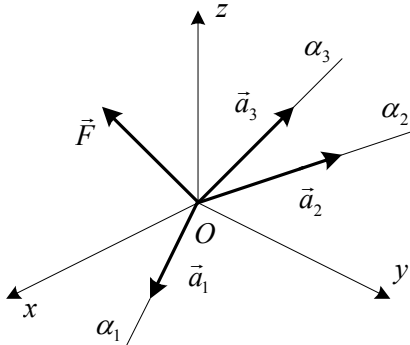


4. TÉRBELI STATIKAI FELADATOK

4.1. Közös ponton támadó erőrendszerek

Feladat: Helyettesítsünk vagy egyensúlyozzunk egy adott $\vec{F}$ erőt három, adott hatásvonalú, közös ponton támadó erővel.



Adott: $\vec{F}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, |\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| \neq 1$

Keresett:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_1 &= \lambda_1 \vec{a}_1 \\ \vec{F}_2 &= \lambda_2 \vec{a}_2 \\ \vec{F}_3 &= \lambda_3 \vec{a}_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dots \\ \lambda_2 = \dots \\ \lambda_3 = \dots \end{cases}$$

A három erővektor meghatározását három skalár ismeretlen meghatározására vezetjük vissza:

A feladat megoldása:

Az egyenértékűség/egyensúly feltétele:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \pm \vec{F} \quad (+ \text{ egyenértékűség, } - \text{ egyensúly})$$

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \pm \vec{F} \quad / \cdot \vec{e}_x \quad / \cdot \vec{e}_y \quad / \cdot \vec{e}_z$$

Skalár egyenletek:

$$\left. \begin{aligned} a_{1x}\lambda_1 + a_{2x}\lambda_2 + a_{3x}\lambda_3 &= \pm F_x \\ a_{1y}\lambda_1 + a_{2y}\lambda_2 + a_{3y}\lambda_3 &= \pm F_y \\ a_{1z}\lambda_1 + a_{2z}\lambda_2 + a_{3z}\lambda_3 &= \pm F_z \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Inhomogén, lineáris, algebrai egyenletrendszer a } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \\ \text{ismeretlenekre.} \end{array}$$

Az egyenletrendszer mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm F_x \\ \pm F_y \\ \pm F_z \end{bmatrix}.$$

A lineáris algebrai egyenletrendszer egyértelmű megoldásának feltétele:

$$\underbrace{(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3)}_{\text{vegyes szorzat}} = \det \underline{\underline{A}} \neq 0.$$

Ez a feltétel minden esetben teljesül, ha az $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorok nem esnek egy síkba.

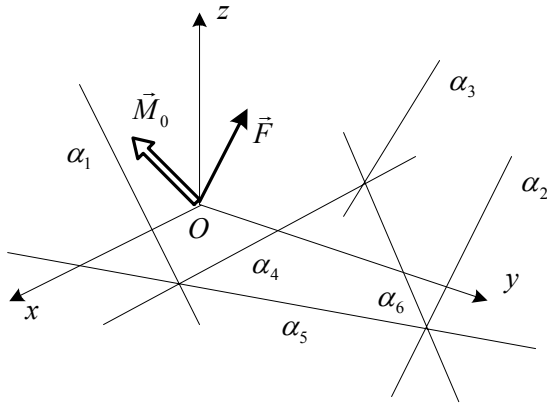
4.2. Szétszórt erőrendszerek

Feladat: Helyettesítsünk, vagy egyensúlyozzunk egy $\vec{F}, \vec{M}_O$ redukált vektorkettőssével adott erőrendszert hat, adott hatásvonalú erővel.

Adott: Az erőrendszer $\vec{F}, \vec{M}_O$ redukált vektorkettőse és a hat hatásvonal (egyenes) egyenlete:

$$\vec{a}_i \times \vec{r} + \vec{b}_i = \vec{0}, \quad (i=1, 2, \dots, 6).$$

Keresett: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6$.



A hat erővektor meghatározását hat skalár ismeretlen meghatározására vezetjük vissza:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_1 &= \lambda_1 \vec{a}_1 \\ \vec{F}_2 &= \lambda_2 \vec{a}_2 \\ &\vdots \\ \vec{F}_6 &= \lambda_6 \vec{a}_6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= \dots \\ \lambda_2 &= \dots \\ &\vdots \\ \lambda_6 &= \dots \end{aligned} \right.$$

$$\vec{F}_i = \lambda_i \vec{a}_i = \lambda_i a_{ix} \vec{e}_x + \lambda_i a_{iy} \vec{e}_y + \lambda_i a_{iz} \vec{e}_z,$$

$$\vec{M}_{Oi} = \vec{r}_{Oi} \times \vec{F}_i = \lambda_i \vec{r}_{Oi} \times \vec{a}_i = \lambda_i \vec{b}_i = \lambda_i b_{ix} \vec{e}_x + \lambda_i b_{iy} \vec{e}_y + \lambda_i b_{iz} \vec{e}_z.$$

Eigenértékűség, egyensúlyozás:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \vec{F}_i &= \sum_{i=1}^6 \lambda_i \vec{a}_i = \pm \vec{F} \\ \sum_{i=1}^6 \vec{r}_{Oi} \times \vec{F}_i &= \sum_{i=1}^6 \lambda_i \vec{b}_i = \pm \vec{M}_O \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} + \text{ egyenértékűség,} \\ - \text{ egyensúlyozás.} \end{array}$$

Skalár egyenletek:

$$\left. \begin{aligned} a_{1x}\lambda_1 + a_{2x}\lambda_2 + a_{3x}\lambda_3 + a_{4x}\lambda_4 + a_{5x}\lambda_5 + a_{6x}\lambda_6 &= \pm F_x \\ a_{1y}\lambda_1 + a_{2y}\lambda_2 + a_{3y}\lambda_3 + a_{4y}\lambda_4 + a_{5y}\lambda_5 + a_{6y}\lambda_6 &= \pm F_y \\ a_{1z}\lambda_1 + a_{2z}\lambda_2 + a_{3z}\lambda_3 + a_{4z}\lambda_4 + a_{5z}\lambda_5 + a_{6z}\lambda_6 &= \pm F_z \\ b_{1x}\lambda_1 + b_{2x}\lambda_2 + b_{3x}\lambda_3 + b_{4x}\lambda_4 + b_{5x}\lambda_5 + b_{6x}\lambda_6 &= \pm M_{Ox} \\ b_{1y}\lambda_1 + b_{2y}\lambda_2 + b_{3y}\lambda_3 + b_{4y}\lambda_4 + b_{5y}\lambda_5 + b_{6y}\lambda_6 &= \pm M_{Oy} \\ b_{1z}\lambda_1 + b_{2z}\lambda_2 + b_{3z}\lambda_3 + b_{4z}\lambda_4 + b_{5z}\lambda_5 + b_{6z}\lambda_6 &= \pm M_{Oz} \end{aligned} \right\}$$

Inhomogén, lineáris algebrai egyenletrendszer a λ_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) ismeretlenekre.

Mátrix alakban:

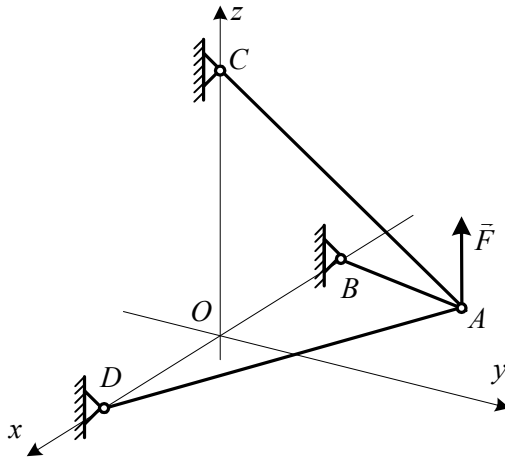
$$\begin{bmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & a_{4x} & a_{5x} & a_{6x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} & a_{4y} & a_{5y} & a_{6y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} & a_{4z} & a_{5z} & a_{6z} \\ b_{1x} & b_{2x} & b_{3x} & b_{4x} & b_{5x} & b_{6x} \\ b_{1y} & b_{2y} & b_{3y} & b_{4y} & b_{5y} & b_{6y} \\ b_{1z} & b_{2z} & b_{3z} & b_{4z} & b_{5z} & b_{6z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm F_x \\ \pm F_y \\ \pm F_z \\ \pm M_{Ox} \\ \pm M_{Oy} \\ \pm M_{Oz} \end{bmatrix} \quad \text{Tömör jelöléssel: } \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\lambda}} = \underline{\underline{F}}.$$

Az egyenletrendszernek akkor van egyértelmű megoldása, ha $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$.

A hat hatásvonal nem vehető fel tetszőlegesen, lineárisan függetlennek kell lenniük.

4.3. Gyakorló feladatok térbeli és síkbeli statikai feladatokra

4.3.1. feladat: Térbeli tartó támasztóerői



Adott:

$$\vec{r}_A = (4\vec{e}_y + \vec{e}_z) \text{ m}, \quad \vec{r}_B = (-4\vec{e}_x) \text{ m},$$

$$\vec{r}_C = (4\vec{e}_z) \text{ m}, \quad \vec{r}_D = (2\vec{e}_x) \text{ m},$$

$$\vec{F} = (12\vec{e}_z) \text{ kN}.$$

Feladat:

A B, C és D pontokban fellépő támasztóerők meghatározása.

Kidolgozás:

Az egyensúlyi egyenlet: $\vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{F} = \vec{0}, \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D = -\vec{F}.$

A támasztóerők rúd irányúak:

$$\vec{F}_B = \lambda_B \vec{a}_B = \lambda_B \vec{r}_{BA}, \quad \vec{F}_C = \lambda_C \vec{a}_C = \lambda_C \vec{r}_{CA}, \quad \vec{F}_D = \lambda_D \vec{a}_D = \lambda_D \vec{r}_{DA}.$$

A támasztóerők irányvektorai:

$$\vec{a}_B = \vec{r}_{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = (4\vec{e}_y + \vec{e}_z) - (-4\vec{e}_x) = (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + \vec{e}_z) \text{ m},$$

$$\vec{a}_C = \vec{r}_{CA} = \vec{r}_A - \vec{r}_C = (4\vec{e}_y + \vec{e}_z) - (4\vec{e}_z) = (4\vec{e}_y - 3\vec{e}_z) \text{ m},$$

$$\vec{a}_D = \vec{r}_{DA} = \vec{r}_A - \vec{r}_D = (4\vec{e}_y + \vec{e}_z) - (2\vec{e}_x) = (-2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + \vec{e}_z) \text{ m}.$$

Az egyensúlyi egyenlet az új jelölésekkel:

$$\lambda_B \vec{a}_B + \lambda_C \vec{a}_C + \lambda_D \vec{a}_D = -\vec{F}.$$

Az egyensúlyi egyenlet mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} & a_{Cx} & a_{Dx} \\ a_{By} & a_{Cy} & a_{Dy} \\ a_{Bz} & a_{Cz} & a_{Dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_B \\ \lambda_C \\ \lambda_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_x \\ -F_y \\ -F_z \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_B \\ \lambda_C \\ \lambda_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

A lineáris algebrai egyenletrendszer megoldása:

$$\lambda_B = -1, \quad \lambda_C = 3, \quad \lambda_D = -2.$$

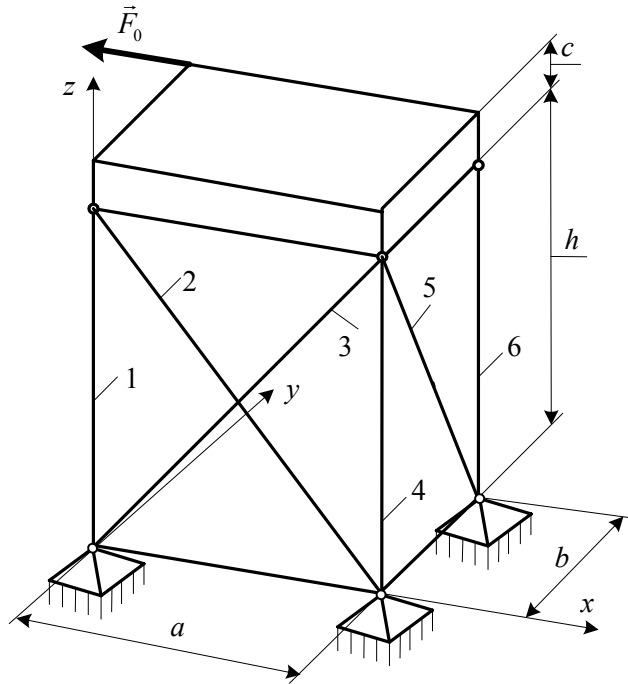
A támasztóerő vektorok:

$$\vec{F}_B = \lambda_B \vec{a}_B = (-4\vec{e}_x - 4\vec{e}_y - \vec{e}_z) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_C = \lambda_C \vec{a}_C = (12\vec{e}_y - 9\vec{e}_z) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_D = \lambda_D \vec{a}_D = (4\vec{e}_x - 8\vec{e}_y - 2\vec{e}_z) \text{ kN}.$$

4.3.2. feladat: Térbeli rúdszerkezet támasztóerői



Adott:

$$\vec{F}_0 = 1 \text{ kNm}, \quad a = 4 \text{ m}, \quad b = 2 \text{ m}, \\ c = 1 \text{ m}, \quad h = 5 \text{ m}.$$

Feladat:

A szerkezet támasztóerőinek meghatározása számítással.

Kidolgozás:

A szerkezet terhelésének redukciója a koordináta-rendszer kezdőpontjába:

$$\vec{F}_0 = (-\vec{e}_x) \text{ kN}, \\ \vec{M}_O = (2\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \times (-\vec{e}_x) = \\ = (2\vec{e}_z - 6\vec{e}_y) \text{ kNm}.$$

A szerkezet támasztóerői: $\vec{F}_i = \lambda_i \vec{a}_i$, $(i = 1, 2, \dots, 6)$.

A támasztóerők irányvektorai:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_z, \\ \vec{a}_2 = (-4\vec{e}_x + 5\vec{e}_z), \\ \vec{a}_3 = (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z), \\ \vec{a}_4 = (\vec{e}_z), \\ \vec{a}_5 = (-2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z), \\ \vec{a}_6 = (\vec{e}_z).$$

Az irányvektorok nyomatéka a KR kezdőpontjára:

$$\vec{b}_1 = \vec{0}, \\ \vec{b}_2 = (4\vec{e}_x) \times (-4\vec{e}_x + 5\vec{e}_z) = (-20\vec{e}_y), \\ \vec{b}_3 = \vec{0}, \\ \vec{b}_4 = (4\vec{e}_x) \times (\vec{e}_z) = (-4\vec{e}_y), \\ \vec{b}_5 = (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \times (-2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z) = (10\vec{e}_x - 20\vec{e}_y - 8\vec{e}_z), \\ \vec{b}_6 = (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \times (\vec{e}_z) = (-4\vec{e}_y + 2\vec{e}_x).$$

Az egyensúlyi egyenletek mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & a_{4x} & a_{5x} & a_{6x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} & a_{4y} & a_{5y} & a_{6y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} & a_{4z} & a_{5z} & a_{6z} \\ b_{1x} & b_{2x} & b_{3x} & b_{4x} & b_{5x} & b_{6x} \\ b_{1y} & b_{2y} & b_{3y} & b_{4y} & b_{5y} & b_{6y} \\ b_{1z} & b_{2z} & b_{3z} & b_{4z} & b_{5z} & b_{6z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ez a λ_i ismeretlenekre inhomogén, lineáris algebrai egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & -20 & 0 & -4 & -20 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

A 6. egyenletből: $-8\lambda_5 = -2, \Rightarrow \lambda_5 = \frac{1}{4}.$

A 4. egyenletből: $10 \cdot \frac{1}{4} + 2\lambda_6 = 0, \Rightarrow \lambda_6 = -\frac{5}{4}.$

A 2. egyenletből: $-2 \cdot \frac{1}{4} + 2\lambda_3 = 0, \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{4}.$

Az 1. egyenletből: $4 \cdot \frac{1}{4} - 4\lambda_2 = 1, \Rightarrow \lambda_2 = 0.$

Az 5. egyenletből: $-4 \cdot (-\frac{5}{4}) - 20 \cdot \frac{1}{4} - 4\lambda_4 = 6, \Rightarrow \lambda_4 = -1,5,$

A 3. egyenletből: $(-\frac{5}{4}) + 5 \cdot \frac{1}{4} + (-\frac{3}{2}) + 5 \cdot \frac{1}{4} + \lambda_1 = 1, \Rightarrow \lambda_1 = \frac{5}{4}.$

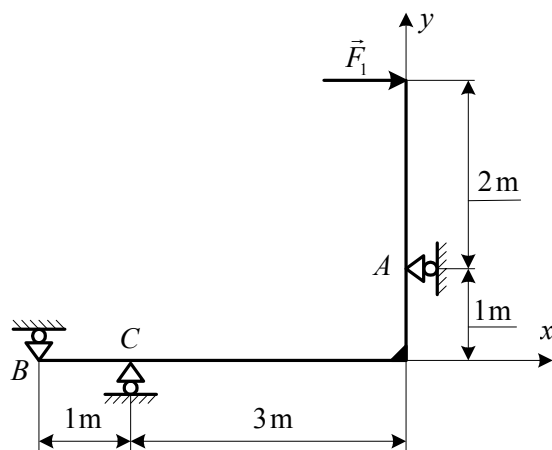
A szerkezet támasztóerői: $\vec{F}_i = \lambda_i \vec{a}_i, (i=1, 2, \dots, 6).$

$\vec{F}_1 = (1,25\vec{e}_z) \text{ kN}, \quad \vec{F}_4 = (-1,5\vec{e}_z) \text{ kN},$

$\vec{F}_2 = \vec{0}, \quad \vec{F}_5 = (-0,5\vec{e}_y + 1,25\vec{e}_z) \text{ kN},$

$\vec{F}_3 = (\vec{e}_x + 0,5\vec{e}_y + 1,25\vec{e}_z) \text{ kN}, \quad \vec{F}_6 = (-1,25\vec{e}_z).$

4.3.3. feladat: Síkbeli Rúdszerkezet támasztóerői



Adott: $\vec{F}_1 = (30\vec{e}_x) \text{ N}$ és a szerkezet méretei.

Feladat:

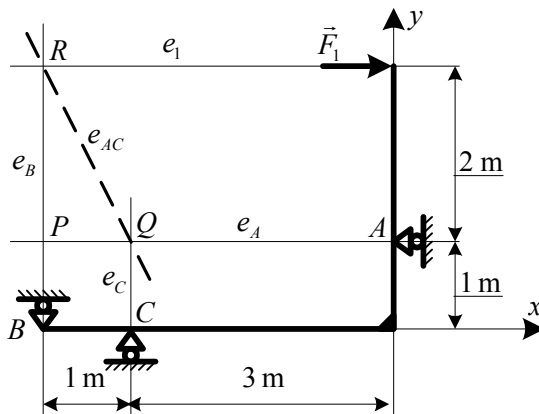
- A szerkezet támasztó erőinek meghatározása szerkesztéssel.
- A szerkezet támasztó erőinek meghatározása számítással.

Megoldás:

- A szerkezet támasztó erőinek meghatározása szerkesztéssel:

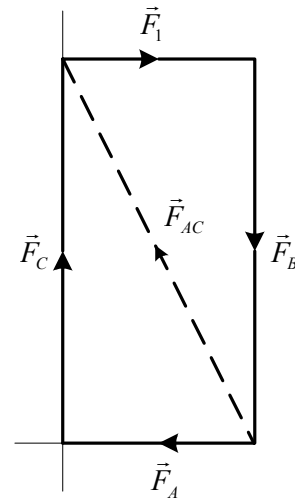
A szerkezet egyensúlyát leíró vektoregyenlet: $\vec{F}_1 + \vec{F}_B + \underbrace{(\vec{F}_A + \vec{F}_C)}_{\vec{F}_{AC}} = \vec{0}$.

Helyzetábra:



e_{AC} a Culmann egyenes.

Erőábra



b) A szerkezet támasztó erőinek meghatározása számítással:

A támasztóerők iránya ismert: $\vec{F}_A = F_{Ax} \vec{e}_x$, $\vec{F}_B = F_{By} \vec{e}_y$, $\vec{F}_C = F_{Cy} \vec{e}_y$.

Statikai egyensúlyi egyenletek:

$$M_p = 0 = -2 \cdot 30 + 1 \cdot F_{Cy} \Rightarrow F_{Cy} = 60 \text{ N } (\uparrow),$$

$$M_q = 0 = -2 \cdot 30 - 1 \cdot F_{By} \Rightarrow F_{By} = -60 \text{ N } (\downarrow),$$

$$F_x = 0 = 2 + F_{Ax} \Rightarrow F_{Ax} = -30 \text{ N } (\leftarrow).$$

A támasztóerő vektorok:

$$\vec{F}_A = (-30 \vec{e}_x) \text{ N}, \quad \vec{F}_B = (-60 \vec{e}_y) \text{ N}, \quad \vec{F}_C = (60 \vec{e}_y) \text{ N}.$$