

## 6. SZILÁRDSÁGTANI ÁLLAPOTOK

### 6.1. Alapfogalmak

Szilárdságtan: a terhelés előtt és után is tartós nyugalomban levő alakváltozásra képes testek kinematikája, dinamikája és anyagszerkezeti viselkedése.

Terhelés: ismert külső erőrendszer.

Tartós nyugalom: - a testre ható erőrendszer egyensúlyi,  
- a test megtámasztása nem enged meg merevtestszerű elmozdulásokat.

Alakváltozás: terhelés hatására

- a test pontjai egymáshoz képest elmozdulnak,
- a test anyagi geometriai alakzatai (hossz, szög, felület, térfogat) megváltoznak.

Kinematika: leírja a terhelés hatására bekövetkező elmozdulásokat és alakváltozásokat

Dinamika: leírja a terhelés hatására a testben fellépő erőrendszert

Anyagszerkezeti viselkedés: megadja az alakváltozást jellemző mennyiségek és a belső erőrendszer közötti kapcsolatot.

Rugalmas alakváltozás: A terhelés hatására alakváltozott test a terhelés megszüntetése (levétele) után visszanyeri eredeti alakját.

Képlékeny alakváltozás: A test tehermentesítés után nem nyeri vissza eredeti alakját.

Kis elmozdulás: a test pontjainak elmozdulása nagyságrendekkel kisebb a test jellemző geometriai méreteinél.

Kis alakváltozás: a test alakváltozását jellemző mennyiségek lényegesen kisebbek, mint 1.

$$\varepsilon \ll 1, \gamma \ll 1.$$

Csak kis elmozdulásokkal, kis alakváltozásokkal foglalkozunk.

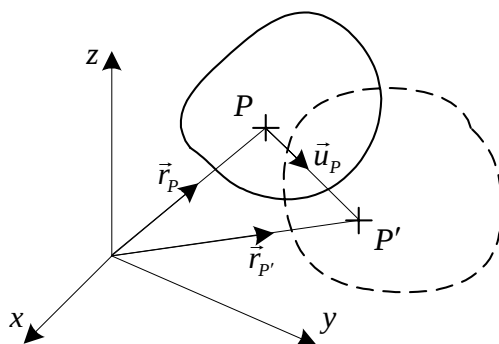
Elemi környezet / elemi tömeg / tömegpont:

Tömegpontokhoz, vagy elemi tömegekhez úgy jutunk, hogy a testet gondolatban  $\infty$  sok kis részre bontjuk.

Tömegpont a szilárdságtanban egy olyan kis testrész, amelynek méretei a test méreteihez képest elhanyagolhatóan kicsik.

Elemi környezet: egy pontot magában foglaló elemi tömeg.

### 6.2. Az elmozdulási állapot



A terhelés utáni állapotot vesszővel különböztetjük meg.

A tetszőleges  $P$  pont elmozdulása:

$$\vec{u}_P = u_P \vec{e}_x + v_P \vec{e}_y + w_P \vec{e}_z.$$

Test elmozdulása (a test összes pontjának elmozdulása) – elmozdulás-mező:

$$\vec{u}(x, y, z) = u(x, y, z) \vec{e}_x + v(x, y, z) \vec{e}_y + w(x, y, z) \vec{e}_z.$$

$$\left. \begin{aligned} u(\vec{r}) &= u(x, y, z) \\ v(\vec{r}) &= v(x, y, z) \\ w(\vec{r}) &= w(x, y, z) \end{aligned} \right\}$$

Az elmozdulás-mező skaláris koordinátái:

### 6.3. Az alakváltozási állapot

Elemi triéder: A  $P$  pontban felvett, a terhelés előtt egymásra kölcsönösen merőleges  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  egységvektor-hármas.

Feltételezzük, hogy az  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  egységvektorok a  $P$  pont elemi környezetén belül helyezkednek el.

Az elemi triéder egységvektorainak végpontjait  $A, B, C$  jelöli.

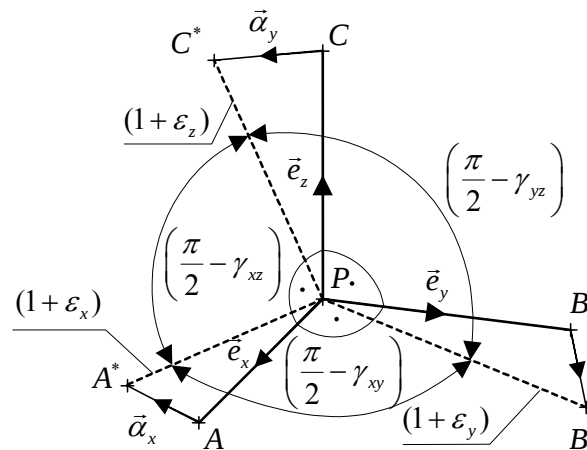
Elemi környezet alakváltozása:

Az  $A, B, C$  pontok elmozdulása három részből áll: párhuzamos eltolás + merevtestszerű forgás + alakváltozás.

Párhuzamos eltolás: mindhárom pont elmozdulása azonos.

Merevtestszerű forgás: a három pont elmozdulása különböző, de a hosszak és szögek nem változnak.

Alakváltozás: a hosszak és a szögek megváltozása.



A megváltozott hosszak:

$$\overline{PA^*} = 1 + \varepsilon_x,$$

$$\overline{PB^*} = 1 + \varepsilon_y,$$

$$\overline{PC^*} = 1 + \varepsilon_z.$$

A megváltozott szögek:

$$\left( \frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} \right), \left( \frac{\pi}{2} - \gamma_{yz} \right), \left( \frac{\pi}{2} - \gamma_{zx} \right).$$

A szögváltozások az értelmezésből következően:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz}.$$

Alakváltozási jellemzők

- fajlagos nyúlások:  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ,

- fajlagos szögtorzulások:  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ .

Az alakváltozási jellemzők előjele:

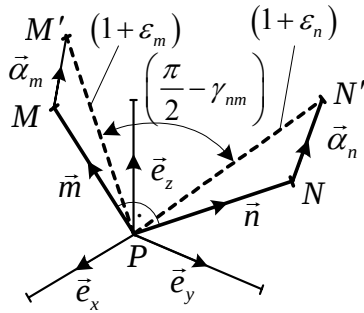
-  $\varepsilon > 0$  megnyúlás,  $\varepsilon < 0$  rövidülés,

-  $\gamma > 0$ : az eredeti  $\pi/2$ -es szög csökken,  $\gamma < 0$ : az eredeti  $\pi/2$ -es szög növekszik.

Az alakváltozási jellemzők mértékegysége:  $\frac{\text{mm}}{\text{mm}}, \text{ rad}, 1$

Kis alakváltozások esetén:  $\varepsilon = 10^{-3} \sim 10^{-5}, \gamma = 10^{-3} \sim 10^{-5}$ .

### Az alakváltozási jellemzők általánosítása:



Az  $\vec{n}$ ,  $\vec{m}$  egymásra merőleges egységvektorok:

$$\left. \begin{aligned} |\vec{n}| = |\vec{m}| = 1 \\ \vec{n} \cdot \vec{m} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$\varepsilon_n$  - az  $n$  irányú fajlagos nyúlás,

$\gamma_{mn} = \gamma_{nm}$  - az  $n, m$  terhelés előtt egymásra merőleges irányokhoz tartozó szögváltozás.

A  $P$  pont elemi környezetének alakváltozási állapotát az alakváltozási tenzor jellemzi egyértelműen.

### Alakváltozási tenzor:

- Diadikus előállítás:  $\underline{\underline{A}}_P = \vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z$ .

- Mátrixos előállítás:  $[\underline{\underline{A}}_P] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$  - szimmetrikus tenzor.

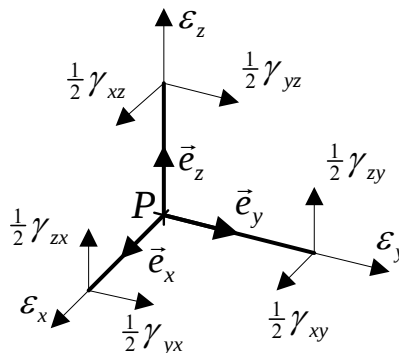
Az alakváltozási tenzor oszlopai az  $\vec{\alpha}_x$ ,  $\vec{\alpha}_y$ ,  $\vec{\alpha}_z$  alakváltozási vektorok koordinátáit tartalmazzák.

$$\vec{\alpha}_x = \varepsilon_x \vec{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yx} \vec{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{zx} \vec{e}_z,$$

Az alakváltozási vektorok koordinátái:  $\vec{\alpha}_y = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \vec{e}_x + \varepsilon_y \vec{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{yz} \vec{e}_z,$

$$\vec{\alpha}_z = \frac{1}{2}\gamma_{xz} \vec{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yz} \vec{e}_y + \varepsilon_z \vec{e}_z.$$

Az alakváltozási állapot szemléltetése: az elemi triéder végpontjaiba felmérjük az alakváltozási vektorok koordinátáit.



Adott irányokhoz tartozó alakváltozási jellemzők meghatározása az alakváltozási tenzorból:

$$\vec{\alpha}_n = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n},$$

$$\varepsilon_n = \vec{n} \cdot \vec{\alpha}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n}, \quad \frac{1}{2} \gamma_{mn} = \frac{1}{2} \gamma_{nm} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{m}$$

#### 6.4. A feszültségi állapot

Feszültségvektor: a test egy metszettelületén megoszló belső erőrendszer sűrűségvektora (intenzitásvektora).

Jelölése:  $\vec{\rho} = \vec{\rho}(\vec{r}, \vec{n})$

$\vec{r}$  - annak  $P$  pontnak helyvektora, amely a metszettelületen van,

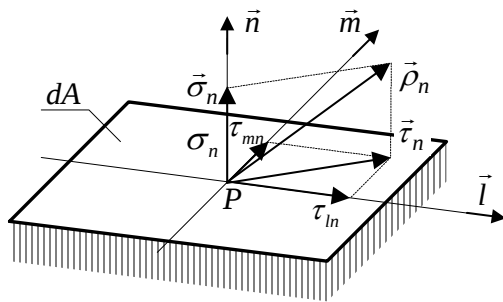
$\vec{n}$  - a  $P$  ponton átmennő metszettelület testből kifelé mutató normális egységvektora.

Pontbeli feszültségi állapot (elemi környezet feszültségi állapota):

Az adott  $P$  pontra illeszkedő összes elemi felületen fellépő feszültségvektorok összessége (halmaza).

$$\begin{aligned} \text{Ha } P \text{ rögzített: } \Rightarrow \quad & \vec{\rho} = \vec{\rho}(\vec{n}) = \vec{\rho}_n, \\ & \vec{\rho}_{(-\vec{n})} = -\vec{\rho}_n. \end{aligned}$$

A feszültségvektor összetevői, koordinátái:



$\vec{n}$  - az elemi felület normális egységvektora,  
 $\vec{m}, \vec{l}$  - az elemi felület síkjába eső, egymásra merőleges egységvektorok.

A feszültségvektor összetevői (vektorok):

- a normál feszültségvektor:  $\vec{\sigma}_n = \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{\rho}_n)}_{\sigma_n} \vec{n}.$

- a csúsztató feszültségvektor:  $\vec{\tau}_n = \vec{\rho}_n - \sigma_n \vec{n} = (\vec{n} \times \vec{\rho}_n) \times \vec{n}.$

A feszültségvektor koordinátái (skalárok):

- a normál feszültségi koordináta:  $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{n} \cdot \vec{\sigma}_n.$

- a csúsztató feszültségi koordináták:  $\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{m} \cdot \vec{\tau}_n.$

$$\tau_{ln} = \vec{l} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{l} \cdot \vec{\tau}_n.$$

Mértékegység: SI alap mértékegység:  $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$ . (Pascal, kiejtés paszkál)

A mérnöki gyakorlatban szokásos:  $\text{N/mm}^2 = \text{MN/m}^2 = \text{MPa}$ .

A  $P$  pont elemi környezetének feszültségi állapotát a feszültségi tenzor jellemzi egyértelműen.

Feszültségi tenzor:

A  $\vec{\rho}_n$  feszültségvektor az  $\vec{n}$  homogén, lineáris függvénye – tenzor.

- Diadikus előállítás:  $\underline{\underline{F}}_P = \vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z$ .

- Mátrixos előállítás:  $\left[ \underline{\underline{F}}_P \right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$  - szimmetrikus tenzor.

A feszültségi tenzor oszlopai az  $\vec{\rho}_x, \vec{\rho}_y, \vec{\rho}_z$  feszültség vektorok koordinátáit tartalmazzák.

Pl.  $\vec{\rho}_x$  - az  $\vec{e}_x$  normálisú elemi felületen ébredő feszültségvektor.

$\sigma_x$  - az  $\vec{e}_x$  normálisú síkon fellépő normál- feszültség,

$\tau_{yx}$  - az  $\vec{e}_x$  normálisú síkon fellépő  $y$  irányú csúsztató feszültség.

Szimmetria:  $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$

Az  $\underline{\underline{F}}$  feszültségi tenzor hat egymástól független skaláris mennyiséggel adható meg.

Az  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  normálisú felületen fellépő feszültségvektorok koordinátái:

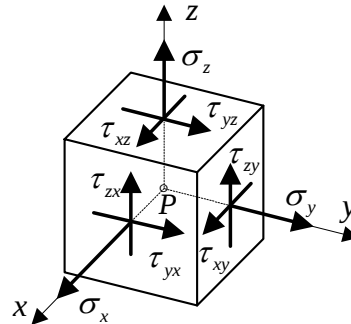
$$\vec{\rho}_x = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_x = \sigma_x \vec{e}_x + \tau_{yx} \vec{e}_y + \tau_{zx} \vec{e}_z,$$

$$\vec{\rho}_y = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_y = \tau_{xy} \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \tau_{zy} \vec{e}_z,$$

$$\vec{\rho}_z = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_z = \tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z.$$

A feszültségi állapot szemléltetése:

A  $\vec{\rho}_x, \vec{\rho}_y, \vec{\rho}_z$  feszültségvektorok koordinátáit ábrázoljuk a  $P$  pontbeli három egymásra merőleges síkon (a  $P$  pont környezetéből kiragadott elemi kocka látható oldalapjain).



Más irányokhoz tartozó feszültségkoordináták előállítása a feszültségi tenzorból:

$$\vec{\rho}_n = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n},$$

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}, \quad \tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{m} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{m}.$$

Feszültségi főtengelyek, főfeszültségek:

Definíció: Ha az  $\vec{e}$  egységvektorra merőleges elemi felületen  $\vec{\tau}_e = \vec{0}$ , azaz  $\vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e}$ , akkor az  $\vec{e}$  feszültségi főirány (főtengely),  $\sigma_e$  főfeszültség, az  $\vec{e}$ -re merőleges elemi felület főfeszültségi sík.

Megjegyzés:- Minden pontban létezik legalább három főirány, amelyek egymásra kölcsönösen merőlegesek.

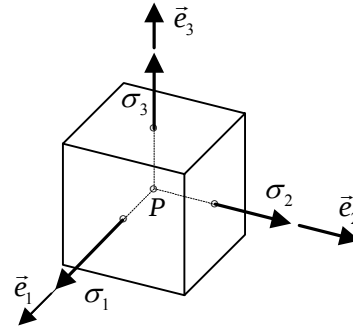
-  $\sigma_e$  lehet zérus is:  $\vec{\rho}_n = \vec{0}$ .

Feszültségi tenzor a főirányok koordináta-rendszerében

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{F}} \\ 1,2,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Megállapodás a jelölésre és sorszámozásra:

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3.$$



Főtengelyprobléma (sajátérték feladat):

Feladat: azoknak az  $\vec{e}$  főirányoknak és  $\sigma_e$  főfeszültségeknek a meghatározása, amelyek eleget tesznek a definícióban megadott feltételeknek.

A főtengelyprobléma (sajátérték feladat) azonos módon írható fel a feszültségi és az alakváltozási állapotokra.

$$\vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e},$$

$$\vec{\alpha}_e = \varepsilon_e \vec{e},$$

$$\underline{\underline{F}} \cdot \vec{e} = \sigma_e \underline{\underline{I}} \cdot \vec{e},$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{e} = \varepsilon_e \underline{\underline{I}} \cdot \vec{e},$$

$$(\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{I}}) \cdot \vec{e} = \vec{0}.$$

$$(\underline{\underline{A}} - \varepsilon_e \underline{\underline{I}}) \cdot \vec{e} = \vec{0}.$$

A fenti egyenletekben:

$$\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{egységtenzor (identenzor)}.$$

$\varepsilon_e$  - főnyúlás,

$\sigma_e$  - főfeszültség,

$\vec{e}$  - feszültségi / alakváltozási főirány.

Mindkét esetben homogén, lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk az  $\vec{e}$  (főirány) egységvektor koordinátáira:

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_e) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_e) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} (\varepsilon_x - \varepsilon_e) & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & (\varepsilon_y - \varepsilon_e) & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & (\varepsilon_z - \varepsilon_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Megjegyzés:

- Mindig van legalább három főirány, amelyek kölcsönösen merőlegesek egymásra

- A főfeszültség / főnyúlás is lehet nulla.

A lineáris algebrai egyenletrendszer nemtriviális (nem nulla) megoldásának feltétele az, hogy a lineáris algebrai egyenletrendszer együttható mátrixának elemeiből álló determinánsnak nullának kell lennie:

$$\det \underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{I}} = 0, \quad \det \underline{\underline{A}} - \varepsilon_e \underline{\underline{I}} = 0.$$

Részletesen kiírva:

$$\det \begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_e) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_e) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_e) \end{vmatrix} = 0, \quad \det \begin{vmatrix} (\varepsilon_x - \varepsilon_e) & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & (\varepsilon_y - \varepsilon_e) & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & (\varepsilon_z - \varepsilon_e) \end{vmatrix} = 0.$$

A megoldás további lépéseit csak a feszültségi állapotra mutatjuk be.

A determinánst kifejtve kapjuk a karakterisztikus egyenletet:

$$\sigma_e^3 - \sigma_I \sigma_e^2 + \sigma_{II} \sigma_e - \sigma_{III} = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet egy harmadfokú algebrai egyenlet.

A főfeszültségek meghatározása:

Karakterisztikus egyenlet megoldásai: a  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  főfeszültség.

A karakterisztikus egyenlet együtthatói a feszültségi tenzor skalár invariánsai:

$\sigma_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$  - a feszültségi tenzor első skalár invariánsa,

$$\sigma_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} = \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2 \text{ - a második skalár invariáns,}$$

$$\sigma_{III} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \text{ - a feszültségi tenzor harmadik skalár invariánsa.}$$

*Invariáns:* koordináta transzformációval szemben állandó (koordináta-rendszer választásától függetlenül ugyanaz az érték).

A feszültségi főirányok meghatározása:

Visszahelyettesítés a lineáris algebrai egyenletrendszerbe:

$$\sigma_1 \rightarrow \underbrace{e_{1x}, e_{1y}, e_{1z}}_{1. \text{ főirány}}, \quad \sigma_2 \rightarrow \underbrace{e_{2x}, e_{2y}, e_{2z}}_{2. \text{ főirány}}, \quad \sigma_3 \rightarrow \underbrace{e_{3x}, e_{3y}, e_{3z}}_{3. \text{ főirány}}.$$

A  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  főfeszültségeket a lineáris algebrai egyenletrendszerbe külön-külön behelyettesítve, azt tapasztaljuk, hogy az egyenletek nem függetlenek egymástól (a három közül egy egyenlet a másik kettő valamelyikének konstans-szorosa lesz).

Ezért a megoldást úgy kapjuk, hogy az ismeretlen  $e_{ix}, e_{iy}, e_{iz}$  ( $i=1, 2, 3$ ) koordináták közül egyet ismertnek tekintünk és a másik kettőt pedig a két független egyenletből az ismertnek tekintett koordináta függvényében meghatározzuk. Az ismertnek tekintett koordináta végül abból a feltételből számítható, hogy az  $\vec{e}$  egységvektor:  $|\vec{e}| = 1 = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}$