

9. RÚDSZERKEZETEK ALAKVÁLTOZÁSA

Statikailag határozott szerkezet:

- A szerkezet támasztóerői egyértelműen meghatározhatók statikai egyensúlyi egyenletek ..segítségével.
- Az ismeretlen támasztóerő koordináták száma = a rendelkezésre álló statikai egyensúlyi ..egyenletek számával.

Statikailag határozatlan szerkezet:

- A szerkezet támasztóerői nem határozhatók meg kizárólag statikai egyensúlyi egyenletek felhasználásával.
- Ismeretlen támasztóerő koordináták száma > rendelkezésre álló statikai egyenletek száma.

Rúdszerkezetek alakváltozási energiája

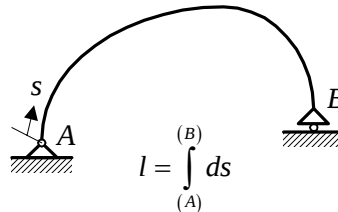
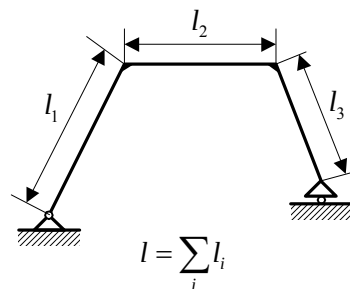
$$U = \underbrace{U_N}_{\text{húzás-nyomás}} + \underbrace{U_H}_{\text{hajl.}} + \underbrace{U_C}_{\text{csav.}} + \underbrace{U_T}_{\text{nyírás}}$$

Legtöbb esetben: $U_T \approx 0$

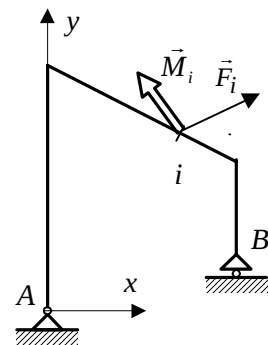
$$U = \frac{1}{2} \int_{(l)} \left(\frac{N^2}{AE} + \frac{M_{hx}^2}{I_x E} + \frac{M_{hy}^2}{I_y E} + \frac{M_c^2}{I_p G} \right) dz$$

Feltételezés: x, y a keresztmetszet tehetelenségi nyomatékai

l - a rúdszerkezet középvonalának hossza



Castigliano tétele



Terhelés: $\vec{F}_i, \vec{M}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

Támasztó erők:

$$\vec{F}_A = \vec{F}_A(\vec{F}_i, \vec{M}_i)$$

$$\vec{F}_B = \vec{F}_B(\vec{F}_i, \vec{M}_i)$$

Síkbeli terhelés:

$$\vec{F}_i = F_{xi}\vec{e}_x + F_{yi}\vec{e}_y$$

$$\vec{M}_i = M_{zi}\vec{e}_k$$

Alakváltozásienergia: $U = U(F_{xi}, F_{yi}, M_{zi})$

$$u_i = \frac{\partial U}{\partial F_{xi}}, \quad v_i = \frac{\partial U}{\partial F_{yi}}, \quad \psi_i = \frac{\partial U}{\partial M_{zi}}$$

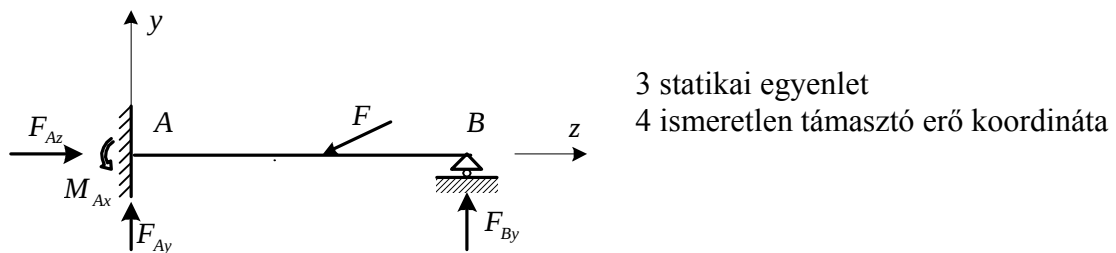
A szerkezetet terhelő F_i erő erő támadáspontjának F_i irányába eső elmozdulása egyenlő a szerkezet belső energiájának az F_i erő szerinti deriváltjával.

A szerkezetet terhelő M_i nyomaték keresztmetszetének az M_i nyomaték iránya (tengelye) körüli szögelfordulása egyenlő a szerkezet belső energiájának az M_i nyomaték szerinti deriváltjával.

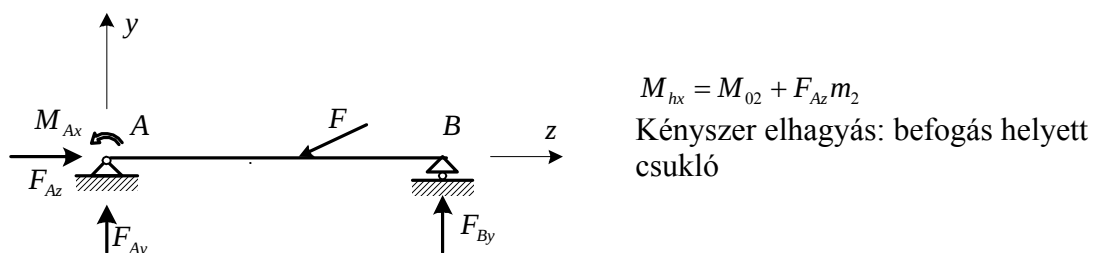
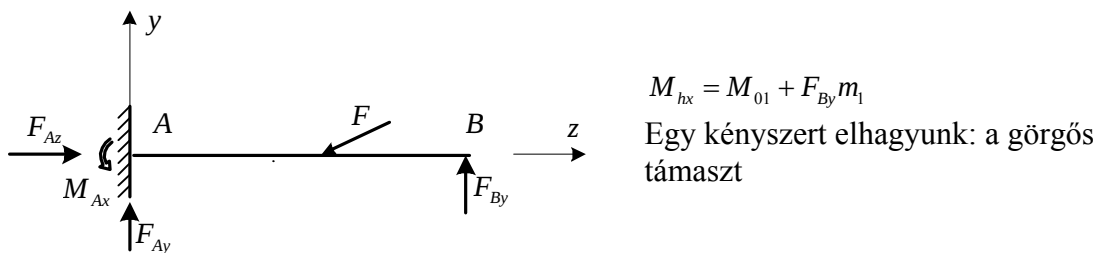
A Castigliano tétel alkalmazása statikailag határozatlan szerkezetekre

Feladat: a támasztó ER meghatározása

1) A szerkezetet a megtámasztás módosításával statikailag határozottá tesszük.



A statikailag határozottá tétel többféle módon történhet:



A statikailag határozottá tett tartóra továbbra is hat a megfelelő támasztó erő / támasztó nyomaték koordináta, de ezt a terheléshez tartozónak tekintjük.

Így a terhelés két részből áll:

- eredeti terhelés
- ismeretlen támasztóerő / támasztó nyomaték.

2) Előírjuk azt a kinematikai korlátozást, amely egyenértékű az elhagyott kényszerrel:

a) $v_B = 0$

b) $\psi_A = 0$

Alkalmazzuk a Castigliano tételt:

a)

$$v_B = 0 = \frac{\partial U}{\partial F_{By}} = \frac{\partial}{\partial F_{By}} \int_{(l)} \frac{(M_{01} + F_{By} m_1)^2}{2 I_x E} dz$$

$$0 = \frac{1}{I_x E} \left[\int_{(l)} (M_{01} + F_{By} m_1) m_1 dz \right]$$

$$0 = \frac{1}{I_x E} \left[\int_{(l)} M_{01} m_1 dz + F_{By} \int_{(l)} m_1^2 dz \right]$$

$$F_{By} = - \frac{\int_{(l)} M_{01} m_1 dz}{\int_{(l)} m_1^2 dz}$$

b)

$$\psi_A = 0 = \frac{\partial U}{\partial M_{Ax}} = \frac{\partial}{\partial M_{Ax}} \int_{(l)} \frac{(M_{02} + M_{Ax} m_2)^2}{2 I_x E} dz$$

$$0 = \frac{1}{I_x E} \left[\int_{(l)} (M_{02} + M_{Ax} m_2) m_2 dz \right]$$

$$0 = \frac{1}{I_x E} \left[\int_{(l)} M_{02} m_2 dz + M_{Ax} \int_{(l)} m_2^2 dz \right]$$

$$M_{Ax} = - \frac{\int_{(l)} M_{02} m_2 dz}{\int_{(l)} m_2^2 dz}$$

Ezután a többi támasztóerő koordináta már statikai egyensúlyi egyenletekből meghatározható.

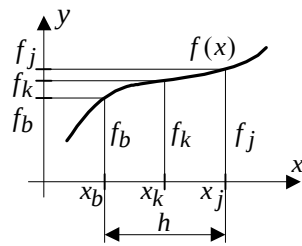
Integrálok kiszámítása

a) Integrálás zárt alakban

$M_0(z), m(z)$ függvények felírása

probléma – törések, szakadások

b) Numerikus integrálás (Simpson formula)



$$\int_{x=x_b}^{x=x_j} f(x) dx \cong \frac{h}{6} (f_b + 4f_k + f_j)$$

Ha az integrandusz harmadfokúnál nem magasabb fokszámú polinom, akkor a formula az integrál pontos értékét szolgáltatja.

Ha az integrandusz nem polinom, vagy harmadfokúnál magasabb fokszámú polinom, akkor az integrál közelítő értékét kapjuk.