

12. KINEMATIKA, KINETIKA

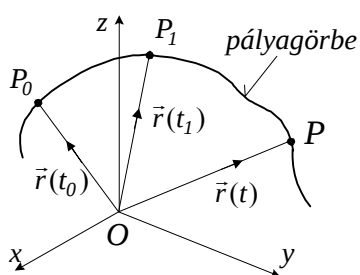
Kinematika: anyagi pontok és merev testek mozgásának leírása

Kinetika: anyagi pontokra és merev testekre ható erők, nyomatékok és a mozgás kapcsolatának tisztázása. A mozgás okainak leírása.

12.1) Anyagi pont mozgása

a) A mozgásfüggvény, a pályagörbe

Mozgásfüggvény: az anyagi pont helyzetét meghatározó helyvektor-idő függvény



$$\vec{r} = \vec{r}(t) \text{ [m]}.$$

Pályagörbe:

1. Definíció: Az a térgörbe melyen az anyagi pont a mozgás során végighalad.
2. Definíció: Az $\vec{r} = \vec{r}(t)$ mozgásfüggvény által meghatározott térgörbe.

Az $\vec{r} = \vec{r}(t)$ mozgásfüggvény megadása:

- Vektoriális alak $\rightarrow$ DDKR: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$,

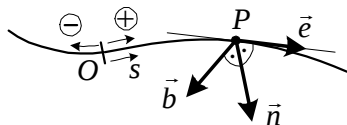
$$\text{HKR: } \vec{r}(t) = R(t)\vec{e}_R + z(t)\vec{e}_z, \text{ ahol } \vec{e}_R = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}.$$

- Skaláris alak $\rightarrow$ DDKR: $x = x(t)$, HKR: $R = R(t)$,

$$y = y(t), \quad \varphi = \varphi(t),$$

$$z = z(t), \quad z = z(t).$$

A mozgásfüggvény természetes KR-ben



Ívkoordináta: a pályagörbén egy O kezdőponttól mért előjeles ívhossz (előjeles távolság).

Kisérő triéder: $\vec{e}, \vec{n}, \vec{b}$. A görbe természetes KR-nek egységvektorai.

- Érintő irányú egységvektor

$$\vec{e} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad |\vec{e}| = 1.$$

- Főnormális egységvektor

$$\frac{d\vec{e}}{ds} = \kappa\vec{n} = \frac{1}{\rho}\vec{n}, \quad |\vec{n}| = 1. \quad (\kappa \dots \text{a térgörbe görbülete, } \rho \text{ térgörbe görbületi sugara})$$

- Binormális egységvektor

$$\vec{b} = \vec{e} \times \vec{n}, \quad |\vec{b}| = 1.$$

Simulósík: az $\vec{e}, \vec{n}$ vektorok által kifeszített sík.

Az anyagi pont helyének megadási lehetőségei:

- $\vec{r} = \vec{r}(t)$ helyvektor – idő függvény,
- $\vec{r} = \vec{r}(s)$ helyvektor – ívkoordináta függvény,

- $s = s(t)$ ívkoordináta (út) – idő függvény (ehhez ismerni kell agörbe alakját).

b) Sebességfüggvény, sebességvektor

Sebességfüggvény: a mozgásfüggvény idő szerinti első deriváltja.

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad [m/s].$$

Pillanatnyi sebességvektor: a sebességfüggvény egy adott t_1 idő-pillanatban felvett értéke:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1).$$

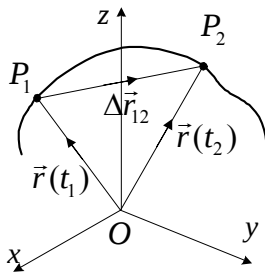
Tulajdonságai: - vektor mennyiség,
- iránya azonos a pályagörbe érintőjével.

$$\text{Bizonyítás: } \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{e} \frac{ds(t)}{dt} = \vec{e} v(t) = v(t) \vec{e}.$$

$$\text{Pálya menti sebesség (pályasebesség): } v(t) = \frac{ds(t)}{dt}.$$

Tulajdonságai: - a sebességvektor érintő irányú koordinátája,
- előjeles skalár mennyiség,
- előjelét az s ívkoordináta irányítása határozza meg.

Közepes sebesség: mindig egy megadott időintervallumra vonatkozik.



A $\langle t_1, t_2 \rangle$ időintervallumra vonatkozó közepes sebesség:

$$\vec{v}_k = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}_{12}}{\Delta t_{12}}.$$

c) Gyorsulásfüggvény, gyorsulásvektor

Gyorsulásfüggvény: a sebességfüggvény idő szerinti első deriváltja

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \quad [m/s^2].$$

Pillanatnyi gyorsulásvektor: $\vec{a}_1 = \vec{a}(t_1)$.

A gyorsulásfüggvény egy adott t_1 időpillanatban vett értéke:

Tulajdonságai: - vektor mennyiség,
- a pályagörbe simulósíkja esik,
- érintő és főnormális irányú összetevőkből áll.

$$\text{Bizonyítás: } \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [v(t) \vec{e}(t)] = \frac{dv(t)}{dt} \vec{e} + v \frac{d\vec{e}(t)}{dt},$$

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d\vec{e}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} \vec{n} v(t) = \frac{v}{\rho} \vec{n},$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt} \vec{e} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} = a_e(t) \vec{e} + a_n(t) \vec{n}.$$

Pálya menti gyorsulás (pályagyorsulás):

$a_e(t) = \frac{dv(t)}{dt}$, a sebesség nagyságának változásával arányos.

Normális gyorsulás:

$a_n(t) = \frac{[v(t)]^2}{\rho}$, a sebesség irányának megváltozásával arányos.

d) A mozgásjellemzők közötti kapcsolat:

- Ismert: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Meghatározandó: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = v(t)\vec{e}$,

$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = a_e(t)\vec{e} + a_n(t)\vec{n}$.

- Ismert: $\vec{a} = \vec{a}(t)$ és a $\vec{v}(t=t_0) = \vec{v}_0$, $\vec{r}(t=t_0) = \vec{r}_0$ kezdeti feltételek.

Meghatározandó: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t)dt$,

$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t)dt$.

- Ismert: $\vec{v} = \vec{v}(t)$ és az $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ kezdeti feltétel.

Meghatározandó: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = a_e(t)\vec{e} + a_n(t)\vec{n}$,

$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t)dt$.

2) Merev test mozgása

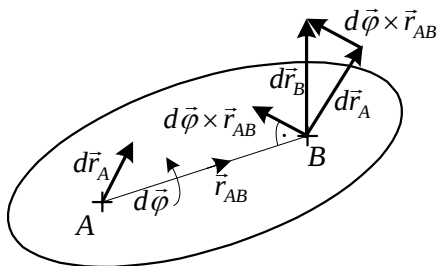
a) Alapfogalmak

- Merev test sebességállapota: A testet alkotó pontok egy adott pillanatbeli sebességeinek összessége.
- Merev test gyorsulásállapota: A testet alkotó pontok egy adott pillanatbeli gyorsulásainak összessége.
- Merev test síkmozgása: A test pontjai egy adott alapsíkkal párhuzamos síkokban mozognak.
- Merev test haladó mozgása: A test önmagával párhuzamosan mozdul el. A test minden pontjának azonos az elmozdulása.
- Merev test forgómozgása: A test pontjai a test két nyugalomban lévő pontját összekötő tengely, a forgástengely körül koncentrikus köríveken mozdulnak el.
- Merev test elemi mozgása: A test végtelenül rövid idő alatt bekövetkező (egy időpillanatban történő) mozgása.

Tétel: Merev test bármely mozgása előállítható egy haladó és egy forgó mozgás összegeként.

b) Merev test sebességállapota

Összefüggés a merev test két pontjának sebessége között.



A merev test végtelenül kis elmozdulását vizsgáljuk: - párhuzamos eltolás $d\vec{r}_A$,

- szögelfordulás $d\vec{\varphi}$.

B pont elmozdulása: eltolás + szögelfordulás $\Rightarrow$

$d\vec{r}_B = d\vec{r}_A + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{AB}$, ahol $d\vec{\varphi}$ az egész merev testre jellemző mennyiség.

Vegyük az összefüggés idő szerinti első deriváltját:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}_{AB} \quad \dots \vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} \text{ - a merev test } B \text{ pontjának sebessége}$$

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \text{ - a merev test } A \text{ pontjának sebessége}$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \text{ - a merev test szögsebessége. Az } \vec{\omega} \text{ az egész}$$

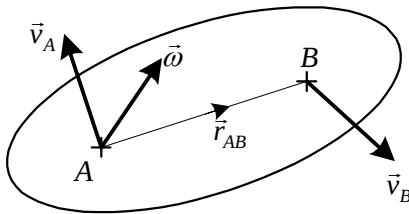
merev testre jellemző mennyiség $[\text{rad} / \text{sec}]$.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

$$\text{Analógia: } \vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}$$

Tétel: merev test sebességállapota egyértelműen megadható $\vec{v}_A, \vec{\omega}$ redukált vektorkettőssel.

Az $\vec{v}_A, \vec{\omega}$ ismeretében a merev test bármely pontjának sebessége meghatározható.



Tétel: merev test két különböző pontjának sebessége általában nem egyenlő.

Kivétel : - $\vec{\omega} = 0$

- $\vec{\omega} \parallel \vec{r}_{AB}$.

c) Elemi síkmozgás

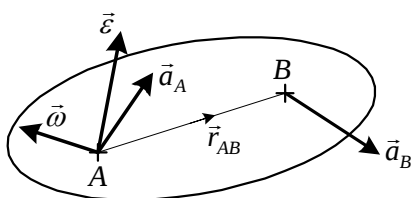
Ha a test bármely pontjának sebessége merőleges $\vec{\omega}$ -ra, azaz párhuzamos az $\vec{\omega}$ -ra merőleges síkokkal.

Sebességpólus: a síknak az a P pontja, amelynek zérus a sebessége $\vec{v}_P$.

Sebességábra: egy adott időpillanatban, egy közös kezdőpontból felmérjük a test jellemző pontjainak sebességvektorait.

d) Merev test gyorsulásállapota

Összefüggés a merev test két pontjának gyorsulása között.



$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ merev test szöggyorsulása. Az $\vec{\epsilon}$ az egész testre jellemző mennyiség $[rad / sec^2]$.
A merev test tetszőleges B pontjának gyorsulása:
 $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\epsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})$.

Tétel: a merev test gyorsulásállapota az $\vec{a}_A$, $\vec{\omega}$ és az $\vec{\epsilon}$ mennyiségekkel adható meg egyértelműen.

Síkmozgás esetén: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\epsilon} \times \vec{r}_{AB} - \omega^2 \vec{r}_{AB}$.

Ha xy a mozgás síkja: $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$, $\vec{\epsilon} = \epsilon \vec{e}_z$.

Gyorsuláspólus: a síknak az a Q pontja melynek zérus a gyorsulása $\vec{a}_Q = \vec{0}$.

Gyorsulásábra: egy adott időpillanatban, egy közös kezdőpontból felmérjük a test jellemző pontjainak gyorsulásvektorait.

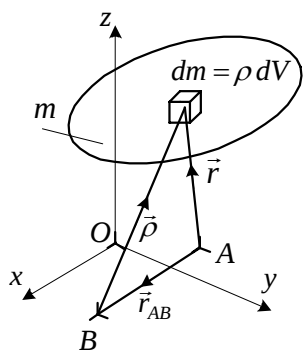
3) Merev test kinetikája

a) Merev test tömegeloszlásának jellemzői

-Tömeg: a merev test haladó mozgással szembeni tehetetlenségét (ellenállását) jellemzi.

$$m = \int_{(m)} dm = \int_{(V)} \rho dV, \quad \rho - \text{tömegsűrűség } [kg / m^3].$$

-Statikai nyomaték:



Pontra számított statikai nyomaték:

$$\vec{S}_A = \int_{(m)} \vec{r} dm = \int_{(V)} \vec{r} \rho dV \quad [kgm].$$

Pontra számított statikai nyomaték átszámítása:

$$\vec{S}_B = \vec{S}_A - m\vec{r}_{AB}.$$

-Tömegközéppont, súlypont: a testnek az a T pontja, amelyre számított statikai nyomaték zérus. $\vec{S}_T = \vec{0}$.

A tömegközéppont helyének kiszámítása:

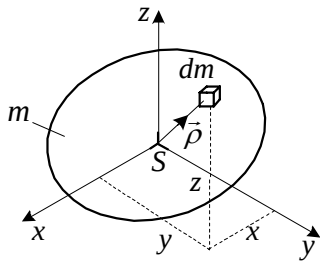
$$\underbrace{\vec{S}_T}_{=\vec{0}} = \vec{S}_A - m\vec{r}_{AT} \Rightarrow \vec{r}_{AT} = \frac{\vec{S}_A}{m} = \frac{\int_{(V)} \vec{r} \rho dV}{m}.$$

Tétel: A tömegközéppont és súlypont egybeesik, ha a $\vec{g}$ állandó.

-Tehetetlenségi (másodrendű) nyomatékok:

A tehetetlenségi (másodrendű) nyomaték a merev test forgó mozgással szembeni

tehetetlenségét fejezi ki.



Az S ponti tehetetlenségi tenzor.

Diadikus előállítása:

$$\underline{\underline{J}}_S = \int_{(m)} [\rho^2 \underline{\underline{E}} - (\vec{\rho} \circ \vec{\rho})] dm.$$

Mátrixos előállítása : $[\underline{\underline{J}}_S] = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}$ - szimmetrikus tenzor.

A tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékok:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm \\ J_y &= \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm \\ J_z &= \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \right\} > 0.$$

J_x a testnek az x tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka $[kgm^2]$.

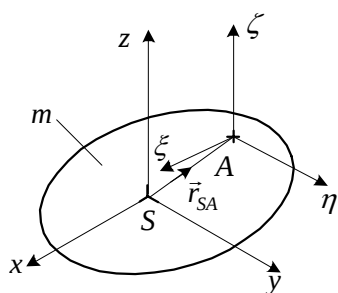
Síkpárra számított (centrifugális) tehetetlenségi nyomatékok:

$$\left. \begin{aligned} J_{xy} &= J_{yx} = \int_{(m)} xy dm \\ J_{yz} &= J_{zy} = \int_{(m)} yz dm \\ J_{xz} &= J_{zx} = \int_{(m)} xz dm \end{aligned} \right\} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0.$$

J_{xy} a testnek az yx - zx síkpárra számított tehetetlenségi nyomatéka $[kgm^2]$.

Tétel: a $\underline{\underline{J}}_S$ -ből az összes S ponti tengelyre és S ponti síkpárra számított tehetetlenségi nyomaték meghatározható.

$$J_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{n}, \text{ továbbá } -J_{nm} = -J_{mn} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{n}.$$



Steiner-tétel:

$$\vec{r}_{SA} = x_{SA} \vec{i} + y_{SA} \vec{j} + z_{SA} \vec{k},$$

A két koordináta-rendszer tengelyei párhuzamosak:

$$x \parallel \xi, y \parallel \eta, z \parallel \zeta.$$

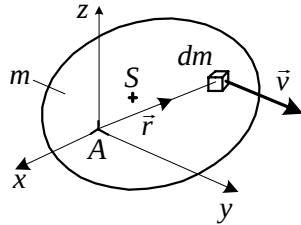
$$\text{A tétel tenzor alakja: } \underline{\underline{J}}_A = \underline{\underline{J}}_S + \underline{\underline{J}}_{SA}.$$

A Steiner- tétel skalár alakjai:

$$\begin{aligned}
 J_{\xi} &= J_x + m(y_{SA}^2 + z_{SA}^2), & J_{\xi\eta} &= J_{xy} + m x_{SA} y_{SA}, \\
 J_{\eta} &= J_y + m(x_{SA}^2 + z_{SA}^2), & J_{\eta\zeta} &= J_{yz} + m y_{SA} z_{SA}, \\
 J_{\zeta} &= J_z + m(x_{SA}^2 + y_{SA}^2), & J_{\xi\zeta} &= J_{xz} + m x_{SA} z_{SA}.
 \end{aligned}$$

Tétel: párhuzamos tengelyek közül az S ponton átmenő tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték a legkisebb.

b) Merev test impulzusa, impulzus nyomatéka:



-Impulzus

Értelmezés: $\vec{I} = \int_{(m)} \vec{v} dm = \int_{(V)} \vec{v} \rho dV$,

mértékegysége: $\left[\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] = \left[\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{s} \right] = [\text{Ns}]$.

Kiszámítása: $\vec{I} = m \vec{v}_S$.

- Impulzus nyomaték/perdület

Értelmezés: $\vec{\pi}_A = \int_{(m)} \vec{r} \times \vec{v} dm$, mértékegysége: $\left[\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] = \left[\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \text{s} \right] = [\text{Ns m}]$.

Kiszámítása:

- speciális esetek: $\vec{\pi}_S = \underline{\underline{J}}_S \vec{\omega}$,

$$\vec{\pi}_P = \underline{\underline{J}}_P \vec{\omega}.$$

S – a merev test súlypontja,

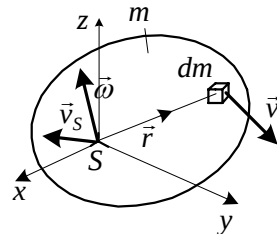
P – a pillanatnyi forgástengely egy pontja ($\vec{v}_P = \vec{0}$).

- Általános eset: $\vec{\pi}_A = \underline{\underline{J}}_A \vec{\omega} + \vec{r}_{AS} \times \vec{v}_A m$.

- Összefüggés test két pontjára számított perdület között: $\vec{\pi}_B = \vec{\pi}_A + \vec{I} \times \vec{r}_{AB}$.

Analógia a Statikából: $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{r}_{AB}$.

c) Merev test kinetikai energiája:



Értelmezés:

$E = \frac{1}{2} \int_{(m)} v^2 dm$, mértékegysége: $\left[\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] = [\text{Nm}] = [\text{J}]$.

Kiszámítás:

$$E = \frac{1}{2} (\vec{v}_S \cdot \vec{I} + \vec{\omega} \cdot \vec{\pi}_S) = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\omega}.$$

Kiszámítás speciális esetekben:

- $\vec{\omega} \parallel$ a $\underline{\underline{J}}_S$ egyik főtengetelyével.

Ekkor $\vec{\omega} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\omega} = J_S \omega^2$, ahol J_S az S ponti, az $\vec{\omega}$ -val párhuzamos főtengetelyre számított tehetetlenségi nyomaték $\Rightarrow$

$$E = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2.$$

- $\vec{v}_A = \vec{0}$ és $\vec{\omega} \parallel$ a $\underline{J}_S$ egyik főtengelyével.

$$E = \frac{1}{2} J_a \omega^2, \text{ ahol } J_a \text{ az } A \text{ ponton átmenő, az } \vec{\omega}\text{-val párhuzamos főtengelyre számított tehetetlenségi nyomaték.}$$

d) Merev testre hat erőrendszer teljesítménye:

- Az ER redukált vektorkettőjét felhasználva: $P = \vec{F} \cdot \vec{v}_S + \vec{M}_S \cdot \vec{\omega}.$

- Az ER-t alkotó erőkkel és nyomatékokkal: $P = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j \cdot \vec{\omega}_j,$

$\vec{v}_i$ az $\vec{F}_i$ erő támadáspontjának sebessége, $\vec{\omega}_j$ annak a merev testnek szögsebessége, amelyre az $\vec{M}_j$ nyomaték hat.

e) Merev testre hat erőrendszer munkája:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

A merev testre ható erőrendszer $< t_1, t_2 >$ időtartam alatt végzett munkája egyenlő az erőrendszer P teljesítményének t_1, t_2 határok között vett idő szerinti integráljával.

f) Impulzus tétel:

$$\dot{\vec{I}} = m \vec{a}_S = \vec{F}$$

A merev test impulzusának idő szerinti deriváltja egyenlő a testre ható külső erők eredőjével.

g) Perdület tétel:

- speciális eset, az S pontra: $\dot{\vec{\pi}}_S = \vec{M}_S,$

$$\underline{J}_S \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{\pi}_S = \vec{M}_S.$$

A merev test S pontjára számított perdületvektor idő szerinti deriváltja egyenlő a testre ható ER-nek a S súlypontra számított nyomatékával.

- általános eset, az A pontra: $\underline{J}_A \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \left(\underline{J}_A \cdot \vec{\omega} \right) + \vec{r}_{AS} \times m \vec{a}_A = \vec{M}_A,$

$$\underline{J}_S \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \left(\underline{J}_S \cdot \vec{\omega} \right) + \vec{r}_{AS} \times m \vec{a}_S = \vec{M}_A.$$

h) Energia tétel, munka tétel:

- Differenciális alak $\equiv$ energiatétel

$$\dot{E} = P.$$

Merev test kinetikai energiájának idő szerinti deriváltja egyenlő a testre ható külső erőrendszer teljesítményével.

- Integrál alak $\equiv$ munkatétel

$$E_2 - E_1 = W_{12}.$$

Merev test kinetikai energiájának megváltozása a test véges ($< t_1, t_2 >$ időtartam alatt bekövetkező) mozgása során egyenlő a testre ható külső ER ugyanazon mozgás során végzett munkájával.

j) Merev test kényszermozgása

Kényszermozgás: a merev test mozgását más testek egy előírt geometriai feltételeknek megfelelően korlátozzák.

Kényszer: az a test, amelyek az általunk vizsgált test mozgását előírt geometriai feltételeknek megfelelően korlátozza.

Tétel: a kényszererő (támasztóerő) a kényszer hatását teljes mértékben helyettesíti.

A kényszererő a testek érintkezésnél lép fel.

Sima kényszer: a kényszererő merőleges az érintkező felületekre.

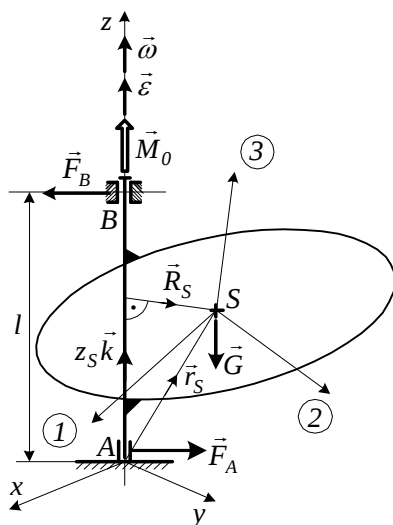
Érdes kényszer: a kényszererő normális és tangenciális koordinátája közötti a *Coulomb-féle* súrlódási törvény adja meg a kapcsolatot.

$$F_t = \mu F_n, \quad \mu \text{ mozgásbeli súrlódási tényező.}$$

Ez az összefüggés akkor áll fent, ha az érintkező felületek (pontok) között relatív tangenciális elmozdulás lép fel.

A kényszererő F_t tangenciális koordinátája olyan irányú, hogy igyekszik megakadályozni az érintkező felületek között létrejövő relatív tangenciális elmozdulást.

4) Forgó tömegek kiegyensúlyozása



Adott:

A forgórész geometriája és a külső ER: $\vec{G}, \vec{M}_0$.

A ①②③ a szerkezet S ponti tehetetlenségi főtengelei.

Feladat:

A támasztóerők meghatározása:

$$\vec{F}_A = (F_{Ax} \vec{e}_x + F_{Ay} \vec{e}_y + F_{Az} \vec{e}_z),$$

$$\vec{F}_B = (F_{Bx} \vec{e}_x + F_{By} \vec{e}_y).$$

Csapágyazás:

Az A helyen: radax csapágy (pl. golyós csapágy)

A B helyen: radiális csapágy (pl. hengergörgős cs.)

A tömegkiegyensúlyozás célkitűzése:

Annak biztosítása, hogy a forgás következtében ne lépjenek fel járulékos támasztóerők a csapágyakban.

Az S pont mozgásjellemzői: $\vec{r}_{AS} = \vec{r}_S = \vec{R}_S + z_S \vec{e}_z = x_S \vec{e}_x + y_S \vec{e}_y + z_S \vec{e}_z,$

$$\vec{v}_S = \vec{\omega} \times \vec{R}_S, \quad \vec{a}_S = \vec{\epsilon} \times \vec{R}_S - \omega^2 \vec{R}_S.$$

Megoldás:

a) Impulzus tétel:

$$\begin{aligned} m\vec{a}_S &= \vec{G} + \vec{F}_A + \vec{F}_B \quad / \cdot \vec{e}_z \\ 0 &= -G + F_{Az} \\ F_{Az} &= G. \end{aligned}$$

b) Perdület tétel az A pontra:

$$\begin{aligned} \underline{J}_A \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \underline{J}_A \cdot \vec{\omega} &= \vec{M}_0 + \vec{r}_{AS} \times \vec{G} + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B, \\ \vec{e}_z \times / \underline{J}_A \cdot \varepsilon \vec{e}_z + \omega^2 \vec{e}_z \times \underline{J}_A \cdot \vec{e}_z &= M_0 \vec{e}_z + \vec{R}_S \times \vec{G} + l \vec{e}_z \times \vec{F}_B, \\ \vec{e}_z \times \underline{J}_A \cdot \vec{e}_z \varepsilon + \omega^2 \vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \underline{J}_A \cdot \vec{e}_z) &= \vec{0} + \underbrace{\vec{e}_z \times (\vec{R}_S \times \vec{G})}_{-\vec{R}_S G} + \underbrace{\vec{e}_z \times (l \vec{e}_z \times \vec{F}_B)}_{-\vec{F}_B l (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z)}, \\ &= 1 \\ \vec{F}_B &= \frac{1}{l} \left[-G \vec{R}_S - \vec{e}_z \times \underline{J}_A \cdot \vec{e}_z \varepsilon - \vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \underline{J}_A \cdot \vec{e}_z) \omega^2 \right]. \end{aligned}$$

c) Perdület tétel a B pontra:

$$\underline{J}_B \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \underline{J}_B \cdot \vec{\omega} = \vec{M}_0 + \vec{r}_{BS} \times \vec{G} + \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_A.$$

Az előzővel megegyező gondolatmenetből:

$$\vec{F}_A = \frac{1}{l} \left[G \vec{R}_S + \vec{e}_z \times \underline{J}_B \cdot \vec{e}_z \varepsilon + \vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \underline{J}_B \cdot \vec{e}_z) \omega^2 \right] + G \vec{e}_z.$$

Kérdés: Mi a feltétele, hogy a támasztóerők ne függjenek az jellemző $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ mennyiségektől?

a) $\vec{0} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{G}$ akkor teljesül, ha:

$$\vec{a}_S = \vec{0}.$$

Ez akkor teljesül, ha az S pont a forgástengelyre esik:

$$\vec{R}_S = \vec{0}.$$

Statikusan kiegyensúlyozott egy álló tengely körül forgó merev test, ha a test S pontja a forgástengelyre esik.

$$b) \vec{F}_B = \frac{1}{l} \left[\underbrace{-G \vec{R}_S}_{=\vec{0}} - \vec{e}_z \times \underline{J}_A \cdot \vec{e}_z \varepsilon - \vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \underline{J}_A \cdot \vec{e}_z) \omega^2 \right] = \vec{0},$$

$$c) \vec{F}_A - G \vec{e}_z = \frac{1}{l} \left[\underbrace{G \vec{R}_S}_{=\vec{0}} + \vec{e}_z \times \underline{J}_B \cdot \vec{e}_z \varepsilon + \vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \underline{J}_B \cdot \vec{e}_z) \omega^2 \right] = \vec{0}.$$

A b), c) feltétel akkor teljesül ha $\underline{J}_A \cdot \vec{e}_z \parallel \vec{e}_z$ és $\underline{J}_B \cdot \vec{e}_z \parallel \vec{e}_z$.

Ezek a feltételek csak akkor teljesülhetnek, ha a z forgástengely a test tehetetlenségi fő-tengelye: $\underline{J}_A \cdot \vec{e}_z = \underline{J}_B \cdot \vec{e}_z = \underline{J}_S \cdot \vec{e}_z = J_z \vec{e}_z$.

Dinamikusan kiegyensúlyozott egy álló tengely körül forgó merev test, ha a forgástengely a merev test tehetetlenségi fő-tengelye.

Megjegyzés: Ha a z tengely S ponti tehetetlenségi fő-tengely, akkor a z tengely A és B ponti tehetetlenségi fő-tengely.

A tömegkiegyensúlyozás megvalósítása

a) Teljesítendő feltételek:

- A forgórész S pontja legyen rajta a forgástengelyen.
- A forgástengely legyen a forgórész tehetetlenségi fő-tengelye.

A feltételek más alakja:

- Az $\vec{R}_S = \vec{0}$ feltétel $m\vec{R}_S = \vec{0}$ is írható.

(A forgórész z tengelyre számított statikai nyomatéka legyen zérus)

- A $\underline{J}_A \cdot \vec{e}_z = \underline{J}_B \cdot \vec{e}_z = \underline{J}_S \cdot \vec{e}_z = J_z \vec{e}_z$ feltétel helyett

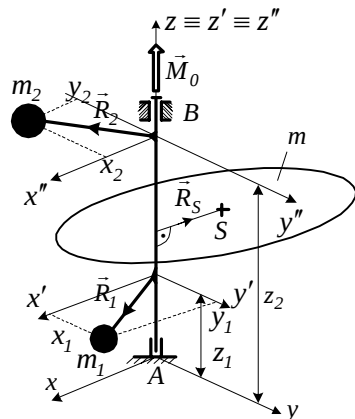
$J_{xz} = J_{yz} = 0$, vagy $\vec{e}_z \times (\vec{J} \times \vec{e}_z) = J_{xz} \vec{e}_x + J_{yz} \vec{e}_y = \vec{0}$ alakban is írható.

A feltételek biztosítása/teljesítése:

A kiegyensúlyozatlan forgórészhez tömegeket adunk hozzá, vagy veszünk el.

Tömegek $\equiv$ tömegpontok.

A tömegpontokkal kiegészített forgórész:



Az m_1 tömegpont az $x_1 y_1 z_1$ ponthoz rögzített.

Az m_2 tömegpont az $x_2 y_2 z_2$ ponthoz rögzített.

- A kiegészített/módosított forgórész z tengelyre számított statikai nyomatéka legyen zérus.
- A kiegészített/módosított forgórésznek a z tengely legyen a tehetetlenségi fő-tengelye.

b) $m\vec{R}_S + m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2 = \vec{0}$

skalár egyenletek:

$$m x_S + m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0,$$

$$m y_S + m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0.$$

c) $\vec{e}_z \times (\vec{J} \times \vec{e}_z) = \vec{0},$

$$J_{xz} \vec{e}_x + J_{yz} \vec{e}_y + \sum_{i=1}^2 \underbrace{(m_i x_i z_i \vec{e}_x + m_i y_i z_i \vec{e}_y)}_{m_i z_i \vec{R}_i} = \vec{0}.$$

skalár egyenletek:

$$J_{xz} + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 = 0,$$

$$J_{yz} + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 = 0.$$

A b) és c) vektoriális feltétel négy (nemlineáris) algebrai skaláris egyenletet jelent.

Ismeretlenek: $\left. \begin{matrix} m_1, x_1, y_1, z_1 \\ m_2, x_2, y_2, z_2 \end{matrix} \right\}$ nyolc skalár mennyiség.

Megoldás: négy skalár ismeretlen önkényesen felvehető.

Átalakítás:

A b) egyenletet z_2 -vel, majd z_1 -el beszorozva és kivonva belőle a c) egyenletet $\rightarrow$

$$m_1 \vec{R}_1 = \frac{1}{z_2 - z_1} \underbrace{\left(J_{xz} \vec{e}_x + J_{yz} \vec{e}_y - m \vec{R}_S z_2 \right)}_{J_{x'z'} \vec{e}_x + J_{y'z'} \vec{e}_y} = \vec{0} ,$$

$$m_2 \vec{R}_2 = \frac{1}{z_1 - z_2} \underbrace{\left(J_{xz} \vec{e}_x + J_{yz} \vec{e}_y - m \vec{R}_S z_1 \right)}_{J_{x'z'} \vec{e}_x + J_{y'z'} \vec{e}_y} = \vec{0} .$$

Megoldási lehetőségek:

- önkényes felvétel: m_1, m_2, z_1, z_2 , majd az egyenletekből $\vec{R}_1 = \dots, \vec{R}_2 = \dots$.

- egy másik önkényes felvétel (pl. autókerék kiegyensúlyozása):

új változók: $x_1, y_1 \rightarrow R_1, \varphi_1$,

$x_2, y_2 \rightarrow R_2, \varphi_2$.

$$\vec{R}_1 = x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y = R_1 (\cos \varphi_1 \vec{e}_x + \sin \varphi_1 \vec{e}_y) ,$$

$$\vec{R}_2 = x_2 \vec{e}_x + y_2 \vec{e}_y = R_2 (\cos \varphi_2 \vec{e}_x + \sin \varphi_2 \vec{e}_y) .$$

felvétel: R_1, R_2, z_1, z_2 ,

egyenletekből:

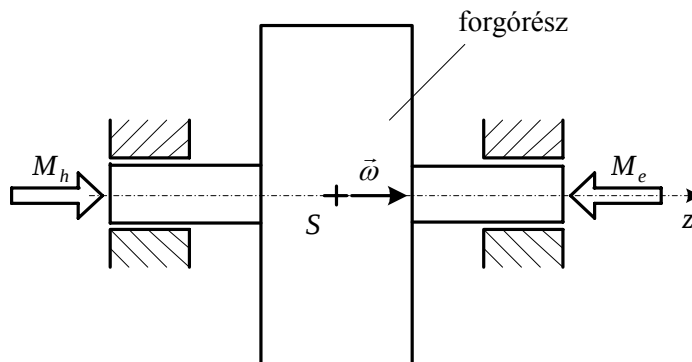
$$m_1 = \frac{1}{R_1 |z_2 - z_1|} + \left[(J_{xz} - m x_S z_2)^2 + (J_{yz} - m y_S z_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0 ,$$

$$m_2 = \frac{1}{R_2 |z_2 - z_1|} + \left[(J_{xz} - m x_S z_1)^2 + (J_{yz} - m y_S z_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0 .$$

$$\text{Továbbá: } \operatorname{tg} \varphi_1 = - \frac{J_{yz} - m y_S z_2}{J_{xz} - m x_S z_2} , \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = - \frac{J_{yz} - m y_S z_1}{J_{xz} - m x_S z_1} .$$

5) Forgórészek meghajtása és üzemeltetése

a) A meghajtás jellege



M_h - meghajtó nyomaték,

M_e - az ellenállás nyomatéka ,
pl. csapágy súrlódás, tömítések
súrlódása.

A forgórészre felírt perdület-tétel

$$\dot{\vec{\pi}}_S = \vec{M}_S / \cdot \vec{e}_z$$

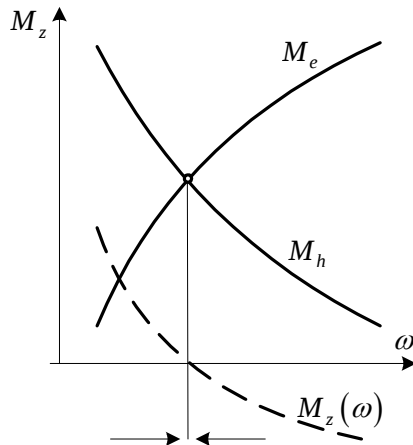
$$J_z \dot{\omega} = J_z \varepsilon = M_z(\omega) = M_h - M_e .$$

Ha $M_z > 0$, akkor a forgás gyorsul $\rightarrow \varepsilon > 0$.

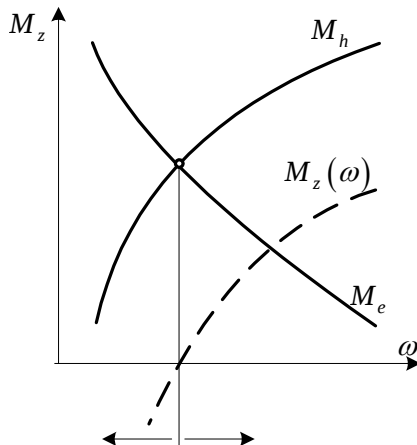
Ha $M_z < 0$, akkor a forgás lassul $\rightarrow \varepsilon < 0$.

Az $M_z = M_z(\omega)$ függvény a meghajtó motor (belsőégésű motor, villanymotor, stb..) jellemzője.

A meghajtás jellemzője:



A forgórendszer beáll a munkapontra.



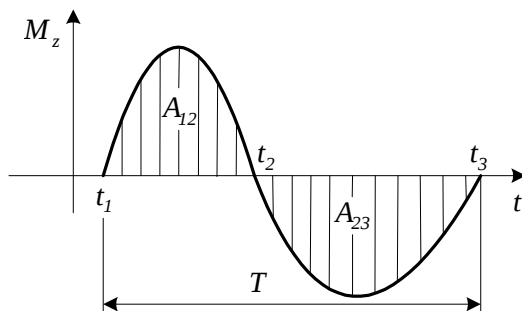
A rendszer „megszalad” vagy, leáll.

b) Forgórészek egyenlőtlen járása:

Egyenlőtlen járás (szögsebesség ingadozás): $\delta\omega \neq 0$.

Ez akkor fordul elő, ha $M_z(\omega) = M_h - M_e \neq 0$.

- $M_z = M_z(t)$ ismert



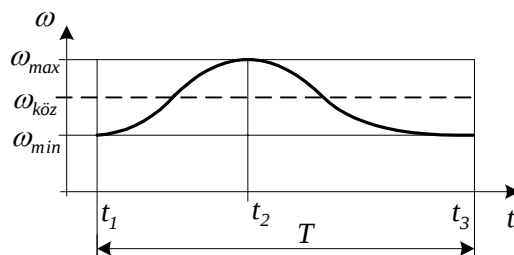
Periódusidő:

$$T = t_3 - t_1.$$

Feltételezés:

$$\int_{(T)} M_z(t) dt = 0,$$

(a tengely nem gyorsul).



Közepes szögsebesség:

$$\omega_{köz} = \frac{\omega_{min} + \omega_{max}}{2},$$

Egyenlőtlenességi fok:

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{2}.$$

Perdület-tétel:

$$\pi_z(t_3) - \pi_z(t_1) = \int_{t_1}^{t_3} M_z(t) dt = A_{12} + A_{23} = 0,$$

$$\pi_z(t_2) - \pi_z(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} M_z(t) dt = A_{12} \Rightarrow J_z (\underbrace{\omega_{\max} - \omega_{\min}}_{\delta \omega_{\text{köz}}}) = A_{12}.$$

$\delta = \frac{A_{12}}{J_z \omega_{\text{köz}}}$. A forgás (járás) egyenletessé tétele a δ csökkentésével érhető el.

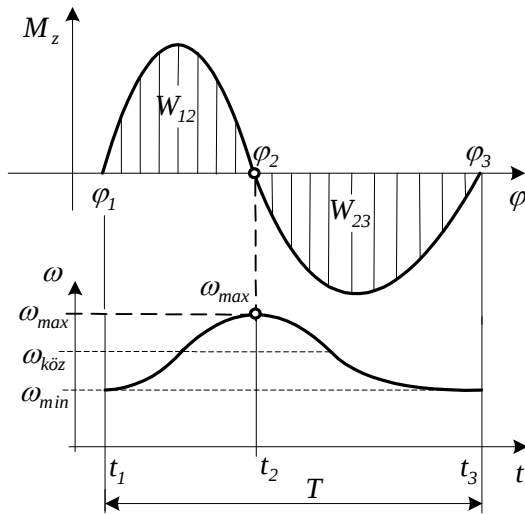
Az egyenletes járás biztosításához az adott A_{12} és előírt $\omega_{\text{köz}}$ esetén J_z -ét kell növelni.
Megoldás $\rightarrow$ lendítőkereket kell alkalmazni.

- $M_z = M_z(\varphi)$ ismert

Periódus: egy körbefordulás $\rightarrow \varphi = 2\pi$.

Feltételezés: a forgórész nem gyorsul.

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} M_z(\varphi) d\varphi = W_{12} + W_{23} = 0.$$



Munkatétel:

$$E_2 - E_1 = W_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z(\varphi) d\varphi,$$

$$\frac{1}{2} J_z \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_z \omega_1^2 = W_{12},$$

$$J_z \underbrace{\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}}_{\omega_{\text{köz}}} \underbrace{(\omega_2 - \omega_1)}_{\delta \omega_{\text{köz}}} = W_{12},$$

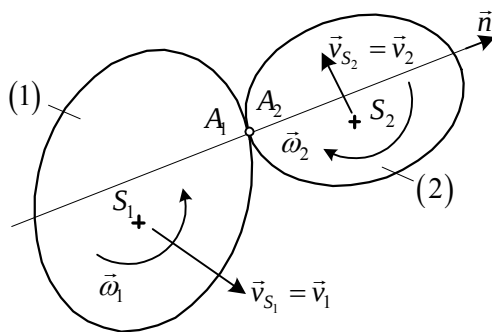
$$J_z \omega_{\text{köz}}^2 \delta = W_{12}.$$

$\delta = \frac{W_{12}}{J_z \omega_{\text{köz}}^2}$ A forgás/járás egyenletessé tétele a δ csökkentésével érhető el.

Az egyenletes járás biztosításához az adott W_{12} és előírt $\omega_{\text{köz}}$ esetén J_z -ét kell növelni.

Megoldás $\rightarrow$ lendítőkereket kell alkalmazni.

6) Ütközés



Két testből álló és síkmozgást végző rendszer ütközését vizsgáljuk.

A_1, A_2 - az érintkező pontok,

$\vec{n}$ - az ütközési normális.

Az ütközés létrejöttének feltétele:

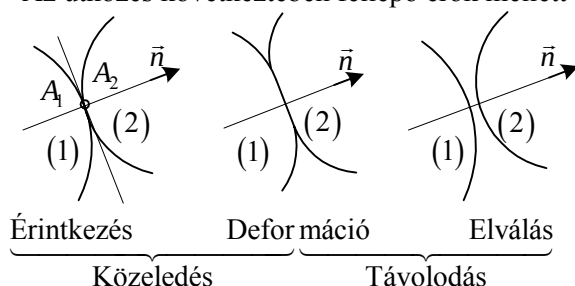
$$\vec{v}_{A_1} \cdot \vec{n} > \vec{v}_{A_2} \cdot \vec{n}.$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ - ütközés előtti sebességek és szögsebességek,

$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2$ - ütközés utáni jellemzők.

Feltételezések:

- Az ütköző testek valamilyen mértékben rugalmasak
- Az ütközés igen rövid idő alatt játszódik le
- A rövid ideig tartó érintkezés alatt a testek helyzetében nem következik be változás
- Az ütközés következtében fellépő erők mellett a többi erő elhanyagolható

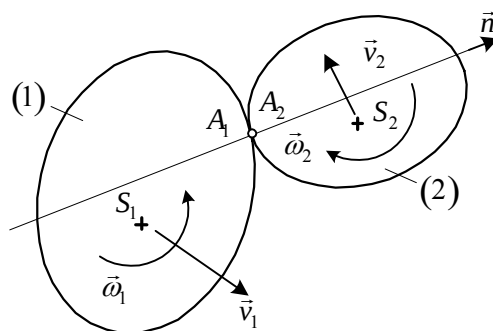


Az ütközés lefolyása.

Az ütközés osztályozása:

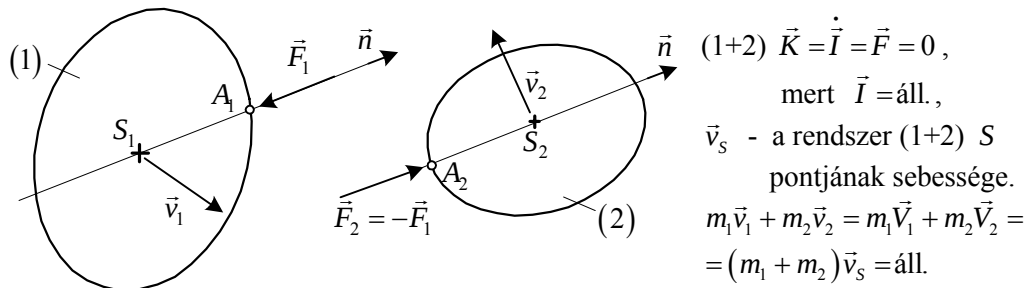
- 1) Az $\vec{n}$ ütközési normálisnak az ütköző testek S_i súlypontjaihoz viszonyított helyzete alapján →
 - a) Centrikus ütközés: az $\vec{n}$ mindkét test S_i pontján átmegy
 - b) Excentrikus ütközés: az $\vec{n}$ nem megy át mindkét test S_i pontján
- 2) Az anyagváltozás jellege (az anyagi viselkedés) alapján
Figyelembevétel: $0 \leq k \leq 1$ ahol k - ütközési tényező.
 - a) Tökéletesen rugalmas, $k = 1 \rightarrow$ A testek deformációjára fordított energiát teljes mértékben visszanyerjük.
 - b) Rugalmas-képlékeny, $0 < k < 1 \rightarrow$ A testek deformációjára fordított energiát részben visszanyerjük.
 - c) Tökéletesen rugalmatlan, $k = 0 \rightarrow$ A testek deformációjára fordított energia nem nyerhető vissza.

6.1.) Centrikus ütközés



$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ - ütközés előtti sebességek és szögsebességek.

- a) Centrikus ferde ütközés:
Az S ponti sebességek nem a normális irányába mutatnak.
- b) Centrikus egyenes ütközés:
Az S ponti sebességek a normális irányába mutatnak.



1) A $\vec{K}_1 = \dot{\vec{I}}_1 = \vec{F}_1 = -\lambda \vec{n} \int_{\Delta t} \dots dt$,

$\vec{F}_1$ ütközési normális irányába mutat, Δt az ütközés időtartama, λ skálár együttható.

$$\Delta \vec{I}_1 = \int_{(\Delta t)} \vec{F}_1 dt = - \underbrace{\int_{\Delta t} \lambda dt}_{C} \vec{n}, \quad C \text{ skálár szám.}$$

$$m_1 \Delta \vec{v}_1 = m_1 (\vec{V}_1 - \vec{v}_1) = -C \vec{n},$$

$\Delta \vec{v}_1$ - az (1) test sebességének megváltozása az ütközés során párhuzamos az $\vec{n}$ ütközési normálissal.

2) A $\vec{K}_2 = \dot{\vec{I}}_2 = \vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = \lambda \vec{n} \int_{\Delta t} \dots dt$,

$$m_2 \Delta \vec{v}_2 = m_2 (\vec{V}_2 - \vec{v}_2) = C \vec{n},$$

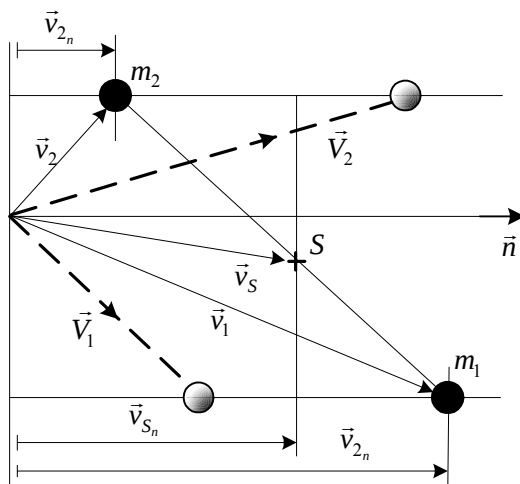
Az (1) és (2) jelű testre kapott eredményeket összegezve:

(a) $m_1 \Delta \vec{v}_1 = -m_2 \Delta \vec{v}_2$,

(b) $\vec{D}_{S_1} = \vec{\pi}_{S_1} = \vec{M}_{S_1} = \vec{0} \rightarrow \vec{\pi}_{S_1} = \text{állandó}, \vec{\omega}_1 = \vec{\Omega}_1$,

(c) $\vec{\pi}_{S_2} = \vec{0} \rightarrow \vec{\pi}_{S_2} = \text{állandó}, \vec{\omega}_2 = \vec{\Omega}_2$.

Maxwell-féle ütközési diagram



$$\vec{v}_S = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2},$$

$$m_1 (\vec{V}_1 - \vec{v}_1) = -C \vec{n},$$

$$m_2 (\vec{V}_2 - \vec{v}_2) = C \vec{n}.$$

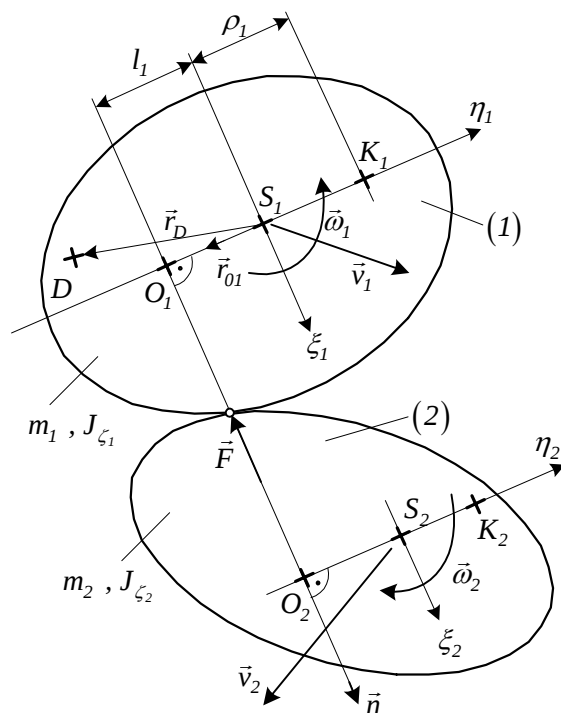
Ütközési tényező:

$$k = \frac{|V_{1n} - v_{Sn}|}{|v_{1n} - v_{Sn}|} = \frac{|V_{2n} - v_{Sn}|}{|v_{2n} - v_{Sn}|}$$

$v_{1n} = \dots$, $v_{2n} = \dots$ számítható.

6.2.) Excentrikus ütközés

Legalább az egyik test S pontja nem esik az $\vec{n}$ ütközési normálisra.



Feltételezés:

- a testek síkmozgást végeznek
- a ζ_1, ζ_2 a testek S ponti tehetetlenségi főtengelei

↓

Az $\vec{n}$ ütközési normális a testek S ponti tehetetlenségi főtengeleibe esnek.

A feladatot vissza akarjuk vezetni a centrális ütközés esetére.

Jelölések:

O_1, O_2 - ütközési talppontok

(az S pontokból merőlegest bocsátunk az ütközési normálisra).

K_1, K_2 - ütközési középpontok (lökési középpont).

Értelmezés: A testek azon pontjai, amelyeknek az ütközés során nem változik a sebessége

$$\vec{v}_{K_1} = \vec{V}_{K_1}, \vec{v}_{K_2} = \vec{V}_{K_2}.$$

Impulzus tétel az (1) jelű testre:

$$m_1 (\vec{V}_1 - \vec{v}_1) = \int_{(\Delta t)} \vec{F} dt = \vec{\Phi},$$

Perdület tétel az (1) jelű testre:

$$J_{\zeta_1} (\vec{\Omega}_1 - \vec{\omega}_1) = \int_{(\Delta t)} \vec{r}_{01} \times \vec{F} dt = \vec{r}_{01} \times \vec{\Phi}.$$

Az (1) jelű test tetszőleges D pontjának sebessége:

$$\left. \begin{aligned} m_1 J_{\zeta_1} / \vec{V}_D &= \vec{V}_1 + \vec{\Omega}_1 \times \vec{r}_D \\ m_1 J_{\zeta_1} / \vec{v}_D &= \vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_D \end{aligned} \right\} \text{egymásból kivonni}$$

$$m_1 J_{\zeta_1} (\vec{V}_D - \vec{v}_D) = m_1 J_{\zeta_1} (\vec{V}_1 - \vec{v}_1) + m_1 J_{\zeta_1} (\vec{\Omega}_1 - \vec{\omega}_1) \times \vec{r}_D,$$

$$m_1 J_{\zeta_1} (\vec{V}_D - \vec{v}_D) = \underbrace{J_{\zeta_1} \vec{\Phi}}_{(\text{imp.tétel})} + \underbrace{m_1 (\vec{r}_{01} \times \vec{\Phi})}_{(\text{perd.tétel})} \times \vec{r}_D,$$

$$m_1 J_{\zeta_1} (\vec{V}_D - \vec{v}_D) = J_{\zeta_1} \vec{\Phi} + m_1 \underbrace{(\vec{r}_{01} \times \vec{\Phi}) \times \vec{r}_D}_{(\vec{r}_{01} \cdot \vec{r}_D) \vec{\Phi} - \vec{r}_{01} (\vec{\Phi} \cdot \vec{r}_D)},$$

$$m_1 J_{\zeta_1} (\vec{V}_D - \vec{v}_D) = [J_{\zeta_1} + m_1 (\vec{r}_{01} \cdot \vec{r}_D)] \vec{\Phi} - m_1 (\vec{\Phi} \cdot \vec{r}_D) \vec{r}_{01}.$$

Keressük az (1) jelű testnek azokat a D pontjait, amelyeknek a sebességváltozása párhuzamos az $\vec{n}$ ütközési normálissal.

Ennek a feltételnek az η_1 tengely pontjai tesznek eleget: $\vec{r}_D = \eta_1 \vec{e}_\eta$, $\vec{r}_{01} = -l_1 \vec{e}_\eta$.

Az előző összefüggésbe behelyettesítve

$$m_1 J_{\zeta_1} (\vec{V}_D - \vec{v}_D) = \left[J_{\zeta_1} + \underbrace{(\vec{r}_{01} \cdot \vec{r}_D)}_{-l_1 \eta_1} \right] \vec{\Phi} - m_1 \underbrace{(\vec{r}_D \cdot \vec{\Phi})}_{0} \vec{r}_{01}$$

Az η_1 tengelyen levő pontokra: $(0, \eta_1)$

$$m_1 J_{\zeta_1} (\vec{V}_D - \vec{v}_D) = [J_{\zeta_1} - m_1 l_1 \eta_1] \vec{\Phi}.$$

A K_1 ütközési középpont meghatározása:

$$\vec{V}_{K_1} - \vec{v}_{K_1} = \vec{0} \Rightarrow J_{\zeta_1} - m_1 l_1 \rho_1 = 0 \Rightarrow \rho_1 = \eta_{K_1} = \frac{J_{\zeta_1}}{m_1 l_1}.$$

Az O_1 ütközési talppont sebességváltozása (az η tengelyen levő pont sebesség változására kapott összefüggést felhasználva)

$$m_1 J_{\zeta_1} (\vec{V}_D - \vec{v}_D) = \underbrace{(J_{\zeta_1} + m_1 l_1^2)}_{J_{0_1}} \vec{\Phi}.$$

Jelölés: $\left. \begin{array}{l} \vec{v}_{0_1} = \vec{v}_I \\ \vec{V}_{0_1} = \vec{v}_I \end{array} \right\}$ az ütközési talppontok sebességei.

$$m_1 \underbrace{\frac{J_{\zeta_1}}{J_{0_1}}}_{\mu_I} (\vec{V}_I - \vec{v}_I) = \vec{\Phi} \rightarrow \mu_I = \frac{J_{\zeta_1}}{J_{0_1}} - \text{redukált tömeg. Ez az összefüggés formálisan}$$

olyan, mint a centrális ütközésnél kapott.

A redukált tömeg képletének átalakítása

$$\mu_I = m_1 \frac{J_{\zeta_1}}{J_{0_1}} = m_1 \frac{J_{\zeta_1}}{J_{\zeta_1} + m_1 l_1^2} = \frac{m_1 l_1 \rho_1}{m_1 l_1 \rho_1 + m_1 l_1^2} m_1,$$

$$\text{mivel } \rho_1 = \frac{J_{\zeta_1}}{m_1 l_1} \rightarrow J_{\zeta_1} = \rho_1 m_1 l_1, \text{ így}$$

$$\mu_I = m_1 \frac{m_1 l_1 \rho_1}{m_1 (\rho_1 + l_1)} = m_1 \frac{m_1 \rho_1 (\rho_1 + l_1)}{m_1 (\rho_1 + l_1)^2} = \frac{m_1 \rho_1^2 + m_1 \rho_1 l_1}{(\rho_1 + l_1)^2} = \frac{m_1 \rho_1^2 + J_{\zeta_1}}{(\rho_1 + l_1)^2} = \frac{J_{K_1}}{(\rho_1 + l_1)^2}.$$

Ugyanezzel a gondolatmenettel a (2) jelű testre is megkapjuk a

K_2 ütközési középpontot $\rightarrow \rho_2 = \dots\dots\dots$,

μ_{II} redukált tömeget és az

O_2 ütközési talppont sebességváltozását (- előjellel).

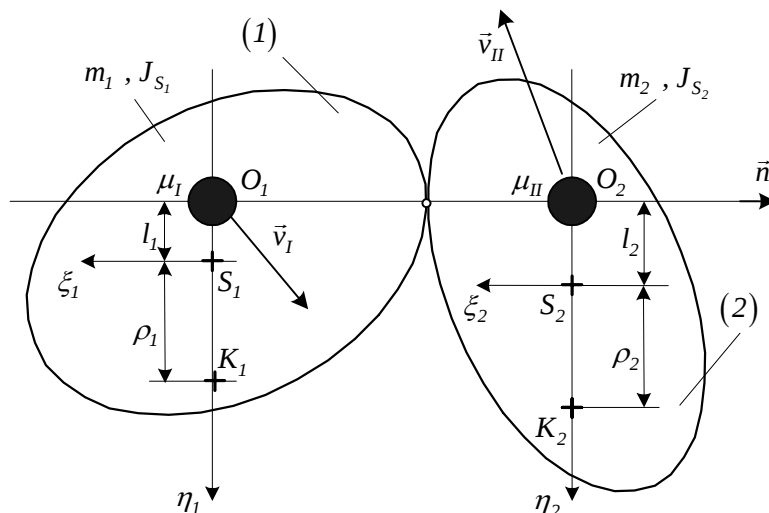
A két testre kapott eredményeket összevetve ugyanazt az összefüggést kapjuk, mint a centrikus ütközésnél:

$$\mu_I (\vec{V}_I - \vec{v}_I) = \vec{\Phi} = -\mu_{II} (\vec{V}_{II} - \vec{v}_{II}),$$

$\vec{V}_I, \vec{v}_I$ és $\vec{V}_{II}, \vec{v}_{II}$ - az ütközési talppontok sebességei,

μ_I, μ_{II} - redukált tömegek.

Az exentrikus ütközés megoldásának gondolatmenete:



Jelölés:

$$J_{s_1} = J_{\xi_1},$$

$$J_{s_2} = J_{\xi_2}$$

a mozgás síkjára merőleges S ponti tehetetlenségi főtengelyekre számított tehetetlenségi nyomatékok.

a) A redukált tömegek meghatározása:

$$\mu_I = m_1 \frac{J_{s_1}}{J_{O_1}}, \quad \mu_{II} = m_1 \frac{J_{s_2}}{J_{O_2}}.$$

b) Az ütközési talppontok ütközés előtti sebességeinek meghatározása:

$$\vec{v}_I = \vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \times (-l_1 \vec{e}_\eta),$$

$$\vec{v}_{II} = \vec{v}_2 + \vec{\omega}_2 \times (-l_2 \vec{e}_\eta).$$

c) A Maxwell-féle ütközési diagramból az ütközési talppontok ütközés utáni sebességeinek meghatározása:

$$\vec{V}_I = \dots\dots\dots,$$

$$\vec{V}_{II} = \dots\dots\dots.$$

d) Az ütközési középpontok meghatározása:

$$\rho_1 = \frac{J_{s_1}}{m_1 l_1}, \quad \rho_2 = \frac{J_{s_2}}{m_2 l_2}.$$

e) Az ütközési utáni szögsebességek meghatározása:

$$\text{ütközés előtt: } \vec{v}_{K_1} = \vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_1$$

$$\vec{v}_{K_2} = \vec{v}_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_2.$$

$$\text{ütközés után: } \vec{v}_{K_1} = \vec{V}_{K_1} = \vec{V}_I + \vec{\Omega}_1 \times (l_1 + \rho_1) \vec{e}_\eta \Rightarrow \vec{\Omega}_1 = \dots\dots\dots,$$

$$\vec{v}_{K_2} = \vec{V}_{K_2} = \vec{V}_{II} + \vec{\Omega}_2 \times (l_2 + \rho_2) \vec{e}_\eta \Rightarrow \vec{\Omega}_2 = \dots\dots\dots.$$

f) Az S pontok ütközési utáni sebességeinek meghatározása:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_I + \vec{\Omega}_1 \times l_1 \vec{e}_\eta,$$

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_{II} + \vec{\Omega}_2 \times l_2 \vec{e}_\eta.$$

Kiindulás: $\vec{\omega}_1, \vec{v}_1, \vec{\omega}_2, \vec{v}_2, m_1, J_{0_1}, m_2, J_{s_1}, l_1, l_2$.

Megoldás: $\vec{V}_1, \vec{\Omega}_1, \vec{V}_2, \vec{\Omega}_2$.

13. SZAKIRODALOM

- [1] Beer, F.P. – Johnston, E.R.: Vector mechanics for engineers – Statics, McGraw-Hill Book Company, 1984.
- [2] Gross – Hauger – Schnell: Technische Mechanik 1. – Statik, Springer Lehrbuch, 1988.
- [3] M. Csizmadia B. – Nándori E.: Mechanika mérnököknek – Statika, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1996.
- [4] Égert J.: Statika, Miskolci Egyetemi Kiadó, 2001.
- [5] NME Mechanikai Tanszék Munkaközössége: Mechanikai példatár I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
- [6] Égert J. – Pere B.: Statika példatár, Universitas-Győr Kht., 2005.
- [7] Roberts, A.: Statics and Dynamics with Background Mathematics, Cambridge University Press, 2003.
- [8] Böge, A. – Schlemmer, W.: Mechanikai és szilárdságtani feladatgyűjtemény, Műszaki Könyvkiadó, 1993.

- [1] M. Csizmadia B. – Nándori E.: Mechanika mérnököknek Szilárdságtan, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
- [2] Beer, F.P. – Johnston, E.R.: Mechanics of materials, McGraw-Hill Inc., New-York, 1992.
- [3] Budinas, R.G.: Advanced Strength and Applied Stress Analysis, McGraw-Hill International Edition, 1999.
- [4] Schell, W. – Gross, D. – Hauger, W.: Technische Mechanik 2. – Elastostatik, Springer Verlag Berlin Heidelberg New-York, 1995.
- [5] NME Mechanikai Tanszék Munkaközössége: Mechanika Példatár II., Tankönyvkiadó Budapest, 1981.
- [6] Égert J. – Jezsó K.: Szilárdságtan példatár, Universitas Győr Kht. 2004.
- [7] Jenkins, C.H.M – Khanna, S.K.: Mechanics of Materials, Elsevier Academic Press, 2005.

- [1] M. Csizmadia B. – Nándori E.: Mechanika mérnököknek Mozgástan, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.
- [2] Beer, F.P. – Johnston, E.R.: Dynamics, McGraw-Hill Inc., New-York, 1984.

- [3] Roberts, A. P.: Statics and Dynamics with Background Mathematics , Cambridge University Press, 2003.
 - [4] Schell, W. – Gross, D. – Hauger, W.: Technische Mechanik 3. – Kinetik, Springer Verlag Berlin Heidelberg New-York, 1995.
 - [5] NME Mechanikai Tanszék Munkaközössége: Mechanika Példatár I., Tankönyvkiadó Budapest, 1980.
 - [6] NME Mechanikai Tanszék Munkaközössége: Mechanika Példatár III., Tankönyvkiadó Budapest, 1985.
 - [7] Király B.:Dinamika, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1992.
 - [8] Égert J. – Nagy Z.: Mozgástan példatár, Universitas Győr Kht. 2003.
 - [9] Cleghorn, W. L.: Mechanics of machines , Oxford University Press, 2005.
 - [10] Landau, Lifsic: Elméleti fizika I. Mechanika, Tankönyvkiadó Budapest, 1974.
-
- [1] Hibbeler, R. C.: Engineering Mechanics – Statics (Twelfth Edition in SI Units), Prentice Hall, 2010.
 - [2] Hibbeler, R. C.: Mechanics of Materials (Seventh SI Editions), Prentice Hall, 2008.