

9. RUGALMASSÁGTANI EGYENLETEK

a) A rugalmasságtani peremérték feladat megfogalmazása:

Adott: - a test/alkatrész alakja és méretei,
 - a test/alkatrész anyaga,
 - test/alkatrész terhelései és megtámasztásai.

Keresett: $\vec{u}$, $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{A}}$, u , a test szilárdságtani állapotait jellemző mennyiségek.

$\vec{u}(x, y, z)$ a test tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjának elmozdulás vektora,

$\underline{\underline{F}}(x, y, z)$ a test tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjában a feszültségi tenzor,

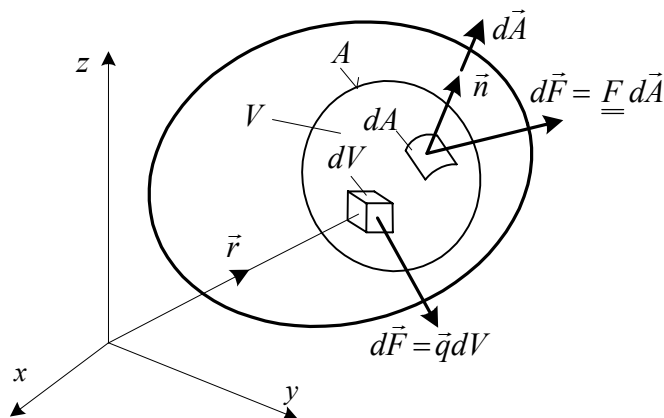
$\underline{\underline{A}}(x, y, z)$ a test tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjában az alakváltozási tenzor,

$u(x, y, z)$ a test tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjában a fajlagos alakváltozási energia.

Kérdés: Milyen általános összefüggések állnak fent ezek között az állapotjellemző mennyiségek között?

Válasz: A rugalmasságtani egyenletek.

b) Az egyensúlyi egyenletek:



A testből kiragadunk egy olyan (V) térfogatot, amelyet az (A) zárt felület határol és amely teljes egészében a test belsejében helyezkedik el.

A (V) környezetének mechanikai hatásait erőkkel vesszük figyelembe:

- az elemi térfogaton megoszló erő: $d\vec{F} = \vec{q} dV$,

- az elemi felületen megoszló erő: $d\vec{F} = \vec{p} dA = \underline{\underline{F}} \underbrace{\vec{n} dA}_{d\vec{A}}$.

A (V) testrész egyensúlyban van:

$$\vec{F} = \vec{0} = \int_{(V)} \vec{q} dV + \int_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA.$$

Matematikai emlékeztető:

- a Gauss (kiejtése: gausz) -Osztrogradszkij-féle integrál átalakítási tétel:

$$\int_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA = \int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV$$

- a *Hamilton-féle* (kiejtése: hemilton), vagy nabla (nábla) differenciál operátor derékszögű descartesi (kiejtése: dékárti) koordináta-rendszerben: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$,

Az integrál átalakítási tételt alkalmazva: $\vec{F} = \vec{0} = \int_{(V)} (\vec{F} \cdot \nabla + \vec{q}) dV$.

Az integrálnak bármely (V) választás esetén el kell tűnnie $\Rightarrow$ az integrandusz zérus.

Az egyensúlyi egyenlet: $\vec{F} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$. (1 vektor egyenlet $\equiv$ 3 db skaláris egyenlet).

A skaláris egyenletek derékszögű descartesi koordináta-rendszerben:

$$(\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) + \vec{q} = \vec{0}.$$

Mátrix alakban felírva:

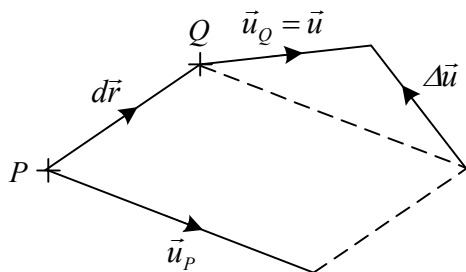
$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A mátrixszorzást elvégezve, három skaláris egyenletet kapunk.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} + q_z &= 0. \end{aligned}$$

Egyensúlyi egyenletek: kapcsolat a térfogati terhelés és a belső erőrendszer/feszültségi állapot között.

c) Kinematikai (geometriai/ kompatibilitási) egyenletek:



A test egy tetszőleges P pontjának elemi környezetét vizsgáljuk meg.

A Q pont a P pont elemi környezetében helyezkedik el.

$$d\vec{r} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z.$$

Az elmozdulás-mező: $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z) = u(x, y, z)\vec{e}_x + v(x, y, z)\vec{e}_y + w(x, y, z)\vec{e}_z$.

A P ponthoz képest a Q pont elmozdulása: $\Delta\vec{u} = \vec{u}_Q - \vec{u}_P = \vec{u} - \vec{u}_P$.

Sorfejtés:

$$\vec{u}(x, y, z) = \underbrace{\vec{u}_P}_{\text{merevtestszerű eltolás}} + \underbrace{\left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right|_P dx + \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \right|_P dy + \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right|_P dz}_{\text{lineáris rész}} + \underbrace{\left(\dots \right)}_{\text{magasabbrendű tagok}}$$

$$\text{Lineáris közelítés esetén: } \Delta\vec{u} \approx d\vec{u} = \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right|_P \underbrace{dx}_{\vec{e}_x \cdot d\vec{r}} + \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \right|_P \underbrace{dy}_{\vec{e}_y \cdot d\vec{r}} + \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right|_P \underbrace{dz}_{\vec{e}_z \cdot d\vec{r}}.$$

$$\text{Minden tagból } d\vec{r} \text{-t kiemelve: } d\vec{u} = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot d\vec{r} = \underline{\underline{D}} \cdot d\vec{r}.$$

Az elmozdulásmező derivált tenzora: $\underline{\underline{D}} = \vec{u} \circ \nabla$ (Nem szimmetrikus tenzor).

A derivált tenzor felbontása (minden tenzor felbontható egy szimmetrikus és egy ferdeszimmetrikus részre):

$$\underline{\underline{D}} = \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T)}_{\text{szimmetrikus rész}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T)}_{\text{ferdeszimmetrikus rész}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{\Psi}}.$$

A forgató tenzor: a P pont elemi környezetének merevtestszerű szögelfordulását jellemzi.

$$\underline{\underline{\Psi}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2}(\vec{u} \circ \nabla - \nabla \circ \vec{u}) \quad (\text{ferdeszimmetrikus}).$$

Az alakváltozási tenzor: a P pont elemi környezetének alakváltozását jellemzi.

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2}(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}) \quad (\text{szimmetrikus}).$$

Kis alakváltozások esetén ez a tenzoregyenlet kinematikai/geometriai egyenlet.

A tenzorok mátrixa részletesen kiírva:

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad [\underline{\underline{D}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad [\underline{\underline{\Psi}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Az alakváltozási tenzor koordinátái (elemei):

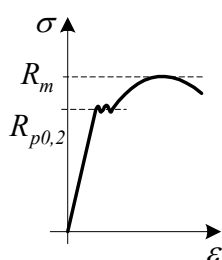
$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Skaláris egyenletek:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \text{ a szimmetria miatt hat skaláris egyenlet.}$$

Kinematikai egyenletek: kapcsolat az alakváltozási tenzor és az elmozdulás vektor koordinátái között. (Az alakváltozási tenzor elemei nem függetlenek egymástól – a három elmozdulásmezőből származtathatók.)

d) Anyagegyenletek – általános Hooke törvény



Az általános Hooke (kiejtése: huk) törvény alinearisan rugalmas, izotróp anyagi viselkedést írja le.

Lineárisan rugalmas: az alakváltozások és a feszültségek között lineáris függvénykapcsolat van.

Izotróp: az anyagi viselkedés iránytól független. (Például a fémek esetében.)

Lineárisan rugalmas alakváltozás esetén a szakító diagram lineáris szakaszán vagyunk.

Az általános Hooke törvény két, egymással egyenértékű alakja:

$$\alpha) \underline{A} = \frac{1}{2G} \left(\underline{F} - \frac{\nu F_I}{1+\nu} \underline{E} \right), \quad \beta) \underline{F} = 2G \left(\underline{A} + \frac{\nu A_I}{1-2\nu} \underline{E} \right).$$

Az egyenletekben szereplő mennyiségek jelentése:

G – csúsztató rugalmassági modulus
 ν – Poisson tényező

F_I – a feszültségi tenzor
 A_I – az alakváltozási tenzor

} első skalár invariánsa,

$$[\underline{\underline{E}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ az egységtenzor.}$$

Az α) alak skaláris egyenletei:

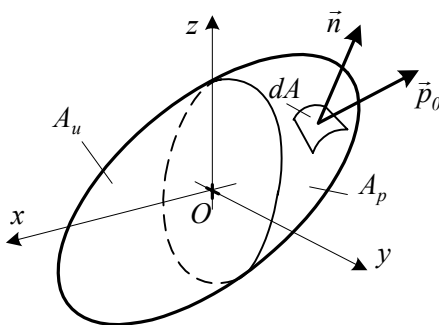
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{yx}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}. \end{aligned}$$

A β) alak skaláris egyenletei:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{xz} &= G \gamma_{xz}. \end{aligned}$$

Anyagegyenletek: kapcsolat az alakváltozások és a feszültségek között.

e) Peremfeltételek:



Dinamikai peremfeltétel: $\underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0$.

A $\vec{p}_0$ előírt (ismert) felületi terhelés az A_p -n.

Kinematikai peremfeltétel: $\vec{u} = \vec{u}_0$.

Az $\vec{u}_0$ előírt (ismert) elmozdulás az A_u -n.

f) A rugalmasságtani peremérték feladat megoldása:

Egzsztencia és unicitás: Bebizonyítható, hogy a rugalmasságtani egyenleteknek adott peremfeltételek mellett egy és csak egy megoldása létezik.

Egzakt megoldás: A keresett mezők (függvények) minden rugalmasságtani egyenletet és peremfeltételt kielégítenek.

Közelítő megoldás: A keresett mezők (függvények) a rugalmasságtani egyenletek és peremfeltételek nem minden egyenletét elégítik ki.

g) A kompatibilitási (összeférhetőségi) egyenlet más alakjai:

- A Saint-Venant (kiejtése: szan-venan) –féle kompatibilitási egyenlet

Tenzoriális alak: $\nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla = \underline{\underline{0}}$.

Skaláris egyenletek a derékszögű descartesi koordináta-rendszerben (DDKR-ben):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}, & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}, & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Fizikai tartalom: az alakváltozási tenzor koordinátái nem függetlenek egymástól.

- A Beltrami-Michell (kiejtése: beltámi-micsel) féle kompatibilitási egyenlet:

A Saint-Venant – féle kompatibilitási egyenletbe behelyettesítjük Hooke-törvényt és $\vec{q} = \vec{0}$.

Tenzoriális alak: $(1 + \nu) \Delta \underline{\underline{F}} + \nabla \circ \nabla F_I = \underline{\underline{0}}$.

A Laplace (kiejtése: laplasz) – féle differenciál operátor DDKR-ben:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Skaláris egyenletek a DDKR-ben:

$$\begin{aligned} (1 + \nu) \Delta \sigma_x + \frac{\partial^2 F_I}{\partial x^2} &= 0, & (1 + \nu) \Delta \tau_{xy} + \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial y} &= 0, \\ (1 + \nu) \Delta \sigma_y + \frac{\partial^2 F_I}{\partial y^2} &= 0, & (1 + \nu) \Delta \tau_{yz} + \frac{\partial^2 F_I}{\partial y \partial z} &= 0, \\ (1 + \nu) \Delta \sigma_z + \frac{\partial^2 F_I}{\partial z^2} &= 0, & (1 + \nu) \Delta \tau_{xz} + \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Fizikai tartalom: Az alakváltozási jellemzők közötti összefüggések következtében a feszültségi tenzor elemei között a fenti összefüggések állnak fenn