

1. ALAPFOGALMAK

A mechanika a fizika egyik (klasszikus) részterülete.

A mechanika tárgya: testek (anyagi pontok, anyagi pontrendszerek) helyzetváltoztató mozgásainak és az ezeket létrehozó hatásoknak (erőknek) a vizsgálata.

A vizsgált testek halmazállapota szerint beszélhetünk:

- szilárd halmazállapotú testek mechanikájáról és
- folyadékok és gázok mechanikájáról.

A tantárgy szilárd halmazállapotú testek mechanikájával foglalkozik.

Az alkalmazott (mérnöki/műszaki) mechanika tárgya:

A mechanika általános törvényeinek és eljárásainak alkalmazása szilárd halmazállapotú testekből álló rendszerek/szerkezetek mérnöki feladatainak megoldására.

Test/szerkezet: az az objektum, amit vizsgálunk.

Az alkalmazott mechanika részterületei:

- *Statika:* a nyugalomban levő anyagi pontok és merev testek mechanikája.
- *Szilárdságtan:* a nyugalomban levő szilárd testek mechanikája.
- *Kinematika:* feladata az anyagi pontok és merev testek mozgásának leírása.
- *Dinamika:* feladata az anyagi pontok és merev testek mozgását létrehozó hatások (erők / nyomatékok) és a mozgás kapcsolatának leírása.
- *Rezgéstan:* feladata a rugalmas elemeket, anyagi pontokat és merev testeket tartalmazó rendszerek, valamint szilárd testek időben periodikusan változó erők / nyomatékok hatására létrejövő mozgásainak leírása.

Alapvető mérnöki mechanikai feladatok:

- *Tartós nyugalom biztosítása*
Pl.: épületek, hidak, csővezetékek, tartályok, tartószerkezetek, stb.
- *Előírt mozgások biztosítása*
Pl.: járművek, daruk, robotok, liftek, megmunkáló-gépek, stb.
- *Szerkezetek integritásának biztosítása (a gép, szerkezet biztonságosan üzemeljen)*
Pl.: a híd ne omoljon össze, a gépkocsi kereke menet közben ne szakadjon le, stb.

A mérnöki mechanikában nem valóságos testeket (anyagi rendszereket), hanem modelleket vizsgálunk. A modellezés mindig a valóságos viszonyok leegyszerűsítését jelenti.

Test modellek:

A test modell olyan idealizált test, vagy testekből álló rendszer, amelynek a vizsgálat szempontjából lényeges tulajdonságait megtartjuk, a vizsgálat szempontjából lényegtelennek ítélt tulajdonságait pedig elhanyagoljuk.

- *Merev test:* olyan test modell, amelyben a bármely két pont távolsága állandó (a pontok távolsága erő / nyomaték hatására sem változik meg).

- *Szilárd test*: olyan test modell, amely alakváltozásra képes (a test pontjainak távolsága erő / nyomaték hatására megváltozhat).
- *Rúd*: olyan test modell, amelynek egyik mérete lényegesen nagyobb, mint a másik kettő; a rúd mechanikai modellje egy vonal, a rúd középvonala (S ponti szála).
- *Anyagi pont*: olyan merev test, amelynek mozgása egyetlen pontjának mozgásával jellemezhető.
- *Anyagi pontrendszer*: anyagi pontok halmaza / összessége.

2. ERŐRENDSZEREK

2.1. Koncentrált erő megadása

Erő: egy testnek egy másik testre gyakorolt hatása.

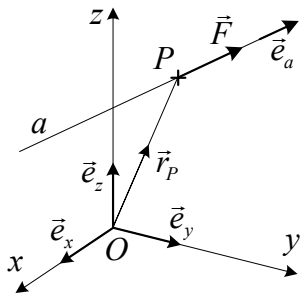
Koncentrált erő: ha egy test pontszerű érintkezéssel gyakorol hatást a másik testre.

Az $\vec{F}$ koncentrált erő vektor mennyiség: nagyság, irány, (előjel és mértékegység), támadáspont, hatásvonal jellemzi.

Mértékegysége: $N = \text{kgm/s}^2$ - *Newton* (kiejtése: nyúton).

1 N az az erő, amely 1 kg tömegű testre hatva 1 m/s^2 gyorsulást hoz létre.

Kötött erővektor: az $\vec{F}$ koncentrált erőt a P ponthoz kötjük.



$\vec{F}$ - a koncentrált, kötött erővektor,

P - az $\vec{F}$ erővektor támadáspontja,

$$\vec{r}_P = x_P \vec{e}_x + y_P \vec{e}_y + z_P \vec{e}_z,$$

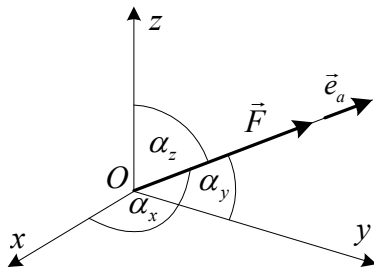
a - az $\vec{F}$ erővektor hatásvonal,

$\vec{e}_a$ - a hatásvonal irány egységvektora.

A kötött koncentrált erővektor megadása támadáspontjának $\vec{r}_P$ helyvektorával és az $\vec{F}$ erővektorral történik.

Koncentrált erő megadása:

a) megadási lehetőség:



$$\vec{F} = F \vec{e}_a,$$

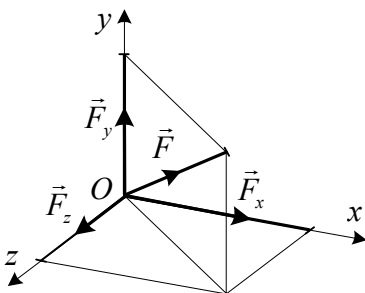
$\vec{e}_a$ - az erő irány egységvektora,

F - az erő $\vec{e}_a$ irányú koordinátája (előjeles skalár szám),

$$\vec{e} = \cos \alpha_x \vec{e}_x + \cos \alpha_y \vec{e}_y + \cos \alpha_z \vec{e}_z,$$

$$|\vec{e}| = 1 = \cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z.$$

b) megadási lehetőség:



$$\vec{F} = \underbrace{F_x \vec{e}_x}_{\vec{F}_x} + \underbrace{F_y \vec{e}_y}_{\vec{F}_y} + \underbrace{F_z \vec{e}_z}_{\vec{F}_z} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z,$$

F_x, F_y, F_z - az erő koordinátái (skalár),

$\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ - az erő összetevői (vektor),

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - a koordináta-rendszer (KR) x, y, z irányú egységvektorai,

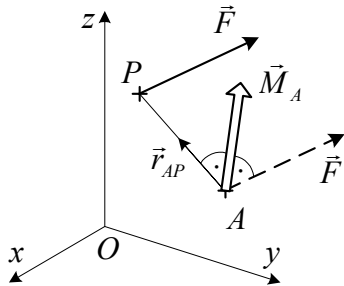
Az erő nagysága (abszolút értéke): $|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$

2.2. Erő nyomatéka

Nyomaték: az erő forgató hatása.

a) Erő pontra számított nyomatéka:

A pontra számított nyomaték az erő egy adott pont körüli forgató hatása.



$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}$ - a pontra számított nyomaték vektor mennyiség.

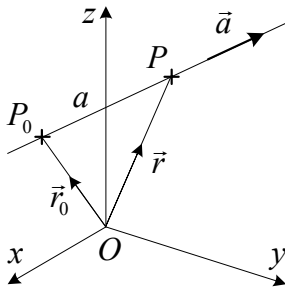
A nyomaték nagysága: $|\vec{M}_A| = |\vec{r}_{AP}| |\vec{F}| \sin \varphi$.

A nyomatékvektor merőleges az $\vec{r}_{AP}$ és az $\vec{F}$ vektorok által meghatározott síkra úgy, hogy az $\vec{r}_{AP}$, $\vec{F}$, és $\vec{M}_A$ jobbsodratú vektorhármast alkotnak (jobbkez szabály).

b) Erő tengelyre számított nyomatéka:

A tengelyre számított nyomaték az erő egy adott tengely körüli forgató hatása.

Tengely egyenlete:



Tengely: irányított egyenes $\Rightarrow$ egy egyenesen két tengely vehető fel.

P_0 - a tengely egy rögzített pontja,

P - a tengely futópontja (tetszőleges pontja),

$\vec{a}$ - a tengely irányvektora ($|\vec{a}| \neq 1$).

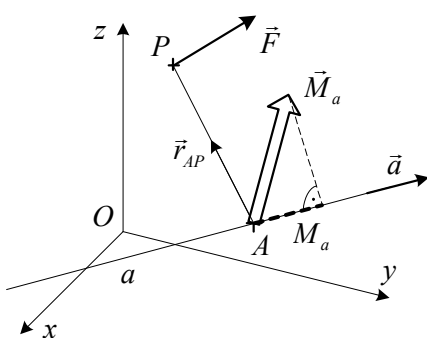
A tengely egyenlete: $\vec{a} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{0}$,

$$\vec{a} \times \vec{r} - \underbrace{\vec{a} \times \vec{r}_0}_{\vec{b}} = \vec{0}.$$

A tengely egyenletének *Plücker* (kiejtése: plükker) vektoros alakja: $\vec{a} \times \vec{r} + \vec{b} = \vec{0}$.

$\vec{a}, \vec{b}$ *Plücker* vektorok és $\vec{a} \perp \vec{b}$, azaz $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$\vec{b}$ az $\vec{a}$ irányvektor nyomatéka a koordináta-rendszer (KR) O kezdőpontjára.



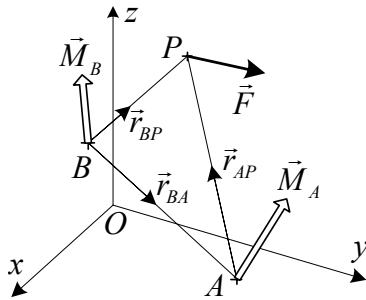
$M_a = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a$ - a tengelyre számított nyomaték (előjeles) skaláris mennyiség.

$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ - a tengely irány egységvektora.

A tengelyre számított nyomaték a tengely bármely A pontjára számított nyomatéknak a tengelyre eső (előjeles) vetülete.

A KR tengelyeire számított nyomatékok: $M_x = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_x$, $M_y = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_y$, $M_z = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_z$.

c) Összefüggés két pontra számított nyomaték között:



$$\vec{r}_{BP} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{AP} = -\vec{r}_{AB} + \vec{r}_{AP}.$$

A nyomaték értelmezéséből:

$$\vec{M}_B = \vec{r}_{BP} \times \vec{F} = (\vec{r}_{BA} + \vec{r}_{AP}) \times \vec{F} = \underbrace{\vec{r}_{AP} \times \vec{F}}_{\vec{M}_A} + \vec{r}_{BA} \times \vec{F}.$$

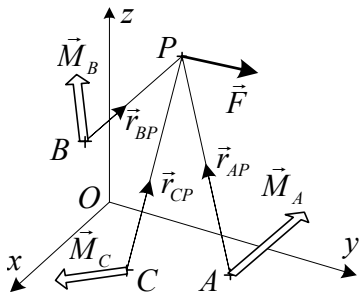
$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{r}_{BA} \times \vec{F}, \text{ vagy } \vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{r}_{AB}.$$

Az $\vec{F}$, $\vec{M}_A$ vektorkettős ismeretében bármely B pontra számított $\vec{M}_B$ nyomaték meghatározható.

2.3. Erő nyomatéki vektortere

Vektortér / vektormező: a geometriai tér, vagy a vizsgált test minden pontjához hozzárendelünk egy vektort.

Nyomatéki vektortér:



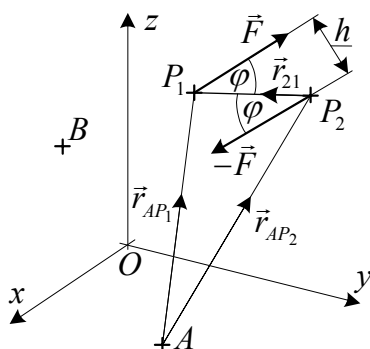
- Az $\vec{F}$ erő nyomatékát kiszámítjuk a tér minden egyes pontjára.
- A tér minden egyes pontjához hozzákötjük az adott pontra számított nyomatékvektort.
- Ezek a nyomatékvektorok alkotják az $\vec{F}$ erő nyomatéki vektorterét.

2.4. Koncentrált erőrendszerek

a) Erőpár / koncentrált nyomaték:

Erőpár: két azonos nagyságú ellentétes irányú, párhuzamos hatásvonalú erő.

Speciális erőrendszer: $\vec{F}_1 = \vec{F}$, $\vec{F}_2 = -\vec{F}$



Az erőpár A pontra számított nyomatéka:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP_1} \times \vec{F} - \vec{r}_{AP_2} \times \vec{F} = (\vec{r}_{AP_1} - \vec{r}_{AP_2}) \times \vec{F} = \underbrace{\vec{r}_{21}}_{\vec{r}_{21}} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{AP_1} = \vec{r}_{AP_2} + \vec{r}_{21}, \quad h = |\vec{r}_{21}| \sin \varphi.$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{21} \times \vec{F} = \vec{M}_B.$$

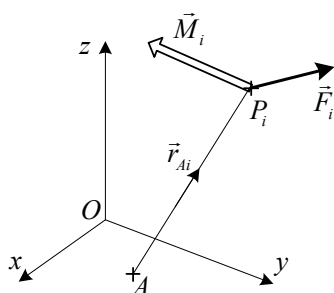
Erőpár nyomatéka a tér bármely pontjára ugyanannyi.

Erőpár homogén nyomatéki vektorteret hoz létre.

Az erőpár a tér bármely pontjához köthető, az erőpár vektor nem változik.

b) Általános (szétszórt) erőrendszer:

Az erőrendszer megadása: $\vec{F}_i (i = 1, 2, \dots, n), \vec{M}_i (i = 1, 2, \dots, n)$.



Az erőrendszer általános esetben erőkből és erőpárokból (koncentrált nyomatékokból) állhat.

Az erőrendszer eredő erővektora: $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$.

Az erőrendszer eredő nyomatékvektora: $\vec{M}_A = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{AP_i} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$.

c) Erőrendszer eredő / redukált vektorkettőse:

Az eredő vektorkettős: - eredő erő,
- megadott pontra számított eredő nyomaték.

Az eredő vektorkettős jelölése: $[\vec{F}(A), \vec{M}(A)]$.

Az eredő vektorkettős kiszámítása: $\vec{F}(A) = \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \vec{M}_A = \sum_{i=1}^n (\vec{M}_i + \vec{r}_{AP_i} \times \vec{F}_i)$.

Megjegyzés:

- Az eredő vektorkettős a nyomatéki tér vonatkozásában egyértelműen jellemzi az erőrendszert.
- A redukált vektorkettős bevezetésével az általános erőrendszer problémáját egy erő feladatára vezettük vissza.
- Az erőrendszer eredő erővektora a tér bármely pontjába redukálva ugyanannyi:

$$\vec{F}(A) = \vec{F}(B) = \vec{F}.$$

- Az erőrendszer B pontra számított nyomatéka:

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{r}_{AB}.$$

Az A pontbeli redukált vektorkettős ismeretében az erőrendszernek a tér bármely B pontjába számított nyomatéka meghatározható.

2.5. Erőrendszerek egyenértékűsége

a) Az egyenértékűség értelmezése:

Két erőrendszer egymással egyenértékű, ha azonos nyomatéki vektorteret hoznak létre.

Jelölés: $\underbrace{(E')}_{\text{egyik ER}} \stackrel{M}{=} \underbrace{(E'')}_{\text{másik ER}} =$ - az erőrendszerek közötti egyenlőség a nyomatéki tér vonatkozásában áll fenn.

A két erőrendszernek a tér minden egyes pontjára számított nyomatéka ugyanaz a vektor.

b) Az egyenértékűség feltételei (kritériumai):

Két erőrendszer egyenértékűsége három, egymástól független feltétel (rendszer) teljesülése esetén áll fenn. Ezek közül bármelyik feltétel teljesülése elegendő az egyenértékűség fennállásához.

1. $\vec{F}' = \vec{F}''$, $\vec{M}'_A = \vec{M}''_A$. Az A pont a tér egy tetszőleges, rögzített pontja.
2. $\vec{M}'_A = \vec{M}''_A$,
 $\vec{M}'_B = \vec{M}''_B$,
 $\vec{M}'_C = \vec{M}''_C$. Az A, B, C a tér három, nem egy egyenesre eső (nem kollineáris) pontja.
3. $M'_i = M''_i$, ($i=1, 2, \dots, 6$) Hat tetszőleges, de lineárisan független tengelyre számított nyomaték egyenlő.

A lineáris függetlenség definícióját később adjuk meg.

Lineárisan függetlenek például: - tetraéder oldalélei,

- háromszög alapú hasáb oldalélei.

A kritériumokat szokás a statika egyenleteinek is nevezni.

c) A kritériumok bizonyítása:

1. kritérium: $\vec{F}' = \vec{F}''$, $\vec{M}'_A = \vec{M}''_A$.

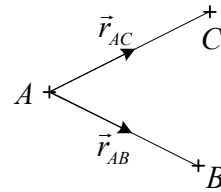
Kérdés: ebből a két vektoregyenletből következően fennáll-e a tér bármely B pontjára $\vec{M}'_B = \vec{M}''_B$?

$$\text{Bizonyítás: } \left. \begin{aligned} \vec{M}'_B &= \vec{M}'_A + \vec{F}' \times \vec{r}_{AB} \\ \vec{M}''_B &= \vec{M}''_A + \vec{F}'' \times \vec{r}_{AB} = \vec{M}'_A + \vec{F}' \times \vec{r}_{AB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{M}'_B = \vec{M}''_B.$$

Az 1. kritériumból: $\vec{F}' = \vec{F}''$ és $\vec{M}'_A = \vec{M}''_A$.

Mivel B a tér bármely pontja lehet, ezért az 1. kritérium egyenleteinek teljesülése elegendő az egyenértékűség biztosításához.

2. kritérium: $\vec{M}'_A = \vec{M}''_A$,
 $\vec{M}'_B = \vec{M}''_B$,
 $\vec{M}'_C = \vec{M}''_C$.



Kérdés: ennek a három vektoregyenletnek a teljesülése elegendő-e az egyenértékűséghez?

$$\text{Bizonyítás: } \left. \begin{aligned} \vec{M}'_B &= \vec{M}'_A + \vec{F}' \times \vec{r}_{AB} \\ \vec{M}''_B &= \vec{M}''_A + \vec{F}'' \times \vec{r}_{AB} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \vec{M}'_C &= \vec{M}'_A + \vec{F}' \times \vec{r}_{AC} \\ \vec{M}''_C &= \vec{M}''_A + \vec{F}'' \times \vec{r}_{AC} \end{aligned} \right\}$$

Az egyenleteket egymásból kivonva és a 2. kritérium egyenleteit figyelembe véve:

$$\vec{0} = \vec{0} + (\vec{F}' - \vec{F}'') \times \vec{r}_{AB},$$

$\Downarrow$

$$(\vec{F}' - \vec{F}'') \parallel \vec{r}_{AB},$$

$$\vec{0} = \vec{0} + (\vec{F}' - \vec{F}'') \times \vec{r}_{AC}.$$

$\Downarrow$

$$(\vec{F}' - \vec{F}'') \parallel \vec{r}_{AC}.$$

Mivel $\vec{r}_{AB}$ nem $\parallel \vec{r}_{AC}$ (mert az A, B, C pontok nem esnek egy egyenesre) ezért az $(\vec{F}' - \vec{F}'')$ csak akkor lehet párhuzamos mindkettővel, ha zérus vektor.

$$\vec{F}' - \vec{F}'' = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}' = \vec{F}''.$$

Ezzel a problémát visszavezettük az 1. kritériumra: $\vec{F}' = \vec{F}''$, $\vec{M}'_A = \vec{M}''_A$.

Az 1. kritérium elégséges voltát pedig az előzőekben bizonyítottuk.

3. kritérium: $M'_i = M''_i$, $(i=1,2, \dots, 6)$.

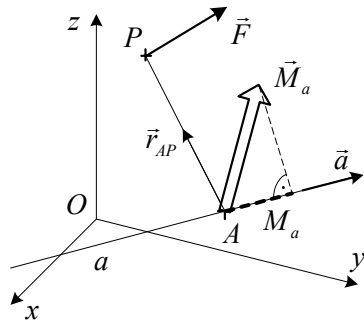
Kérdés: a fenti hat skalár egyenlet teljesülése biztosítja-e az erőrendszerek egyenértékűségét?

Bizonyítás:

Először átalakítjuk a tengelyre számított nyomaték összefüggését.

Az „a” jelű tengely egyenlete: $\vec{a} \times \vec{r} + \vec{b} = \vec{0}$

A tengelyre számított nyomaték: $M_a = \vec{e}_a \cdot \vec{M}_A = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \vec{M}_A = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot (\vec{M}_O + \vec{F} \times \vec{r}_{OA})$.



A skaláris szorzást elvégezve:

$$M_a = \frac{1}{|\vec{a}|} [\vec{a} \cdot \vec{M}_O + \vec{a} \cdot (\vec{F} \times \vec{r}_{OA})] = \frac{1}{|\vec{a}|} (\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{M}_O}_{\vec{a} \cdot \vec{M}_O} + \underbrace{\vec{a} \cdot (\vec{F} \times \vec{r}_{OA})}_{\vec{F} \cdot (\vec{r}_{OA} \times \vec{a})}).$$

Ezután térünk rá a 3. kritérium bizonyítására.

A hat tengely egyenlete: $\vec{a}_i \times \vec{r} + \vec{b}_i = \vec{0}$, $\vec{a}_i \neq 0$, $\vec{a}_i \cdot \vec{b}_i = 0$, $(i=1,2,3,4,5,6)$.

A hat tengelyre számított nyomaték:

$$M'_{ai} = \frac{1}{|\vec{a}_i|} (\vec{a}_i \cdot \vec{M}'_O + \vec{b}_i \cdot \vec{F}'), \quad M''_{ai} = \frac{1}{|\vec{a}_i|} (\vec{a}_i \cdot \vec{M}''_O + \vec{b}_i \cdot \vec{F}'')$$

A 3. kritérium: $M'_{ai} = M''_{ai}$.

A tengelyre számított nyomatékokat behelyettesítve és egy oldalra rendezve:

$$\vec{a}_i \cdot (\vec{M}'_O - \vec{M}''_O) + \vec{b}_i \cdot (\vec{F}' - \vec{F}'') = 0.$$

A zárójelben álló mennyiségek koordinátáinak jelölése:

$$\vec{M}'_O - \vec{M}''_O = M_x \vec{e}_x + M_y \vec{e}_y + M_z \vec{e}_z,$$

$$\vec{F}' - \vec{F}'' = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z.$$

A jelölést behelyettesítve az egy oldalra rendezett kritériumba, az

$$\begin{aligned} a_{1x}M_x + a_{1y}M_y + a_{1z}M_z + b_{1x}F_x + b_{1y}F_y + b_{1z}F_z &= 0, \\ a_{2x}M_x + a_{2y}M_y + a_{2z}M_z + b_{2x}F_x + b_{2y}F_y + b_{2z}F_z &= 0, \\ a_{3x}M_x + a_{3y}M_y + a_{3z}M_z + b_{3x}F_x + b_{3y}F_y + b_{3z}F_z &= 0, \\ a_{4x}M_x + a_{4y}M_y + a_{4z}M_z + b_{4x}F_x + b_{4y}F_y + b_{4z}F_z &= 0, \\ a_{5x}M_x + a_{5y}M_y + a_{5z}M_z + b_{5x}F_x + b_{5y}F_y + b_{5z}F_z &= 0, \\ a_{6x}M_x + a_{6y}M_y + a_{6z}M_z + b_{6x}F_x + b_{6y}F_y + b_{6z}F_z &= 0. \end{aligned}$$

homogén lineáris algebrai egyenletrendszert kapjuk az $M_x, M_y, M_z, F_x, F_y, F_z$ ismeretlenekre.

Keressük az $M_x = M_y = M_z = F_x = F_y = F_z = 0$ megoldást (a triviális megoldást).

A triviális megoldás feltétele az, hogy a rendszer együtthatóiból képzett determinánsnak zérusnak kell lennie:

$$\det \begin{vmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} & b_{1x} & b_{1y} & b_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} & b_{2x} & b_{2y} & b_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} & b_{3x} & b_{3y} & b_{3z} \\ a_{4x} & a_{4y} & a_{4z} & b_{4x} & b_{4y} & b_{4z} \\ a_{5x} & a_{5y} & a_{5z} & b_{5x} & b_{5y} & b_{5z} \\ a_{6x} & a_{6y} & a_{6z} & b_{6x} & b_{6y} & b_{6z} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ezzel a feltétellel értelmezzük hat tengely lineáris függetlenségét is.

Definíció: Hat tengely lineárisan független, ha *Plücker* vektorainak koordinátáit tartalmazó determináns nem zérus.

A homogén lineáris algebrai egyenletrendszer zérus (triviális) megoldása esetén:

$$\begin{aligned} \vec{M}'_O - \vec{M}''_O &= \vec{0} & \Rightarrow & \vec{M}'_O = \vec{M}''_O, \\ \vec{F}' - \vec{F}'' &= \vec{0} & \Rightarrow & \vec{F}' = \vec{F}'' . \end{aligned}$$

Ezzel 3. kritériumot is visszavezettük az 1. kritériumra, amit már bizonyítottunk.

d) A statikai egyenletek jellege:

1. kritérium:	$\begin{aligned} F'_x &= F''_x & M'_{Ax} &= M''_{Ax} \\ F'_y &= F''_y & M'_{Ay} &= M''_{Ay} \\ \underbrace{F'_z = F''_z}_{\text{vetületi}} & & \underbrace{M'_{Az} = M''_{Az}}_{\text{nyomatéki}} & \\ \text{egyenletek} & & \text{egyenletek} & \end{aligned}$	6 db. független skaláris egyenlet.
2. kritérium:	$\begin{aligned} \vec{M}'_A &= \vec{M}''_A, \\ \vec{M}'_B &= \vec{M}''_B, \\ \vec{M}'_C &= \vec{M}''_C. \end{aligned}$	9 db. skaláris egyenlet, de ebből csak 6 db. lineárisan független.

3. kritérium: $M'_i = M''_i$, $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. 6 db. független skaláris egyenlet.

2.6. Erőrendszer egyensúlya

a) Az egyensúly értelmezése:

Egy erőrendszer egyensúlyi, ha zérus nyomatéki vektorteret hoz létre.

$$(\vec{E})^M = (0)$$

Az erőrendszernek a tér minden egyes pontjára számított nyomatékvektora zérus.

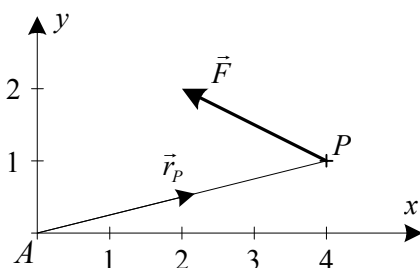
b) Az egyensúly feltételei (kritériumai):

Erőrendszer egyensúlya három, egymástól független feltétel (rendszer) teljesülése esetén áll fenn. Ezek közül bármelyik feltétel teljesülése elegendő az egyenértékűség fennállásához.

1. $\vec{F} = \vec{0}$, Az A pont a tér egy tetszőleges, rögzített pontja.
 $\vec{M}_A = \vec{0}$.
2. $\vec{M}_A = \vec{0}$, Az A, B, C a tér három, nem egy egyenesre eső (nem
 $\vec{M}_B = \vec{0}$, kolineáris) pontja.
 $\vec{M}_C = \vec{0}$.
3. $M_i = 0$, $(i=1, 2, \dots, 6)$ Hat tetszőleges, de lineárisan független tengelyre számított nyomaték egyenlő

2.7. Gyakorló feladatok erőrendszerekre

2.7.1 feladat: Erő pontra és tengelyre számított nyomatéka



Adott:

$$\vec{F} = (-40\vec{e}_x + 20\vec{e}_y) \text{ kN}, \quad \vec{r}_P = (4\vec{e}_x + \vec{e}_y) \text{ m}.$$

Feladat:

- a) Az $\vec{F}$ erő A pontra számított $\vec{M}_A$ nyomatékának meghatározása.
- b) Az $\vec{F}$ erő A ponton keresztülmenő, xy síkra merőleges a (vagy z) tengelyre számított $M_z = M_a$ nyomatékának meghatározása.

Kidolgozás:

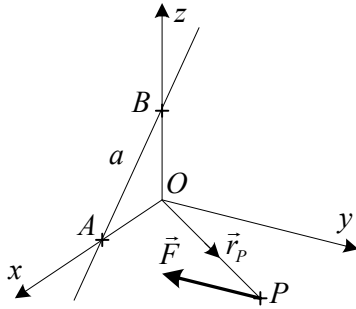
- a) Az $\vec{F}$ erő A pontra számított $\vec{M}_A$ nyomatékának meghatározása:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F} = (4\vec{e}_x + \vec{e}_y) \times (-40\vec{e}_x + 20\vec{e}_y) = 80\vec{e}_z + 40\vec{e}_z = (120\vec{e}_z) \text{ kNm}.$$

- b) Az $\vec{F}$ erő A ponton keresztülmenő, xy síkra merőleges a (vagy z) tengelyre számított $M_z = M_a$ nyomatékának meghatározása:

$$M_z = M_a = \vec{M} \cdot \vec{e}_z = 120\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 120 \text{ kNm}.$$

2.7.2. feladat: Erő pontra és tengelyre számított nyomatéka



Adott:

$$P(2,6,0) \text{ m}, A(3,0,0) \text{ m}, B(0,0,4) \text{ m},$$

$$\vec{F} = (4\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \text{ N}.$$

Feladat:

- a) Az A és a B pontra számított $\vec{M}_A$ és $\vec{M}_B$ nyomaték meghatározása.
b) Az a tengelyre számított M_a nyomaték meghatározása.

Kidolgozás:

- a) Az A és a B pontra számított $\vec{M}_A$ és $\vec{M}_B$ nyomatékok meghatározása:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F} = (\vec{r}_{AO} + \vec{r}_{OP}) \times \vec{F} = \underbrace{(-3\vec{e}_x)}_{\vec{r}_{AO}} + \underbrace{(2\vec{e}_x + 6\vec{e}_y)}_{\vec{r}_{OP}} \times (4\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -1 & 6 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (12\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 21\vec{e}_z) \text{ Nm}.$$

$$\vec{M}_B = \vec{r}_{BP} \times \vec{F} = (\vec{r}_{BO} + \vec{r}_{OP}) \times \vec{F} = \underbrace{(-4\vec{e}_z)}_{\vec{r}_{BO}} + \underbrace{(2\vec{e}_x + 6\vec{e}_y)}_{\vec{r}_{OP}} \times (4\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 6 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (0\vec{e}_x - 20\vec{e}_y - 30\vec{e}_z) = (-20\vec{e}_y - 30\vec{e}_z) \text{ Nm}.$$

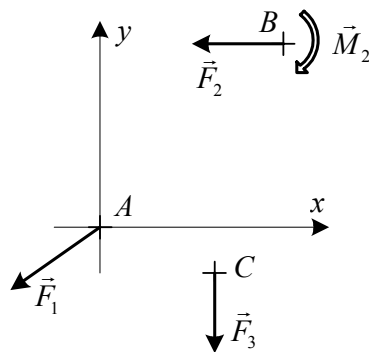
- b) Az a tengelyre számított M_a nyomaték meghatározása:

$$\vec{a} = (-3\vec{e}_x + 4\vec{e}_z) \text{ m}, \quad |\vec{a}| = 5 \text{ m}, \quad \vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (-0,6\vec{e}_x + 0,8\vec{e}_z).$$

$$M_a = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a = (12\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 21\vec{e}_z) \cdot (-0,6\vec{e}_x + 0,8\vec{e}_z) = -24 \text{ Nm}.$$

$$M_a = \vec{M}_B \cdot \vec{e}_a = (-20\vec{e}_y - 30\vec{e}_z) \cdot (-0,6\vec{e}_x + 0,8\vec{e}_z) = -24 \text{ Nm}.$$

2.7.3. feladat: Síkbeli erőrendszer redukált vektorkettőse, nyomaték átszámítás



Adott:

$$\vec{F}_1 = (-8\vec{e}_x - 5\vec{e}_y) \text{ N},$$

$$\vec{F}_2 = (-12\vec{e}_x) \text{ N},$$

$$\vec{F}_3 = (-20\vec{e}_y) \text{ N},$$

$$\vec{M}_2 = (-12\vec{e}_z) \text{ Nm},$$

$$\vec{r}_B = (4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y) \text{ m},$$

$$\vec{r}_C = (3\vec{e}_x - \vec{e}_y) \text{ m}.$$

Feladat:

- a) Az ábrán látható erőrendszer $\vec{F}$ eredőjének meghatározása.
b) Az A és C pontokra számított $\vec{M}_A$, illetve $\vec{M}_C$ nyomatékok meghatározása a nyomaték-számítás értelmezése alapján.
c) Az $\vec{M}_C$ nyomaték meghatározása a nyomaték átszámító képlettel.

Kidolgozás:

- a) Az ábrán látható erőrendszer $\vec{F}$ eredőjének meghatározása:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (-8\vec{e}_x - 5\vec{e}_y) + (-12\vec{e}_x) + (-20\vec{e}_y) = (-20\vec{e}_x - 25\vec{e}_y) \text{ N}.$$

- b) Az A és C pontokra számított $\vec{M}_A$, illetve $\vec{M}_C$ nyomatékok meghatározása a nyomaték-számítás értelmezése alapján:

$$\vec{M}_A = \sum_{i=2}^2 \vec{M}_i + \sum_{j=1}^3 (\vec{r}_{Aj} \times \vec{F}_j) = \vec{M}_2 + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_2 + \vec{r}_{AC} \times \vec{F}_3.$$

$$\vec{r}_{AB} \times \vec{F}_2 = (4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y) \times (-12\vec{e}_x) = (72\vec{e}_z) \text{ Nm},$$

$$\vec{r}_{AC} \times \vec{F}_3 = (3\vec{e}_x - \vec{e}_y) \times (-20\vec{e}_y) = (-60\vec{e}_z) \text{ Nm},$$

$$\vec{M}_A = (-12\vec{e}_z) + (72\vec{e}_z) + (-60\vec{e}_z) = \vec{0}.$$

$$\vec{M}_C = \sum_{i=2}^2 \vec{M}_i + \sum_{j=1}^3 (\vec{r}_{Cj} \times \vec{F}_j) = \vec{M}_2 + \vec{r}_{CA} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{CB} \times \vec{F}_2.$$

$$(\vec{r}_{CA} \times \vec{F}_1) = -(\vec{r}_{AC} \times \vec{F}_1) = -(3\vec{e}_x - \vec{e}_y) \times (-8\vec{e}_x - 5\vec{e}_y) = (15\vec{e}_z) + (8\vec{e}_z) = (23\vec{e}_z) \text{ Nm},$$

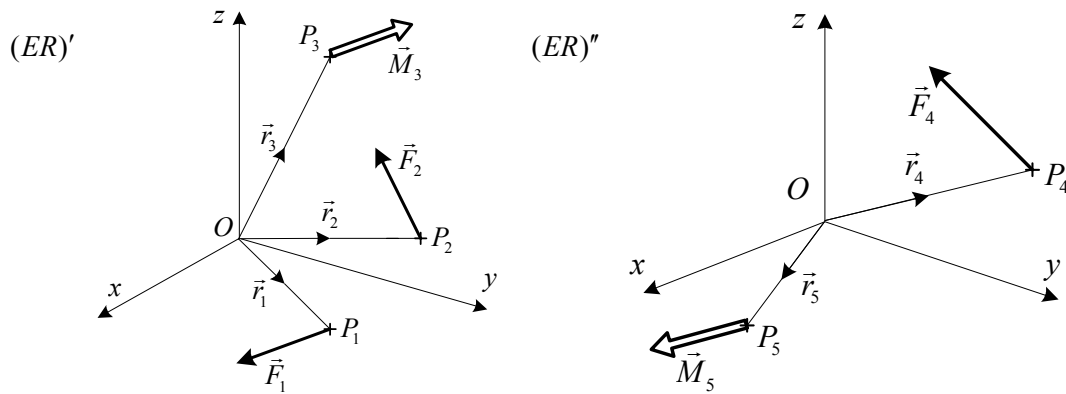
$$\begin{aligned} (\vec{r}_{CB} \times \vec{F}_2) &= ((\vec{r}_{CA} + \vec{r}_{AB}) \times \vec{F}_2) = ((-\vec{r}_{AC} + \vec{r}_{AB}) \times \vec{F}_2) = \\ &= (- (3\vec{e}_x - \vec{e}_y) + (4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y)) \times (-12\vec{e}_x) = (\vec{e}_x + 7\vec{e}_y) \times (-12\vec{e}_x) = (84\vec{e}_z) \text{ Nm}, \end{aligned}$$

$$\vec{M}_C = (-12\vec{e}_z) + (23\vec{e}_z) + (84\vec{e}_z) = (95\vec{e}_z) \text{ Nm}.$$

- c) Az $\vec{M}_A$ nyomaték és a C pontra számított $\vec{M}_C$ nyomaték kiszámítása:

$$\begin{aligned} \vec{M}_C &= \vec{M}_A + \vec{r}_{CA} \times \vec{F} = \vec{0} - \vec{r}_{AC} \times \vec{F} = -(3\vec{e}_x - \vec{e}_y) \times (-20\vec{e}_x - 25\vec{e}_y) = \\ &= (20\vec{e}_z) + (75\vec{e}_z) = (95\vec{e}_z) \text{ Nm}. \end{aligned}$$

2.7.4. feladat: Erőrendszerek egyenértékűsége



Adott:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z) \text{ m}, & \vec{F}_4 &= (3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z) \text{ N}, \\ \vec{r}_2 &= (-2\vec{e}_x + \vec{e}_y) \text{ m}, & \vec{F}_1 &= (2\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \text{ N}, \\ \vec{r}_3 &= (-5\vec{e}_x - 3\vec{e}_y - \vec{e}_z) \text{ m}, & \vec{M}_5 &= (-3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y - 4\vec{e}_z) \text{ Nm}, \\ \vec{r}_4 &= (-2\vec{e}_x + \vec{e}_y) \text{ m}, & \vec{F}_2 &= (\vec{e}_x + 3\vec{e}_z) \text{ N}, \\ \vec{r}_5 &= (3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z) \text{ m}, & \vec{M}_3 &= (-2\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z) \text{ Nm}\end{aligned}$$

Feladat: Annak eldöntése, hogy egyenértékű-e az $(ER)'$ és $(ER)''$ erőrendszer.

Kidolgozás:

Meghatározzuk mindkét erőrendszer O pontra számított redukált vektorkettőjét. Ha megegyeznek, akkor a két erőrendszer egyenértékű.

$(ER)'$:

$$\vec{F}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (2\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z) + (\vec{e}_x + 3\vec{e}_z) = (3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z) \text{ N},$$

$$\vec{M}'_O = \vec{M}_3 + \sum_{i=1}^2 (\vec{r}_{0i} \times \vec{F}_i) = \vec{M}_3 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2,$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z) \times (2\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-3\vec{e}_y - 6\vec{e}_z) \text{ Nm},$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (-2\vec{e}_x + \vec{e}_y) \times (\vec{e}_x + 3\vec{e}_z) = (3\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - \vec{e}_z) \text{ Nm},$$

$$\vec{M}'_O = (-2\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z) + (-3\vec{e}_y - 6\vec{e}_z) + (3\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - \vec{e}_z) = (\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 3\vec{e}_z) \text{ Nm}.$$

$(ER)''$:

$$\vec{F}'' = \vec{F}_4 = (3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z) \text{ N}, \quad (\vec{F}'' \text{ megegyezik } \vec{F}' \text{-vel.})$$

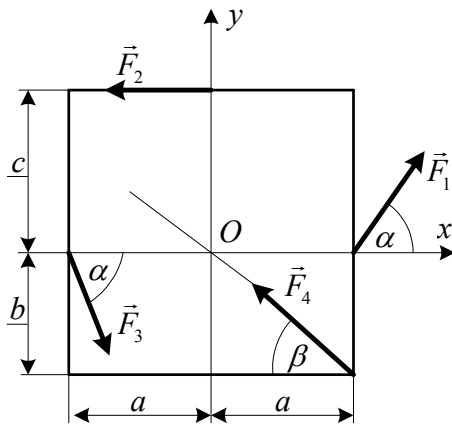
$$\vec{M}''_O = \vec{M}_5 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4,$$

$$\vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = (-2\vec{e}_x + \vec{e}_y) \times (3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (4\vec{e}_x + 8\vec{e}_y + \vec{e}_z) \text{ Nm},$$

$$\vec{M}''_O = (-3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y - 4\vec{e}_z) + (4\vec{e}_x + 8\vec{e}_y + \vec{e}_z) = (\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 3\vec{e}_z) \text{ Nm} \quad (\vec{M}''_O \text{ megegyezik } \vec{M}'_O \text{-vel.})$$

Az $(ER)'$ és $(ER)''$ erőrendszer egyenértékű.

2.7.5. feladat: Síkbeli szétszórt erőrendszer eredőjének és az eredő hatásvonalának meghatározása.



Adott:

$$F_1 = F_2 = F_3 = 10 \text{ kN},$$

$$F_4 = 50 \text{ kN}, \alpha = 60^\circ, a = 0,4 \text{ m},$$

$$b = 0,3 \text{ m}, c = 0,5 \text{ m}.$$

Feladat:

a) Az $\vec{F}$, $\vec{M}_O$ eredő vektorkettős meghatározása.

b) Az eredő erő hatásvonalának meghatározása.

Kidolgozás:

a) Az $\vec{F}$, $\vec{M}_O$ eredő vektorkettős meghatározása:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y,$$

$$F_x = \sum_{i=1}^4 F_{ix} = F_1 \cos \alpha - F_2 + F_3 \cos \alpha - F_4 \cdot 0,8 = 10 \frac{1}{2} - 10 + 10 \frac{1}{2} - 50 \cdot 0,8 = -40 \text{ kN}.$$

$$\cos \beta = \frac{0,4}{0,5} = 0,8, \sin \beta = \frac{0,3}{0,5} = 0,6.$$

$$F_y = \sum_{i=1}^4 F_{iy} = F_1 \sin \alpha - F_3 \sin \alpha + F_4 \sin \beta = 10 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 50 \cdot 0,6 = 30 \text{ kN},$$

$$\vec{F} = (-40 \vec{e}_x + 30 \vec{e}_y) \text{ kN}.$$

$$\vec{M}_O = M_z \vec{e}_z = (a F_1 \sin \alpha + c F_2 + a F_3 \sin \alpha + 0) \vec{e}_z =$$

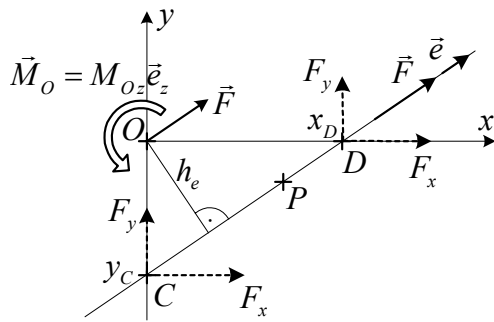
$$= \left(0,4 \cdot 10 \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,5 \cdot 10 + 0,4 \cdot 10 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \vec{e}_z = (5 + 4\sqrt{3}) \vec{e}_z = (11,93 \vec{e}_z) \text{ kNm}.$$

b) Az eredő hatásvonalának meghatározása:

Síkbeli erőrendszerek esetén: $\vec{F} \perp \vec{M}_A$.

Az eredő hatásvonalának pontjaiban: $\vec{M}_P = \vec{0} = \vec{M}_O + \vec{F} \times \vec{r}_{OP}$.

A hatásvonal egyenesének egyenlete: $\vec{a} \times \vec{r} + \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} \times \vec{r} + \vec{M}_O = \vec{0}$.



Az egyenes egyenletének a matematikában szokásos alakjának előállítását:

$$\begin{aligned} (-40\vec{e}_x + 30\vec{e}_y) \times (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) + 11,93\vec{e}_z &= \vec{0}, \\ -40y\vec{e}_z - 30x\vec{e}_z + 11,93\vec{e}_z &= \vec{0} \quad / \cdot \vec{e}_z \\ 40y &= -30x + 11,93, \\ y &= -\frac{3}{4}x + 0,298. \end{aligned}$$

Metszéspontok a koordináta-tengelyekkel:

$$y_C = 0,298 \text{ m},$$

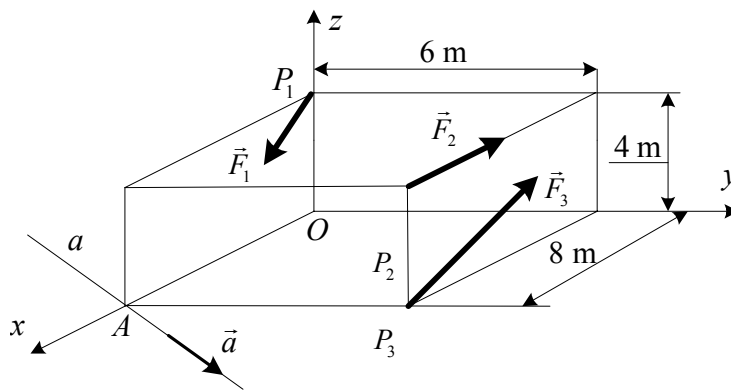
$$0 = -\frac{3}{4}x_D + 0,298, \Rightarrow x_D = 0,398 \text{ m}.$$

Ellenőrzés:

$$M_{Oz} = x_D F_y = 0,398 \cdot 30 = 11,93 \text{ kNm},$$

$$M_{Oz} = -y_C F_x = -0,298(-40) = 11,93 \text{ kNm}.$$

2.7.6. feladat: Erőrendszer pontra és tengelyre számított nyomatéka



Adott:

$$\vec{F}_1 = (4\vec{e}_x - 4\vec{e}_z) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_2 = (-2\vec{e}_x) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_3 = (2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z) \text{ kN},$$

$$\vec{a} = (-2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 4\vec{e}_z) \text{ m}.$$

Feladat:

a) Az O és az A pontokra számított $\vec{M}_O$ és $\vec{M}_A$ nyomaték meghatározása.

b) Az erőrendszer y és a tengelyekre számított M_y és M_a nyomatékának meghatározása.

Kidolgozás:

a) Az erőrendszer $\vec{M}_O$ és $\vec{M}_A$ nyomatékának kiszámítása:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = (4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) \text{ kN},$$

$$\vec{M}_O = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = (24\vec{e}_x - 24\vec{e}_y + 24\vec{e}_z) \text{ kNm},$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -\vec{e}_y (0 - 16) = (16\vec{e}_y) \text{ kNm},$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 8 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}_y(0+8) + \vec{e}_z(0+12) = (-8\vec{e}_y + 12\vec{e}_z) \text{ kNm},$$

$$\vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 8 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \vec{e}_x(24-0) - \vec{e}_y(32-0) + \vec{e}_z(24-12) =$$

$$= (24\vec{e}_x - 32\vec{e}_y + 12\vec{e}_z) \text{ kNm},$$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O + \vec{F} \times \vec{r}_{OA} = (24\vec{e}_x - 24\vec{e}_y) \text{ kNm},$$

$$\vec{F} \times \vec{r}_{OA} = (4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) \times (8\vec{e}_x) = (-24\vec{e}_z) \text{ kNm}.$$

b) Az erőrendszer M_y és M_a nyomatékának kiszámítása:

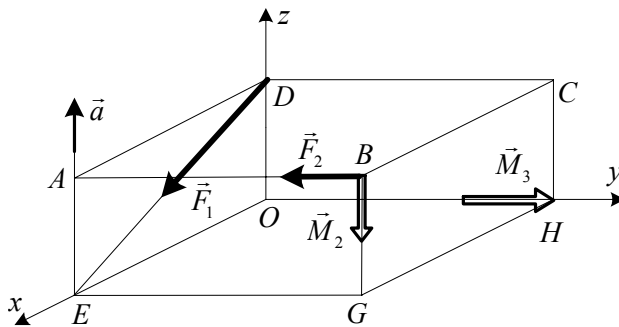
$$\vec{M}_y \cdot \vec{e}_y = -24 \text{ kNm},$$

$$M_a = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a = -24 \text{ kNm},$$

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(-2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 4\vec{e}_z)}{\sqrt{4+16+16}} = \left(-\frac{1}{3}\vec{e}_x + \frac{2}{3}\vec{e}_y - \frac{2}{3}\vec{e}_z\right),$$

$$\vec{M}_A \cdot \vec{e}_a = (24\vec{e}_x - 24\vec{e}_y) \cdot \left(-\frac{1}{3}\vec{e}_x + \frac{2}{3}\vec{e}_y + \frac{2}{3}\vec{e}_z\right) = -8 - 16 = -24 \text{ kNm}.$$

2.7.7. feladat: Erőrendszer pontra és tengelyre számított nyomatéka



Adott:

$$F_1 = F_2 = 5 \text{ MN},$$

$$M_2 = M_3 = 20 \text{ MNm},$$

$$\vec{r}_B = (4\vec{e}_x + 8\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) \text{ m},$$

$$\vec{a} = \vec{e}_z.$$

Feladat:

a) Az erőrendszer O és E pontokra számított $\vec{M}_O$ és $\vec{M}_E$ nyomatékának meghatározása.

b) Az erőrendszer x és a tengelyekre számított M_x és M_a nyomatékának meghatározása.

Kidolgozás:

a) Az erőrendszer O és E pontokra számított $\vec{M}_O$ és $\vec{M}_E$ nyomatékának meghatározása:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (4\vec{e}_x - 3\vec{e}_z) + (-5\vec{e}_y) = (4\vec{e}_x - 5\vec{e}_y - 3\vec{e}_z) \text{ MN},$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{r}_D \times \vec{F}_1 + \vec{r}_B \times \vec{F}_2,$$

$$\vec{r}_D \times \vec{F}_1 = (3\vec{e}_z) \times (4\vec{e}_x - 3\vec{e}_z) = (12\vec{e}_y) \text{ MNm},$$

$$\vec{r}_B \times \vec{F}_2 = (4\vec{e}_x + 8\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) \times (-5\vec{e}_y) = (15\vec{e}_x - 20\vec{e}_z) \text{ MNm},$$

$$\vec{M}_O = (-20\vec{e}_z) + (20\vec{e}_y) + (12\vec{e}_y) + (15\vec{e}_x - 20\vec{e}_z) = (15\vec{e}_x + 32\vec{e}_y - 40\vec{e}_z) \text{ MNm},$$

$$\vec{M}_E = \vec{M}_O + \vec{F} \times \vec{r}_{OE},$$

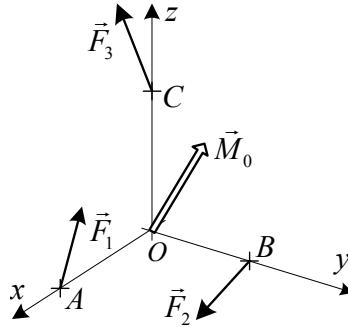
$$\vec{F} \times \vec{r}_{OE} = (4\vec{e}_x - 5\vec{e}_y - 3\vec{e}_z) \times (4\vec{e}_x) = (20\vec{e}_z - 12\vec{e}_y),$$

$$\vec{M}_E = (15\vec{e}_x + 20\vec{e}_y - 20\vec{e}_z) \text{ MNm}.$$

b) Az erőrendszer x és a tengelyekre számított M_x és M_a nyomatékának meghatározása:

$$M_x = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_x = 15 \text{ MNm}, \quad M_a = \vec{M}_E \cdot \vec{e}_z = -20 \text{ MNm}.$$

2.7.8. feladat: Erőrendszer egyensúlya



Adott:

$$\vec{F}_1 = (-\vec{e}_x - 1,5\vec{e}_y) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_2 = (1,5\vec{e}_y - 4\vec{e}_z) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_3 = (\vec{e}_x + 4\vec{e}_z) \text{ kN},$$

$$\vec{M}_0 = (12\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \text{ kNm},$$

$$\vec{r}_A = (4\vec{e}_x) \text{ m}, \quad \vec{r}_B = (3\vec{e}_y) \text{ m}, \quad \vec{r}_C = (4\vec{e}_z) \text{ m}.$$

Feladat: Annak eldöntése, hogy egyensúlyi-e a három koncentrált erőből és egy koncentrált nyomatékból álló erőrendszer.

Kidolgozás:

Az O ponti eredő vektorkettős:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (-\vec{e}_x - 1,5\vec{e}_y) + (1,5\vec{e}_y - 4\vec{e}_z) + (\vec{e}_x + 4\vec{e}_z) = \vec{0}.$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_0 + \sum_{i=1}^3 \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

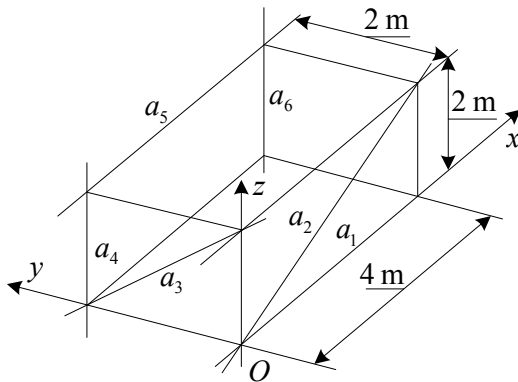
$$\vec{r}_A \times \vec{F}_1 = (4\vec{e}_x) \times (-\vec{e}_x - 1,5\vec{e}_y) = (-6\vec{e}_z), \quad \vec{r}_B \times \vec{F}_2 = (3\vec{e}_y) \times (1,5\vec{e}_y - 4\vec{e}_z) = (-12\vec{e}_x),$$

$$\vec{r}_C \times \vec{F}_3 = (4\vec{e}_z) \times (\vec{e}_x + 4\vec{e}_z) = (4\vec{e}_y)$$

$$\vec{M}_O = (12\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) + (-6\vec{e}_z) + (-12\vec{e}_x) + (4\vec{e}_y) = \vec{0}.$$

Az erőrendszer egyensúlyi!

2.7.9. feladat: Tengelyek lineáris függetlensége



Adott: Az $a_1, a_2, \dots, a_6$ tengely.

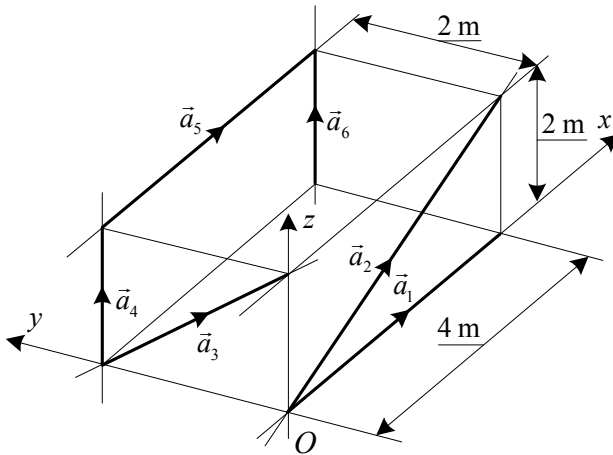
Feladat:

- A tengelyek) Plücker vektorainak meghatározása
- Lineárisan függetlenek-e az $a_1, a_2, \dots, a_6$ tengelyek?
- Az a_1, a_2, z tengelyek lineárisan függetlenek-e?

Kidolgozás:

a) A hatásvonalak (tengelyek) *Plücker* vektorainak meghatározása:

A tengelyek egyenlete: $\vec{a}_i \times \vec{r} + \vec{b}_i = \vec{0}$.



A tengelyek irányvektorai:

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= (4\vec{e}_x) \text{ m}, \\ \vec{a}_2 &= (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_z) \text{ m}, \\ \vec{a}_3 &= (-2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \text{ m}, \\ \vec{a}_4 &= (2\vec{e}_z) \text{ m}, \\ \vec{a}_5 &= (4\vec{e}_x) \text{ m}, \\ \vec{a}_6 &= (2\vec{e}_z) \text{ m}.\end{aligned}$$

A tengelyek irányvektorainak az O pontra számított nyomatéka:

$$\begin{aligned}\vec{b}_1 &= \vec{r}_{A1} \times \vec{a}_1 = \vec{0}, \\ \vec{b}_2 &= \vec{r}_{A2} \times \vec{a}_2 = \vec{0}, \\ \vec{b}_3 &= \vec{r}_{A3} \times \vec{a}_3 = (2\vec{e}_y) \times (-2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) = (4\vec{e}_x) \text{ m}^2, \\ \vec{b}_4 &= \vec{r}_{A4} \times \vec{a}_4 = (2\vec{e}_y) \times (2\vec{e}_z) = (4\vec{e}_x) \text{ m}^2, \\ \vec{b}_5 &= \vec{r}_{A5} \times \vec{a}_5 = (2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \times (4\vec{e}_x) = (8\vec{e}_y - 8\vec{e}_z) \text{ m}^2, \\ \vec{b}_6 &= \vec{r}_{A6} \times \vec{a}_6 = (4\vec{e}_x - 8\vec{e}_y) \text{ m}^2.\end{aligned}$$

b) Az $a_1, a_2, \dots, a_6$ tengelyek lineáris függetlenségének ellenőrzése:

A lineárisan függetlenség feltétele: az $\vec{a}_i$, $\vec{b}_i$ koordinátaiból képzett determináns nem egyenlő nullával.

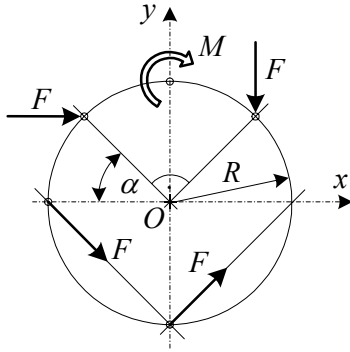
$$\begin{vmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & a_{4x} & a_{5x} & a_{6x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} & a_{4y} & a_{5y} & a_{6y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} & a_{4z} & a_{5z} & a_{6z} \\ b_{1x} & b_{2x} & b_{3x} & b_{4x} & b_{5x} & b_{6x} \\ b_{1y} & b_{2y} & b_{3y} & b_{4y} & b_{5y} & b_{6y} \\ b_{1z} & b_{2z} & b_{3z} & b_{4z} & b_{5z} & b_{6z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{vmatrix} = -8^4 \neq 0.$$

A tengelyek lineárisan függetlenek.

c) Az a_1, a_2, z tengelyek lineárisan függetlenségének ellenőrzése:

Az a_1, a_2, z tengelyek nem lineárisan függetlenek, mert egy síkba esnek.

2.7.10. feladat: Síkbeli erőrendszer eredőjének és az eredő hatásvonalának meghatározása



Adott:

$$F = 125 \text{ N}, M = 100 \text{ Nm}, \alpha = 45^\circ, R = 1 \text{ m}.$$

Feladat:

- Az $\vec{F}$, $\vec{M}_O$ eredő vektorkettős meghatározása.
- Az eredő erő hatásvonalának meghatározása.

Megoldás:

- Az $\vec{F}$, $\vec{M}_O$ eredő vektorkettős meghatározása:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y = (301,78 \vec{e}_x - 125 \vec{e}_y) \text{ N}, \vec{M}_O = M_z \vec{e}_z = (-100 \vec{e}_z) \text{ Nm}$$

- Az eredő hatásvonalának meghatározása:

$$A \text{ hatásvonal egyenesének egyenlete: } \vec{a} \times \vec{r} + \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} \times \vec{r} + \vec{M}_O = \vec{0}.$$

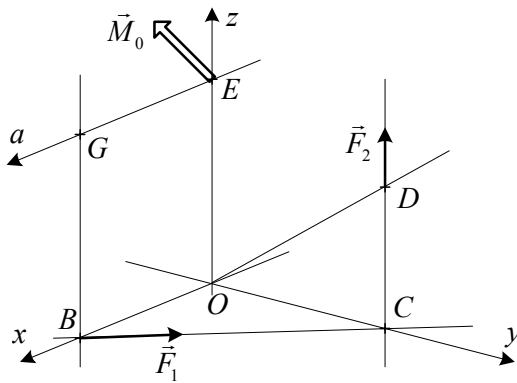
$$Az \text{ egyenes egyenletének a matematikában szokásos alakja: } y = -0,413x + 0,331.$$

$$Metszéspontok a koordináta-tengelyekkel: y_e = 0,331 \text{ m}, x_e = 0,8 \text{ m}.$$

Ellenőrzés:

$$M_{Oz} = x_e F_y = 0,8 \cdot (-125) = -100 \text{ Nm}, M_{Oz} = -y_e F_x = -0,331 \cdot 302,3 = -100 \text{ Nm}.$$

2.7.11. feladat: Térbeli erőrendszer pontra és tengelyre számított nyomatéka



Adott:

$$B(3, 0, 0) \text{ m}, C(0, 4, 0) \text{ m}, D(0, 4, 3) \text{ m},$$

$$E(0, 0, 5) \text{ m}, G(3, 0, 5) \text{ m},$$

$$\vec{F}_1 = (-30 \vec{e}_x + 40 \vec{e}_y) \text{ N}, \vec{F}_2 = (80 \vec{e}_z) \text{ N},$$

$$\vec{M}_0 = (50 \vec{e}_x + 60 \vec{e}_z) \text{ Nm}.$$

Feladat:

- Az $\vec{F}$, $\vec{M}_O$ és az $\vec{F}$, $\vec{M}_E$ eredő vektorkettős meghatározása.
- A z és az a tengelyre számított nyomaték meghatározása.

Megoldás:

- Az $\vec{F}$, $\vec{M}_O$ és az $\vec{F}$, $\vec{M}_E$ eredő vektorkettős meghatározása:

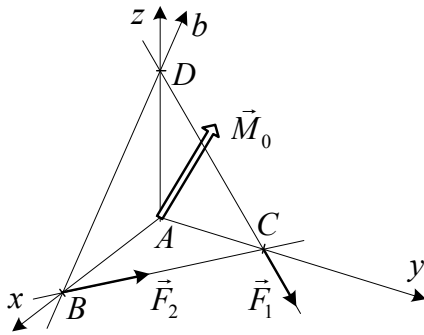
$$\vec{F} = (-30 \vec{e}_x + 40 \vec{e}_y + 80 \vec{e}_z) \text{ N}, \vec{M}_O = (370 \vec{e}_x + 180 \vec{e}_z) \text{ Nm},$$

$$\vec{F} = (-30 \vec{e}_x + 40 \vec{e}_y + 80 \vec{e}_z) \text{ N}, \vec{M}_E = (570 \vec{e}_x + 150 \vec{e}_y + 180 \vec{e}_z) \text{ Nm}.$$

b) A z és az a tengelyre számított nyomaték meghatározása:

$$M_z = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_z = 180 \text{ Nm}, \quad M_a = \vec{M}_E \cdot \vec{e}_x = 570 \text{ Nm}.$$

2.7.12. feladat: Térbeli erőrendszer pontra és tengelyre számított nyomatéka



Adott:

$$\vec{F}_1 = (3\vec{e}_y - 4\vec{e}_z) \text{ kN}, \quad \vec{F}_2 = (-4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) \text{ kN},$$

$$\vec{M}_0 = (-12\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 6\vec{e}_z) \text{ kNm},$$

$$B(4, 0, 0) \text{ m}, \quad C(0, 3, 0) \text{ m}, \quad D(0, 0, 4) \text{ m}.$$

Feladat:

a) Az $\vec{F}$, $\vec{M}_C$ és az $\vec{F}$, $\vec{M}_D$ eredő vektorkettős meghatározása.

b) Az y és az b tengelyre számított nyomaték meghatározása.

Megoldás:

a) Az $\vec{F}$, $\vec{M}_C$ és az $\vec{F}$, $\vec{M}_D$ eredő vektorkettős meghatározása:

$$\vec{F} = (-4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - 4\vec{e}_z) \text{ kN}, \quad \vec{M}_C = (-12\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 6\vec{e}_z) \text{ kNm},$$

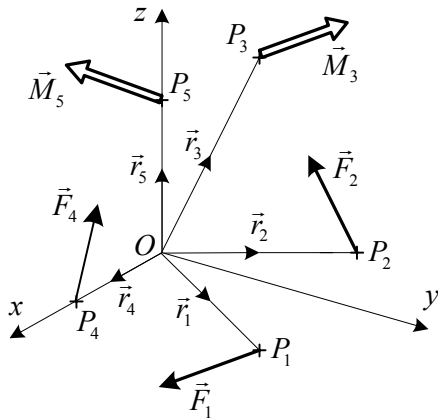
$$\vec{F} = (-4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - 4\vec{e}_z) \text{ kN}, \quad \vec{M}_D = (20\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \text{ kNm}.$$

b) A z és az a tengelyre számított nyomaték meghatározása:

$$\vec{b} = (-4\vec{e}_x + 4\vec{e}_z) \text{ m}, \quad \vec{e}_b = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_z \right),$$

$$M_y = \vec{M}_C \cdot \vec{e}_y = 4 \text{ kNm}, \quad M_b = \vec{M}_D \cdot \vec{e}_b = 3\sqrt{2} = 4,24 \text{ kNm}.$$

2.7.13. feladat: Térbeli erőrendszer egyensúlya



Adott:

$$\vec{r}_1 = (2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - \vec{e}_z) \text{ m}, \quad \vec{r}_2 = (-\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \text{ m},$$

$$\vec{r}_3 = (-5\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \text{ m}, \quad \vec{r}_4 = (3\vec{e}_x) \text{ m},$$

$$\vec{r}_5 = (5\vec{e}_z) \text{ m}.$$

$$\vec{F}_1 = (2\vec{e}_x - 2\vec{e}_y - \vec{e}_z) \text{ N}, \quad \vec{F}_2 = (\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) \text{ N},$$

$$\vec{F}_4 = (-3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z) \text{ N},$$

$$\vec{M}_3 = (-2\vec{e}_x + 5\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \text{ Nm},$$

$$\vec{M}_5 = (-3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y - 4\vec{e}_z) \text{ Nm}.$$

Feladat:

a) Az $\vec{F}$, $\vec{M}_O$ eredő vektorkettős meghatározása.

b) Annak eldöntése, hogy egyensúlyi-e az erőrendszer.

Megoldás:

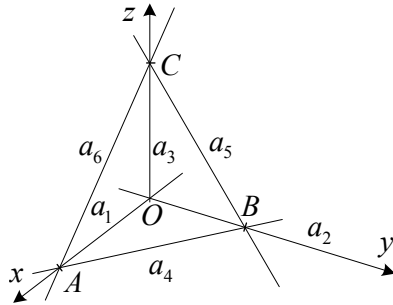
a) Az $\vec{F}$, $\vec{M}_O$ eredő vektorkettős meghatározása:

$$\vec{F} = (6\vec{e}_z) \text{ N}, \quad \vec{M}_O = (-4\vec{e}_x - 8\vec{e}_y - 24\vec{e}_z) \text{ kNm}.$$

b) Annak eldöntése, hogy egyensúlyi-e az erőrendszer:

Az erőrendszer nem egyensúlyi, mert $\vec{F} \neq \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0}$.

2.7.14. feladat: Tengelyek lineáris függetlensége



Adott:

Az $a_1, a_2, \dots, a_6$ tengely és $A(4, 0, 0) \text{ m}$, $B(0, 3, 0) \text{ m}$, $C(0, 0, 4) \text{ m}$.

Feladat:

a) A tengelyek Plücker vektorainak meghatározása.

b) Annak eldöntése, hogy a tengelyek lineárisan függetlenek-e.

Megoldás:

a) A tengelyek Plücker vektorainak meghatározása:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_x, \quad \vec{a}_2 = \vec{e}_y, \quad \vec{a}_3 = \vec{e}_z, \quad \vec{a}_4 = (-4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y), \quad \vec{a}_5 = (-3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z), \quad \vec{a}_6 = (-4\vec{e}_x + 4\vec{e}_z),$$

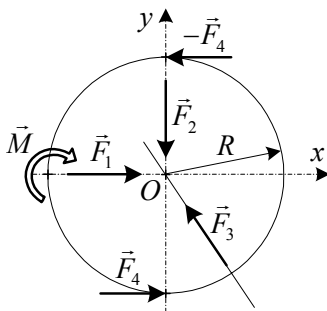
$$\vec{b}_1 = \vec{0}, \quad \vec{b}_2 = \vec{0}, \quad \vec{b}_3 = \vec{0}, \quad \vec{b}_4 = (12\vec{e}_z), \quad \vec{b}_5 = (12\vec{e}_x), \quad \vec{b}_6 = (16\vec{e}_y).$$

b) Annak eldöntése, hogy a tengelyek lineárisan függetlenek-e.

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-12) \cdot (-12 \cdot 16) = 9 \cdot 2^8 \neq 0.$$

A tengelyek lineárisan függetlenek.

2.7.15. feladat: Síkbeli erőrendszer egyensúlya



Adott:

$$\vec{F}_1 = (30\vec{e}_x) \text{ N}, \quad \vec{F}_2 = (-40\vec{e}_y) \text{ N}, \quad \vec{F}_3 = (-30\vec{e}_x + 40\vec{e}_y) \text{ N},$$

$$\vec{F}_4 = (50\vec{e}_x) \text{ N}, \quad \vec{M} = (-100\vec{e}_z) \text{ Nm}, \quad R = 1 \text{ m}.$$

Feladat:

a) Az $\vec{F}$, $\vec{M}_O$ eredő vektorkettős meghatározása.

b) Annak eldöntése, hogy az erőrendszer egyensúlyi-e.

Megoldás:

a) Az $\vec{F}$, $\vec{M}_O$ eredő vektorkettős meghatározása: $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{M}_O = \vec{0}$.

b) Annak eldöntése, hogy egyensúlyi-e az erőrendszer:

Az erőrendszer egyensúlyi, mert $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{M}_O = \vec{0}$.