

FÜGGELÉK: RUDAK EGYSZERŰ IGÉNYBEVÉTELEI

F.1. Alapfogalmak

Rúd: olyan test (alkatrész), amelynek egyik mérete lényegesen nagyobb, mint a másik kettő.

Keresztmetszet: a rúd legnagyobb méretére merőleges metszet.

Középvonal (súlyponti szál): a rúdkeresztmetszetek súlypontjai által alkotott vonal.

Mechanikai rúdmodell: a rudat egy vonallal, a középvonalával helyettesítjük és a mechanikai viselkedését jellemző mennyiségeket ehhez a vonalhoz kötjük.

Mechanikai rúdmodell $\equiv$ a rúd középvonala.

Prizmatikus rúd: olyan egyenes középvonalú rúd, amelynek keresztmetszetei állandók és a rúd középvonala menti párhuzamos eltolással egymásba tolhatók.

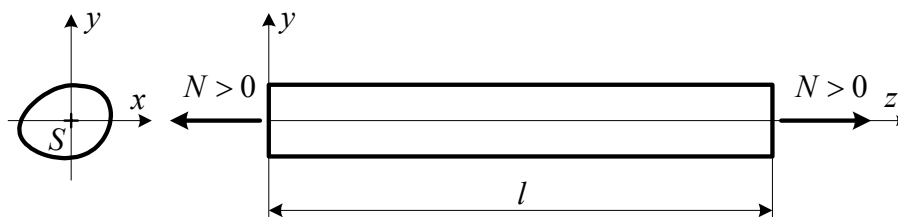
Igénybevétel: a rúd keresztmetszetén megoszló belső erőrendszernek (a feszültségeknek) a keresztmetszet S súlypontjába redukált vektorkettőse, illetve ennek a vektorkettősnek a skaláris koordinátái.

F.2. Prizmatikus rúd húzása, zömök rudak nyomása

Zömök rúd: a rúd keresztmetszete elég nagy a hosszhoz képest $\Rightarrow$ nem következik be kihajlás.

Húzás: $N > 0$, nyomás: $N < 0$.

Tapasztalat: a rúdban homogén szilárdságtani állapotok alakulnak ki. (homogén $\equiv$ minden pontban azonos)



Feltételezés: a terhelés átadási helytől (a rúd két végétől) eléggé távol vagyunk.

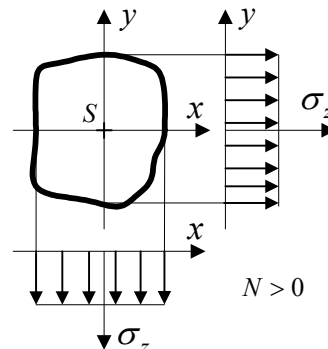
a) Alakváltozási állapot:
$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

$$\varepsilon_z = \frac{l' - l}{l} = \text{állandó.} \quad l' - \text{a terhelés hatására megváltozott hossz.}$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z - \text{keresztirányú nyúlás,} \quad \nu - \text{Poisson tényező (anyagjellemző).}$$

b) Feszültségi állapot:
$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \frac{N}{A} = \text{állandó.}$$

Feszültségeloszlás a keresztmetszet x és y tengelye mentén:



c) Anyagtörvény: az egyszerű Hooke (huk) törvény.

$$\sigma_z = E \varepsilon_z, \quad E - \text{a Young-féle (jang-féle) rugalmassági modulus.}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z$$

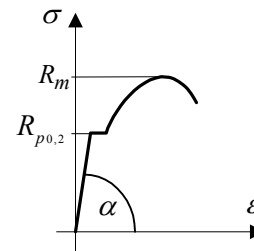
Szakító diagram:

Alakítható szerkezetű anyagokra, szabványos próbatestek húzásával kapjuk.

$R_{p0,2}$ - folyáshatár, R_m - szakítószilárdság.

A rugalmassági modulus a szakító diagram lineáris szakaszának

$$\text{iránytangense: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E$$



d) Energia állapot:

$$\text{Fajlagos alakváltozási energia: } u = \frac{1}{2} \varepsilon_z \sigma_z = \frac{1}{2} \frac{\sigma_z^2}{E}.$$

$$\text{A tisztán húzott-nyomott rúd alakváltozási energiája: } U = \frac{1}{2} \frac{N^2}{AE} l.$$

F.3. Húzott - nyomott rudak tönkremenetele

Tönkremenetel: az alkatrész nem alkalmas normál üzemelésre

a) Szilárdsági ellenőrzés

Adott: a rúd anyaga, igénybevétele és a keresztmetszet méretei.

Kérdés: a rúd az adott igénybevételt kellő biztonsággal el tudja-e viselni.

b) Szilárdsági méretezés

Adott: a rúd anyaga és igénybevételei.

Feladat: úgy meghatározni a keresztmetszet méreteit, hogy a rúd az adott igénybevételt kellő biztonsággal el tudja viselni

c) Tönkremeneteli jellemző: σ_{jell} lehet pl. az R_m , vagy az $R_{p0,2}$.

d) Biztonsági tényező: $\sigma_{meg} = \frac{\sigma_{jell}}{n}$, $n > 1$, szabvány, vagy egyéni megfontolás alapján vesszük fel.

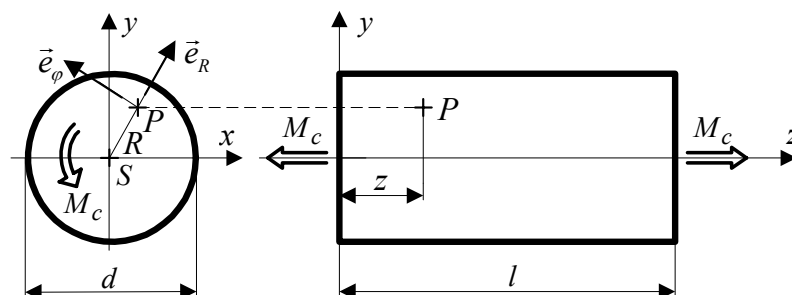
e) Ellenőrzés, méretezés húzás-nyomás esetén:

$$\text{Ellenőrzés: a rúd megfelel, ha teljesül} \quad \sigma_z \leq \sigma_{meg} = \frac{\sigma_{jell}}{n}.$$

$$\text{Méretezés: } \sigma_z \leq \sigma_{meg} \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{A} \leq \sigma_{meg} \quad \Rightarrow \quad A \geq \frac{N}{\sigma_{meg}}.$$

Az utolsó összefüggés megadja, hogy legalább mekkora legyen a keresztmetszet.

F.3. Kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak csavarása



Henger koordináta-rendszer (HKR): $\vec{e}_R, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$.

Megfigyelés (mérés): $l' = l \quad d' = d$

A z helyen levő keresztmetszet szögelfordulása: $\Phi = \vartheta z$, $\vartheta = \text{áll.}$ - fajlagos szögelfordulás.

a) Elmozdulási állapot:

$$\begin{aligned} \text{A } P \text{ pont elmozdulása (HKR-ben): } \vec{u} &= u\vec{e}_R + v\vec{e}_\varphi + w\vec{e}_z, & u \equiv w \equiv 0, & & v = R\Phi = z\gamma_{z\varphi}. \\ & & & & Rz\vartheta = z\gamma_{z\varphi}, \\ & & & & \gamma_{z\varphi} = \gamma_{\varphi z} = R\vartheta. \end{aligned}$$

b) Alakváltozási állapot (HKR-ben):
$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \\ R\varphi z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix},$$

$\gamma_{z\varphi} = \gamma_{\varphi z} = \vartheta R \Rightarrow$ az $\underline{\underline{A}}$ nem homogén, az R helykoordináta függvénye.

c) Feszültségi állapot (HKR-ben):

A tiszta csavarásra vonatkozó Hooke-törvény skaláris alakja $\tau_{\varphi z} = G\gamma_{\varphi z}$.

A tiszta csavarásra vonatkozó Hooke-törvény tenzor alakja: $\underline{\underline{T}} = 2G\underline{\underline{A}}$.

G – csúsztató rugalmassági modulus (anyagjellemző).

A feszültségi tenzor:
$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{T}} \\ R\varphi z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G\gamma_{\varphi z} \\ 0 & G\gamma_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}.$$

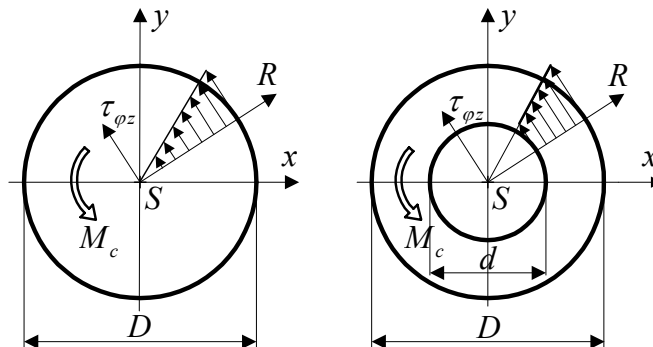
$$\tau_{z\varphi} = \tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} R, \quad \text{A } \tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} \text{ feszültség az } R \text{ lineáris függvénye.}$$

A keresztmetszetek poláris másodrendű nyomatéka:
$$I_p = \int_{(A)} R^2 dA.$$

Az integrálást elvégezve: kör keresztmetszetre: $I_p = \frac{d^4 \pi}{32},$

$$\text{körgyűrű keresztmetszetre: } I_p = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32}.$$

Feszültségeloszlás a keresztmetszet sugárirányú egyenesé mentén:



Fajlagos szögelfordulás:
$$\tau_{\varphi z} = G\gamma_{\varphi z} = G\vartheta R = \frac{M_c}{I_p} R \Rightarrow \vartheta = \frac{M_c}{I_p G}.$$

d) Energia állapot:

Fajlagos alakváltozási energia: $u = \frac{1}{2} \gamma_{\varphi z} \tau_{\varphi z} = \frac{1}{2} \frac{\tau_{\varphi z}^2}{G}$.

A tisztán csavart rúd alakváltozási energiája: $U = \frac{1}{2} \frac{M_c^2}{I_p G} l$.

e) Szilárdságtani ellenőrzés:

$$|\tau_{\varphi z}|_{\max} = \tau_{\max} = \frac{M_c}{I_p} \frac{D}{2} = \frac{M_c}{K_p}, \quad K_p = \frac{2I_p}{D} \text{ - a keresztmetszet poláris keresztmetszeti tényezője.}$$

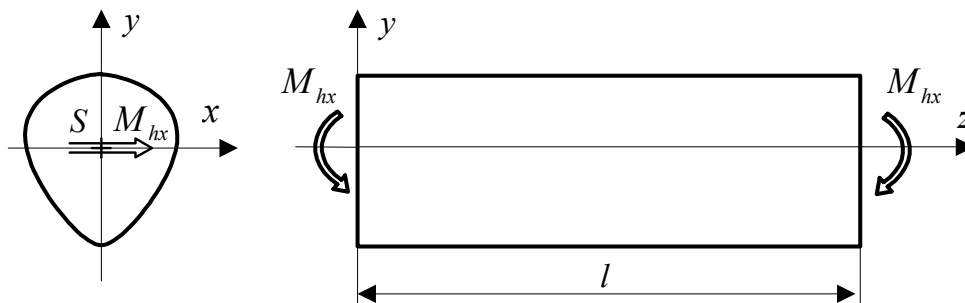
Ha $\tau_{\max} \leq \tau_{\text{meg}} = \frac{\tau_{\text{jell}}}{n}$, akkor a rúd csavarásra szilárdságtanilag megfelel.

n – előírt biztonsági tényező

f) Szilárdságtani méretezés:

$$\tau_{\max} = \frac{M_c}{K_p} \leq \tau_{\text{meg}} \Rightarrow K_p \geq \frac{M_c}{\tau_{\text{meg}}} \Rightarrow d \geq \dots$$

F.4. Prizmatikus rudak egyenes hajlítása



Feltételezés: y a keresztmetszet szimmetriatengelye.

Bernoulli hipotézis: Hajlítás esetén a rúd keresztmetszetei síkok maradnak és merőlegesek maradnak a rúd alakváltozott S ponti szálára, továbbá a keresztmetszet síkjában sem lép fel szögtorzulás.

a) Alakváltozási állapot:

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{y}{\rho} = \kappa y, \\ \varepsilon_x &= \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z. \end{aligned} \quad \begin{aligned} \rho &\text{ - az } S \text{ ponti szál görbületi sugara,} \\ \kappa &\text{ - az } S \text{ ponti szál görbülete,} \\ y &\text{ - annak a } P \text{ pontnak a helykoordinátája, ahol az} \\ &\text{alakváltozást meghatározzuk.} \end{aligned}$$

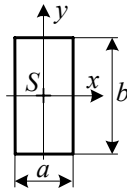
b) Feszültségi állapot:

Egyszerű Hooke törvény: $\sigma_z = E \varepsilon_z$ (ugyanaz, mint húzás-nyomásnál).

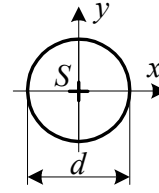
$$\begin{bmatrix} \underline{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma_z &= E \kappa y = \frac{M_{hx}}{I_x} y, \\ I_x &\text{ - a keresztmetszet } x \text{ tengelyére számított másodrendű nyomaték.} \end{aligned}$$

Téglalap és kör keresztmetszet tengelyre számított másodrendű nyomatéka:

$$I_x = \frac{ab^3}{12}.$$



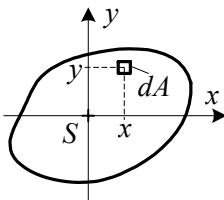
$$I_x = \frac{d^4 \pi}{64}.$$



Tengelyre, tengelypárra számított másodrendű nyomatékok értelmezése:

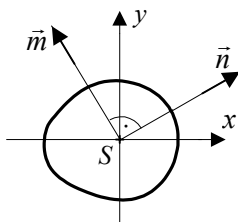
$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA, \quad I_y = \int_{(A)} x^2 dA, \quad I_{xy} = \int_{(A)} xy dA.$$

c) A keresztmetszet S ponti tehetetlenségi tenzora:



$$\underline{\underline{I_S}} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_y \end{bmatrix}.$$

Más S ponti tengelyekre számított nyomatékok:

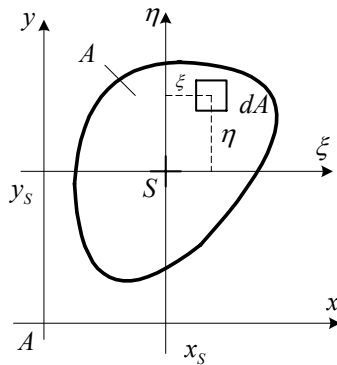


$$|\vec{n}| = |\vec{m}| = 1, \quad \vec{n} \cdot \vec{m} = 0.$$

$$I_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{I_S}} \cdot \vec{n}, \quad I_m = \vec{m} \cdot \underline{\underline{I_S}} \cdot \vec{m},$$

$$I_{mn} = I_{nm} = -\vec{m} \cdot \underline{\underline{I_S}} \cdot \vec{n} = -\vec{n} \cdot \underline{\underline{I_S}} \cdot \vec{m}.$$

Steiner tétel: összefüggés az S ponti és azzal párhuzamos tengelyekre számított tehetetlenségi nyomatékok között.



Skaláris alak:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= I_{\xi} + Ay_s^2, \\ I_y &= I_{\eta} + Ax_s^2, \\ I_{xy} &= I_{\xi\eta} + Ax_sy_s. \end{aligned} \right\}$$

Tenzoriális alak:

$$\underline{\underline{I_A}} = \underline{\underline{I_S}} + \underline{\underline{I_{AS}}},$$

$$\underline{\underline{I_{AS}}} = A \begin{bmatrix} y_s^2 & -x_sy_s \\ -x_sy_s & x_s^2 \end{bmatrix}.$$

Párhuzamos tengelyek közül mindig az S ponti tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték a legkisebb.

d) Tehetlenségi főtengelyek, fő tehetlenségi nyomatékok:

Értelmezés: Ha $I_{mn} = I_{nm} = 0$, akkor n, m tehetlenségi főtengely / irány, I_n, I_m fő tehetlenségi nyomatékok.

Főtengelyprobléma $\equiv$ sajátérték feladat.

Van -e olyan $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ irány ($\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$), amelyre teljesül:

$$\underline{\underline{I_S}} \cdot \vec{e}_1 = \lambda \vec{e}_1, \quad \underline{\underline{I_S}} \cdot \vec{e}_2 = \lambda \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \cdot \underline{\underline{I_S}} \cdot \vec{e}_2 = 0.$$

Átalakítás: $\underline{I}_S \cdot \vec{e}_1 - \lambda \underline{E} \cdot \vec{e}_1 = \vec{0}$

A vektor egyenletet részletesen kiírva: $\left\{ \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_y \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

A mátrixszorzást elvégezve és skaláris alakban felírva:

$$\begin{cases} (I_x - \lambda)e_{1x} - I_{xy}e_{1y} = 0 \\ -I_{yx} + (I_y - \lambda)e_{1y} = 0 \end{cases}$$

Ez egy homogén lineáris algebrai egyenletrendszer az e_{1x}, e_{1y} ismeretlenekre.

A nemtriviális megoldás feltétele: $\det \begin{vmatrix} (I_x - \lambda) & -I_{xy} \\ -I_{yx} & (I_y - \lambda) \end{vmatrix} = 0$.

A determinánst kifejtve kapjuk a karakterisztikus egyenletet: $\lambda^2 - (I_x + I_y)\lambda + (I_x I_y - I_{xy}^2) = 0$.

Fő tehetetlenségi nyomatékok: a karakterisztikus egyenlet megoldása.

$$\lambda_{1,2} = I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Megállapodás a jelölésre: $I_1 > I_2$

Főirányok:

I_1 - et visszahelyettesítve a lineáris algebrai egyenletrendszerbe: $\frac{e_{1y}}{e_{1x}} = \tan \varphi_1 = \frac{I_x - I_1}{I_{xy}}$.
 $|\vec{e}_1| = 1 = \sqrt{e_{1x}^2 + e_{1y}^2}$.

I_2 - t visszahelyettesítve: $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$.

Tételek:

- Minden keresztmetszetre van legalább egy ilyen tengelypár és ezek a tengelyek egymásra merőlegesek
- A keresztmetszet S ponti szimmetria tengelye S ponti tehetetlenségi főtengely.
- A keresztmetszet S ponti szimmetriatengelyére merőleges S ponti tengely is tehetetlenségi főtengely

e) Egyenes hajlítás:

Értelmezés: ha az M_{hx} hajlítónyomaték párhuzamos valamelyik S ponti tehetetlenségi főtengellyel.

Maximális feszültség: $\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y \Rightarrow \sigma_{z \max} = \frac{|M_{hx}|}{I_x} e_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{K_x}, \quad \sigma_{z \max} = |\sigma_{z \max}|$.

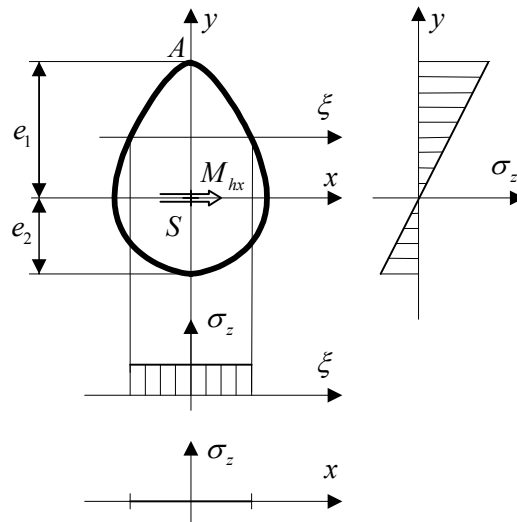
$K_x = \frac{I_x}{e_{\max}}$ - az x tengelyre számított keresztmetszeti tényező,

$e_{\max} = \max(e_1, e_2)$, a vizsgált esetben: $e_{\max} = e_1$.

Veszélyes pont: a keresztmetszetnek az a pontja, ahol $\sigma_{z \max}$ fellép.

Ebben az esetben a veszélyes pont az A .

Feszültségeloszlás:



f) Szilárdságtani ellenőrzés:

Ha $\sigma_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{K_x} \leq \sigma_{\text{meg}} = \frac{\sigma_{\text{jell}}}{n}$, akkor a rúd egyenes hajlításra szilárdságtanilag megfelel.
 n - előírt biztonsági tényező.

g) Szilárdságtani méretezés:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{K_x} \leq \sigma_{\text{meg}} \Rightarrow K_x \geq \frac{|M_{hx}|}{\sigma_{\text{meg}}} \Rightarrow \text{a keresztmetszet jellemző mérete.}$$