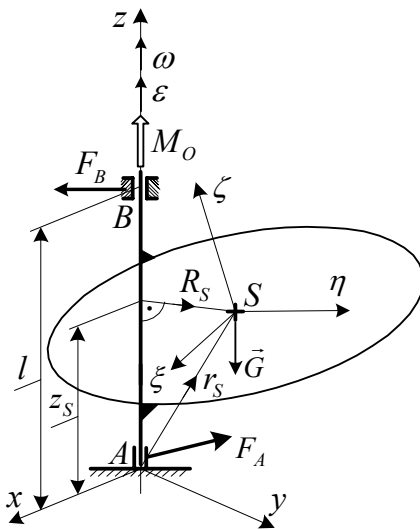


10.5. Forgó tömegek kiegyensúlyozása



Adott:

A forgórész geometriája és a külső erőrendszer: $\vec{G}, \vec{M}_0$. A ξ, η, ζ a szerkezet (forgórész) S ponti tehetetlenségi főtengelei.

Feladat:

A támasztóerők meghatározása.

$$\vec{F}_A = (F_{Ax}\vec{e}_x + F_{Ay}\vec{e}_y + F_{Az}\vec{e}_z), \quad \vec{F}_B = (F_{Bx}\vec{e}_x + F_{By}\vec{e}_y).$$

Csapágyazás:

Az A helyen radax csapágý (pl. golyós csapágý), a B helyen radiális csapágý (pl. hengergörgös csapágý) van beépítve.

A tömegkiegyensúlyozás célkitűzése:

Annak biztosítása, hogy a forgás következtében ne lépjenek fel járulékos támasztóerők a csapágyakban.

Az S pont mozgásjellemzői: $\vec{r}_{AS} = \vec{r}_S = \vec{R}_S + z_S \vec{e}_z = x_S \vec{e}_x + y_S \vec{e}_y + z_S \vec{e}_z$,

$$\vec{v}_S = \vec{\omega} \times \vec{R}_S, \quad \vec{a}_S = \vec{\varepsilon} \times \vec{R}_S - \omega^2 \vec{R}_S.$$

A támasztó erőrendszer meghatározása:

a) Impulzus tétel: $m\vec{a}_S = \vec{G} + \vec{F}_A + \vec{F}_B \quad / \cdot \vec{e}_z$

$$0 = -G + F_{Az}$$

$$F_{Az} = G.$$

b) Perdület tétel az A pontra: $\underline{\underline{J}}_A \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\omega} = \vec{M}_0 + \vec{r}_{AS} \times \vec{G} + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B$,

$$\vec{e}_z \times / \quad \underline{J}_A \cdot \varepsilon \vec{e}_z + \omega^2 \vec{e}_z \times \underline{J}_A \cdot \vec{e}_z = M_0 \vec{e}_z + \vec{R}_S \times \vec{G} + l \vec{e}_z \times \vec{F}_B,$$

$$\vec{e}_z \times \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{e}_z \mathcal{E} + \omega^2 \vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{e}_z) = \vec{0} + \underbrace{\vec{e}_z \times (\vec{R}_S \times \vec{G})}_{-\vec{R}_S G} + \underbrace{\vec{e}_z \times (l \vec{e}_z \times \vec{F}_B)}_{-\vec{F}_B l (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z)},$$

$$\vec{F}_B = \frac{1}{j} \left[-G\vec{R}_S - \vec{e}_z \times \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{e}_z \mathcal{E} - \vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{e}_z) \omega^2 \right].$$

c) Perdület tétel a B pontra: $\underline{\underline{J}}_B \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \underline{\underline{J}}_B \cdot \vec{\omega} = \vec{M}_0 + \vec{r}_{BS} \times \vec{G} + \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_A$.

Az előzővel megegyező gondolatmenetből:

$$\vec{F}_A = \frac{1}{I} \left[G \vec{R}_S + \vec{e}_z \times \underline{\underline{J}}_B \cdot \vec{e}_z \varepsilon + \vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \underline{\underline{J}}_B \cdot \vec{e}_z) \omega^2 \right] + G \vec{e}_z.$$

Kérdés: Mi a feltétele, hogy a támasztóerők ne függjenek az $\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$ mozgás-jellemzőktől?

a) $\vec{0} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{G}$ akkor teljesül, ha: $\vec{a}_S = \vec{0}$.

Ez akkor teljesül, ha az S pont a forgástengelyre esik: $\vec{R}_S = \vec{0}$.

Statikusan kiegyensúlyozott egy álló tengely körül forgó merev test (forgórész), ha a test S pontja a forgástengelyre esik.

$$\text{b) } \vec{F}_B = \frac{1}{l} \left[-G \underbrace{\vec{R}_S}_{=\vec{0}} - \vec{e}_z \times \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{e}_z \varepsilon - \vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{e}_z) \omega^2 \right] = \vec{0},$$

$$\text{c) } \vec{F}_A - G\vec{e}_z = \frac{1}{l} \left[G \underbrace{\vec{R}_S}_{=\vec{0}} + \vec{e}_z \times \underline{\underline{J}}_B \cdot \vec{e}_z \varepsilon + \vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \underline{\underline{J}}_B \cdot \vec{e}_z) \omega^2 \right] = \vec{0}.$$

A b), c) feltétel akkor teljesül ha $\underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{e}_z \parallel \vec{e}_z$ és $\underline{\underline{J}}_B \cdot \vec{e}_z \parallel \vec{e}_z$.

Ezek a feltételek csak akkor teljesülhetnek, ha a z forgástengely a forgórész tehetetlenségi főtengelye: $\underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{e}_z = \underline{\underline{J}}_B \cdot \vec{e}_z = \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{e}_z = J_z \vec{e}_z$.

Dinamikusan kiegyensúlyozott egy álló tengely körül forgó merev test (forgórész), ha a forgástengely a merev test tehetetlenségi főtengelye.

Megjegyzés: Ha a z tengely S ponti tehetetlenségi főtengely, akkor a z tengely A és B ponti tehetetlenségi főtengely.

A tömegkiegyensúlyozás megvalósítása:

Teljesítendő feltételek:

- A forgórész S pontja legyen rajta a forgástengelyen.
- A forgástengely legyen a forgórész tehetetlenségi főtengelye.

Az a)-c) feltételek más alakja:

- Az $\vec{R}_S = \vec{0}$ feltétel helyett az $m \vec{R}_S = \vec{0}$ is írható.

(A forgórész z tengelyre számított statikai nyomatéka legyen zérus)

- A $\underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{e}_z = \underline{\underline{J}}_B \cdot \vec{e}_z = \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{e}_z = J_z \vec{e}_z$ feltétel helyett a

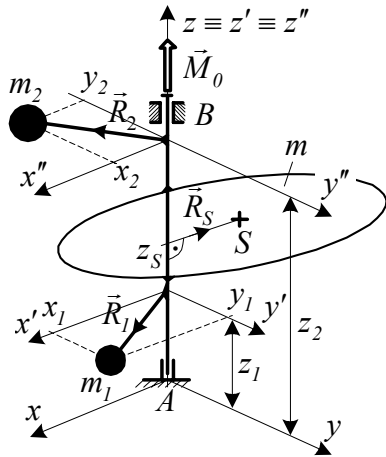
$J_{xz} = J_{yz} = 0$, vagy $\vec{e}_z \times (\vec{J}_z \times \vec{e}_z) = J_{xz} \vec{e}_x + J_{yz} \vec{e}_y = \vec{0}$ is írható.

A feltételek biztosítása/teljesítése:

A kiegyensúlyozatlan forgórészhez tömegeket adunk hozzá, vagy veszünk el.

Tömegek $\equiv$ tömegpontok.

A tömegpontokkal kiegészített forgórész:



Az m_1 tömegpont az $x_1 y_1 z_1$ ponthoz rögzített.

Az m_2 tömegpont az $x_2 y_2 z_2$ ponthoz rögzített.

a) A kiegészített/módosított forgórésznek a z tengelyre számított statikai nyomatéka legyen zérus:

$$m \vec{R}_S + m_1 \vec{R}_1 + m_2 \vec{R}_2 = \vec{0}$$

skalár egyenletek:

$$m x_S + m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 ,$$

$$m y_S + m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0 .$$

b) A kiegészített/módosított forgórésznek a z tengely legyen a tehetetlenségi főtengelye:

$$\vec{e}_z \times (\vec{J}_z \times \vec{e}_z) = \vec{0} , \quad \Rightarrow \quad J_{xz} \vec{e}_x + J_{yz} \vec{e}_y + \sum_{i=1}^2 \underbrace{(m_i x_i z_i \vec{e}_x + m_i y_i z_i \vec{e}_y)}_{m_i z_i \vec{R}_i} = \vec{0} .$$

Skalár egyenletek: $J_{xz} + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 = 0 ,$

$$J_{yz} + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 = 0 .$$

A a) és b) vektoriális feltétel négy (nemlineáris) skaláris algebrai egyenletet jelent.

Ismeretlenek: $\left. \begin{matrix} m_1, x_1, y_1, z_1 \\ m_2, x_2, y_2, z_2 \end{matrix} \right\} - \text{nyolc skaláris mennyiség.}$

Megoldás: négy skalár ismeretlen önkényesen felvehető.

Átalakítás:

A a) egyenletet z_2 -vel, majd z_1 -el beszorozva és kivonva belőle a b) egyenletet:

$$m_1 \vec{R}_1 = \frac{1}{z_2 - z_1} \underbrace{(J_{xz} \vec{e}_x + J_{yz} \vec{e}_y - m \vec{R}_S z_2)}_{J_{x'z'} \vec{e}_x + J_{y'z'} \vec{e}_y} = \vec{0} ,$$

$$m_2 \vec{R}_2 = \frac{1}{z_1 - z_2} \underbrace{(J_{xz} \vec{e}_x + J_{yz} \vec{e}_y - m \vec{R}_S z_1)}_{J_{x'z'} \vec{e}_x + J_{y'z'} \vec{e}_y} = \vec{0} .$$

Megoldási lehetőségek:

- a) önkényes felvétel: m_1, m_2, z_1, z_2 -t önkényesen felvesszük, majd a rendelkezésre álló egyenletekből kiszámítható $\vec{R}_1 = \dots, \vec{R}_2 = \dots$

- b) önkényes felvétel (pl. autókerék kiegyensúlyozása):

Új változók: x_1, y_1 helyett R_1, φ_1 , illetve x_2, y_2 helyett R_2, φ_2 .

$$\vec{R}_1 = x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y = R_1 (\cos \varphi_1 \vec{e}_x + \sin \varphi_1 \vec{e}_y), \quad \vec{R}_2 = x_2 \vec{e}_x + y_2 \vec{e}_y = R_2 (\cos \varphi_2 \vec{e}_x + \sin \varphi_2 \vec{e}_y).$$

Önkényes felvétel: Az egyenletekből:

$$R_1, R_2, z_1, z_2.$$

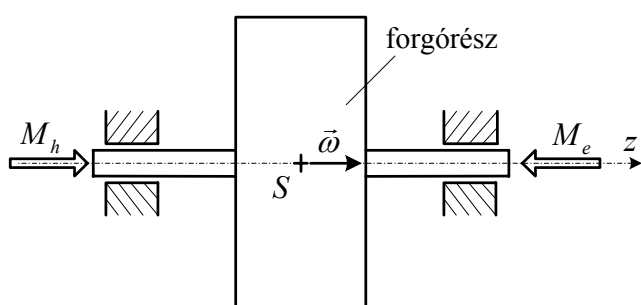
$$m_1 = \frac{1}{R_1 |z_2 - z_1|} + \left[(J_{xz} - m x_S z_2)^2 + (J_{yz} - m y_S z_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$m_2 = \frac{1}{R_2 |z_2 - z_1|} + \left[(J_{xz} - m x_S z_1)^2 + (J_{yz} - m y_S z_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{J_{yz} - m y_S z_2}{J_{xz} - m x_S z_2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{J_{yz} - m y_S z_1}{J_{xz} - m x_S z_1}.$$

10.6. Forgórészek meghajtása és üzemeltetése

a) A meghajtás jellege:



M_h - meghajtó nyomaték,

M_e - az ellenállás nyomatéka,

pl. terhelés, csapágysúrlódás, tömítések súrlódása, stb.

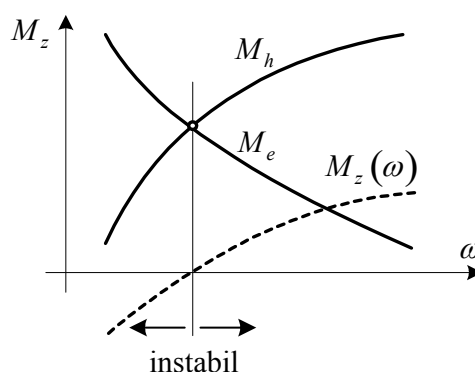
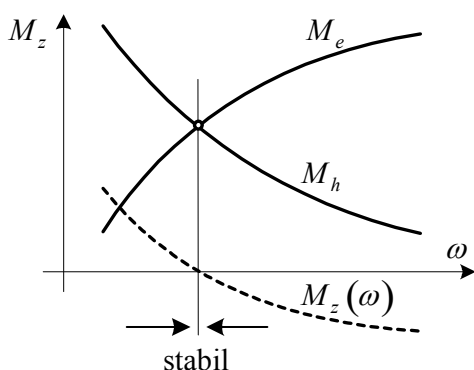
A forgórészre felírt perdület-tétel:

$$\dot{\vec{\pi}}_S = \vec{M}_S / \vec{e}_z \Rightarrow J_z \dot{\omega} = J_z \varepsilon = M_z(\omega) = M_h - M_e.$$

Ha $M_z > 0$, akkor a forgás gyorsul: $\varepsilon > 0$. Ha $M_z < 0$, akkor a forgás lassul: $\varepsilon < 0$.

Az $M_z = M_z(\omega)$ függvény a meghajtó motor (belsőégésű motor, villanymotor, stb.) jellemzője.

A meghajtás jellege:



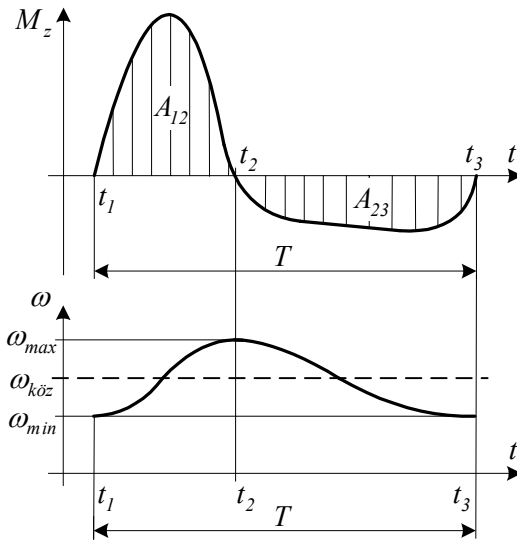
Stabil: a forgórész beáll a munkapontra.
Instabil: a rendszer „megszalad” vagy, leáll.

b) Forgórészek egyenlőtlen járása:

Egyenlőtlen járás (szögsebesség ingadozás): $\omega \neq 0$.

Ez akkor fordul elő, ha $M_z(\omega) = M_h - M_e \neq 0$.

- Az $M_z = M_z(t)$ ismert:



Periódusidő: $T = t_3 - t_1$.

Feltételezés:

$$\int_{(T)} M_z(t) dt = 0, \text{ (a tengely nem gyorsul).}$$

Közepes szögsebesség:

$$\omega_{köz} = \frac{\omega_{min} + \omega_{max}}{2},$$

Egyenlőtlenségi fok:

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{2}.$$

Perdület-tétel: $\pi_z(t_3) - \pi_z(t_1) = \int_{t_1}^{t_3} M_z(t) dt = A_{12} + A_{23} = 0,$

$$\pi_z(t_2) - \pi_z(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} M_z(t) dt = A_{12} \Rightarrow J_z \underbrace{(\omega_{max} - \omega_{min})}_{\delta \omega_{köz}} = A_{12}.$$

$\delta = \frac{A_{12}}{J_z \omega_{köz}}.$ A forgás (járás) egyenletessé tétele a δ csökkentésével érhető el.

Az egyenletes járás biztosításához (a δ csökkentéséhez) az adott A_{12} és előírt $\omega_{köz}$ esetén J_z -t kell növelni.

Megoldás: lendítőkereket kell alkalmazni.

- Az $M_z = M_z(\varphi)$ ismert:

Periódus: egy körbefordulás $\rightarrow \varphi = 2\pi$.

Feltételezés: a forgórész nem gyorsul.

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} M_z(\varphi) d\varphi = W_{12} + W_{23} = 0.$$

Munkatétel: $E_2 - E_1 = W_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z(\varphi) d\varphi$,

$$\frac{1}{2} J_z \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_z \omega_1^2 = W_{12}, \quad \Rightarrow \quad J_z \underbrace{\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}}_{\omega_{köz}} (\underbrace{\omega_2 - \omega_1}_{\delta \omega_{köz}}) = W_{12}.$$

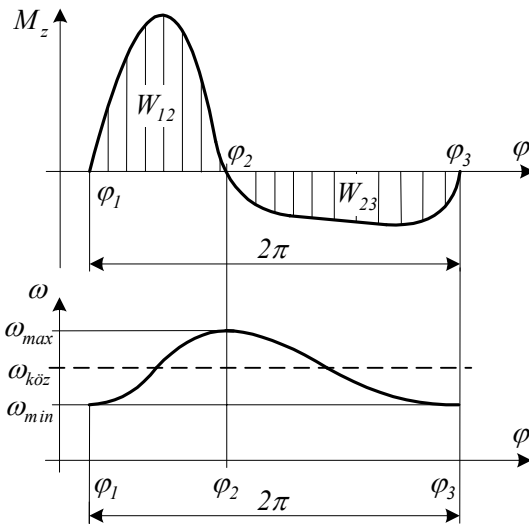
$$J_z \omega_{köz}^2 \delta = W_{12}$$

$$\delta = \frac{W_{12}}{J_z \omega_{köz}^2}.$$

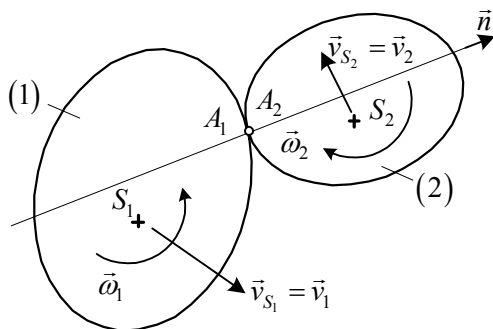
A forgás (járás) egyenletessége a δ csökkentésével érhető el.

Az egyenletes járás biztosításához (a δ csökkentéséhez) az adott W_{12} és előírt $\omega_{köz}$ esetén J_z -ét kell növelni.

Megoldás: lendítőkereket kell alkalmazni.



10.7. Testek ütközése



Két testből álló és síkmozgást végző rendszer ütközését vizsgáljuk.

A_1, A_2 - az érintkező pontok,

$\vec{n}$ - az ütközési normális.

Az ütközés létrejöttének feltétele:

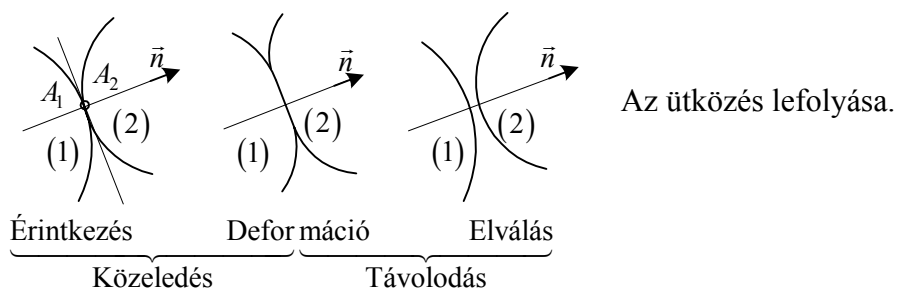
$$\vec{v}_{A_1} \cdot \vec{n} > \vec{v}_{A_2} \cdot \vec{n}.$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ - ütközés előtti sebességek és szögsebességek,

$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2$ - ütközés utáni jellemzők.

Feltételezések:

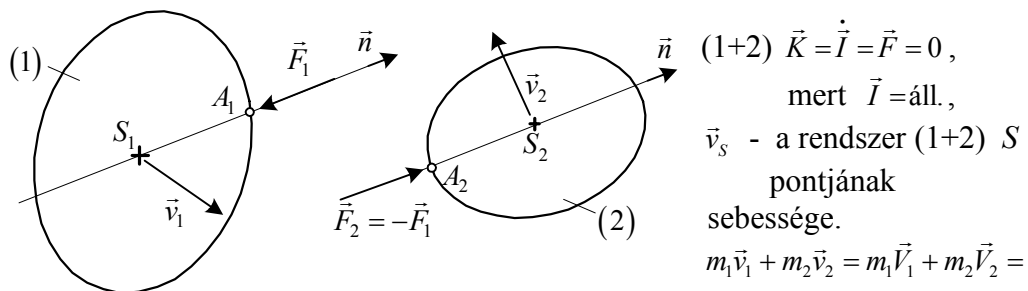
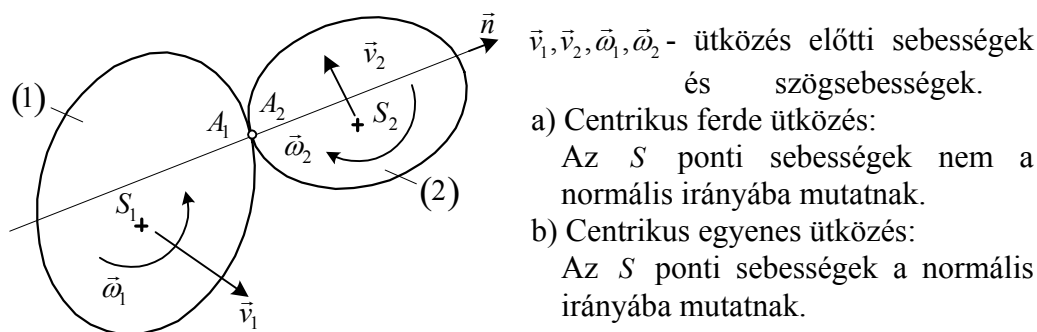
- Az ütköző testek valamilyen mértékben rugalmasak
- Az ütközés igen rövid idő alatt játszódik le
- A rövid ideig tartó érintkezés alatt a testek helyzetében nem következik be változás
- Az ütközés következtében fellépő erők mellett a többi erő elhanyagolható



Az ütközés osztályozása:

- 1) Az $\vec{n}$ ütközési normálisnak az ütköző testek S_i súlypontjaihoz viszonyított helyzete alapján $\rightarrow$
 - a) Centrikus ütközés: az $\vec{n}$ mindkét test S_i pontján átmegy
 - b) Excentrikus ütközés: az $\vec{n}$ nem megy át mindkét test S_i pontján
- 2) Az anyagváltozás jellege (az anyagi viselkedés) alapján
 Figyelembevétel: $0 \leq k \leq 1$ ahol k - ütközési tényező.
 - a) Tökéletesen rugalmas, $k = 1 \rightarrow$ A testek deformációjára fordított energiát teljes mértékben visszanyerjük.
 - b) Rugalmas-képlékeny, $0 < k < 1 \rightarrow$ A testek deformációjára fordított energiát részben visszanyerjük.
 - c) Tökéletesen rugalmatlan, $k = 0 \rightarrow$ A testek deformációjára fordított energia nem nyerhető vissza.

10.8.1. Centrikus ütközés



$$= (m_1 + m_2) \vec{v}_S = \text{áll.}$$

$$1) \text{ A } \vec{K}_1 = \dot{\vec{I}}_1 = \vec{F}_1 = -\lambda \vec{n} \int_{\Delta t} \dots dt ,$$

$\vec{F}_1$ ütközési normális irányába mutat, Δt az ütközés időtartama, λ skálár együttható.

$$\Delta \vec{I}_1 = \int_{(\Delta t)} \vec{F}_1 dt = - \underbrace{\int_{\Delta t} \lambda dt}_{C} \vec{n} , \quad C \text{ skálár szám.}$$

$$m_1 \Delta \vec{v}_1 = m_1 (\vec{V}_1 - \vec{v}_1) = -C \vec{n} ,$$

$\Delta \vec{v}_1$ - az (1) test sebességének megváltozása az ütközés során párhuzamos az $\vec{n}$ ütközési normálissal.

$$2) \text{ A } \vec{K}_2 = \dot{\vec{I}}_2 = \vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = \lambda \vec{n} \int_{\Delta t} \dots dt ,$$

$$m_2 \Delta \vec{v}_2 = m_2 (\vec{V}_2 - \vec{v}_2) = C \vec{n} ,$$

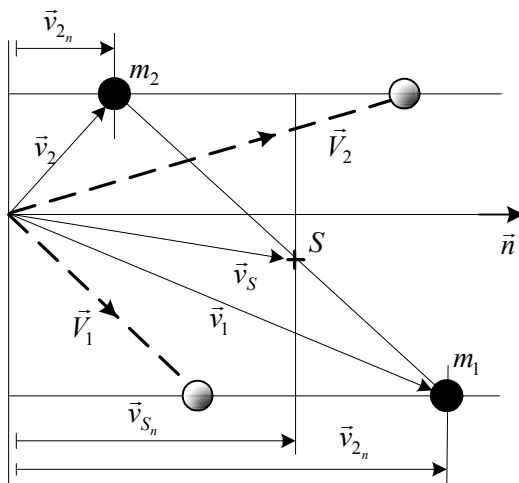
Az (1) és (2) jelű testre kapott eredményeket összegezve:

$$(a) \quad m_1 \Delta \vec{v}_1 = -m_2 \Delta \vec{v}_2 ,$$

$$(b) \quad \vec{D}_{S_1} = \vec{\pi}_{S_1} = \vec{M}_{S_1} = \vec{0} \rightarrow \vec{\pi}_{S_1} = \text{állandó}, \quad \vec{\omega}_1 = \vec{\Omega}_1 ,$$

$$(c) \quad \vec{\pi}_{S_2} = \vec{0} \rightarrow \vec{\pi}_{S_2} = \text{állandó}, \quad \vec{\omega}_2 = \vec{\Omega}_2 .$$

Maxwell-féle ütközési diadram



$$\vec{v}_S = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} ,$$

$$m_1 (\vec{V}_1 - \vec{v}_1) = -C \vec{n} ,$$

$$m_2 (\vec{V}_2 - \vec{v}_2) = C \vec{n} .$$

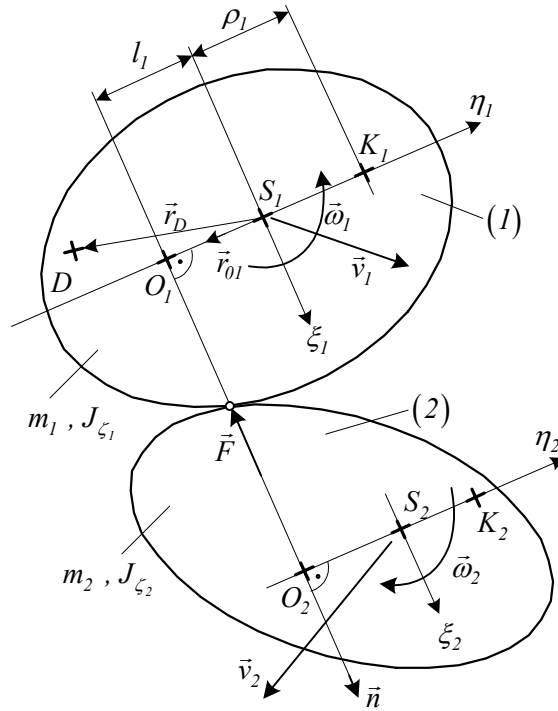
Ütközési tényező:

$$k = \frac{|V_{1n} - v_{Sn}|}{|v_{1n} - v_{Sn}|} = \frac{|V_{2n} - v_{Sn}|}{|v_{2n} - v_{Sn}|}$$

$$v_{1n} = \dots , \quad v_{2n} = \dots \text{ számítható.}$$

10.8.2. Excentrikus ütközés

Legalább az egyik test S pontja nem esik az $\vec{n}$ ütközési normálisra.



Feltételezés:

- a testek síkmozgást végeznek
- a ζ_1, ζ_2 a testek S ponti tehetetlenségi főtengelei

↓

Az $\vec{n}$ ütközési normális a testek

S ponti tehetetlenségi fősíkjába esnek.

A feladatot vissza akarjuk vezetni a centrális ütközés esetére.

Jelölések:

O_1, O_2 - ütközési talppontok

(az S pontokból merőlegest bocsátunk az ütközési normálisra).

K_1, K_2 - ütközési középpontok (lökési középpont).

Értelmezés: A testek azon pontjai, amelyeknek az ütközés során nem változik a sebessége $\vec{v}_{K_1} = \vec{V}_{K_1}$, $\vec{v}_{K_2} = \vec{V}_{K_2}$.

Impulzus tétel az (1) jelű testre:

$$m_1 (\vec{V}_1 - \vec{v}_1) = \int_{(\Delta t)} \vec{F} dt = \vec{\Phi},$$

Perdület tétel az (1) jelű testre:

$$J_{\zeta_1} (\vec{\Omega}_1 - \vec{\omega}_1) = \int_{(\Delta t)} \vec{r}_{01} \times \vec{F} dt = \vec{r}_{01} \times \vec{\Phi}.$$

Az (1) jelű test tetszőleges D pontjának sebessége:

$$\left. \begin{aligned} m_1 J_{\zeta_1} / \vec{V}_D &= \vec{V}_1 + \vec{\Omega}_1 \times \vec{r}_D \\ m_1 J_{\zeta_1} / \vec{v}_D &= \vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_D \end{aligned} \right\} \text{egymásból kivonni}$$

$$m_1 J_{\zeta_1} (\vec{V}_D - \vec{v}_D) = m_1 J_{\zeta_1} (\vec{V}_1 - \vec{v}_1) + m_1 J_{\zeta_1} (\vec{\Omega}_1 - \vec{\omega}_1) \times \vec{r}_D,$$

$$m_1 J_{\zeta_1} (\vec{V}_D - \vec{v}_D) = \underbrace{J_{\zeta_1} \vec{\Phi}}_{(\text{imp.tétel})} + \underbrace{m_1 (\vec{r}_{01} \times \vec{\Phi})}_{(\text{perd.tétel})} \times \vec{r}_D,$$

$$m_1 J_{\zeta_1} (\vec{V}_D - \vec{v}_D) = J_{\zeta_1} \vec{\Phi} + m_1 \underbrace{(\vec{r}_{01} \times \vec{\Phi}) \times \vec{r}_D}_{(\vec{r}_{01} \cdot \vec{r}_D) \vec{\Phi} - \vec{r}_{01} (\vec{\Phi} \cdot \vec{r}_D)},$$

$$m_1 J_{\zeta_1} (\vec{V}_D - \vec{v}_D) = [J_{\zeta_1} + m_1 (\vec{r}_{01} \cdot \vec{r}_D)] \vec{\Phi} - m_1 (\vec{\Phi} \cdot \vec{r}_D) \vec{r}_{01}.$$

Keressük az (1) jelű testnek azokat a D pontjait, amelyeknek a sebességváltozása párhuzamos az $\vec{n}$ ütközési normálissal.

Ennek a feltételnek az η_1 tengely pontjai tesznek eleget: $\vec{r}_D = \eta_1 \vec{e}_\eta$, $\vec{r}_{01} = -l_1 \vec{e}_\eta$.

Az előző összefüggésbe behelyettesítve

$$m_1 J_{\zeta_1} (\vec{V}_D - \vec{v}_D) = [J_{\zeta_1} + \underbrace{(\vec{r}_{01} \cdot \vec{r}_D)}_{-l_1 \eta_1}] \vec{\Phi} - m_1 \underbrace{(\vec{r}_D \cdot \vec{\Phi})}_{0} \vec{r}_{01}$$

Az η_1 tengelyen levő pontokra: $(0, \eta_1)$

$$m_1 J_{\zeta_1} (\vec{V}_D - \vec{v}_D) = [J_{\zeta_1} - m_1 l_1 \eta_1] \vec{\Phi}.$$

A K_1 ütközési középpont meghatározása:

$$\vec{V}_{K_1} - \vec{v}_{K_1} = \vec{0} \Rightarrow J_{\zeta_1} - m_1 l_1 \rho_1 = 0 \Rightarrow \rho_1 = \eta_{K_1} = \frac{J_{\zeta_1}}{m_1 l_1}.$$

Az O_1 ütközési talppont sebességváltozása (az η tengelyen levő pont sebesség változására kapott összefüggést felhasználva)

$$m_1 J_{\zeta_1} (\vec{V}_D - \vec{v}_D) = \underbrace{(J_{\zeta_1} + m_1 l_1^2)}_{J_{0_1}} \vec{\Phi}.$$

Jelölés: $\left. \begin{array}{l} \vec{v}_{0_1} = \vec{v}_I \\ \vec{V}_{0_1} = \vec{v}_I \end{array} \right\}$ az ütközési talppontok sebességei.

$$m_1 \underbrace{\frac{J_{\zeta_1}}{J_{0_1}}}_{\mu_I} (\vec{V}_I - \vec{v}_I) = \vec{\Phi} \rightarrow \mu_I = \frac{J_{\zeta_1}}{J_{0_1}} - \text{redukált tömeg. Ez az összefüggés formálisan}$$

olyan, mint a centrális ütközésnél kapott.

A redukált tömeg képletének átalakítása

$$\mu_I = m_1 \frac{J_{\zeta_1}}{J_{0_1}} = m_1 \frac{J_{\zeta_1}}{J_{\zeta_1} + m_1 l_1^2} = \frac{m_1 l_1 \rho_1}{m_1 l_1 \rho_1 + m_1 l_1^2} m_1,$$

$$\text{mivel } \rho_1 = \frac{J_{\zeta_1}}{m_1 l_1} \rightarrow J_{\zeta_1} = \rho_1 m_1 l_1, \text{ így}$$

$$\mu_I = m_1 \frac{m_1 l_1 \rho_1}{m_1 (\rho_1 + l_1)} = m_1 \frac{m_1 \rho_1 (\rho_1 + l_1)}{m_1 (\rho_1 + l_1)^2} = \frac{m_1 \rho_1^2 + m_1 \rho_1 l_1}{(\rho_1 + l_1)^2} = \frac{m_1 \rho_1^2 + J_{\zeta_1}}{(\rho_1 + l_1)^2} = \frac{J_{K_1}}{(\rho_1 + l_1)^2}.$$

Ugyanezzel a gondolatmenettel a (2) jelű testre is megkapjuk a

K_2 ütközési középpontot $\rightarrow \rho_2 = \dots\dots\dots$,

μ_{II} redukált tömeget és az

O_2 ütközési talppont sebességváltozását (- előjellel).

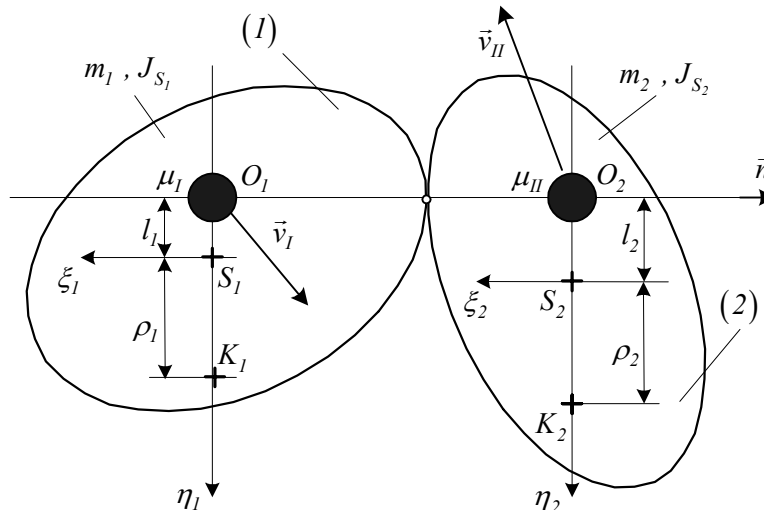
A két testre kapott eredményeket összevetve ugyanazt az összefüggést kapjuk, mint a centrikus ütközésnél:

$$\mu_I (\vec{V}_I - \vec{v}_I) = \vec{\Phi} = -\mu_{II} (\vec{V}_{II} - \vec{v}_{II}),$$

$\vec{V}_I, \vec{v}_I$ és $\vec{V}_{II}, \vec{v}_{II}$ - az ütközési talppontok sebességei,

μ_I, μ_{II} - redukált tömegek.

Az exentrikus ütközés megoldásának gondolatmenete:



Jelölés:

$$J_{s_1} = J_{\zeta_1},$$

$$J_{s_2} = J_{\zeta_2}$$

a mozgás
síkjára
merőleges S
ponti
tehetetlenségi
főtengelyekre
számított
tehetetlenségi
nyomatékok.

a) A redukált tömegek meghatározása:

$$\mu_I = m_1 \frac{J_{s_1}}{J_{O_1}}, \quad \mu_{II} = m_2 \frac{J_{s_2}}{J_{O_2}}.$$

b) Az ütközési talppontok ütközés előtti sebességeinek meghatározása:

$$\vec{v}_I = \vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \times (-l_1 \vec{e}_\eta),$$

$$\vec{v}_{II} = \vec{v}_2 + \vec{\omega}_2 \times (-l_2 \vec{e}_\eta).$$

c) A Maxwell-féle ütközési diagramból az ütközési talppontok ütközés utáni sebességei nek meghatározása:

$$\vec{V}_I = \dots\dots\dots,$$

$$\vec{V}_{II} = \dots\dots\dots.$$

d) Az ütközési középpontok meghatározása:

$$\rho_1 = \frac{J_{s_1}}{m_1 l_1}, \quad \rho_2 = \frac{J_{s_2}}{m_2 l_2}.$$

e) Az ütközési utáni szögsebességek meghatározása:

$$\text{ütközés előtt: } \vec{v}_{K_1} = \vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_1$$

$$\vec{v}_{K_2} = \vec{v}_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_2.$$

$$\text{ütközés után: } \vec{v}_{K_1} = \vec{V}_{K_1} = \vec{V}_I + \vec{\Omega}_1 \times (l_1 + \rho_1) \vec{e}_\eta \Rightarrow \vec{\Omega}_1 = \dots\dots\dots,$$

$$\vec{v}_{K_2} = \vec{V}_{K_2} = \vec{V}_I + \vec{\Omega}_2 \times (l_2 + \rho_2) \vec{e}_\eta \Rightarrow \vec{\Omega}_2 = \dots\dots\dots.$$

f) Az S pontok ütközési utáni sebességeinek meghatározása:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_I + \vec{\Omega}_1 \times l_1 \vec{e}_\eta,$$

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_I + \vec{\Omega}_2 \times l_2 \vec{e}_\eta.$$

Kiindulás: $\vec{\omega}_1, \vec{v}_1, \vec{\omega}_2, \vec{v}_2, m_1, J_{0_1}, m_2, J_{s_1}, l_1, l_2.$

Megoldás: $\vec{V}_1, \vec{\Omega}_1, \vec{V}_2, \vec{\Omega}_2.$

10.9. Példák forgórészek dinamikájára és testek ütközésére

11. SZAKIRODALOM

- [1] M. Csizmadia B. – Nándori E.: Mechanika mérnököknek – Statika, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1996.
- [2] Égert J.: Statika, Miskolci Egyetemi Kiadó, 2001.
- [3] NME Mechanikai Tanszék Munkaközössége: Mechanikai példatár I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
- [4] Roberts, A.: Statics and Dynamics with Background Mathematics, Cambridge University Press, 2003.
- [5] M. Csizmadia B. – Nándori E.: Mechanika mérnököknek Szilárdságtan, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
- [6] Budinas, R.G.: Advanced Strength and Applied Stress Analysis, McGraw-Hill International Edition, 1999.
- [7] Jenkins, C.H.M – Khanna, S.K.: Mechanics of Materials, Elsevier Academic Press, 2005.
- [8] M. Csizmadia B. – Nándori E.: Mechanika mérnököknek Mozgástan, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.
- [9] Roberts, A. P.: Statics and Dynamics with Background Mathematics, Cambridge University Press, 2003.
- [10] NME Mechanikai Tanszék Munkaközössége: Mechanika Példatár III., Tankönyvkiadó Budapest, 1985.
- [11] Király B.: Dinamika, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1992.

- [12] Cleghorn, W. L.: Mechanics of machines , Oxford University Press, 2005.
- [13] Hibbeler, R. C.: Engineering Mechanics – Statics (Twelfth Edition in SI Units), Prentice Hall, 2010.
- [14] Hibbeler, R. C.: Mechanics of Materials (Seventh SI Editions), Prentice Hall, 2008.
- [15] Hibbeler, R. C.: Engineering Mechanics – Dynamics (Twelfth Edition in SI Units), Prentice Hall, 2010.