelogramma magassága}}$.



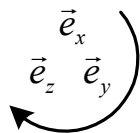
Az eredményvektor irányát ún. jobbkéz szabállyal kapjuk meg: ha jobb kézzel az $\vec{a}$ vektort a $\vec{b}$ vektorba forgatjuk, akkor a jobb kéz hüvelykujja adja meg az eredményvektor irányát.

Az eredményvektor merőleges a szorzásban szereplő mindkét vektorra.

A vektoriális szorzás kiszámítása:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x(a_y b_z - b_y a_z) - \vec{e}_y(a_x b_z - b_x a_z) + \vec{e}_z(a_x b_y - b_x a_y).$$

Egységvektorok
vektoriális szorzata:



$$\begin{aligned} \vec{e}_x \times \vec{e}_x &= \vec{0}, & \vec{e}_y \times \vec{e}_y &= \vec{0}, & \vec{e}_z \times \vec{e}_z &= \vec{0}, \\ \vec{e}_x \times \vec{e}_y &= \vec{e}_z, & \vec{e}_y \times \vec{e}_z &= \vec{e}_x, & \vec{e}_z \times \vec{e}_x &= \vec{e}_y, \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_x &= -\vec{e}_z, & \vec{e}_x \times \vec{e}_z &= -\vec{e}_y, & \vec{e}_z \times \vec{e}_y &= -\vec{e}_x. \end{aligned}$$

Szabály: - Ha két egységvektort az ábrán látható nyíllal megegyező sorrendben szorzunk össze vektoriálisan, akkor pozitív előjellel kapjuk a harmadik egységvektort.

- Ha két egységvektort az ábrán látható nyíllal ellentétes sorrendben szorzunk össze vektoriálisan, akkor negatív előjellel kapjuk a harmadik egységvektort.

Az eredmény általánosítása: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.

f) Vektorok kétszeres vektoriális szorzata (az eredmény vektor):

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}, \text{ vagy } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Kiszámítás kétféle úton lehetséges:

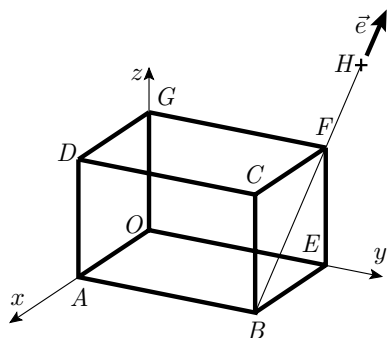
- a két vektoriális szorzásnak a kijelölt sorrendben történő elvégzésével,

- a kifejtési szabállyal:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}), \text{ ill. } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

1.2. Gyakorló feladatok vektorműveletekre

1.2.1. feladat: Helyvektorok felírása, összegzése, abszolút értékének meghatározása



Adott: egy hasáb, valamint a H pont helye:

$$\overline{AB} = 8 \text{ m}, \quad \overline{BE} = 3 \text{ m},$$

$$\overline{AD} = 6 \text{ m}, \quad \overline{FH} = 0,5 \overline{BF}.$$

Feladat: a) A H pont $\vec{r}_H$ helyvektorának meghatározása.

b) A H -ból a B pontba mutató $\vec{r}_{HB}$ helyvektor meghatározása.

Kidolgozás:

a) A H pont $\vec{r}_H$ helyvektorának meghatározása:

$$\vec{r}_H = \vec{r}_{OF} + \vec{r}_{FH}.$$

$$\vec{r}_{OF} = \vec{r}_F = (8\vec{e}_x + 6\vec{e}_z) \text{ m},$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}_{BF}}{|\vec{r}_{BF}|} = \frac{1}{\sqrt{45}}(-3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z) \text{ m}, \quad \vec{r}_{BF} = (-3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z) \text{ m},$$

$$|\vec{r}_{BF}| = \sqrt{x_{BF}^2 + z_{BF}^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} \text{ m},$$

$$|\vec{r}_{FH}| = 0,5\sqrt{45} \text{ m},$$

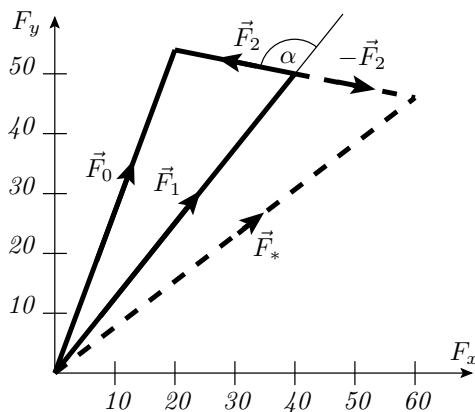
$$\vec{r}_{FH} = |\vec{r}_{FH}| \vec{e} = \frac{\sqrt{45}}{2} \frac{1}{\sqrt{45}}(-3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z) = (-1,5\vec{e}_x + 3\vec{e}_z) \text{ m},$$

$$\vec{r}_H = (8\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) + (-1,5\vec{e}_x + 3\vec{e}_z) = (-1,5\vec{e}_x + 8\vec{e}_y + 9\vec{e}_z) \text{ m}.$$

b) A H -ból a B pontba mutató $\vec{r}_{HB}$ helyvektor meghatározása.

$$\vec{r}_{HB} = -\frac{3}{2} |\vec{r}_{BF}| \vec{e} = -\frac{3}{2} \sqrt{45} \frac{1}{\sqrt{45}}(-3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z) \text{ m}, \quad \vec{r}_{HB} = (4,5\vec{e}_x - 9\vec{e}_z) \text{ m}.$$

1.2.2. feladat: Vektorok összege, különbsége, egymással bezárt szöge



Adott: $\vec{F}_1 = (40\vec{e}_x + 50\vec{e}_y) \text{ N},$

$$\vec{F}_2 = (-20\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) \text{ N}.$$

Feladat:

a) A két erő $\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ összegvektorának meghatározása.

b) A két erő $\vec{F}_* = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ különbségvektorának meghatározása.

c) A két erővektor által bezárt α_{12} szög meghatározása.

Kidolgozás:

a) A két erő $\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ összegvektorának meghatározása:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (40\vec{e}_x + 50\vec{e}_y) + (-20\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) = (20\vec{e}_x + 54\vec{e}_y) \text{ N}.$$

b) A két erő $\vec{F}_* = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ különbségvektorának meghatározása:

$$\vec{F}_* = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = (40\vec{e}_x + 50\vec{e}_y) - (-20\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) = (60\vec{e}_x - 46\vec{e}_y) \text{ N}.$$

c) A két erővektor által bezárt α_{12} szög meghatározása:

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = |\vec{F}_1| |\vec{F}_2| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2}{|\vec{F}_1| |\vec{F}_2|}.$$

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = 40(-20) + 50 \cdot 4 = -800 + 200 = -600 \text{ N}^2, \quad |\vec{F}_1| = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} = \sqrt{40^2 + 50^2} = 64,03 \text{ N},$$

$$|\vec{F}_2| = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} = \sqrt{20^2 + 4^2} = 20,40 \text{ N}, \quad \cos \alpha = \frac{-600}{64,03 \cdot 20,40} = -0,45934,$$

$$\alpha = \arccos(-0,45934) = 117,34^\circ.$$

1.2.3. feladat: Vektor koordinátái és összetevői

Adott:

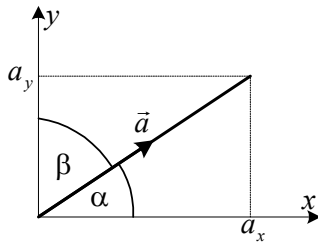
$$\vec{a} = (10\vec{e}_x + 5\vec{e}_y) \text{ m.}$$

Feladat:

- a) Az $\vec{a}$ vektor x és y irányú skaláris koordinátáinak meghatározása.
b) Az $\vec{a}$ vektor x és y irányú összetevőinek meghatározása.

Kidolgozás:

- a) A vektor koordinátatengely irányú koordinátáinak meghatározása (skaláris mennyiségek):



A skaláris szorzás értelmezéséből:

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{e}_x = |\vec{a}| |\vec{e}_x| \cos \alpha = |\vec{a}| \cos \alpha,$$

$$a_y = \vec{a} \cdot \vec{e}_y = |\vec{a}| |\vec{e}_y| \cos \beta = |\vec{a}| \cos \beta.$$

A skaláris koordináták kiszámítása:

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{e}_x = (10\vec{e}_x + 5\vec{e}_y) \cdot \vec{e}_x = 10\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + 5\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = 10 \text{ m},$$

$$a_y = \vec{a} \cdot \vec{e}_y = (10\vec{e}_x + 5\vec{e}_y) \cdot \vec{e}_y = 10\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y + 5\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 5 \text{ m}.$$

- b) A vektor koordinátatengely irányú összetevői (vektor mennyiségek):

$$\vec{a}_x = a_x \vec{e}_x = (10\vec{e}_x) \text{ m}, \quad \vec{a}_y = a_y \vec{e}_y = (5\vec{e}_y) \text{ m}.$$

1.2.4. feladat: Vektor koordinátái és összetevői

Adott:

$$\vec{b} = (6\vec{e}_x + 6\vec{e}_y) \text{ m},$$

$$\vec{a} = (12\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) \text{ m}.$$

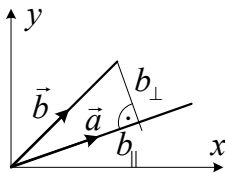
Feladat:

- a) A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányú $b_{||}$ és $\vec{a}$ irányra merőleges $b_{\perp}$ skaláris koordinátáinak meghatározása.
b) A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányú $b_{||}$ és $\vec{a}$ irányra merőleges $b_{\perp}$ összetevőinek meghatározása.

Kidolgozás:

- a) Adott irányú koordináták meghatározása:

A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányú koordinátája ($\vec{a}$ irányra eső vetülete):



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \underbrace{|\vec{b}| \cos \alpha}_{b_{||}} \Rightarrow b_{||} = |\vec{b}| \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 96 \text{ m}^2,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \approx 12,65 \text{ m},$$

$$b_{||} = \frac{96}{12,65} = 7,59 \text{ m}.$$

A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányra merőleges koordinátája (az $\vec{a}$ irányra merőleges vetülete):

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot \underbrace{|\vec{b}| \sin \alpha}_{b_{\perp}} \Rightarrow b_{\perp} = |\vec{b}| \sin \alpha = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 12 & 4 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z (72 - 24) = (48 \vec{e}_z) \text{ m}^2, \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 48 \text{ m}^2, \quad |\vec{a}| = 12,65 \text{ m}.$$

$$b_{\perp} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{48}{12,65} = 3,79 \text{ m}.$$

b) Adott irányú összetevők meghatározása:

A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányú összetevője:

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{12,65} (12 \vec{e}_x + 4 \vec{e}_y) = (0,9486 \vec{e}_x + 0,3162 \vec{e}_y),$$

$$\vec{b}_{\parallel} = b_{\parallel} \vec{e}_a = 7,59 (0,9486 \vec{e}_x + 0,3162 \vec{e}_y) = (7,2 \vec{e}_x + 2,4 \vec{e}_y) \text{ m}.$$

A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányra merőleges összetevője:

$$\vec{b}_{\perp} = \underbrace{\left(\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \times \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right)}_{\vec{e}_{\perp}} \underbrace{|\vec{b}| \sin \alpha}_{b_{\perp}} = \left(\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha} \times \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right) |\vec{b}| \sin \alpha = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2}.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} = (48 \vec{e}_z) \times (12 \vec{e}_x + 4 \vec{e}_y) = (-192 \vec{e}_x + 576 \vec{e}_y) \text{ m}^3,$$

$$\vec{b}_{\perp} = \frac{-192 \vec{e}_x + 576 \vec{e}_y}{160} = (-1,2 \vec{e}_x + 3,6 \vec{e}_y) \text{ m}.$$

$$\text{Ellenőrzés: } \vec{b} = \vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp} = (7,2 \vec{e}_x + 2,4 \vec{e}_y) + (-1,2 \vec{e}_x + 3,6 \vec{e}_y) = (6 \vec{e}_x + 6 \vec{e}_y) \text{ m}.$$

1.2.5. feladat: Vektorok skaláris szorzata

Adott: $\vec{F}_1 = (40 \vec{e}_x + 18 \vec{e}_y - 26 \vec{e}_z) \text{ kN}$, Kérdés:

$\vec{F}_2 = (-2 \vec{e}_x + 2 \vec{e}_y + 3 \vec{e}_z) \text{ kN}$, Mekkora legyen F_{3y} , ha azt akarjuk, hogy $(\vec{F}_1 + \vec{F}_3)$

$\vec{F}_3 = (F_{3y} \vec{e}_y)$. merőleges legyen $\vec{F}_2$ -re?

Kidolgozás:

Ha $\vec{a} \perp \vec{b}$, akkor $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \underbrace{\alpha}_{90^\circ} = 0$.

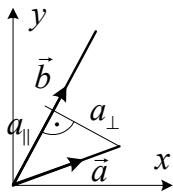
Ezért teljesülnie kell az $(\vec{F}_1 + \vec{F}_3) \cdot \vec{F}_2 = 0$ összefüggésnek.

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_3) \cdot \vec{F}_2 = [40 \vec{e}_x + (18 + F_{3y}) \vec{e}_y - 26 \vec{e}_z] \cdot (-2 \vec{e}_x + 2 \vec{e}_y + 3 \vec{e}_z) = 0,$$

$$-40 \cdot 2 + (18 + F_{3y}) 2 - 26 \cdot 3 = 0, \quad -80 + 36 + 2F_{3y} - 78 = 0,$$

$$2F_{3y} = 122 \quad \Rightarrow \quad F_{3y} = 61 \text{ kN}.$$

1.2.6. feladat: Vektor koordinátái és összetevői



Adott:

$$\vec{a} = (3\vec{e}_x + \vec{e}_y) \text{ N}, \quad \vec{b} = (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \text{ N}.$$

Feladat:

- Az $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ irányú $a_{\parallel}$ és a $\vec{b}$ irányra merőleges $a_{\perp}$ skaláris koordinátáinak meghatározása.
- Az $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ irányú $\vec{a}_{\parallel}$ és a $\vec{b}$ irányra merőleges $\vec{a}_{\perp}$ összetevőinek meghatározása.

Megoldás:

- Az $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ irányú $a_{\parallel}$ és a $\vec{b}$ irányra merőleges $a_{\perp}$ skaláris koordinátái:

$$a_{\parallel} = 2,235 \text{ N}, \quad a_{\perp} = 2,235 \text{ N}.$$

- Az $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ irányú $\vec{a}_{\parallel}$ és a $\vec{b}$ irányra merőleges $\vec{a}_{\perp}$ összetevői:

$$\vec{a}_{\parallel} \approx (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \text{ N}, \quad \vec{a}_{\perp} \approx (2\vec{e}_x - \vec{e}_y) \text{ N}.$$

1.3. Mátrixalgebrai összefoglaló

- Mátrix értelmezése, jelölése:

Mátrix: Skaláris mennyiségeknek, számoknak megadott szabály szerint táblázatba rendezett halmaza.

Mátrix jelölése: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$

A mátrixokat kétszer aláhúzott betűvel, a mátrixok elemeit (koordinátáit) alsó indexes betűvel jelöljük. Pl. $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{a}}$ és a_{13} , a_2 stb.

Az a_{13} mátrixelem az $\underline{\underline{A}}$ mátrix első sorában és harmadik oszlopában van.

Mátrix mérete: Például a fenti (2x3)-as méretű $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak két sora és három oszlopa van.

Az a_{13} mátrix elem jelölés kiejtése (kiolvasása): á egy három.

Oszlopmátrix: $\underline{\underline{a}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, sormátrix: $\underline{\underline{a}}^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3].$

Az oszlopmátrixnak egy oszlopa, a sormátrixnak egy sora van.

A sormátrix ugyanannak az oszlopmátrixnak a transzponáltja. A sormátrixot a mátrix betűjelének felső indexébe írt T betű jelöli.

- Mátrixműveletek:

A műveleteket (2x2)-es, (2x1)-es és (1x2)-es mátrixokra mutatjuk be.

- *Mátrix transzponáltja (tükrözés a főátlóra):*

A mátrix főátlóját az azonos indexű elemek alkotják.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}.$$

A transzponálási művelet jele: T (a mátrix felső indexében).

A transzponálás oszlopmátrixból sormátrixot, sormátrixból pedig oszlopmátrixot hoz létre.

Az $\underline{\underline{A}}^T$ jelölés kiejtése (kiolvasása): á transzponált.

- *Mátrixok összeadása, kivonása:*

Csak azonos méretű mátrixok adhatók össze, vonhatók ki egymásból.

$$\underline{\underline{A}} \pm \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} (a_{11} \pm b_{11}) & (a_{12} \pm b_{12}) \\ (a_{21} \pm b_{21}) & (a_{22} \pm b_{22}) \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}.$$

- *Mátrix szorzás (sor-oszlop kombináció):*

Csak olyan mátrixok szorozhatók össze, amelyek teljesítik azt a feltételt, hogy az első szorzótényező oszlopainak száma megegyezik a második szorzótényező sorainak számával.

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}) & (a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}) \\ (a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21}) & (a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}) \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}.$$

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{c}},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{(2 \times 1)} = \begin{bmatrix} (a_{11} b_1 + a_{12} b_2) \\ (a_{21} b_1 + a_{22} b_2) \end{bmatrix}_{(2 \times 1)} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}_{(2 \times 1)}.$$

$$\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{d}}^T,$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}_{(1 \times 2)} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} (a_1 b_{11} + a_2 b_{21}) & (a_1 b_{12} + a_2 b_{22}) \end{bmatrix}_{(1 \times 2)} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix}_{(1 \times 2)}.$$

c) Különleges mátrixok:

- *Egység mátrix:* $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tulajdonsága: $\underline{\underline{E}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}}$.

Az egység mátrix a főátlójában 1-es koordinátákat, a főátlóján kívül 0 elemeket tartalmaz.

Az egység mátrixszal történő szorzás nem változtatja meg a megszorozott mátrixot.

- *Szimmetrikus mátrix:* $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$

A mátrix elemei megegyeznek a főátlóra vett tükörképükkel.

Például $\begin{bmatrix} \underline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ szimmetrikus mátrix.

- *Ferdeszimmetrikus mátrix:* $\underline{A}^T = -\underline{A}$.

A mátrix bármelyik eleme megegyezik a főátlóra vett tükörképének mínusz egyszeresével. Ebből az következik, hogy a főátlóban csak zérus elemek lehetnek.

Például $\begin{bmatrix} \underline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ferdeszimmetrikus mátrix.

1.4. Vektorok skaláris, kétszeres vektoriális és diadikus szorzata

Egyes vektor szorzások mátrixok szorzataként is elvégezhetők.

a) Vektorok skaláris szorzata:

A skaláris szorzás értelmezése: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$.

(α a vektorok között bezárt szög, $\alpha \leq \pi$.)

A skaláris szorzás kiszámítása mátrixszorzással:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Az első szorzó tényező koordinátáit sormátrixba, a második szorzó tényező koordinátáit oszlopmátrixba rendezzük és a szorzást a mátrixszorzás szabályai szerint (sor-oszlop kombináció) végezzük el.

A szorzás eredménye egy skaláris mennyiség.

b) Vektorok diadikus szorzata:

Legyen adott az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ tetszőleges vektor.

Két vektor diadikus szorzatának jelölése: $\vec{a} \circ \vec{b}$, elnevezése: diád.

Az $\vec{a} \circ \vec{b}$ jelölés kiejtése (kiolvasása): á diád bé.

Két vektor diadikus szorzatát a szorzás tulajdonságainak megadásával értelmezzük:

- a diadikus szorzás és a skaláris szorzás *asszociatív* (csoportosítható, azaz szorzások elvégzésének sorrendje felcserélhető):

$$(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \circ (\vec{b} \cdot \vec{c}),$$

- a diád a skaláris szorzás szempontjából *nem kommutatív* (nem mindegy, hogy egy diádot jobbról, vagy balról szorzunk meg skalárisan egy vektorral, mert más eredményt kapunk):

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) \neq (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Ha a szorzás a fenti összefüggéseket kielégíti, akkor a szorzás diadikus.

Két vektor diadikus szorzatának kiszámítása jobbsodrású, derékszögű koordináta-rendszerben:

$$\begin{bmatrix} \vec{a} \circ \vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}.$$

Az első szorzó tényező koordinátáit oszlopmatrixba, a második szorzó tényező koordinátáit sormatrixba rendezzük és a szorzást a mátrix szorzás szabályai szerint (sor-oszlop kombináció) végezzük el. A szorzás eredménye egy kilenc skaláris mennyiséget tartalmazó mátrix.

Egységvektorok diadikus szorzata:

$$[\vec{e}_x \circ \vec{e}_x] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [\vec{e}_y \circ \vec{e}_y] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\vec{e}_z \circ \vec{e}_z] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [\vec{e}_x \circ \vec{e}_y] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\vec{e}_x \circ \vec{e}_z] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [\vec{e}_y \circ \vec{e}_z] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\vec{e}_y \circ \vec{e}_x] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [\vec{e}_z \circ \vec{e}_x] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\vec{e}_z \circ \vec{e}_y] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A skalár számmal történő szorzás mindig diadikus, vagy más szóhasználattal általános szorzás.

1.5. Mátrix sajátértékei és sajátvektorai

a) A sajátérték feladat kitűzése:

Létezik-e olyan $\underline{\underline{n}}$ oszlopmatrix, amellyel az $\underline{\underline{A}}$ négyzetes mátrixot megszorozva, az $\underline{\underline{n}}$ oszlopmatrix valahányszorosát kapjuk:

$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{n}} = \lambda \underline{\underline{n}}$, ahol a λ skaláris mennyiség?

Ha létezik ilyen $\underline{\underline{n}}$ oszlopmatrix, akkor ezt az $\underline{\underline{A}}$ négyzetes mátrix sajátvektorának, a λ skaláris mennyiséget pedig az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékének nevezzük.

b) A sajátérték feladat megoldása:

A sajátérték feladat megoldását egy (2x2)-es mátrixon mutatjuk be.

Az előző egyenletet részletesen kiírva és bal oldalra rendezve:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}, \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

és a szorzásokat elvégezve, az n_x, n_y ismeretlenre homogén lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk:

$$(a_{11} - \lambda)n_x + a_{12}n_y = 0,$$

$$a_{21}n_x + (a_{11} - \lambda)n_y = 0.$$

Az egyenletrendszer nem triviális (nullától különböző) megoldásának feltétele az, hogy a rendszer mátrixából képezett determinánsnak el kell tűnnie:

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{11} - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

A determinánst kifejtve kapjuk a *karakterisztikus egyenletet*:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai a mátrix sajátértékei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{12}a_{21}}}{2}.$$

A homogén lineáris algebrai egyenletrendszernek csak $\lambda = \lambda_1$ és $\lambda = \lambda_2$ esetén van nemtriviális megoldása.

A mátrix sajátértékeit növekvő sorrendben szokás sorszámozni.

Ha az egyes λ_i ($i=1,2$) sajátértékeket behelyettesítjük a homogén lineáris algebrai egyenletrendszerbe, akkor az egyenletrendszer megoldható az n_{ix}, n_{iy} ismeretlenre:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)n_{ix} + a_{12}n_{iy} = 0 \\ a_{21}n_{ix} + (a_{11} - \lambda_i)n_{iy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} n_{ix} = \dots \\ n_{iy} = \dots \end{matrix}, \text{ ahol } i=1,2.$$

Az λ_i ($i=1,2$) sajátértékek behelyettesítése esetén azonban az egyenletrendszer egyenletei egymástól nem lineárisan függetlenek, ezért az egyik egyenletet el kell hagyni és a másik egyenletből csak az n_{ix} / n_{iy} , vagy n_{iy} / n_{ix} ($i=1,2$) hányados határozható meg.

Az n_{ix} és n_{iy} értékét akkor kapjuk meg egyértelműen, ha az $\underline{n}_i^T = [n_{ix} \ n_{iy}]$ sajátvektoroktól megköveteljük, hogy egységvektorok legyenek:

$$\sqrt{n_{ix}^2 + n_{iy}^2} = 1, \quad i=1,2.$$

1.6. Tenzorok előállítása

a) Tenzor értelmezése és tulajdonságai:

Tenzor: Homogén lineáris vektor-vektor függvény által megvalósított leképezés (hozzárendelés).

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = \underline{T} \cdot \vec{v}.$$



A $\underline{T}$ tenzor a tetszőleges $\vec{v}$ vektorhoz a $\vec{w}$ képvektort rendeli hozzá.

A vektor-vektor függvény olyan függvénykapcsolat, amelynek $\vec{v}$ értelmezési tartománya és $\vec{w}$ értékkészlete is vektor mennyiség.

A tenzor tulajdonsága:

- $f(\lambda \vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$, ahol λ tetszőleges skaláris mennyiség (skaláris együttható),
- $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$.

A fenti tulajdonságokból következően fennáll az alábbi összefüggés:

$$\vec{w} = f(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \underbrace{f(\vec{v}_1)}_{\vec{w}_1} + \lambda_2 \underbrace{f(\vec{v}_2)}_{\vec{w}_2} = \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2,$$

ahol λ_1 és λ_2 tetszőleges skaláris együtthatók.

Következmény: A tenzor zérus vektorhoz zérus vektort rendel hozzá: $\vec{0} = f(\vec{0})$.

A tenzor koordináta-rendszertől független fizikai (geometriai, mechanikai) mennyiség.

b) Tenzor előállítása jobbsodratú, derékszögű descartesi koordináta-rendszerben:

- *Tenzor megadása:* - a tenzor koordinátaival (mátrixával) és
- a koordináta-rendszerrel történik.
- *Tenzor koordinátáinak jelölése mátrixba rendezve:*

$$\left[\underline{\underline{T}} \right]_{xyz} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$$

- *Tenzor előállítása derékszögű descartesi KR-ben:*

1. Tétel: - Térbeli esetben minden tenzor egyértelműen megadható három egymásra merőleges egységvektor és ezek képvektorai (három értékpár) ismeretében.
- Síkbeli esetben minden tenzor egyértelműen megadható két egymásra merőleges egységvektor és ezek képvektorai (két értékpár) ismeretében.
2. Tétel: - Térbeli esetben minden tenzor előállítható három diád összegeként.
- Síkbeli esetben minden tenzor előállítható két diád összegeként.

Legyen ismert három értékpár:

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &\rightarrow \vec{a} = f(\vec{e}_x), & \vec{a} &= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z, \\ \vec{e}_y &\rightarrow \vec{b} = f(\vec{e}_y), & \vec{b} &= b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z, \\ \vec{e}_z &\rightarrow \vec{c} = f(\vec{e}_z), & \vec{c} &= c_x \vec{e}_x + c_y \vec{e}_y + c_z \vec{e}_z. \end{aligned}$$

A tenzor diadikus előállítása: $\underline{\underline{T}} = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y + \vec{c} \circ \vec{e}_z)$.

$$\text{A tenzor mátrixa: } \left[\underline{\underline{T}} \right]_{xyz} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix}.$$

A tenzor mátrixát a diadikus előállításban kijelölt diadikus szorzások és az összeadások elvégzésével kapjuk.

A tenzor mátrixának oszlopai az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ képvektorok koordinátáit tartalmazzák. A mátrix első sorában a képvektorok x koordinátái, a második sorban a képvektorok y koordinátái, a harmadik sorban a képvektorok z koordinátái állnak.

1.7. Gyakorló feladatok vektorokra, mátrixokra, tenzorokra

1.7.1. feladat: Mátrix műveletek

Adott:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Feladat:

- Az $\underline{\underline{A}}^T$ és $\underline{\underline{B}}^T$ transzponált mátrixok meghatározása.
- Az $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ összegmátrix és az $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}$ különbségmátrix meghatározása.
- Az $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}$ szorzatmátrix meghatározása.

Kidolgozás:

- Az $\underline{\underline{A}}^T$ és $\underline{\underline{B}}^T$ transzponált mátrixok meghatározása:

$$\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{B}}^T = \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Az $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ összegmátrix és az $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}$ különbségmátrix meghatározása:

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -8 \\ 13 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Az $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}$ szorzatmátrix meghatározása.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} &= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-12) + (-4)(-6) & 2 \cdot 4 + (-4) \cdot 3 \\ 7(-12) + 3(-6) & 7 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -48 & -4 \\ -102 & 37 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.7.2. feladat: Skaláris, diadikus és mátrix szorzás gyakorlása

Adott: $\vec{a} = (4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - \vec{e}_z)$ m,

$\vec{b} = (-3\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z)$ m,

$\vec{c} = (-2\vec{e}_y - 6\vec{e}_z)$ m.

Feladat:

- Az $\vec{a} \cdot \vec{b}$ és az $\vec{a} \circ \vec{b}$ szorzatok meghatározása.
- Az $(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$ és a $\vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$ szorzat meghatározása.

Kidolgozás:

- Az $\vec{a} \cdot \vec{b}$ és az $\vec{a} \circ \vec{b}$ szorzatok meghatározása:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 4(-3) + 6 \cdot 1 + (-1)(-1) = -5 \text{ m}^2,$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= (4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - \vec{e}_z) \circ (-3\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z) = \\ &= \left[(-12\vec{e}_x - 18\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) \circ \vec{e}_x + (4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - \vec{e}_z) \circ \vec{e}_y + \right. \\ &\quad \left. + (-4\vec{e}_x - 6\vec{e}_y + \vec{e}_z) \circ \vec{e}_z \right] \text{ m}^2. \end{aligned}$$

A szögletes zárójelben lévő diádok első szorzó tényezőinek koordinátái a tenzor mátrixának oszlopaiban jelennek meg:

$$\left[\vec{a} \circ \vec{b} \right] = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 4 & -4 \\ -18 & 6 & -6 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ m}^2.$$

b) Az $(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$ és a $\vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$ szorzat meghatározása:

- Az értelmezés alapján:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \vec{a} \circ (\vec{b} \cdot \vec{c}) = \\ &= (4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - \vec{e}_z) \circ \left[(-3\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z) \cdot (-2\vec{e}_y - 5\vec{e}_z) \right] = \\ &= (4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - \vec{e}_z) \circ [-2 + 5] = (12\vec{e}_x + 18\vec{e}_y - 3\vec{e}_z) \text{ m}^3, \end{aligned}$$

- Mátrixszorzással:

$$\left[(\vec{a} \circ \vec{b}) \right] \left[\vec{c} \right] = \begin{bmatrix} -12 & 4 & -4 \\ -18 & 6 & -6 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 + 20 \\ -12 + 30 \\ 2 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ m}^3.$$

A kétféleképp előállított eredmény természetesen megegyezik.

- Az értelmezés alapján:

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) &= (\vec{c} \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = \\ &= \left[(-2\vec{e}_y - 5\vec{e}_z) \cdot (4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - \vec{e}_z) \right] \circ (-3\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z) = \\ &= [-12 + 5] \circ (-3\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z) = (21\vec{e}_x - 7\vec{e}_y + 7\vec{e}_z). \end{aligned}$$

- Mátrixszorzással:

$$\begin{aligned} \left[\vec{c} \right] \left[(\vec{a} \circ \vec{b}) \right] &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & 4 & -4 \\ -18 & 6 & -6 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (36 - 15) & (-12 + 5) & (12 - 5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -7 & 7 \end{bmatrix} \text{ m}^3. \end{aligned}$$

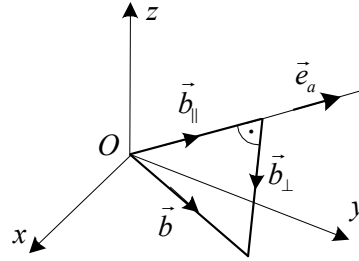
A kétféleképp előállított eredmény természetesen megegyezik.

1.7.3. feladat: Vektor adott irányra merőleges összetevőjének meghatározása

Adott:

$$\vec{b} = (20\vec{e}_x + 40\vec{e}_y - 30\vec{e}_z) \text{ m},$$

$$\vec{e}_a = (0,8\vec{e}_y - 0,6\vec{e}_z),$$



Feladat:

- A $\vec{b}$ vektor $\vec{e}_a$ egységvektorral párhuzamos $\vec{b}_{\parallel}$ összetevőjének meghatározása.
- A $\vec{b}$ vektor $\vec{e}_a$ egységvektorra merőleges $\vec{b}_{\perp}$ összetevőjének meghatározása kétszeres vektoriális szorzással.
- A $\vec{b}$ vektor $\vec{e}_a$ egységvektorra merőleges $\vec{b}_{\perp}$ összetevőjének meghatározása a kifejtési szabállyal.

Kidolgozás:

- A $\vec{b}_{\parallel}$ párhuzamos összetevő meghatározása:

$$\vec{b}_{\parallel} = (\vec{e}_a \cdot \vec{b}) \vec{e}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0,8 & -0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ -30 \end{bmatrix} \vec{e}_a = (32 + 18) \vec{e}_a = 50 \vec{e}_a$$

$$\vec{b}_{\parallel} = 50 \vec{e}_a = 50(0,8\vec{e}_y - 0,6\vec{e}_z) = (40\vec{e}_y - 30\vec{e}_z) \text{ m}.$$

- A $\vec{b}_{\perp}$ merőleges összetevő meghatározása kétszeres vektoriális szorzással:

$$\vec{b}_{\perp} = (\vec{e}_a \times \vec{b}) \times \vec{e}_a.$$

$$(\vec{e}_a \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0,8 & -0,6 \\ 20 & 40 & -30 \end{vmatrix} = \vec{e}_x(-24 + 24) - \vec{e}_y(12) + \vec{e}_z(-16),$$

$$(\vec{e}_a \times \vec{b}) \times \vec{e}_a = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & -12 & -16 \\ 0 & 0,8 & -0,6 \end{vmatrix} = \vec{e}_x(7,2 + 12,8) - \vec{e}_y(0) + \vec{e}_z(0).$$

$$\vec{b}_{\perp} = (\vec{e}_a \times \vec{b}) \times \vec{e}_a = (20\vec{e}_x) \text{ m}.$$

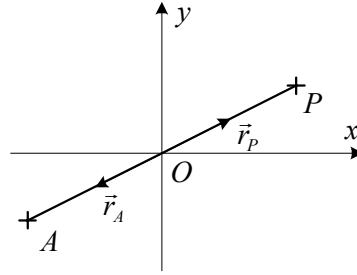
- A $\vec{b}_{\perp}$ összetevő meghatározása a kifejtési szabállyal:

$$\vec{b}_{\perp} = (\vec{e}_a \times \vec{b}) \times \vec{e}_a = \vec{b}(\vec{e}_a \cdot \vec{e}_a) - \vec{e}_a(\vec{b} \cdot \vec{e}_a) = \vec{b} - \vec{b}_{\parallel}.$$

$$\vec{b}_{\perp} = \vec{b} - \vec{b}_{\parallel} = (20\vec{e}_x + 40\vec{e}_y - 30\vec{e}_z) - (40\vec{e}_y - 30\vec{e}_z) = (20\vec{e}_x) \text{ m}.$$

1.7.4. feladat: Tenzor előállítás

Adott: $\vec{r}_p = (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \text{ m}$.



Feladat:

- Annak a $\underline{T}$ tenzor mátrixának az előállítás, amely az xy sík helyvektoraiból a helyvektoroknak a koordináta-rendszer O kezdőpontjára tükrözött vektorait állítja elő.
- Meghatározni azt az $\vec{r}_A$ vektort, amely az $\vec{r}_p$ vektor origóra vett tükörképe.

Kidolgozás:

- A tenzor előállítása:

Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = -\vec{e}_x, \quad \vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = -\vec{e}_y.$$

A két értékpárból a tenzor: $T = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y)$.

$$\text{A tenzor mátrixa: } [\underline{T}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

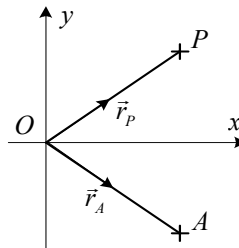
- Az origóra tükrözött $\vec{r}_A$ képvektor meghatározása:

$$\vec{r}_A = \underline{T} \cdot \vec{r}_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{r}_A = (-4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y) \text{ m}.$$

1.7.5. feladat: Tenzor előállítás

Adott: $\vec{r}_p = (4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) \text{ m}$.



Feladat:

- Annak a $\underline{T}$ tenzor mátrixának az előállítás, amely az xy sík helyvektoraiból a helyvektoroknak a koordináta-rendszer x tengelyére tükrözött vektorait állítja elő.
- Meghatározni azt az $\vec{r}_A$ vektort, amely az $\vec{r}_p$ vektor x tengelyre vett tükörképe.

Kidolgozás:

- A tenzor előállítása:

Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = -\vec{e}_y.$$

A két értékpárból a tenzor: $T = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y)$

$$\text{A tenzor mátrixa: } \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Az x tengelyre tükrözött $\vec{r}_A$ képvektor meghatározása:

$$\vec{r}_A = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{r}_A = (4\vec{e}_x - 3\vec{e}_y) \text{ m}.$$

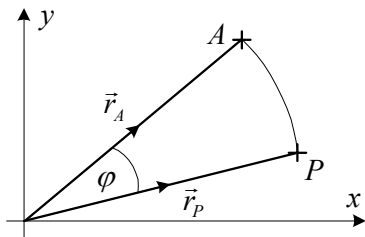
1.7.6. feladat: Tenzor előállítás

Adott: $\varphi = 30^\circ$, $\vec{r}_P = (4\vec{e}_x + \vec{e}_y) \text{ m}$.

Feladat:

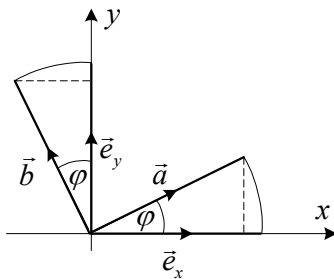
a) Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítás, amely az xy sík helyvektoraiból a helyvektorok z tengely körül φ szöggel elforgatott vektorait állítja elő.

b) Meghatározni azt az $\vec{r}_A$ vektort, amelyet az $\vec{r}_P$ vektor φ szöggel történő elforgatásával kapunk.



Kidolgozás:

a) A tenzor előállítás:



Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y),$$

$$\vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = (-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y).$$

A két értékpárból a tenzor:

$$T = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y)$$

A diádok kiszámítása:

$$[\vec{a} \circ \vec{e}_x] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & 0 \\ a_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\vec{b} \circ \vec{e}_y] = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_x \\ 0 & b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi \\ 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

$$\text{A tenzor mátrixa: } \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,5 \\ 0,5 & 0,866 \end{bmatrix}.$$

b) Az elforgatott $\vec{r}_A$ vektor meghatározása:

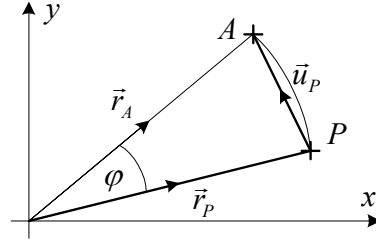
$$\vec{r}_A = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,5 \\ 0,5 & 0,866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,964 \\ 2,866 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_A = (2,964 \vec{e}_x + 2,866 \vec{e}_y) \text{ m}.$$

1.7.7. feladat: Tenzor előállítás

Adott:

$$\varphi = 45^\circ, \vec{r}_P = (5 \vec{e}_x + 2 \vec{e}_y) \text{ m}.$$



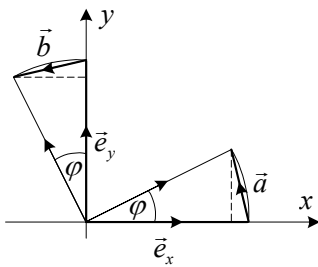
Feladat:

a) Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítás, amely az xy sík helyvektoraihoz a helyvektorok z tengely körül φ szöggel történő elforgatásakor a helyvektorok végpontjainak elmozdulás vektorait rendeli hozzá.

b) Meghatározni $\vec{r}_P$ vektor végpontjának $\vec{u}_P$ elmozdulás vektorát a φ szöggel történő elforgatásnál.

Kidolgozás:

a) A $\underline{\underline{T}}$ tenzor előállítás:



Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = -(1 - \cos \varphi) \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = -\sin \varphi \vec{e}_x - (1 - \cos \varphi) \vec{e}_y.$$

A két értékpárból a tenzor:

$$T = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y).$$

A tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} (\cos \varphi - 1) & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & (\cos \varphi - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,293 & -0,707 \\ 0,707 & -0,293 \end{bmatrix}.$$

b) Az $\vec{u}_P$ elmozdulásvektor meghatározása:

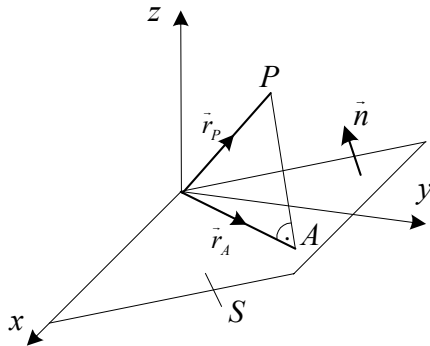
$$\vec{u}_P = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} -0,293 & -0,707 \\ 0,707 & -0,293 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,879 \\ 2,949 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_P = (-2,879 \vec{e}_x + 2,949 \vec{e}_y) \text{ m}.$$

1.7.8. feladat: Tenzor előállítás

Adott: $\vec{n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_z\right)$, $\vec{r}_P = (5\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 10\vec{e}_z)$ m.

Feladat:



- a) Annak a $\underline{T}$ tenzor mátrixának az előállítás, amely a tér minden helyvektorához a helyvektoroknak az $\vec{n}$ normálisú S síkba eső vetületvektorát rendel hozzá.
- b) Meghatározni $\vec{r}_P$ vektornak az adott $\vec{n}$ normálisú S síkba eső $\vec{r}_A$ vetületvektorát.

A vetületvektort úgy kapjuk, hogy az $\vec{r}_P$ vektor végpontját merőlegesen vetítjük az S síkra.

Kidolgozás:

a) A $\underline{T}$ tenzor előállítás:

A tetszőleges $\vec{v}$ vektor S síkba eső $\vec{w}$ vetületvektora:

$$\vec{w} = \vec{n} \times (\vec{v} \times \vec{n}) = \underbrace{\vec{v}(\vec{n} \cdot \vec{n})}_{=1} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{v}) = \vec{v} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{v}).$$

Térbeli esetben a tenzort három értékpárja határozza meg:

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = \vec{e}_x - \underbrace{\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{e}_x)}_{=0} = \vec{e}_x,$$

$$\vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = \vec{e}_y - \underbrace{\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{e}_y)}_{=-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \vec{e}_y - \frac{\vec{n}}{\sqrt{2}} = \vec{e}_y - \frac{1}{2}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\vec{e}_z = \left(\frac{1}{2}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\vec{e}_z\right),$$

$$\vec{e}_z \rightarrow \vec{c} = \vec{e}_z - \underbrace{\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{e}_z)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \vec{e}_z + \frac{\vec{n}}{\sqrt{2}} = \vec{e}_z + \frac{1}{2}\vec{e}_y - \frac{1}{2}\vec{e}_z = \left(\frac{1}{2}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\vec{e}_z\right).$$

A három értékpárból a tenzor: $T = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y + \vec{c} \circ \vec{e}_z)$.

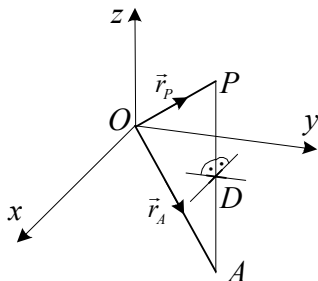
A tenzor mátrixa: $[\underline{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$

b) Az $\vec{r}_P$ vektornak az adott $\vec{n}$ normálisú síkba eső $\vec{r}_A$ vetületvektorának meghatározása:

$$\vec{r}_A = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ m.}$$

$$\vec{r}_A = (5\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \text{ m.}$$

1.7.9. feladat: Tenzor előállítás



Adott: $\vec{r}_P = (3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \text{ m.}$

Feladat:

- Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítás, amely a tér minden helyvektorához a helyvektoroknak az xy síkra vett tükörkép-vektorát rendeli hozzá.
- Meghatározni $\vec{r}_P$ vektornak az xy síkra vett $\vec{r}_A$ tükörkép-vektorát.

A tükörkép-vektort a következőképpen kapjuk: Az $\vec{r}_P$ vektor végpontját merőlegesen vetítjük az xy síkra. A D pont a vetítő egyenes dőfpontja az xy síkon.

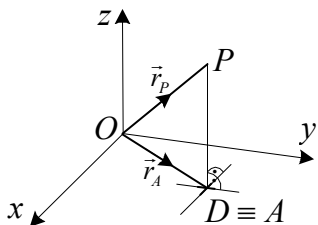
Megoldás:

- A hozzárendelést megvalósító tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Az $\vec{r}_A$ tükörkép-vektor: $\vec{r}_A = (3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 6\vec{e}_z) \text{ m.}$

1.7.10. feladat: Tenzor előállítás



Adott: $\vec{r}_P = (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 8\vec{e}_z) \text{ m.}$

Feladat:

- Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítás, amely a tér minden helyvektorához a helyvektoroknak az xy síkba eső vetületvektorát rendeli hozzá.
- Meghatározni $\vec{r}_P$ vektornak az xy síkba eső $\vec{r}_A$ vetületvektorát.

A vetületvektort úgy kapjuk, hogy az $\vec{r}_P$ vektor végpontját merőlegesen vetítjük az xy síkra. A D pont a vetítő egyenes dőfpontja az xy síkon. A vetületvektor a D pontba mutató vektor.

Megoldás:

- A hozzárendelést megvalósító tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Az $\vec{r}_A$ vetületvektor: $\vec{r}_A = (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) \text{ m.}$

1.7.11. feladat: Tenzor (mátrix) sajátértékeinek és sajátvektorainak előállítása

Adott: az $\underline{\underline{A}}$ tenzor az xyz Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerbeli mátrixával:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Feladat: az $\underline{\underline{A}}$ tenzor λ_1 , λ_2 sajátértékei és a hozzájuk tartozó $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ sajátvektorok meghatározása és szemléltetése

Kidolgozás:

A feladatban szereplő mátrix szimmetrikus, ezért két valós sajátértéket és két, egymásra merőleges sajátvektort várunk.

A karakterisztikus egyenlet felírása:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{n} = \lambda \vec{n} = \lambda \underline{\underline{E}} \cdot \vec{n} \quad \Rightarrow \quad (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{n} = \vec{0}.$$

Ez egy homogén, lineáris egyenletrendszer az $\vec{n}$ vektor n_x, n_y koordinátáira, melynek csak akkor van a triviálistól (vagyis az zérustól) különböző megoldása, ha az egyenletrendszer együtthatóiból képzett mátrix determinánsa nullával egyenlő:

$$\det[\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}] = 0.$$

A fenti mátrix elemeit behelyettesítve és a determinánst kifejtve:

$$\det \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{3}{4} = 0.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve, kapjuk a karakterisztikus egyenletet: $4\lambda^2 - 4 = 0$.

A karakterisztikus egyenlet két megoldása, vagyis a keresett sajátértékek:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1, \\ \lambda_2 &= -1. \end{aligned}$$

A sajátvektorok meghatározása:

- A $\lambda_1 = 1$ -hez tartozó $\vec{n}_1$ sajátvektor meghatározása:

A $\lambda_1 = 1$ -et visszahelyettesítjük a lineáris algebrai egyenlet-rendszerbe:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - 1\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A mátrixszorzást elvégezve két ismeretlenes egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{aligned} -n_x + \sqrt{3}n_y &= 0 \\ \sqrt{3}n_x - 3n_y &= 0 \end{aligned}$$

A két egyenlet azonban nem független egymástól (az elsőt $-\sqrt{3}$ -mal szorozva éppen a másodikat kapjuk), így ez az egyenletrendszer csak a sajátvektor koordinátáinak arányát, vagyis a sajátvektor irányát határozza meg.

Ezért még felírunk egy független egyenletet: az egységnyi abszolút értékű sajátvektort határozzuk meg:

$$1 = |\vec{n}| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = \sqrt{3n_y^2 + n_y^2} = 2|n_y|.$$

Látható, hogy ezzel a pótlólagos feltétellel a sajátvektor már csak egy előjel erejéig határozatlan.

Ha az $n_y = +\frac{1}{2}$ értéket választjuk, akkor $\vec{n}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y$.

- A $\lambda_2 = -1$ -hez tartozó $\vec{n}_2$ sajátvektor meghatározása:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}+1\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \left(-\frac{1}{2}+1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

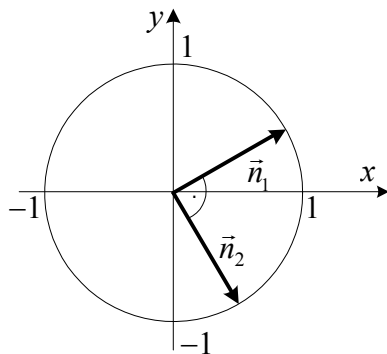
A mátrixszorzást elvégezve két ismeretlenes egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{aligned} 3n_x + \sqrt{3}n_y &= 0 \\ \sqrt{3}n_x + n_y &= 0 \end{aligned}$$

Az egyenletek ebben az esetben sem függetlenek egymástól (itt a szorzó $\sqrt{3}$).

A már alkalmazott normálást ismét elvégezve kapjuk: $\vec{n}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y$.

A megoldás szemléltetése:



Megjegyzés:

Az ábrán látható két sajátvektor merőleges egymásra, amiről a szükséges skaláris szorzás elvégzésével is

$$\text{meggyőződhetünk: } \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Általában is igaz, hogy egy szimmetrikus tenzor különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok mindig merőlegesek egymásra. Ennek bizonyításához a sajátvektorokat definiáló egyenletet szorozzuk be balról egy másik sajátvektorral: $\vec{n}_2 \underline{\underline{A}} \vec{n}_1 = \vec{n}_2 \lambda_1 \vec{n}_1$.

Kihasználva a tenzor szimmetriáját, azt kapjuk, hogy: $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 = \lambda_2 \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 = \lambda_1 \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1$.

Átrendezve: $(\lambda_2 - \lambda_1) \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 = 0$, amiből következik a két sajátvektor merőlegessége, hiszen mindkettő nagysága különbözik nullától, a két sajátérték pedig a feltétel szerint különböző.

1.8. Differenciálegyenletek

Differenciálegyenlet: olyan matematikai egyenlet, amely egy vagy több változós ismeretlen függvény és deriváltjai közötti kapcsolatot írja le.

Fontosabb típusok: közönséges differenciálegyenletek, parciális differenciálegyenletek, (sztochasztikus differenciálegyenletek, késleltetett differenciálegyenletek).

Közönséges differenciálegyenlet: olyan matematikai egyenlet, amely egy független változójú függvény és deriváltjai közötti összefüggést adja meg.

Pl. $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F$, ahol $x = x(t)$ (Newton II. törvénye)

Parciális differenciálegyenlet: olyan matematikai egyenlet, amely az ismeretlen többváltozós függvény és a parciális deriváltjai közötti kapcsolatot írja le.

Pl. $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0$; és a megoldás $u(x, y) = f(y)$.

1.8.1. Közönséges lineáris differenciálegyenletek

Az közönséges n-edrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja:

$$A_n(x)y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + A_1(x)y' + A_0(x)y = R(x),$$

ahol:

- az $A_n(x), A_{n-1}(x), \dots, A_1(x), A_0(x), R(x)$ adott, folytonos függvények,

- az $R(x)$ függvény az úgynevezett *zavarótag*,

- az $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$, $y^{(n-1)} = \frac{d^{(n-1)} y}{dx^{(n-1)}}$, $\dots$, $y' = \frac{dy}{dx}$ az ismeretlen $y = y(x)$ függvény deriváltjai.

Ha $R(x) \equiv 0$, akkor a differenciálegyenlet *homogén*, ellenkező esetben *inhomogén*.

A jobb áttekintés kedvéért a (129) bal oldalát a következő módon szokás jelölni:

$$L_n(y) = A_n(x)y^n + A_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + A_1(x)y' + A_0(x)y.$$

A fenti jelölés segítségével az n-ed rendű lineáris differenciálegyenlet az alábbi módon írható:

$$L_n(y) = R(x).$$

Az n-ed rendű lineáris differenciálegyenletekre vonatkozó főbb általános tételek:

a) A homogén differenciálegyenletekre vonatkozó általános tételek:

1. Ha az $y = y_1(x)$ egy homogén differenciálegyenlet megoldása, akkor $y = C y_1(x)$ is e homogén differenciálegyenlet megoldása, ahol C tetszőleges állandó.

2. Ha $y = y_1(x), y = y_2(x)$ egy homogén differenciálegyenlet megoldásai, akkor ennek a differenciálegyenletnek $y = y_1(x) + y_2(x)$ is megoldása.
3. Az 1. és 2. alapján következik: ha valamely homogén differenciálegyenlet megoldásai az $y = y_1(x), y = y_2(x), \dots, y = y_m(x)$ függvények, akkor az $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_m y_m(x)$ is e differenciálegyenlet megoldása.
4. Az $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ függvények valamely intervallumban egymástól *lineárisan függetlenek*, ha itt a $d_1 y_1(x) + d_2 y_2(x) + \dots + d_n y_n(x) = 0$ egyenlet (ahol $d_1, d_2, \dots, d_n$ állandók) csak $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 0$ esetén teljesül az intervallum tetszőleges x számára.

Az n -edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet

$$y = y_1(x), y = y_2(x), \dots, y = y_n(x)$$

megoldásai *alapszert* alkotnak a differenciálegyenlet megoldási intervallumában, ha itt ezek egymástól lineárisan függetlenek.

A lineáris függetlenségre egy elegendő feltételt szolgáltat e függvények *Wronski-féle determinánsa*:

$$W(x) = \det \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Ha a megoldási intervallumban $W(x) \neq 0$, akkor az $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ függvények egymástól itt lineárisan függetlenek.

A fentiek alapján belátható, hogy a homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásának problémája egy alapszert meghatározásának problémáját jelenti. Ez lényegesen egyszerűbb feladat az általános esethez viszonyítva, ha a differenciálegyenlet *állandó együtthatójú*: $A_i(x) = a_i$ ($i \neq 0, 1, 2, \dots, n$).

5. Ha egy homogén differenciálegyenletnek az $y = u(x) + iv(x)$ alakú komplex függvény megoldása, akkor ennek valós, illetve képzetes része is megoldás.
6. Ha valamely n -ed rendű homogén differenciálegyenlet egyik $y = y_p(x)$ partikuláris megoldását ismerjük, amelyre nézve $y_p(x) \neq 0$ a megoldási intervallumban, akkor a differenciálegyenlet általános megoldását lényegében egy elsőrendű és egy $(n-1)$ -ed rendű homogén differenciálegyenlet megoldására vezethetjük vissza az alább részletezendő módon (ez az ún. *d'Alembert-féle redukciós eljárás*).

Az $y = y(x)$ függvényt vegyük fel $y = y_p(x)z(x)$ alakban, ahol $z = z(x)$ egyelőre ismeretlen, de akárhányszor differenciálható függvény. Vegyük most tekintetbe, hogy

$$\begin{aligned}
y' &= y_p z' + y_p' z, \\
y'' &= y_p z'' + 2y_p' z' + y_p'' z, \\
&\dots\dots\dots \\
y^{(n)} &= y_p z^n + \binom{n}{1} y_p' z^{(n-1)} + \binom{n}{2} y_p'' z^{(n-2)} + \dots + y_p^{(n)} z.
\end{aligned}$$

Ha ezeket az $L_n(y) = 0$ differenciálegyenletbe helyettesítjük, akkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
&A_n(x) y_p z^{(n)} + \left[\binom{n}{1} A_n(x) y_p' + A_{n-1}(x) y_p \right] z^{(n-1)} + \dots + \\
&+ \left[A_n(x) y_p^{(n)} + A_{n-1}(x) y_p^{(n-1)} + \dots + A_1(x) y_p' + A_0(x) y_p \right] z = 0.
\end{aligned}$$

Ha most a $z' = u$ helyettesítést végezzük (ez lesz az említett első rendű differenciálegyenlet), akkor az előbbi differenciálegyenlet az $u(x)$ számára egy $(n-1)$ -ed rendű lineáris homogén differenciálegyenlet, mivel a z együtthatója zérus a feltevés miatt (az $y = y_p(x)$ a homogén lineáris differenciálegyenlet egyik megoldása!). Legyen $u = u_1(x)$, $u = u_2(x)$, $\dots$, $u = u_{n-1}(x)$ a keletkezett $(n-1)$ -ed rendű differenciálegyenlet alapszere. Ekkor a kiindulási n -ed rendű differenciálegyenlet lapszere a következő lesz:

$$y_p(x); \quad y_p(x) \int u_1(x) dx; \quad y_p(x) \int u_2(x) dx; \quad \dots; \quad y_p(x) \int u_{n-1}(x) dx.$$

b) Az inhomogén differenciálegyenletekre vonatkozó általános tételek:

1. Ha az inhomogén differenciálegyenletben az $R(x)$ helyébe zérust helyettesítünk, akkor megkapjuk az adott inhomogén differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenletet. Ha ennek ismerjük az $y = y_{h, \text{ált}}(x)$ általános megoldását, továbbá ismerjük az inhomogén differenciálegyenlet egy $y = y_{inh, p}(x)$ partikuláris megoldását, akkor az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y = y_{h, \text{ált}}(x) + y_{inh, p}(x).$$

2. Ha az $L_n(y) = R_1(x)$, illetve az $L_n(y) = R_2(x)$ egyenletnek $y = y_1(x)$, illetve $y = y_2(x)$ megoldása, akkor az $L_n(y) = R_1(x) + iR_2(x)$ egyenletnek az $y = y_1(x) + iy_2(x)$ megoldása, és ennek a megfordítása is igaz.
3. Ha az adott inhomogén differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenlet egyik alapszereit ismerjük, akkor ebben az esetben az alább részletezendő módon (az *állandók variálásának módszere, Lagrange dolgozta ki*) az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása meghatározható.

Először is írjuk az $A_n(x) y^{(n)} + A_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + A_1(x) y' + A_0(x) y = R(x)$

differenciálegyenletet az $A_n(x)$ függvénnyel való osztás segítségével ún. kanonikus alakba:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x),$$

$$a_i(x) = \frac{A_i(x)}{A_n(x)}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad r(x) = \frac{R(x)}{A_n(x)}.$$

Az $r(x)$ helyébe zérust írva, megkapjuk az inhomogén differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenletet.

Ha ennek egyik $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $\dots$, $y = y_n(x)$ alaprendszer ismeretes, akkor a homogén differenciálegyenlet általános megoldása ismert módon $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ alakban írható fel, ahol a $C_1, C_2, \dots, C_n$ állandók.

Tegyük fel, hogy ezek nem állandók, hanem az x függvényei:

$$C_1 = C_1(x), \quad C_2 = C_2(x), \quad \dots, \quad C_n = C_n(x)$$

és feladatunk a következőt tűzzük ki: ezeket az ismeretlen függvényeket úgy kell meghatároznunk, hogy a kanonikus alakba való helyettesítésük után az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását nyerjük.

Ebből a célból először is feltesszük, hogy a $C_i(x)$ függvények $(n-1)$ -szer folytonosan differenciálhatók, azaz $C_i^{(n-1)}(x)$ mint folytonos függvény létezik.

Vegyük tehát az $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x)$ függvényt, ahol a későbbiekben az x változó feltüntetését a rövidség kedvéért elhagyjuk. Az ismeretlen $C_i(x)$ függvényeket több feltételezés segítségével határozzuk meg.

Először is feltesszük, hogy a megoldási intervallumban $C_1'y_1 + C_2'y_2 + \dots + C_n'y_n = 0$.

Ekkor kapjuk a megoldás differenciálásával: $y' = C_1y_1' + C_2y_2' + \dots + C_ny_n'$.

Hasonlóan a $C_1'y_1' + C_2'y_2' + \dots + C_n'y_n' = 0$ feltételezés révén az $y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + \dots + C_ny_n''$ egyenletet nyerjük.

Általánosan: $y^{(p)} = C_1y_1^{(p)} + C_2y_2^{(p)} + \dots + C_ny_n^{(p)}$, ha $C_1'y_1^{p-1} + C_2'y_2^{p-1} + \dots + C_n'y_n^{p-1} = 0 \quad (p < n)$.

Az $y^{(n)}$ függvényt úgy kapjuk, hogy az előző összefüggésben a $p = n-1$ esetet vesszük és differenciáljuk:

$$y^{(n)} = C_1y^{(n)} + C_2y^{(n)} + \dots + C_ny^{(n)} + C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'y_n^{(n-1)}.$$

Az így kiszámított $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ értékeket helyettesítjük be a differenciálegyenletbe, ekkor a

$$C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'y_n^{(n-1)} = r(x)$$

$$y_p'' - 4y = 3x, \text{ behelyettesítés után: } -4Cx = 3x \Rightarrow C = -\frac{3}{4}.$$

$$y_p(x) = -\frac{3}{4}x.$$

Peremfeltételek figyelembevétele: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

$$y(0) = 1 \quad y(0) = 1 = A_1 \underbrace{ch(2 \cdot 0)}_1 + A_2 \underbrace{sh(2 \cdot 0)}_0 - \frac{3}{4} \cdot 0.$$

$$1 = A_1 \underbrace{ch(2 \cdot 0)}_1 \Rightarrow A_1 = 1.$$

$$y'(0) = 4 \quad y'(0) = 4 = A_1 \underbrace{2sh(2 \cdot 0)}_0 + A_2 \underbrace{2ch(2 \cdot 0)}_2 - \frac{3}{4}.$$

$$4 = A_2 \underbrace{2ch(2 \cdot 0)}_2 - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow A_2 = 2 + \frac{3}{8} = \frac{19}{8}.$$

$$\text{A megoldás: } y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ch(2x) + \frac{19}{8}sh(2x) - \frac{3}{4}x.$$

2. példa:

Adott egy másodrendű állandó együtthatós közönséges lineáris differenciálegyenlet valamint az $x=0$ peremen a függvény és deriváltjának értéke:

$$y'' + 4y = 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

Feladat a differenciálegyenlet megoldásának előállítása.

$$\text{Megoldás: } y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Homogén megoldás:

$$\text{homogén differenciálegyenlet: } y_h'' + 4y_h = 0, \quad \text{megoldás keresése } y_h = e^{\lambda x}.$$

$$\underbrace{(\lambda^2 + 4)}_{=0} \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0.$$

$$\text{karakterisztikus egyenlet } \lambda^2 + 4 = 0; \quad \lambda^2 = -4; \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

$$\text{homogén általános megoldás } y_h(x) = C_1 e^{i2x} + C_2 e^{-i2x},$$

$$\text{ahol } e^{i2x} = \cos(2x) + i \sin(2x); \quad e^{-i2x} = \cos(2x) - i \sin(2x),$$

$$\text{azaz } y_h(x) = C_1 [\cos(2x) + i \sin(2x)] + C_2 [\cos(2x) - i \sin(2x)].$$

Az alapmegoldások (bázisok) tetszőleges lineáris kombináció is megoldás:

$$y_h(x) = A_1 \underbrace{\left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} \right)}_{\cos(2x)} + A_2 \underbrace{\left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2} \right)}_{\sin(2x)}.$$

Behelyettesítés után: $y_h(x) = A_1 \cos(2x) + A_2 \sin(2x)$.

Partikuláris megoldás: $y_p'' + 4y_p = 3x$; $y_p(x) = Cx$ (alakban keressük.)

Behelyettesítés után $4Cx = 3x \Rightarrow C = \frac{3}{4}$; $y_p(x) = \frac{3}{4}x$.

Peremfeltételek figyelembevétele: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

$$y(0) = 1 \quad y(0) = 1 = A_1 \underbrace{\cos(2 \cdot 0)}_1 + A_2 \underbrace{\sin(2 \cdot 0)}_0 + \frac{3}{4} \cdot 0.$$

$$1 = A_1 \underbrace{\cos(2 \cdot 0)}_1 \Rightarrow A_1 = 1.$$

$$y'(0) = 4 \quad y'(0) = 4 = -A_1 \underbrace{2 \sin(2 \cdot 0)}_0 + A_2 \underbrace{2 \cos(2 \cdot 0)}_2 + \frac{3}{4}.$$

$$4 = A_2 \underbrace{2 \cos(2 \cdot 0)}_2 + \frac{3}{4} \Rightarrow A_2 = 2 + \frac{3}{4} = \frac{13}{8}.$$

A megoldás: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \cos(2x) + \frac{13}{8} \sin(2x) + \frac{3}{4}x$.

3. példa:

Adott egy kezdeti érték feladat differenciálegyenlete és a $t=0$ időpontban a függvényérték és első deriváltja:

$$\ddot{y} + 9y = 3 \cos 2t \quad \text{és} \quad y(0) = -2; \quad \dot{y}(0) = 3.$$

Feladat az adott kezdeti érték feladat megoldásának előállítás.

Megoldás: $y(x) = y_h(t) + y_p(t)$

Homogén megoldás:

$$\text{homogén differenciálegyenlet: } \ddot{y}_h + 9y_h = 0, \quad \text{megoldás keresése } y_h = e^{\lambda t}.$$

$$\underbrace{(\lambda^2 + 9)}_{=0} \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0$$

$$\text{karakterisztikus egyenlet} \quad \lambda^2 + 9 = 0; \quad \lambda^2 = -9; \quad \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-1} \sqrt{9} = \pm i3.$$

$$\text{homogén általános megoldás} \quad y_h(t) = C_1 e^{i3t} + C_2 e^{-i3t},$$

$$\text{ahol } e^{i3t} = \cos(3t) + i \sin(3t); \quad e^{-i3t} = \cos(3t) - i \sin(3t),$$

$$\text{azaz } y_h(x) = C_1 [\cos(3t) + i \sin(3t)] + C_2 [\cos(3t) - i \sin(3t)].$$

Az alapmegoldások (bázisok) tetszőleges lineáris kombináció is megoldás:

$$y_h(x) = A_1 \underbrace{\left(\frac{e^{i3t} + e^{-i3t}}{2} \right)}_{\cos(3t)} + A_2 \underbrace{\left(\frac{e^{i3t} - e^{-i3t}}{2} \right)}_{\sin(3t)}.$$

$$\text{Behelyettesítés után: } y_h(x) = A_1 \cos(3t) + A_2 \sin(3t).$$

Partikuláris megoldás: $\ddot{y}_p + 4y_p = 3 \cos 2t$; $y_p(x) = C \cos 2t$ (alakban keressük.)

a deriváltak: $\dot{y}_p(x) = -C 2 \sin 2t$; $\ddot{y}_p(x) = -C 4 \cos 2t$ behelyettesítése után:

$$-4C \cos 2t + 9C \cos 2t = 3 \cos 2t,$$

$$5C = 3; \quad C = \frac{3}{5}; \quad y_p(x) = \frac{3}{5} \cos 2t.$$

Peremfeltételek figyelembevétele: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

$$y(0) = 1 \quad y(0) = -2 = A_1 \underbrace{\cos(3 \cdot 0)}_1 + A_2 \underbrace{\sin(3 \cdot 0)}_0 + \frac{3}{5} \underbrace{\cos(2 \cdot 0)}_1.$$

$$-2 = A_1 \underbrace{\cos(3 \cdot 0)}_1 + \frac{3}{5}, \quad \Rightarrow \quad A_1 = -2 - \frac{3}{5} = -\frac{13}{5}.$$

$$y'(0) = 4 \quad \dot{y}(0) = 3 = -A_1 \underbrace{3 \sin(3 \cdot 0)}_0 + A_2 \underbrace{3 \cos(3 \cdot 0)}_2 - 2 \frac{3}{5} \cos(2 \cdot 0).$$

$$3 = A_2 \underbrace{3 \cos(3 \cdot 0)}_3, \quad \Rightarrow \quad A_2 = 1.$$

$$\text{A megoldás: } y(t) = y_h(t) + y_p(t) = -\frac{13}{5} \cos(3t) + \sin(3t) + \frac{3}{5} \cos 2t.$$

1.8.2. Az Euler típusú differenciálegyenlet

A változó együtthatójú n -edrendű lineáris differenciálegyenletek közül viszonylag egyszerűen megoldható az *Euler* típusú, amelynél az együtthatók a következő hatványfüggvények:

$$A_i(x) = a_i x^i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n; a_i = \text{állandó}).$$

Így az Euler típusú differenciálegyenlet általános alakja:

$$e_n(y) = a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = R(x).$$

a) Az homogén differenciálegyenletet megoldása:

Az alapszámrendszerhez az $y = x^r$ feltételezéssel jutunk.

Ugyanis $y^{(p)} = (x^r)^{(p)} = r(r-1)\dots[r-(p-1)]x^{(r-p)}$ révén azt kapjuk, hogy

$$e_n(x^r) = g_n(r)x^r = 0,$$

ahol $g_n(r) = a_n r(r-1)\dots[r-(n-1)] + \dots + a_1 r + a_0$ az *Euler*-féle differenciálegyenlet ún. karakterisztikus polinomja.

Az $x=0$ eset kizárásával a $g_n(r)=0$ egyenlet (az ún. karakterisztikus egyenlet) alapján kapunk alapszisztémát az alábbi részletezendő módon.

Ha a karakterisztikus egyenletnek *egyszeres* gyökei vannak – jelölje ezeket $r_1, r_2, \dots, r_n$, akkor az $y = x^{r_1}, y = x^{r_2}, \dots, y = x^{r_n}$ függvények alkotják a differenciálegyenlet alapszisztémáját.

Ha azonban *többszörös* gyökök is vannak, akkor alapszisztémát a következő előírás szerint kapunk:

Legyen pl. az $r = r_k$ s_k -szoros gyök, akkor az $r = r_k$ gyököknek az alapszisztémában a következő függvények fognak megfelelni: $y = x^{r_k}, y = x^{r_k} \ln x, \dots, y = x^{r_k} (\ln x)^{s_k-1}$.

Természetesen, mind az egyszeres, mind a többszörös gyöknél előfordulhat, hogy ezek között komplex számok is vannak. Ekkor is lehet azonban mindig valós alapszisztémát találni. A fenti eljárásnál a *Wronski*-féle determináns segítségével lehet megmutatni, hogy a megadott függvények valóban alapszisztémát alkotnak.

b) Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása a már részletezett módon nyerhető.

c) Példák homogén Euler típusú differenciálegyenlet megoldására:

1. példa:

Adott: $x^2 y'' - 3xy' - 5y = 0$.

Megoldás: Itt az $y = x^r$ feltételezéssel azt kapjuk, hogy a karakterisztikus polinom:
 $g_2(r) = r^2 - 4r - 5 = 0$.

A $g_2(r)=0$ karakterisztikus egyenlet gyökei: $r_1 = 5, \quad r_2 = -1$.

Így alapszisztémát az $y = x^5, \quad y = x^{-1}$ függvények alkotnak, és az adott homogén differenciálegyenlet általános megoldása: $y = C_1 x^5 + C_2 x^{-1}$.

A C_1, C_2 együtthatók peremfeltételekből határozhatók meg.

2. példa: