

10. KINEMATIKA, KINETIKA

Kinematika: Az anyagi pontok és a merev testek mozgásának leírása

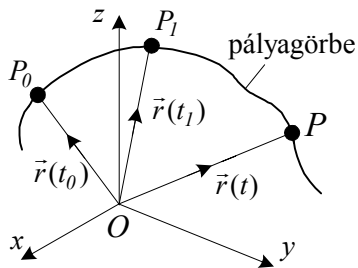
Kinetika: Az anyagi pontokra és a merev testekre ható erők, nyomatékok és a mozgás kapcsolatának tisztázása. A mozgás okainak leírása.

10.1. Anyagi pont mozgása

a) A mozgásfüggvény, a pályagörbe:

Mozgásfüggvény: az anyagi pont helyzetét meghatározó $\vec{r} = \vec{r}(t)$ helyvektor-idő függvény.

Mértékegysége: m.



Pályagörbe:

1. definíció: Az a térgörbe melyen az anyagi pont a mozgás során végighalad.
2. definíció: Az $\vec{r} = \vec{r}(t)$ mozgásfüggvény által meghatározott térgörbe.

Az $\vec{r} = \vec{r}(t)$ mozgásfüggvény megadása:

- Vektoriális alak $\rightarrow$ DDKR: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$,

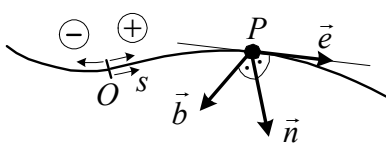
HKR: $\vec{r}(t) = R(t)\vec{e}_R + z(t)\vec{e}_z$, ahol $\vec{e}_R = \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y$.

- Skaláris alak $\rightarrow$ DDKR: $x = x(t)$, HKR: $R = R(t)$,

$y = y(t)$, $\varphi = \varphi(t)$,

$z = z(t)$, $z = z(t)$.

A mozgásfüggvény az $\vec{e}, \vec{n}, \vec{b}$ természetes koordináta-rendszerben:



Ívkoordináta: a pályagörbén egy O kezdőponttól mért előjeles s ívhossz (előjeles távolság).

Kísérő triéder: $\vec{e}, \vec{n}, \vec{b}$ - a görbe természetes koordináta-rendszerének egységvektorai.

- Érintő irányú egységvektor: $\vec{e} = \frac{d\vec{r}}{ds}$, $|\vec{e}| = 1$.

- Főnormális egységvektor: $\frac{d\vec{e}}{ds} = \kappa\vec{n} = \frac{1}{\rho}\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$.

(κ a térgörbe görbülete, ρ a térgörbe görbületi sugara)

- Binormális egységvektor: $\vec{b} = \vec{e} \times \vec{n}$, $|\vec{b}| = 1$.

Simulósík: az $\vec{e}, \vec{n}$ vektorok által kifeszített sík.

Az anyagi pont helyének megadási lehetőségei:

- $\vec{r} = \vec{r}(t)$ helyvektor – idő függvény,
- $\vec{r} = \vec{r}(s)$ helyvektor – ívkoordináta függvény,
- $s = s(t)$ ívkoordináta (út) – idő függvény (ehhez ismerni kell a görbe alakját).

b) A sebességfüggvény, a sebességvektor:

Sebességfüggvény: a mozgásfüggvény idő szerinti első deriváltja.

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, \quad \text{Mértékegysége: m/s.}$$

Pillanatnyi sebességvektor: a sebességfüggvény egy adott t_1 időpillanatban felvett értéke.

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1).$$

- Tulajdonságai: - vektor mennyiség,
- iránya azonos a pályagörbe érintőjével.

$$\text{Bizonyítás: } \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{e} \frac{ds(t)}{dt} = \vec{e} v(t) = v(t) \vec{e}.$$

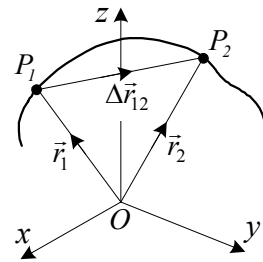
Pálya menti sebesség (pályasebesség): $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}.$

- Tulajdonságai: - a sebességvektor érintő irányú koordinátája,
- előjeles skalár mennyiség,
- előjelét az s ívkoordináta irányítása határozza meg.

Közepes sebesség: mindig egy megadott időintervallumra vonatkozik.

A $\langle t_1, t_2 \rangle$ időintervallumra vonatkozó közepes sebesség:

$$\vec{v}_k = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}_{12}}{\Delta t_{12}}.$$



Hodográf: Az a görbe, amit a $\vec{v}(t)$ sebességvektorok végpontja ír le a v_x, v_y, v_z koordináta-rendszerben

c) A gyorsulásfüggvény, a gyorsulásvektor:

Gyorsulásfüggvény: a sebességfüggvény idő szerinti első deriváltja.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}, \quad \text{Mértékegysége: m/s}^2.$$

Pillanatnyi gyorsulásvektor: a gyorsulásfüggvény egy adott t_1 időpillanatban felvett értéke.

$$\vec{a}_1 = \vec{a}(t_1)$$

- Tulajdonságai: - vektor mennyiség,
- a pályagörbe simulósíkja esik,
- érintő és főnormális irányú összetevőkből áll.

Bizonyítás: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[v(t)\vec{e}(t)] = \frac{dv(t)}{dt}\vec{e} + v\frac{d\vec{e}(t)}{dt},$

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d\vec{e}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} \vec{n} v(t) = \frac{v}{\rho} \vec{n},$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\vec{e} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = a_e(t)\vec{e} + a_n(t)\vec{n}.$$

Pálya menti gyorsulás (pályagyorsulás): $a_e(t) = \frac{dv(t)}{dt}$. A sebesség nagyságának megváltozásából adódik.

Normális gyorsulás: $a_n(t) = \frac{[v(t)]^2}{\rho}$. A sebesség irányának megváltozásából adódik.

d) A mozgásjellemzők közötti kapcsolat:

- *Ismert:* $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Meghatározandó: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = v(t)\vec{e},$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = a_e(t)\vec{e} + a_n(t)\vec{n}.$$

- *Ismert:* $\vec{a} = \vec{a}(t)$ és a $\vec{v}(t=t_0) = \vec{v}_0$, $\vec{r}(t=t_0) = \vec{r}_0$ kezdeti feltételek.

Meghatározandó: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t)dt,$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t)dt.$$

- *Ismert:* $\vec{v} = \vec{v}(t)$ és az $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ kezdeti feltétel.

Meghatározandó: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = a_e(t)\vec{e} + a_n(t)\vec{n},$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t)dt.$$

10.2. Merev test mozgása

a) Alapfogalmak:

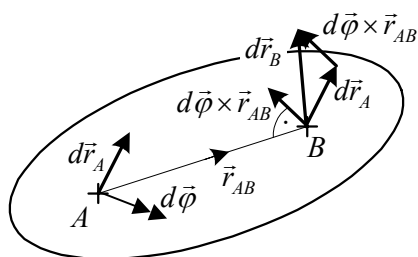
- *Merev test sebességállapota:* A testet alkotó pontok egy adott időpillanatbeli sebességeinek összessége (halmaza).
- *Merev test gyorsulásállapota:* A testet alkotó pontok egy adott időpillanatbeli gyorsulásainak összessége (halmaza).
- *Merev test síkmozgása:* A test pontjai egy adott alapsíkkal párhuzamos síkokban mozognak.

- *Merev test haladó mozgása:* A test önmagával párhuzamosan mozdul el. A test minden pontjának azonos az elmozdulása.
- *Merev test forgómozgása:* A test pontjai a test két nyugalomban lévő pontját összekötő tengely, a forgástengely körül koncentrikus köríveken mozdu-
nak el.
- *Merev test elemi mozgása:* A test végtelenül rövid idő alatt bekövetkező (egy idő-
pillanatban történő) mozgása.

Tétel: Merev test bármely mozgása előállítható egy haladó és egy forgó mozgás összegeként.

b) Merev test sebességállapota:

Összefüggés a merev test két pontjának sebessége között.



A merev test végtelenül kis elmozdulását vizsgáljuk:

- párhuzamos eltolás: $d\vec{r}_A$,
- szögelfordulás: $d\vec{\varphi}$ (az elmozdulásoktól kettős nyíllal különböztetjük meg).

A B pont elmozdulása: eltolás + szögelfordulás.

$$d\vec{r}_B = d\vec{r}_A + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{AB}.$$

$d\vec{\varphi}$ az egész merev testre jellemző mennyiség.

Vegyük az összefüggés idő szerinti első deriváltját: $\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}_{AB}.$

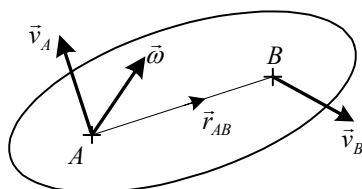
Elnevezések:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_B \text{ - a merev test } B \text{ pontjának sebessége,}$$

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A \text{ - a merev test } A \text{ pontjának sebessége}$$

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega} \text{ - a merev test szögsebessége.}$$

Az $\vec{\omega}$ az egész merev testre jellemző mennyiség. Mértékegysége: rad/s.



Az új jelölés figyelembevételével: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}.$

Analógia (Statikából): $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}.$

Az $\vec{v}_A, \vec{\omega}$ ismeretében a merev test bármely pontjának sebessége meghatározható.

Tétel: merev test sebeségállapota egyértelműen megadható $\vec{v}_A, \vec{\omega}$ redukált vektorkettőssel.

Tétel: merev test két különböző pontjának sebesége általában nem egyenlő.

Kivétel : - $\vec{\omega} = \vec{0},$

- $\vec{\omega} \parallel \vec{r}_{AB}.$

c) Elemi síkmozgás:

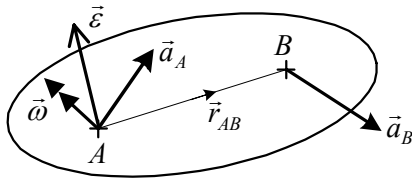
Értelmezés: Ha a test bármely pontjának sebessége merőleges $\vec{\omega}$ -ra, azaz párhuzamos az $\vec{\omega}$ -ra merőleges síkokkal.

Sebességpólus: a síknak az a P pontja, amelynek zérus a sebessége - $\vec{v}_P = \vec{0}$.

Sebességábra: egy adott időpillanatban, egy közös kezdőpontból felmérjük a test jellemző pontjainak sebességvektorait.

d) Merev test gyorsulásállapota:

Összefüggés a merev test két pontjának gyorsulása között:



$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \text{ - a merev test szöggyorsulása.}$$

Az $\vec{\varepsilon}$ az egész merev testre jellemző mennyiség.

Mértékegysége: rad/s^2 .

A merev test tetszőleges B pontjának gyorsulása: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})$.

Tétel: a merev test gyorsulásállapota az $\vec{a}_A$, $\vec{\omega}$ és az $\vec{\varepsilon}$ mennyiségekkel adható meg egyértelműen.

Síkmozgás esetén: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} - \omega^2 \vec{r}_{AB}$.

Ha xy a mozgás síkja: $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$, $\vec{\varepsilon} = \varepsilon \vec{e}_z$.

Gyorsuláspólus: a síknak az a Q pontja melynek zérus a gyorsulása $\vec{a}_Q = \vec{0}$.

Gyorsulásábra: egy adott időpillanatban, egy közös kezdőpontból felmérjük a test jellemző pontjainak gyorsulásvektorait.

10.3. Merev test kinetikája

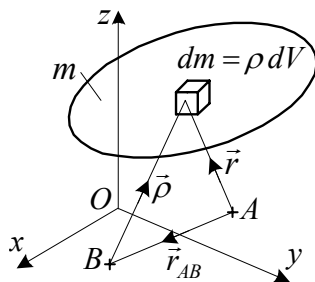
a) Merev test tömegeloszlásának jellemzői:

- **Tömeg:** a merev test haladó mozgással szembeni tehetetlenségét (ellenállását) jellemzi.

$$m = \int_{(m)} dm = \int_{(V)} \rho dV, \quad \text{Mértékegysége: kg.}$$

ρ - tömegsűrűség, Mértékegysége: kg/m^3 .

- **Statikai nyomaték:**



Pontra számított statikai nyomaték:

$$\vec{S}_A = \int_{(m)} \vec{r} dm = \int_{(V)} \vec{r} \rho dV.$$

Mértékegysége: kgm .

Pontra számított statikai nyomaték átszámítása:

$$\vec{S}_B = \vec{S}_A - m\vec{r}_{AB}.$$

- **Tömegközéppont, súlypont:** a testnek az a T , illetve S pontja, amelyre számított statikai nyomaték zérus.

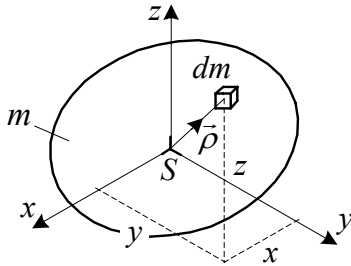
$$\vec{S}_T = \vec{S}_S = \vec{0}.$$

A tömegközéppont helyének kiszámítása: $\underbrace{\vec{S}_T}_{=\vec{0}} = \vec{S}_A - m\vec{r}_{AT} \Rightarrow \vec{r}_{AT} = \frac{\vec{S}_A}{m} = \frac{\int_{(V)} \vec{r} \rho dV}{\int_{(V)} \rho dV}.$

Tétel: A T tömegközéppont és az S súlypont egybeesik, ha a $\vec{g}$ állandó.

- *Tehetlenségi (másodrendű) nyomaték:*

A tehetlenségi (másodrendű) nyomaték a merev test forgó mozgással szembeni tehetlenségét fejezi ki.



Az S ponti tehetlenségi tenzor:

Diadikus előállítása: $\underline{\underline{J}}_S = \int_{(m)} [(\vec{\rho})^2 \underline{\underline{E}} - (\vec{\rho} \circ \vec{\rho})] dm.$

$\underline{\underline{E}}$ - egységtenzor.

Mértékegysége: kgm^2 .

Mátrixos előállítása: $[\underline{\underline{J}}_S] = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}$ - szimmetrikus tenzor.

A tengelyre számított tehetlenségi nyomatékok:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm \\ J_y &= \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm \\ J_z &= \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \right\} > 0.$$

J_x - a testnek az x tengelyre számított tehetlenségi nyomatéka,
 J_y - a testnek az y tengelyre számított tehetlenségi nyomatéka,
 J_z - a testnek az z tengelyre számított tehetlenségi nyomatéka.

Síkpárra számított (centrifugális) tehetlenségi nyomatékok:

$$\left. \begin{aligned} J_{xy} &= J_{yx} = \int_{(m)} x y dm \\ J_{yz} &= J_{zy} = \int_{(m)} y z dm \\ J_{zx} &= J_{xz} = \int_{(m)} x z dm \end{aligned} \right\} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0.$$

$J_{xy} = J_{yx}$ - a testnek az yz - zx síkpárra számított tehetlenségi nyomatéka,
 $J_{yz} = J_{zy}$ - a testnek az zx - xy síkpárra számított tehetlenségi nyomatéka,
 $J_{zx} = J_{xz}$ - a testnek az xy - yz síkpárra számított tehetlenségi nyomatéka.

Tétel: a $\underline{\underline{J}}_S$ -ből az összes S ponti tengelyre és az összes S ponti síkpárra számított tehetlenségi nyomaték meghatározható.

$$J_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{n}, \quad -J_{nm} = -J_{mn} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{n}.$$

Steiner-tétel:

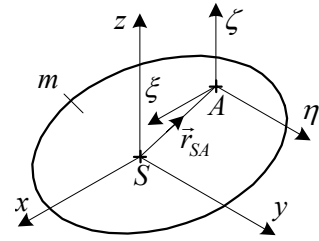
$$\vec{r}_{SA} = x_{SA}\vec{e}_x + y_{SA}\vec{e}_y + z_{SA}\vec{e}_z,$$

A két koordináta-rendszer tengelyei párhuzamosak:
 $x \parallel \xi, y \parallel \eta, z \parallel \zeta$.

A tétel tenzor alakja: $\underline{J}_A = \underline{J}_S + \underline{J}_{SA}$.

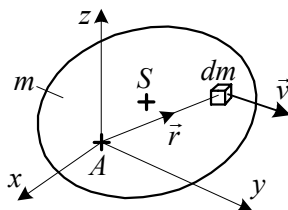
A tétel skalár alakja:

$$\begin{aligned} J_\xi &= J_x + m(y_{SA}^2 + z_{SA}^2), & J_{\xi\eta} &= J_{xy} + mx_{SA}y_{SA}, \\ J_\eta &= J_y + m(x_{SA}^2 + z_{SA}^2), & J_{\eta\zeta} &= J_{yz} + my_{SA}z_{SA}, \\ J_\zeta &= J_z + m(x_{SA}^2 + y_{SA}^2), & J_{\xi\zeta} &= J_{xz} + mx_{SA}z_{SA}. \end{aligned}$$



Tétel: párhuzamos tengelyek közül az S ponton átmenő tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték a legkisebb.

b) Merev test impulzusa, impulzus nyomatéka:



- Impulzus:

Értelmezés: $\vec{I} = \int_{(m)} \vec{v} dm = \int_{(V)} \vec{v} \rho dV$.

Mértékegysége: $\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{Ns}$.

Kiszámítás: $\vec{I} = m \vec{v}_S$.

- Impulzus nyomaték (perdület):

Értelmezés: $\vec{\pi}_A = \int_{(m)} \vec{r} \times \vec{v} dm$. Mértékegység: $\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = \text{Ns m}$.

Kiszámítás:

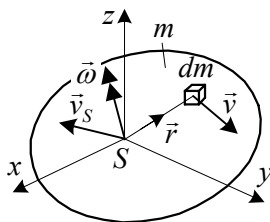
- Speciális esetek: $\vec{\pi}_S = \underline{J}_S \vec{\omega}$, S – a merev test súlypontja,
 $\vec{\pi}_P = \underline{J}_P \vec{\omega}$, P – a pillanatnyi forgástengely egy pontja ($\vec{v}_P = \vec{0}$).

- Általános eset: $\vec{\pi}_A = \underline{J}_A \vec{\omega} + \vec{r}_{AS} \times \vec{v}_A m$.

- Összefüggés test két pontjára számított perdület között: $\vec{\pi}_B = \vec{\pi}_A + \vec{I} \times \vec{r}_{AB}$.

Analógia a Statikából: $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{r}_{AB}$.

c) Merev test kinetikai energiája:



Értelmezés: $E = \frac{1}{2} \int_{(m)} v^2 dm$.

Mértékegysége: $\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{Nm} = \text{J}$.

Kiszámítás: $E = \frac{1}{2} (\vec{v}_S \cdot \vec{I} + \vec{\omega} \cdot \vec{\pi}_S) = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underline{J}_S \cdot \vec{\omega}$.

Kiszámítás speciális esetekben:

- $\vec{\omega} \parallel \underline{J}_S$ egyik tehetetlenségi főtengelyével.

$$\text{Ekkor } \vec{\omega} \cdot \underline{J}_S \cdot \vec{\omega} = J_S \omega^2 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2.$$

J_S - az S ponti, $\vec{\omega}$ -val párhuzamos főtengelyre számított tehetetlenségi nyomaték.

- $\vec{v}_A = \vec{0}$ és $\vec{\omega} \parallel \underline{J}_A$ egyik tehetetlenségifőtengelyével.

$$\text{Ekkor } E = \frac{1}{2} J_A \omega^2.$$

J_A - az A ponti, $\vec{\omega}$ -val párhuzamos főtengelyre számított tehetetlenségi nyomaték.

d) Merev testre hat erőrendszer teljesítménye:

- Az erőrendszer redukált vektorkettőset felhasználva: $P = \vec{F} \cdot \vec{v}_S + \vec{M}_S \cdot \vec{\omega}.$

- Az erőrendszert alkotó erőkkel és nyomatékokkal: $P = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j \cdot \vec{\omega}_j.$

$\vec{v}_i$ az $\vec{F}_i$ erő támadáspontjának sebessége,

$\vec{\omega}_j$ annak a merev testnek szögsebessége, amelyre az $\vec{M}_j$ nyomaték hat.

e) Merev testre ható erőrendszer munkája:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P dt.$$

A merev testre ható erőrendszer $\langle t_1, t_2 \rangle$ időtartam alatt végzett munkája egyenlő az erőrendszer P teljesítményének t_1, t_2 határok között vett idő szerinti integráljával.

A munka nem egy időpillanathoz, hanem egy időtartamhoz kötött mennyiség.

f) Impulzus tétel:

$$\dot{\vec{I}} = m \vec{a}_S = \vec{F}$$

A merev test impulzusának idő szerinti deriváltja egyenlő a testre ható külső erők eredőjével.

g) Perdület tétel:

- Speciális eset: az pontra: $\dot{\vec{\pi}}_S = \vec{M}_S,$

$$\underline{J}_S \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{\pi}_S = \vec{M}_S.$$

A merev test S pontjára számított perdületvektor idő szerinti deriváltja egyenlő a testre ható erőrendszernek a S súlypontra számított nyomatékával.

- Általános eset: az A pontra: $\underline{J}_A \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times (\underline{J}_A \cdot \vec{\omega}) + \vec{r}_{AS} \times m \vec{a}_A = \vec{M}_A,$

$$\underline{J}_S \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times (\underline{J}_S \cdot \vec{\omega}) + \vec{r}_{AS} \times m \vec{a}_S = \vec{M}_A.$$

h) Energia tétel, munka tétel:

- *Differenciális alak* $\equiv$ *energiatétel:*

$$\dot{E} = P.$$

Merev test kinetikai energiájának idő szerinti deriváltja egyenlő a testre ható külső erőrendszer teljesítményével.

- *Integrál alak* $\equiv$ *munkatétel:*

$$E_2 - E_1 = W_{12}.$$

Merev test kinetikai energiájának megváltozása a test véges $\langle t_1, t_2 \rangle$ időtartam alatt bekövetkező) mozgása során egyenlő a testre ható külső erőrendszer ugyanazon mozgás során végzett munkájával.

j) Merev test kényszermozgása:

Kényszermozgás: a merev test mozgását más testek előírt geometriai feltételeknek megfelelően korlátozzák.

Kényszer: az a test, amelyek az általunk vizsgált test mozgását előírt geometriai feltételeknek megfelelően korlátozza.

Tétel: a kényszererő (támasztóerő) a kényszer hatását teljes mértékben helyettesíti.

A kényszererő a testek érintkezésnél lép fel.

Sima kényszer: a kényszererő merőleges az érintkező felületekre.

Érdes kényszer: a kényszererő normális és tangenciális koordinátája közötti a *Coulomb*-féle súrlódási törvény adja meg a kapcsolatot.

Coulomb törvény: $F_t = \mu F_n$, μ - a mozgásbeli súrlódási tényező.

Ez az összefüggés akkor áll fent, ha az érintkező felületek (pontok) között relatív tangenciális elmozdulás lép fel.

A kényszererő F_t tangenciális koordinátája olyan irányú, hogy igyekszik megakadályozni az érintkező felületek között létrejövő relatív tangenciális elmozdulást.

10.4. Példák tömegpontok és merev testek mozgására

10.4.1. feladat: Tömegpont síkmozgása

Adott: Az $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{b}_0 + \vec{b}_1 (c - t^2)$ mozgásfüggvény a $\langle t_0, t_1 \rangle$ időintervallumban és

$$\vec{b}_0 = (-\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \text{ m}, \quad \vec{b}_1 = (4\vec{e}_x - 4\vec{e}_y) \text{ m/s}^2, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 1,5 \text{ s}, \quad c = 2 \text{ s}^2.$$

Feladat: a) A pályagörbe alakjának meghatározása.

b) Az $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$, $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ helyvektorok meghatározása.

c) A $\vec{v}(t)$ sebességfüggvény meghatározása.

d) A $\langle t_0, t_1 \rangle$ időintervallumra vonatkozó $\vec{v}_k$ közepes sebesség meghatározása.

e) Az $\vec{a}(t)$ gyorsulásfüggvény meghatározása.

Kidolgozás:

a) A pályagörbe alakjának meghatározása:

A pályagörbe $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{c} f(t)$ alakú egyenes ($\vec{r}_0 = \vec{b}_0$ és $\vec{c} = \vec{b}_1$).

b) A tömegpont helyének meghatározása a t_0 és t_1 időpillanatban:

A mozgásfüggvény: $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{b}_0 + \vec{b}_1 (c - t^2)$,

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) = \vec{b}_0 + \vec{b}_1 (c - t_0^2) = (-\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) + (4\vec{e}_x - 4\vec{e}_y)(2 - 0) = (7\vec{e}_x - 6\vec{e}_y) \text{ m},$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1) = \vec{b}_0 + \vec{b}_1 (c - t_1^2) = (-\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) + (4\vec{e}_x - 4\vec{e}_y)(2 - 1,5^2) = (-2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) \text{ m}.$$

c) A sebességfüggvény meghatározása:

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2\vec{b}_1 t = (-8\vec{e}_x + 8\vec{e}_y)t,$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0) = \vec{0}, \quad \vec{v}_1 = \vec{v}(t_1) = (-12\vec{e}_x + 12\vec{e}_y) \text{ m/s}.$$

d) A közepes sebesség meghatározása:

$$\vec{v}_k = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{t_1 - t_0} = \frac{(-2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) - (7\vec{e}_x - 6\vec{e}_y)}{1,5} = \frac{(-9\vec{e}_x + 9\vec{e}_y)}{1,5} = (-6\vec{e}_x + 6\vec{e}_y) \text{ m/s}.$$

e) A gyorsulásfüggvény meghatározása:

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\vec{b}_1 = -2(4\vec{e}_x - 4\vec{e}_y) = (-8\vec{e}_x + 8\vec{e}_y) \text{ m/s}^2.$$

10.4.2. feladat: Tömegpont síkmozgása

Adott: Az $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{b}t + \vec{c}t^2$ mozgásfüggvény a $\langle t_0, t_1 \rangle$ idő intervallumban és

$$\vec{b} = (-3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y) \text{ m/s}, \quad \vec{c} = (2\vec{e}_x + 1,5\vec{e}_y) \text{ m/s}^2, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 2 \text{ s}.$$

Feladat: a) A $\langle t_0, t_1 \rangle$ idő intervallumra vonatkozó $\vec{v}_k$ közepes sebesség meghatározása.

b) A $\vec{v}(t)$ sebességfüggvény és az $\vec{a}(t)$ gyorsulásfüggvény meghatározása.

c) A pályagörbe és a hodográf megrajzolása $\langle t_0, t_1 \rangle$ idő intervallumra.

Kidolgozás:

a) A közepes sebesség meghatározása:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) = \vec{0},$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1) = \vec{b}t_1 + \vec{c}t_1^2 = 2(-3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y) + 4(2\vec{e}_x + 1,5\vec{e}_y) = (2\vec{e}_x - 2\vec{e}_y) \text{ m},$$

$$\vec{v}_k = \frac{\Delta \vec{r}_{01}}{\Delta t_{01}} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{t_1 - t_0} = \frac{2\vec{e}_x - 2\vec{e}_y}{2} = (\vec{e}_x - \vec{e}_y) \text{ m/s}.$$

b) A sebesség- és a gyorsulásfüggvény meghatározása:

$$\text{A sebességfüggvény: } \vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{b} + 2\vec{c}t = (-3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y) + 2(2\vec{e}_x + 1,5\vec{e}_y)t,$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0) = (-3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y) \text{ m/s},$$

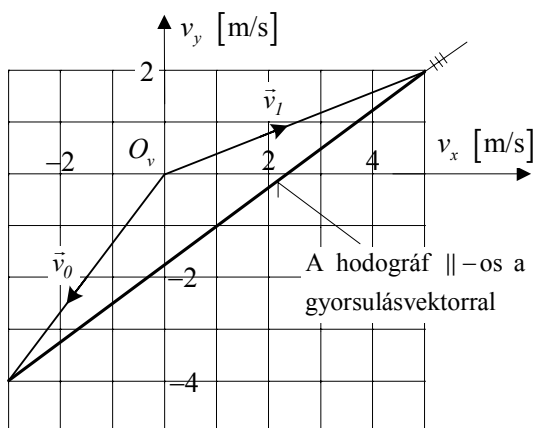
$$\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1) = \vec{b} + 4\vec{c} = (-3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y) + (8\vec{e}_x + 6\vec{e}_y) = (5\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \text{ m/s}.$$

$$\text{A gyorsulásfüggvény: } \vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{c} = (4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) \text{ m/s}^2, \quad \vec{a} = \text{állandó}.$$

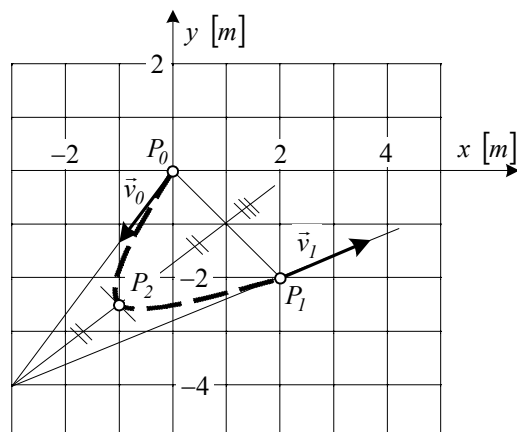
c) A hodográf és a pályagörbe megrajzolása:

Hodográf: A $\vec{v} = \vec{v}(t)$ függvény ábrázolása a $\vec{v}_x, \vec{v}_y$ koordináta-rendszerben.

Hodográf



Pályagörbe

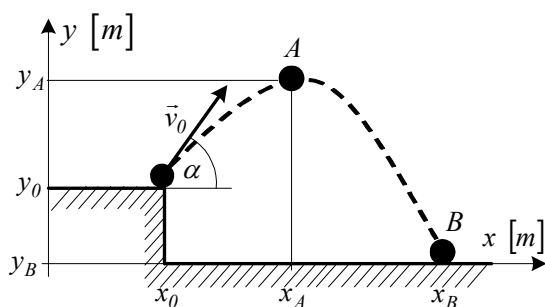


A pályagörbe szerkesztése:

- A P_0 és P_1 pontokban a sebességvektorok a parabola érintői.
- A P_0P_1 szelő felezéspontját az érintők metszéspontjával összekötő egyenes szakasz felezéspontja a parabola harmadik, P_2 pontja.
- A P_2 parabola pontban a parabola érintője párhuzamos a P_0P_1 szelővel.

10.4.3. feladat: Tömegpont ferde hajítása

Adott: A tömegpont kezdeti helyzete és kezdősebessége: $\vec{r}_0 = (50\vec{e}_x + 10\vec{e}_y) \text{ m}$, $v_0 = 10 \text{ m/s}$,
 $\alpha = 30^\circ$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Feladat:

- Az $t_0 = 0$ indítási helyzet mozgásjellemzőinek meghatározása.
- A pálya A ponti helyvektora és az A ponti sebességvektor meghatározása.
- A hajítás idejének és hosszának meghatározása.
- A pálya görbületi sugarának meghatározása a B becsapódási pontban.

Kidolgozás:

- Az indítási helyzet ($t_0 = 0$) mozgásjellemzőinek meghatározása:

$$\vec{a}_0 = \vec{a} = \vec{g} = \text{állandó},$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{e}_x + v_0 \sin \alpha \vec{e}_y = 10 \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x + 10 \frac{1}{2} \vec{e}_y = (8,66 \vec{e}_x + 5 \vec{e}_y) \text{ m/s},$$

$$\vec{r}_0 = x_0 \vec{e}_x + y_0 \vec{e}_y = (50 \vec{e}_x + 10 \vec{e}_y) \text{ m}.$$

- A pálya A ponti helyvektora és az A ponti sebességvektor meghatározása:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{g} t_A, \quad \vec{r}_A = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t_A + \vec{g} \frac{t_A^2}{2}.$$

Az A ponti sebesség vízszintes irányú koordinátája:

$$v_A = v_0 \cos \alpha = 5\sqrt{3} = 8,66 \text{ m/s} \Rightarrow \vec{v}_A = (8,66 \vec{e}_x) \text{ m/s}.$$

Az A ponti sebesség függőleges irányú koordinátája zérus:

$$\vec{v}_A \cdot \vec{e}_y = v_{Ay} = 0 = v_0 \sin \alpha - g t_A \Rightarrow t_A = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{10 \cdot 0,5}{10} = 0,5 \text{ s}.$$

Az A pont helyvektora: $x_A = x_0 + v_0 \cos \alpha t_A = 50 + 8,66 \cdot 0,5 = 54,33 \text{ m}$,

$$y_A = y_0 + v_0 \sin \alpha t_A - g \frac{t_A^2}{2} = 10 + 5 \cdot 0,5 - 5 \cdot 0,25 = 11,25 \text{ m},$$

$$\vec{r}_A = (54,33 \vec{e}_x + 11,25 \vec{e}_y) \text{ m}.$$

c) A hajítás idejének és hosszának meghatározása:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_0 + \vec{g} t_B, \quad \vec{r}_B = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t_B + \vec{g} \frac{t_B^2}{2}.$$

A becsapódási hely függőleges koordinátája ismert: $y_B = 0$

$$y_B = 0 = y_0 + v_0 \sin \alpha t_B - g \frac{t_B^2}{2},$$

$$0 = 10 + 5 t_B - 5 t_B^2.$$

$$t_B = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 200}}{-10} = \frac{-5 \pm 15}{10} = \left. \begin{array}{l} t_{B_1} = -1 \text{ s} \\ t_{B_2} = 2 \text{ s} \end{array} \right\} \Rightarrow t_B = 2 \text{ s},$$

mert a $t_{B_1} = -1 \text{ s}$ megoldás fizikailag nem értelmezhető.

A hajítás hossza: $x_B = x_0 + v_0 \cos \alpha t_B = 50 + 8,66 \cdot 2 = 67,32 \text{ m}$,

$$y_B = 0,$$

$$\vec{r}_B = x_B \vec{e}_x + y_B \vec{e}_y = (67,32 \vec{e}_x + 0 \vec{e}_y) \text{ m}.$$

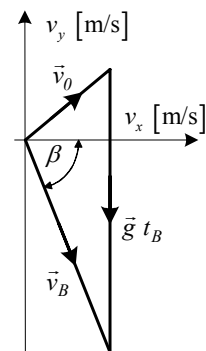
Sebesség a B pontban:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_0 + \vec{g} t_B = (8,88 \vec{e}_x + 5 \vec{e}_y) + (-10 \vec{e}_y) 2 = (8,66 \vec{e}_x - 15 \vec{e}_y) \text{ m/s}.$$

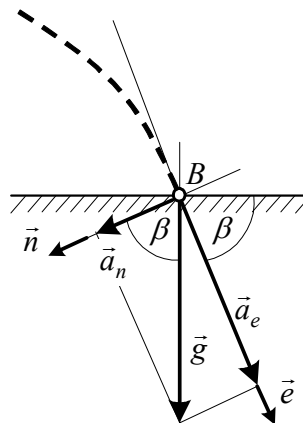
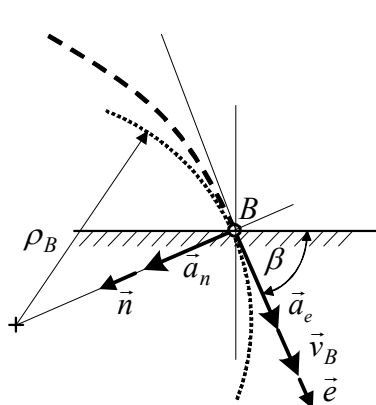
$$v_B = |\vec{v}_B| = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = \sqrt{8,66^2 + 15^2} = 17,32 \text{ m/s}.$$

$$\text{A becsapódás szöge: } \cos \beta = \frac{v_{Bx}}{v_B} = \frac{8,66}{17,32} = 0,5 \Rightarrow \beta = 60^\circ.$$

A mozgás hodográfja:

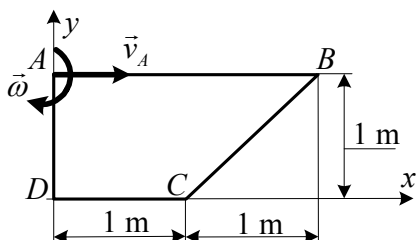


d) A pálya görbületi sugarának meghatározása a becsapódási pontban:



$$a_n = \frac{v_B^2}{\rho_B} = g \cos \beta \quad \Rightarrow \quad \rho_B = \frac{v_B^2}{g \cos \beta} = \frac{17,32^2}{10 \cdot 0,5} \cong 59,996 \text{ m.}$$

10.4.4. feladat: Merev test síkmozgása, sebességábra



Adott:

Az A, B, C, D pont helye az xy síkon.
A mozgás síkja: xy .

$$\vec{v}_A = (4\vec{e}_x) \text{ m/s}, \quad \vec{\omega} = (-1\vec{e}_z) \text{ rad/s}.$$

Feladat: a) A $\vec{v}_B$ sebesség meghatározása.

b) A sebességpólus megszerkesztése.

c) A sebességábra megszerkesztése.

Kidolgozás:

a) A B pont sebességének meghatározása:

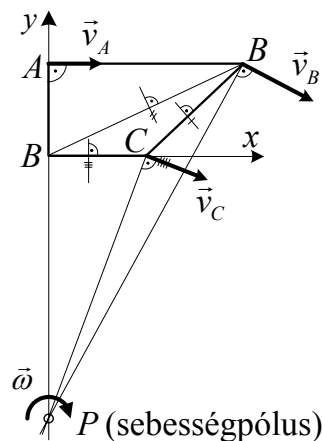
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} = (4\vec{e}_x) + (-1\vec{e}_z) \times (2\vec{e}_x) = (4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y) \text{ m/s},$$

$$\vec{v}_B = (4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y) \text{ m/s}.$$

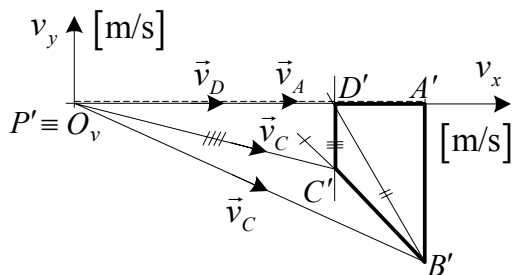
b) A sebességpólus megszerkesztése:

A sebességpólus a sebességvektorokra merőleges egyenesek metszéspontja.

A P sebességpólust a helyzetábrába (abba az ábrába, amely a pontok helyzetét adja me) szerkesztjük meg.



c) A sebességábra megszerkesztése:

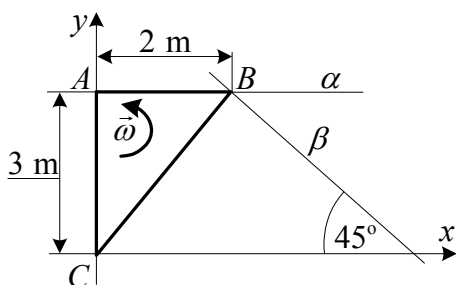


A helyzetábra és a sebességábra hasonló.

A sebességábra a helyzetábrához képest 90° -kal el van forgatva $\vec{\omega}$ irányában.

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_C &= \vec{v}_D + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{DC}}_{\perp \vec{r}_{DC}} \\ \vec{v}_C &= \vec{v}_B + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{BC}}_{\perp \vec{r}_{BC}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C', \quad \left. \begin{aligned} \vec{v}_D &= \vec{v}_A + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{AD}}_{\perp \vec{r}_{AD}} \\ \vec{v}_D &= \vec{v}_B + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{BD}}_{\perp \vec{r}_{BD}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D'.$$

10.4.5. feladat: Merev test síkmozgása, sebességábra



Adott:

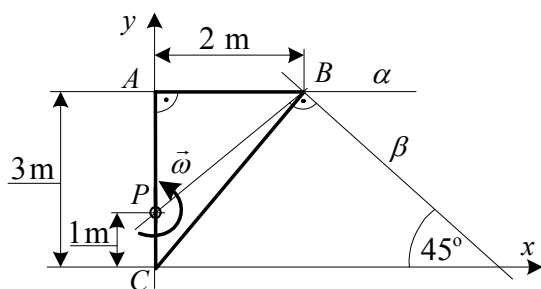
A merev test A, B, C, D pontja, a $\vec{v}_A$ sebességvektor α hatásvonala, a $\vec{v}_B$ sebességvektor β hatásvonala és $\vec{\omega} = (3\vec{e}_z)$ rad/s.

Feladat: a) A sebességpólus helyének meghatározása szerkesztéssel.

b) A $\vec{v}_A, \vec{v}_B$ sebességvektorok meghatározása.

Kidolgozás:

a) A P sebességpólus helyének meghatározása szerkesztéssel:



Az A pontból $\perp$ az α hatásvonalra
A B pontból $\perp$ a β hatásvonalra

$\Downarrow$

P sebességpólus

A P sebesség pólus helyvektora:

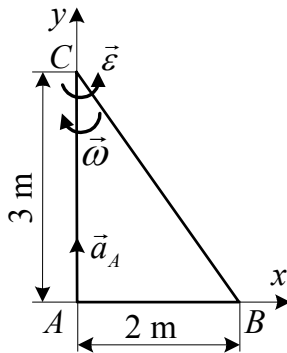
$$\vec{r}_P = (1\vec{e}_y) \text{ m.}$$

b) A $\vec{v}_A, \vec{v}_B$ sebességvektorok meghatározása:

$$\vec{v}_A = \underbrace{\vec{v}_P}_{=0} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PA} = (3\vec{e}_z) \times (2\vec{e}_y) = (-6\vec{e}_x) \text{ m/s,}$$

$$\vec{v}_B = \underbrace{\vec{v}_P}_=0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PB} = (3\vec{e}_z) \times (2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) = (-6\vec{e}_x + 6\vec{e}_y) \text{ m/s}.$$

10.4.6. feladat: Merev test síkmozgása, gyorsulásábra



Adott:

Az xy síkban síkmozgást végző test A, B, C pontja, a test a test szögsebessége, szöggyorsulása és az A pont gyorsulása.

$$\vec{\omega} = (-3\vec{e}_z) \text{ rad/s}, \quad \vec{\varepsilon} = (3\vec{e}_z) \text{ rad/s}^2, \quad \vec{a}_A = (6\vec{e}_y) \text{ m/s}^2.$$

Feladat: a) A B és C pontjának gyorsulásának kiszámítása.

b) A Q gyorsuláspólus helyvektorának meghatározása.

c) A test gyorsulásábrájának megrajzolása.

Kidolgozás:

a) A B és C ponti gyorsulásvektorok kiszámítása:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} - \omega^2 \vec{r}_{AB} = (6\vec{e}_y) + (3\vec{e}_z) \times (2\vec{e}_x) - 9(2\vec{e}_x) = (-18\vec{e}_x + 12\vec{e}_y) \text{ m/s}^2,$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AC} - \omega^2 \vec{r}_{AC} = (6\vec{e}_y) + (3\vec{e}_z) \times (3\vec{e}_y) - 9(3\vec{e}_y) = (-9\vec{e}_x - 21\vec{e}_y) \text{ m/s}^2.$$

b) A Q gyorsuláspólus helyvektorának meghatározása:

$$\vec{a}_Q = \vec{0} = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AQ} - \omega^2 \vec{r}_{AQ},$$

$$\vec{0} = (6\vec{e}_y) + (3\vec{e}_z) \times (x_{AQ}\vec{e}_x + y_{AQ}\vec{e}_y) - 9(x_{AQ}\vec{e}_x + y_{AQ}\vec{e}_y).$$

$$\vec{0} = 6\vec{e}_y + 3x_{AQ}\vec{e}_y - 3y_{AQ}\vec{e}_x - 9x_{AQ}\vec{e}_x - 9y_{AQ}\vec{e}_y, \quad / \cdot \vec{e}_x \quad / \cdot \vec{e}_y$$

$$0 = -3y_{AQ} - 9x_{AQ}, \quad 0 = 6 + 3x_{AQ} - 9y_{AQ},$$

$$y_{AQ} = -3x_{AQ}, \quad \Rightarrow \quad 0 = 6 + 3x_{AQ} - 9(-3x_{AQ}) = 6 + 30x_{AQ},$$

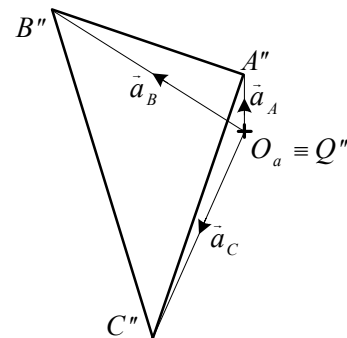
$$y_{AQ} = -3(-0,2) = 0,6 \text{ m}, \quad x_{AQ} = -0,2 \text{ m}.$$

$$\vec{r}_{AQ} = (x_{AQ}\vec{e}_x + y_{AQ}\vec{e}_y) = (-0,2\vec{e}_x + 0,6\vec{e}_y) \text{ m}.$$

c) A gyorsulásábra megrajzolása:

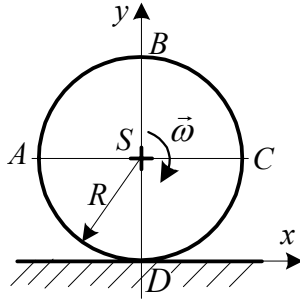
$$\tan \varphi = \frac{|\vec{\varepsilon}|}{\omega^2} = \frac{8}{16} = 0,5 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 26,56^\circ.$$

A gyorsulásábra a helyzetábrához képest $(\pi - \varphi)$ szöggel $(180^\circ - 26,56^\circ) = 153,44^\circ$ -kal van elforgatva $\vec{\varepsilon}$ irányban.



d) A Q gyorsuláspólus a gyorsulás és a helyzetábra hasonlósága alapján szerkesztéssel határozható meg.

10.4.7. feladat: Merev test síkmozgása



Adott:

Az xy síkban síkmozgást végző, állandó $\vec{\omega}$ szögsebességgel gördülő R sugarú merev test szögsebessége.

$\vec{\omega} = (-1\vec{e}_z) = \text{állandó}$, $R = 1 \text{ m}$.

Feladat:

- a) A P sebességpólus helyének, valamint az A , B , C és D pontok sebességvektorainak meghatározása.
b) A Q gyorsuláspólus, valamint az A , B , C és D pontok gyorsulásának meghatározása.

Kidolgozás:

- a) A P sebességpólus helyének, valamint az A , B , C és D pontok sebességvektorainak meghatározása:

Tiszta gördülés: $\vec{v}_D = \vec{0} \Rightarrow P \equiv D$.

$$\vec{v}_S = v_S \vec{e}_x = \underbrace{\vec{v}_D}_{=\vec{0}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{DS} = (\omega \vec{e}_z) \times (R \vec{e}_y) = (-1 \vec{e}_z) \times \vec{e}_y = (\vec{e}_x) \text{ m/s},$$

$$\vec{v}_B = \underbrace{\vec{v}_D}_{=\vec{0}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{DB} = (\omega \vec{e}_z) \times (2R \vec{e}_y) = (-\vec{e}_z) \times (2 \vec{e}_y) = (2 \vec{e}_x) \text{ m/s},$$

$$\vec{v}_A = \underbrace{\vec{v}_D}_{=\vec{0}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{DA} = (\omega \vec{e}_z) \times (-R \vec{e}_x + R \vec{e}_y) = \underbrace{-R \omega \vec{e}_x}_{=v_S} - \underbrace{R \omega \vec{e}_y}_{=v_S} =$$

$$= (v_S \vec{e}_x + v_S \vec{e}_y) = (1 \vec{e}_x + 1 \vec{e}_y) \text{ m/s},$$

$$\vec{v}_C = \underbrace{\vec{v}_D}_{=\vec{0}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{DC} = (\omega \vec{e}_z) \times (R \vec{e}_x + R \vec{e}_y) = (v_S \vec{e}_x - v_S \vec{e}_y) = (\vec{e}_x - \vec{e}_y) \text{ m/s}.$$

- b) A Q gyorsuláspólus, valamint az A , B , C és D pontok gyorsulásának meghatározása:

$$\vec{v}_S = \text{állandó} \Rightarrow \vec{a}_S = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{a_{Se} = 0 \quad a_{Sn} = 0}_{S \equiv Q}.$$

Az S pont a test Q gyorsuláspólusa.

$\vec{\omega} = \text{állandó} \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \vec{0}$.

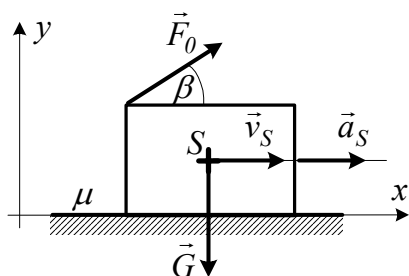
$$\vec{a}_A = \underbrace{\vec{a}_S}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{\varepsilon}}_{=\vec{0}} \times \vec{r}_{SA} - \omega^2 \vec{r}_{SA} = -\omega^2 (-R \vec{e}_x) = (1 \vec{e}_x) \text{ m/s}^2,$$

$$\vec{a}_D = \underbrace{\vec{a}_S}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{\varepsilon}}_{=\vec{0}} \times \vec{r}_{SD} - \omega^2 \vec{r}_{SD} = -\omega^2 (-R \vec{e}_y) = (\vec{e}_y) \text{ m/s}^2,$$

$$\vec{a}_B = \underbrace{\vec{a}_S}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{\varepsilon}}_{=\vec{0}} \times \vec{r}_{SB} - \omega^2 \vec{r}_{SB} = -\omega^2 (R \vec{e}_y) = (-\vec{e}_y) \text{ m/s}^2,$$

$$\vec{a}_C = \underbrace{\vec{a}_S}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{\varepsilon}}_{=\vec{0}} \times \vec{r}_{SC} - \omega^2 \vec{r}_{SC} = -\omega^2 (R \vec{e}_x) = (-1 \vec{e}_x) \text{ m/s}^2.$$

10.4.8. feladat: Hasáb haladó mozgása



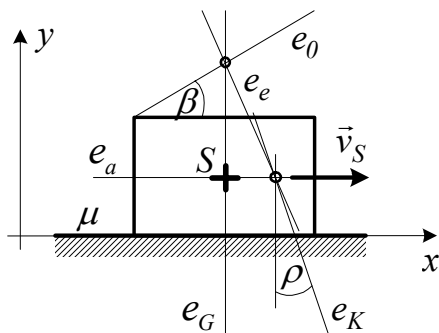
Adott: A haladó mozgást végző m tömegű hasáb, továbbá μ , β , $\vec{F}_0$, $\vec{G}$, $\vec{v}_S$.

Feladat: A hasáb $\vec{a}_S$ gyorsulásának és a hasábra ható támasztó erőrendszer $\vec{F}_K$ eredőjének meghatározása.

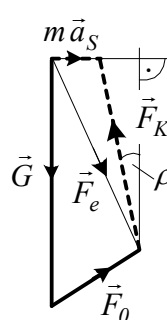
a) A feladat megoldása szerkesztéssel:

Impulzus tétel: $m\vec{a}_S = \underbrace{\vec{F}_0 + \vec{G}}_{\vec{F}_e} + \vec{F}_K$.

Helyzetábra



Vektorábra



b) A feladat megoldása számítással:

$$\vec{a}_S = a_{Sx} \vec{e}_x, \quad \vec{F}_K = -\mu F_N \vec{e}_x + F_N \vec{e}_y,$$

$$\vec{F}_0 = F_{0x} \vec{e}_x + F_{0y} \vec{e}_y = F_0 (\cos \beta \vec{e}_x + \sin \beta \vec{e}_y).$$

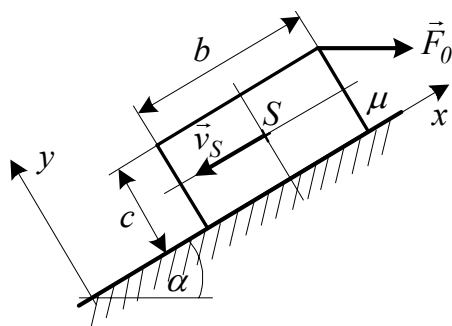
$$\text{Impulzus tétel: } m\vec{a}_S = \vec{F}_0 + \vec{G} + \vec{F}_K, \quad / \cdot \vec{e}_x \quad / \cdot \vec{e}_y.$$

$$0 = F_{0y} - G + F_N, \Rightarrow F_N = G - F_0 \sin \beta.$$

$$ma_{Sx} = F_{0x} - \mu F_N,$$

$$a_{Sx} = \frac{1}{m} [F_{0x} - \mu(G - F_{0y})].$$

10.4.9. feladat: Tömegpont mozgása kényszerpályán



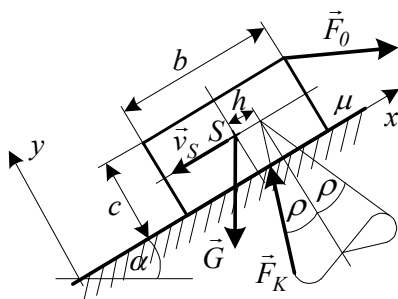
Adott: Az érdes, α hajlásszögű felületen $\vec{v}_S$ pillanatnyi sebességgel lefelé mozgó m tömegű hasáb.
 $\mu=0,25$; $\vec{v}_S = (-10\vec{e}_x)$ m/s, $m=40$ kg,
 $g=10$ m/s², $\alpha=30^\circ$, $c=1$ m, $b=2$ m,
 $\vec{F}_0 = (200\vec{e}_x - 100\vec{e}_y)$ N.

Feladat: A hasáb súlyponti gyorsulásának és a hasábra ható kényszererő vektorának és hatásvonalának meghatározása

- számítással és
- szerkesztéssel.

Kidolgozás:

- A hasáb súlyponti gyorsulásának és a hasábra ható kényszererő vektorának és hatásvonalának meghatározása számítással:



Impulzus tétel: $m \vec{a}_S = (\vec{G} + \vec{F}_0 + \vec{F}_K)$.

$$(m a_s \vec{e}_x) = (-m g \sin \alpha \vec{e}_x - m g \cos \alpha \vec{e}_y) + (F_{0x} \vec{e}_x + F_{0y} \vec{e}_y) + (\mu F_N \vec{e}_x + F_N \vec{e}_y).$$

Az egyenletet skalárisan beszorozva először $\vec{e}_y$ -al, majd $\vec{e}_x$ -el:

$$0 = -m g \cos \alpha + F_{0y} + F_N \Rightarrow F_N = 346,4 + 100 = 446,4 \text{ N}.$$

$$m a_s = -m g \sin \alpha + F_{0x} + \mu F_N \Rightarrow a_s = \frac{1}{m} (-m g \sin \alpha + F_{0x} + \mu F_N)$$

$$a_s = \frac{1}{40} (-40 \cdot 10 \cdot 0,5 + 200 + 0,25 \cdot 446,4) = 2,91 \text{ m/s}^2.$$

A súlyponti gyorsulás: $\vec{a}_S = (2,91 \vec{e}_x) \text{ m/s}^2$.

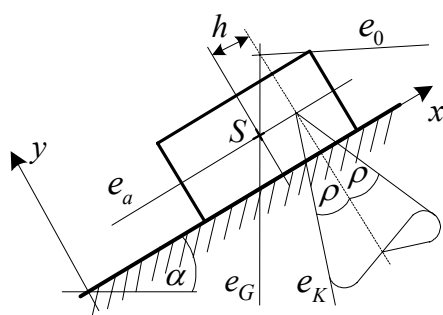
A kényszererő: $\vec{F}_K = (\mu F_N \vec{e}_x + F_N \vec{e}_y) = (111,6 \vec{e}_x + 446,4 \vec{e}_y) \text{ N}$.

A kényszererő hatásvonala a perdület- tételből: $\dot{\pi}_s = M_s, \Rightarrow 0 = -\frac{c}{2} F_{0x} - \frac{b}{2} F_{0y} + h F_N,$

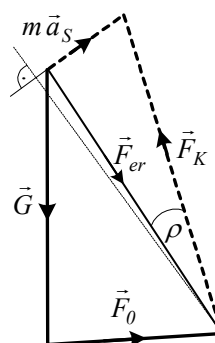
$$h = \frac{c F_{0x}}{2 F_N} + \frac{b F_{0y}}{2 F_N} = 0,5 \frac{200}{446,4} + \frac{100}{446,4} = 0,448 \text{ m}.$$

- A feladat megoldása szerkesztéssel: $m \vec{a}_S = (\underbrace{\vec{G} + \vec{F}_0}_{\vec{F}_{er}} + \vec{F}_K).$

Helyzetábra

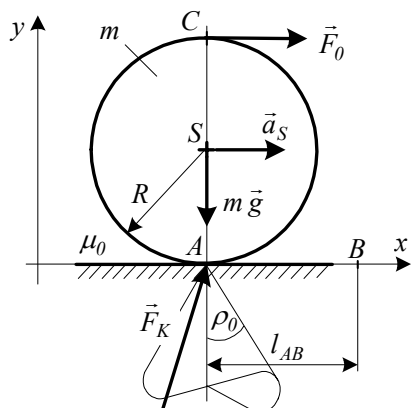


Vektorábra



10.4.10. feladat: Henger gördülése kényszerpályán

Adott: A sík kényszerpályán tiszta gördülő mozgást végző körhenger. $\vec{a}_S = (8\vec{e}_x) \text{ m/s}^2$, $g \approx 10 \text{ m/s}^2$, $l_{AB} = 2 \text{ m}$, $R = 0,1 \text{ m}$, $m = 30 \text{ kg}$.



Feladat:

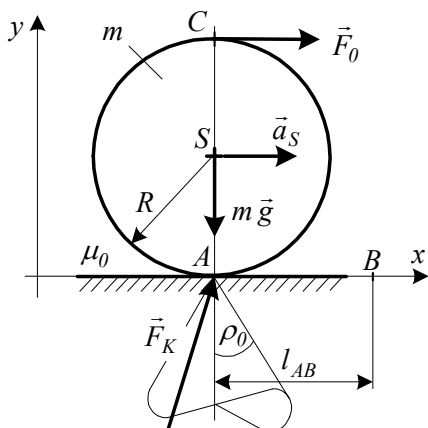
- Az adott gyorsulás fenntartásához szükséges $\vec{F}_0 = F_0 \vec{e}_x$ erő meghatározása.
- Az $\vec{F}_K$ kényszererő meghatározása.
- A csúszásmentes gördülő mozgás megvalósításához szükséges $\mu_{0\min}$ nyugvásbeli súrlódási tényező meghatározása.
- A hengerre ható erőrendszernek az l_{AB} hosszban végzett W_{AB} munkájának meghatározása.

Kidolgozás:

A hengerre ható kényszererő (támasztóerő): $\vec{F}_K = F_T \vec{e}_x + F_N \vec{e}_y$.

A henger szöggyorsulása: $\vec{\varepsilon} = -\varepsilon \vec{e}_z = -\frac{a_S}{R} \vec{e}_z = -\frac{8}{0,1} \vec{e}_z = (-80 \vec{e}_z) \text{ 1/s}^2$.

a) Az $\vec{F}_0$ erő meghatározása:



Perdület tétel az A pontra:

$$\dot{\vec{\pi}}_A = \vec{M}_A,$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_A \vec{\varepsilon} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\pi}_A}_{= \vec{0}, (\vec{\omega} \parallel \vec{\pi}_A)} &= \vec{M}_A, \\ &= \vec{0}, (\vec{\omega} \parallel \vec{\pi}_A) \end{aligned}$$

$J_a \vec{\varepsilon} = \vec{M}_A$, mert a tehetetlenségi főtengely.

$$-(J_a \varepsilon \vec{e}_z) = (-\vec{F}_0 \cdot 2R \vec{e}_z) \quad / \cdot \vec{e}_z$$

$$F_0 = \frac{J_a \varepsilon}{2R} = \frac{\frac{3}{2} m R^2 \varepsilon}{2R} = \frac{1,5 \cdot 30 \cdot 0,1^2 \cdot 80}{2 \cdot 0,1} = 180 \text{ N}.$$

b) Az $\vec{F}_K$ kényszererő (támasztóerő) meghatározása:

$$\text{Impulzus tétel: } m \vec{a}_S = \vec{F}. \quad \Rightarrow \quad m \vec{a}_S = \vec{F}_0 + \vec{G} + \vec{F}_K.$$

$$(F_0 \vec{e}_x - m g \vec{e}_y + F_T \vec{e}_x + F_N \vec{e}_y) = m a_S \vec{e}_x \quad / \cdot \vec{e}_x \quad / \cdot \vec{e}_y$$

$$F_0 + F_T = m a_S,$$

$$-m g + F_N = 0,$$

$$F_T = m a_S - F_0 = 30 \cdot 8 - 180 = 60 \text{ N}, \quad F_N = m g = 30 \cdot 10 = 300 \text{ N}.$$

$$\vec{F}_K = F_T \vec{e}_x + F_N \vec{e}_y = (60 \vec{e}_x + 300 \vec{e}_y) \text{ N}.$$

Ellenőrzés: perdület tétel a henger S ponti tengelyére:

$$J_s \vec{\epsilon} = \vec{M}_S, \Rightarrow -J_s \epsilon \vec{e}_z = (-F_0 R \vec{e}_z) + (F_s R \vec{e}_z) \quad / \cdot \vec{e}_z$$

$$F_T = F_0 - \frac{J_s \epsilon}{R} = F_0 - \frac{\frac{1}{2} m R^2 \epsilon}{R} = 180 - \frac{0,5 \cdot 30 \cdot 0,1^2 \cdot 80}{0,1} = 60 \text{ N}.$$

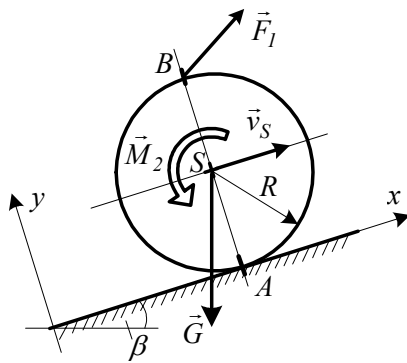
c) A csúszásmentes gördüléshez szükséges minimális nyugvásbeli súrlódási tényező:

$$\mu_{0\min} = \frac{|F_T|}{|F_N|} = \frac{60}{300} = 0,2.$$

d) Az l_{AB} szakaszon végzett munka:

$$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} P dt = \int_{t_A}^{t_B} (\vec{F}_0 \cdot \vec{v}_C + \underbrace{\vec{G} \cdot \vec{v}_S}_{=0} + \underbrace{\vec{F}_K \cdot \vec{v}_A}_{=0}) dt = \int_{t_A}^{t_B} F_0 \cdot 2v_S dt = 2 F_0 l_{AB} = 2 \cdot 180 \cdot 2 = 720 \text{ J}.$$

10.4.11. feladat: Merev testre ható erőrendszer teljesítménye



Adott: Az R sugarú, $\vec{G}$ súlyú homogén henger β hajlásszögű lejtőn gördül. A henger súlypontjának pillanatnyi sebessége $\vec{v}_S$.

$$G = 100 \text{ N}, \vec{v}_S = (2 \vec{e}_x) \text{ m/s}, \vec{M}_2 = (20 \vec{e}_z) \text{ Nm},$$

$$\beta = 30^\circ, R = 0,5 \text{ m}, \vec{F}_1 = (60 \vec{e}_x + 20 \vec{e}_y) \text{ N}.$$

Feladat: A $\vec{G}$ súlyerő P_G , az $\vec{F}_1$ erő P_{F_1} , az $\vec{M}_2$ nyomaték nyomaték P_{M_2} és az $\vec{F}_A$ támasztóerő P_{F_A} teljesítményének kiszámítása.

Kidolgozás:

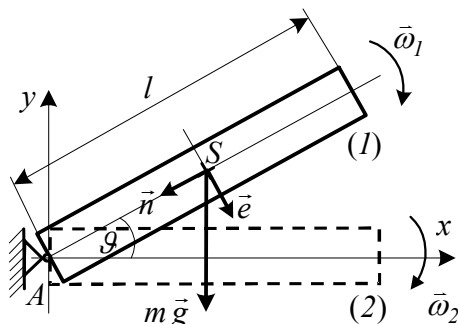
$$P_G = \vec{G} \cdot \vec{v}_S = (-G \sin \beta \vec{e}_x - G \cos \beta \vec{e}_y) \cdot (v_S \vec{e}_x) = -G \sin \beta v_S = -100 \cdot 0,5 \cdot 2 = -100 \text{ W},$$

$$P_{F_1} = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_B = \vec{F}_1 \cdot 2\vec{v}_S = (60 \vec{e}_x + 20 \vec{e}_y) \cdot (4 \vec{e}_x) = 240 \text{ W},$$

$$P_{M_2} = \vec{M}_2 \cdot \vec{\omega} = \vec{M}_2 \cdot \left(-\frac{v_S}{R} \vec{e}_z \right) = (20 \vec{e}_z) \cdot \left(-\frac{2}{0,5} \vec{e}_z \right) = -20 \cdot 4 = -80 \text{ W},$$

$$P_{F_A} = \vec{F}_A \cdot \underbrace{\vec{v}_A}_{=0} = 0.$$

10.4.12. feladat: Rögzített tengely körüli forgómozgás



Adott: $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$, $m = 40 \text{ kg}$, $g \approx 10 \text{ m/s}^2$,
 $l = 1 \text{ m}$, $\vartheta = 60^\circ$.

Feladat:

- a) A súlypont $\vec{a}_{s1}$ gyorsulásának és az $\vec{F}_{A1}$ támasztóerőnek a meghatározása az (1) jelű helyzetben.
 b) A (2) helyzetbeli $\vec{\omega}_2$ szögsebesség meghatározása.
 c) A súlypont $\vec{a}_{s2}$ gyorsulásának és az $\vec{F}_{A2}$ támasztóerőnek a meghatározása a (2) jelű helyzetben.

Kidolgozás:

- a) A súlypont $\vec{a}_{s1}$ gyorsulásának és az $\vec{F}_{A1}$ támasztóerőnek a meghatározása az (1) jelű helyzetben:

- A súlyponti gyorsulás meghatározása:

$$\text{Perdület tétel az } A \text{ pontra: } \underbrace{J_A}_{\parallel \vec{e}} \underbrace{\vec{\varepsilon}}_{\parallel \vec{\omega}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (J_A \vec{\omega})}_{\parallel \vec{\omega}} + \underbrace{\vec{r}_{As}}_{\perp \vec{e}} \times m \underbrace{\vec{a}_A}_{\parallel \vec{e}} = \vec{M}_A \quad / \cdot \vec{e}_z.$$

$$= 0$$

A z tengely (a tengely) tehetetlenségi főtengely, ezért:

$$J_a \varepsilon_1 = M_a = -\frac{l}{2} \cos \vartheta \cdot mg, \quad J_a = J_s + m \frac{l^2}{4} = \frac{ml^2}{3}, \quad J_s = \frac{ml^2}{12},$$

$$\frac{ml^2}{3} \varepsilon_1 = -\frac{l}{2} \cos \vartheta \cdot mg,$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{3g \cos \vartheta}{2l} = -7,5 \text{ 1/s}^2,$$

$$a_{s1e} = -\varepsilon_1 \frac{l}{2} = 3,75 \text{ m/s}^2, \quad a_{s1n} = \frac{l}{2} \omega_1^2 = 4,5 \text{ m/s}^2,$$

$$\vec{a}_{s1} = a_{s1e} \vec{e} + a_{s1n} \vec{n} = +\frac{3g \cos \vartheta}{2l} \vec{e} + \frac{l}{2} \omega_1^2 \vec{n} = (3,75 \vec{e} + 4,5 \vec{n}) \text{ m/s}^2.$$

- A támasztóerő meghatározása:

$$\text{Impulzus tétel: } m\vec{a}_{s1} = m\vec{g} + \vec{F}_{A1} \quad / \cdot \vec{e} \quad / \cdot \vec{n}$$

$$ma_{s1e} = mg \cos \vartheta + F_{A1e} \Rightarrow F_{A1e} = -50 \text{ N},$$

$$ma_{s1n} = mg \sin \vartheta + F_{A1n} \Rightarrow F_{A1n} = -16,64 \text{ N}.$$

$$\vec{F}_{A1} = (-50 \vec{e} - 16,64 \vec{n}) \text{ N}.$$

- b) A (2) helyzetbeli $\vec{\omega}_2$ szögsebesség meghatározása:

$$\text{Munkatétel: } E_2 - E_1 = W_{12} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = \vec{G} \cdot \Delta \vec{r}_S + \underbrace{\vec{F}_A \cdot \Delta \vec{r}_A}_{\vec{0}},$$

$$\frac{1}{2} J_a (\omega_2^2 - \omega_1^2) = mg \cdot \frac{l}{2} \sin \vartheta + 0, \quad J_a = \frac{ml^2}{3}.$$

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 + \frac{2mg}{J_a} \frac{l}{2} \sin \vartheta = \omega_1^2 + \frac{3g \sin \vartheta}{l},$$

$$\omega_2 = 5,91 \text{ 1/s}, \quad \vec{\omega}_2 = (-5,91 \vec{e}_z) \text{ rad/s}.$$

c) A súlypont $\vec{a}_{S2}$ gyorsulásának és az $\vec{F}_{A2}$ támasztóerőnek a meghatározása a (2) jelű helyzetben:

Perdület tétel az a tengelyre: $J_a \varepsilon_2 = -\frac{l}{2} mg,$

$$\varepsilon_2 = -\frac{3}{2} \frac{g}{l} = -15 \text{ 1/s}^2.$$

$$\vec{a}_{S2} = (-\varepsilon_2 \frac{l}{2} \vec{e} + \omega_2^2 \frac{l}{2} \vec{n}) = (7,5 \vec{e} + 17,46 \vec{n}) \text{ m/s}^2.$$

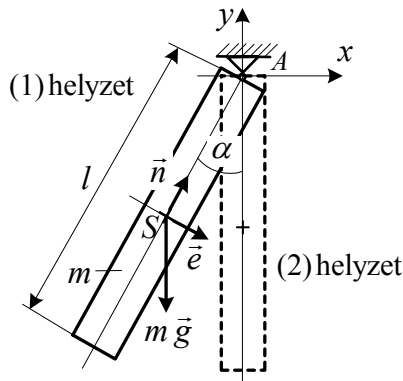
Impulzus tétel: $m \vec{a}_{S2} = m \vec{g} + \vec{F}_{A2} \quad / \cdot \vec{e} / \cdot \vec{n},$

$$m \frac{l}{2} \frac{3g}{2l} = mg + F_{A2e}, \quad F_{A2e} = \left(\frac{3g}{4} - g \right) m = -100 \text{ N}.$$

$$m \frac{l}{2} \omega_2^2 = 0 + F_{A2n}, \quad F_{A2n} = m \frac{l}{2} \omega_2^2 = 699,6 \text{ N}.$$

$$\vec{F}_{A2} = (-100 \vec{e} + 699,6 \vec{n}) \text{ N}.$$

10.4.13. feladat: Fizikai inga



Adott: Az m tömegű, l hosszúságú prizmatikus rúd, amely az A pont körül a függőleges síkban végez forgómozgást. Az α szöggel meghatározott (1) jelű helyzetben a rúd S pontjának sebessége zérus.

$$\alpha = 30^\circ, \quad g \approx 10 \text{ m/s}^2, \quad m = 2 \text{ kg}, \quad l = 2 \text{ m}.$$

Feladat: a) A rúd S pontja $\vec{a}_{S1}$ gyorsulásának és az $\vec{F}_{A1}$ támasztóerőnek a meghatározása az (1) jelű helyzetben.

b) A rúd S pontja $\vec{a}_{S2}$ gyorsulását és az $\vec{F}_{A2}$ támasztóerőnek, valamint az ω_2 szögsebességének a meghatározása a (2) jelű helyzetben.

Kidolgozás:

a) A súlyponti gyorsulás és a támasztóerő meghatározása az indítási, (1) jelű helyzetben:

Az A ponti kényszererő: $\vec{F}_{A1} = (F_{A1e} \vec{e} + F_{A1n} \vec{n})$, az S pont gyorsulása $\vec{a}_{S1} = (a_{S1e} \vec{e} + a_{S1n} \vec{n})$,

A rúd szöggyorsulása $\vec{\varepsilon}_1 = (\varepsilon_1 \vec{k})$, rúd szögsebessége $\vec{\omega}_1 = (\omega_1 \vec{k}) = \vec{0}$.

Az A pontra felírt perdület tétel: $\dot{\vec{\pi}}_{A1} = \vec{M}_{A1}.$

$$\begin{aligned} \frac{J}{A} \vec{\varepsilon}_1 + \underbrace{\vec{\omega}_1 \times \vec{\pi}_{A1}}_{= \vec{0}, \text{ mert } \vec{\omega}_1 \parallel \vec{\pi}_{A1}} &= \vec{M}_{A1}. \\ &= \vec{0}, \text{ mert } \vec{\omega}_1 \parallel \vec{\pi}_{A1} \end{aligned}$$

(1) helyzet

$$J_a \vec{\epsilon}_1 = \vec{M}_{A1},$$

$$J_a \epsilon_1 \vec{e} = m g \sin \alpha \frac{l}{2} \vec{e}_z \quad / \cdot \vec{e}_z$$

$$J_a \epsilon_1 = m g \sin \alpha \frac{l}{2}.$$

$$\epsilon_1 = \frac{m g \sin \alpha l}{2 J_a} = \frac{m g \sin \alpha l}{2 \left[J_s + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right]} = \frac{m g \sin \alpha l}{2 \left(\frac{1}{3} m l^2 \right)} = \frac{3 g}{2 l} \sin \alpha.$$

$$\epsilon_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{2} 0,5 = 3,75 \text{ rad/s}^2 \Rightarrow \vec{\epsilon}_1 = (3,75 \vec{e}_z) \text{ rad/s}^2.$$

A súlyponti gyorsulás: $\vec{a}_{S1} = (a_{S1e} \vec{e} + a_{S1n} \vec{n})$.

$$a_{S1e} = \frac{l}{2} \epsilon_1 = 1 \cdot 3,75 = 3,75 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \vec{a}_{S1e} = (3,75 \vec{e}) \text{ m/s}^2,$$

$$a_{S1n} = \frac{2 v_{S1}^2}{l} = \frac{l}{2} \omega_1^2 = 1 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow \vec{a}_{S1n} = \vec{0},$$

$$\vec{a}_{S1} = (3,75 \vec{e}) \text{ m/s}^2.$$

Impulzus tétel: $m \vec{a}_{S1} = (\vec{F}_{A1} + \vec{G})$,

$$(m a_{S1e} \vec{e} + m a_{S1n} \vec{n}) = (F_{A1e} \vec{e} + F_{A1n} \vec{n}) + (m g \sin \alpha \vec{e} - m g \cos \alpha \vec{n}) \quad / \cdot \vec{e} \quad / \cdot \vec{n}$$

$$m a_{S1e} = F_{A1e} + m g \sin \alpha,$$

$$F_{A1e} = m (a_{S1e} - g \sin \alpha) = 2 \cdot (3,75 - 10 \cdot 0,5) = -2,5 \text{ N},$$

$$m a_{S1n} = F_{A1n} - m g \cos \alpha,$$

$$F_{A1n} = m (g \cos \alpha + \underbrace{a_{S1n}}_{=0}) = 2 \cdot 10 \cdot 0,866 = 17,3 \text{ N}.$$

$$\vec{F}_{A1} = (-2,5 \vec{e} + 17,3 \vec{n}) \text{ N}.$$

b) A súlyponti gyorsulás és a támasztóerő meghatározása a függőleges, (2) jelű helyzetben:

Munkatétel: $E_2 - E_1 = W_{12}$.

$$\frac{1}{2} J_a \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_a \underbrace{\omega_1^2}_{=0} = m g \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha),$$

$$\frac{1}{2} J_a \omega_2^2 = m g \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha),$$

$$\omega_2^2 = \frac{m g l (1 - \cos \alpha)}{\frac{1}{3} m l^2} = \frac{3 g}{l} (1 - \cos \alpha) = \frac{3 \cdot 10 (1 - 0,866)}{2} = 2,01,$$

$$\omega_2 = \sqrt{2,01} = 1,417 \text{ rad/s}.$$

Az A pontra felírt perdület tétel: $\dot{\vec{\pi}}_{A2} = \vec{M}_{A2}$.

$$\underbrace{J_{\vec{A}} \vec{\varepsilon}_2 + \underbrace{\vec{\omega}_2 \times \vec{\pi}_{A_2}}_{= \vec{0}, \text{ mert } \vec{\omega}_2 \parallel \vec{\pi}_{A_2}}}_{= \vec{0}} = \underbrace{\vec{M}_{A_2}}_{= \vec{0}}, \Rightarrow \vec{\varepsilon}_2 = \vec{0}.$$

A súlyponti gyorsulás: $\vec{a}_{S_2} = (a_{S_{2e}} \vec{e} + a_{S_{2n}} \vec{n})$.

$$a_{S_{2e}} = \frac{l}{2} \varepsilon_2 = 0.$$

$$a_{S_{2n}} = \frac{2v_{S_2}^2}{l} = \frac{l}{2} \omega_2^2 = 1 \cdot 1,417^2 = 2,01 \Rightarrow \vec{a}_{S_{2n}} = (2,01 \vec{n}),$$

$$\vec{a}_{S_2} = (2,01 \vec{n}) \text{ m/s}^2$$

Impulzus tétel: $m \vec{a}_{S_2} = (\vec{F}_{A_2} + \vec{G})$,

$$(m a_{S_{2e}} \vec{e} + m a_{S_{2n}} \vec{n}) = (F_{A_{2e}} \vec{e} + F_{A_{2n}} \vec{n}) + (-m g \vec{n}), \quad / \cdot \vec{e} \quad / \cdot \vec{n}$$

$$m a_{S_{2e}} = F_{A_{2e}}, \quad m a_{S_{2n}} = F_{A_{2n}} - m g,$$

$$F_{A_{2e}} = m \underbrace{a_{S_{2e}}}_{=0} = 0. \quad F_{A_{2n}} = m(g + a_{S_{2e}}) = 2(10 + 2,01) = 24,02 \text{ N}.$$

$$\vec{F}_{A_2} = (24,02 \vec{n}) \text{ N}.$$