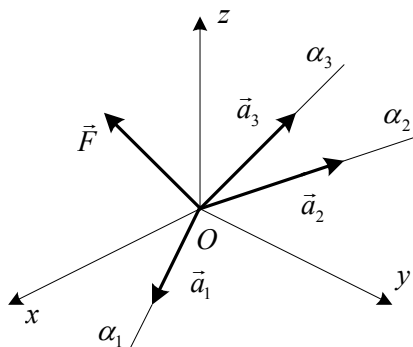


3. TÉRBELI STATIKAI FELADATOK

3.1. Közös ponton támadó erőrendszerek

Feladat: Helyettesítsünk vagy egyensúlyozzunk egy adott $\vec{F}$ erőt három, adott $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ hatásvonalú, közös ponton támadó erővel.



Adott: $\vec{F}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, |\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| \neq 1$

Keresett:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_1 &= \lambda_1 \vec{a}_1 \\ \vec{F}_2 &= \lambda_2 \vec{a}_2 \\ \vec{F}_3 &= \lambda_3 \vec{a}_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dots \\ \lambda_2 = \dots \\ \lambda_3 = \dots \end{cases}$$

A három erővektor meghatározását három skalár ismeretlen meghatározására vezetjük vissza:

A feladat megoldása:

Az egyenértékűség/egyensúly feltétele:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \pm \vec{F} \quad (+ \text{ egyenértékűség, } - \text{ egyensúly})$$

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \pm \vec{F} \quad / \cdot \vec{e}_x \quad / \cdot \vec{e}_y \quad / \cdot \vec{e}_z$$

Skalár egyenletek:

$$\left. \begin{aligned} a_{1x} \lambda_1 + a_{2x} \lambda_2 + a_{3x} \lambda_3 &= \pm F_x \\ a_{1y} \lambda_1 + a_{2y} \lambda_2 + a_{3y} \lambda_3 &= \pm F_y \\ a_{1z} \lambda_1 + a_{2z} \lambda_2 + a_{3z} \lambda_3 &= \pm F_z \end{aligned} \right\}$$

Inhomogén, lineáris, algebrai egyenletrendszer a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ismeretlenekre.

Az egyenletrendszer mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm F_x \\ \pm F_y \\ \pm F_z \end{bmatrix}.$$

A lineáris algebrai egyenletrendszer egyértelmű megoldásának feltétele:

$$\underbrace{(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3)}_{\text{vegyes szorzat}} = \det \underline{\underline{A}} \neq 0.$$

Ez a feltétel minden esetben teljesül, ha az $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorok nem esnek egy síkba.

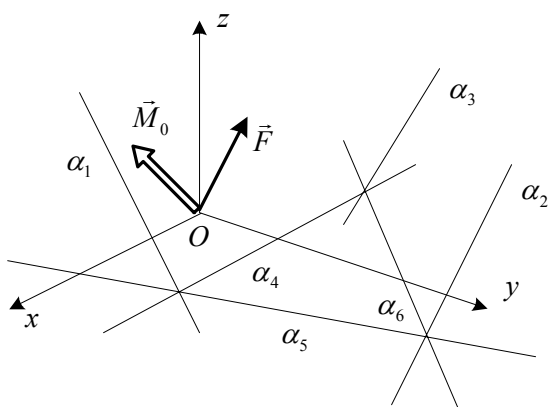
3.2. Szétszórt erőrendszerek

Feladat: Helyettesítsünk, vagy egyensúlyozzunk egy $\vec{F}, \vec{M}_O$ redukált vektorkettőssével adott erőrendszert hat, adott $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_6$ hatásvonalú erővel.

Adott: Az erőrendszer $\vec{F}, \vec{M}_O$ redukált vektorkettőse és a hat hatásvonal (egyenes) egyenlete:

$$\vec{a}_i \times \vec{r} + \vec{b}_i = \vec{0}, \quad (i=1, 2, \dots, 6).$$

Keresett: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6$.



A hat erővektor meghatározását hat skalár ismeretlen meghatározására vezetjük vissza:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_1 &= \lambda_1 \vec{a}_1 \\ \vec{F}_2 &= \lambda_2 \vec{a}_2 \\ &\vdots \\ \vec{F}_6 &= \lambda_6 \vec{a}_6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= \dots \\ \lambda_2 &= \dots \\ &\vdots \\ \lambda_6 &= \dots \end{aligned} \right.$$

$$\vec{F}_i = \lambda_i \vec{a}_i = \lambda_i a_{ix} \vec{e}_x + \lambda_i a_{iy} \vec{e}_y + \lambda_i a_{iz} \vec{e}_z,$$

$$\vec{M}_{Oi} = \vec{r}_{Oi} \times \vec{F}_i = \lambda_i \vec{r}_{Oi} \times \vec{a}_i = \lambda_i \vec{b}_i = \lambda_i b_{ix} \vec{e}_x + \lambda_i b_{iy} \vec{e}_y + \lambda_i b_{iz} \vec{e}_z.$$

Egyenértékűség, egyensúlyozás:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \vec{F}_i &= \sum_{i=1}^6 \lambda_i \vec{a}_i = \pm \vec{F} \\ \sum_{i=1}^6 \vec{r}_{Oi} \times \vec{F}_i &= \sum_{i=1}^6 \lambda_i \vec{b}_i = \pm \vec{M}_O \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} + \text{ egyenértékűség,} \\ - \text{ egyensúlyozás.} \end{array}$$

Skaláris egyenletek:

$$\left. \begin{aligned} a_{1x}\lambda_1 + a_{2x}\lambda_2 + a_{3x}\lambda_3 + a_{4x}\lambda_4 + a_{5x}\lambda_5 + a_{6x}\lambda_6 &= \pm F_x \\ a_{1y}\lambda_1 + a_{2y}\lambda_2 + a_{3y}\lambda_3 + a_{4y}\lambda_4 + a_{5y}\lambda_5 + a_{6y}\lambda_6 &= \pm F_y \\ a_{1z}\lambda_1 + a_{2z}\lambda_2 + a_{3z}\lambda_3 + a_{4z}\lambda_4 + a_{5z}\lambda_5 + a_{6z}\lambda_6 &= \pm F_z \\ b_{1x}\lambda_1 + b_{2x}\lambda_2 + b_{3x}\lambda_3 + b_{4x}\lambda_4 + b_{5x}\lambda_5 + b_{6x}\lambda_6 &= \pm M_{Ox} \\ b_{1y}\lambda_1 + b_{2y}\lambda_2 + b_{3y}\lambda_3 + b_{4y}\lambda_4 + b_{5y}\lambda_5 + b_{6y}\lambda_6 &= \pm M_{Oy} \\ b_{1z}\lambda_1 + b_{2z}\lambda_2 + b_{3z}\lambda_3 + b_{4z}\lambda_4 + b_{5z}\lambda_5 + b_{6z}\lambda_6 &= \pm M_{Oz} \end{aligned} \right\}$$

Inhomogén, lineáris algebrai egyenletrendszer a λ_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) ismeretlenekre.

Mátrix alakban:

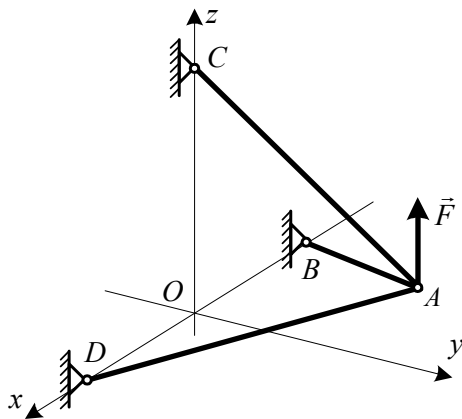
$$\begin{bmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & a_{4x} & a_{5x} & a_{6x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} & a_{4y} & a_{5y} & a_{6y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} & a_{4z} & a_{5z} & a_{6z} \\ b_{1x} & b_{2x} & b_{3x} & b_{4x} & b_{5x} & b_{6x} \\ b_{1y} & b_{2y} & b_{3y} & b_{4y} & b_{5y} & b_{6y} \\ b_{1z} & b_{2z} & b_{3z} & b_{4z} & b_{5z} & b_{6z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm F_x \\ \pm F_y \\ \pm F_z \\ \pm M_{Ox} \\ \pm M_{Oy} \\ \pm M_{Oz} \end{bmatrix} \quad \text{Tömör jelöléssel: } \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\lambda}} = \underline{\underline{F}}.$$

Az egyenletrendszernek akkor van egyértelmű megoldása, ha $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$.

A hat hatásvonal nem vehető fel tetszőlegesen, lineárisan függetlennek kell lenniük.

3.3. Gyakorló feladatok térbeli és síkbeli statikai feladatokra

3.3.1. feladat: Térbeli tartó támasztóerői



Adott:

$$\vec{r}_A = (4\vec{e}_y + \vec{e}_z) \text{ m}, \quad \vec{r}_B = (-4\vec{e}_x) \text{ m},$$

$$\vec{r}_C = (4\vec{e}_z) \text{ m}, \quad \vec{r}_D = (2\vec{e}_x) \text{ m},$$

$$\vec{F} = (12\vec{e}_z) \text{ kN}.$$

Feladat:

A B, C és D pontokban fellépő támasztóerők meghatározása.

Kidolgozás:

Az egyensúlyi egyenlet: $\vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{F} = \vec{0}, \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D = -\vec{F}.$

A támasztóerők rúd irányúak:

$$\vec{F}_B = \lambda_B \vec{a}_B = \lambda_B \vec{r}_{BA}, \quad \vec{F}_C = \lambda_C \vec{a}_C = \lambda_C \vec{r}_{CA}, \quad \vec{F}_D = \lambda_D \vec{a}_D = \lambda_D \vec{r}_{DA}.$$

A támasztóerők irányvektorai:

$$\vec{a}_B = \vec{r}_{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = (4\vec{e}_y + \vec{e}_z) - (-4\vec{e}_x) = (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + \vec{e}_z) \text{ m},$$

$$\vec{a}_C = \vec{r}_{CA} = \vec{r}_A - \vec{r}_C = (4\vec{e}_y + \vec{e}_z) - (4\vec{e}_z) = (4\vec{e}_y - 3\vec{e}_z) \text{ m},$$

$$\vec{a}_D = \vec{r}_{DA} = \vec{r}_A - \vec{r}_D = (4\vec{e}_y + \vec{e}_z) - (2\vec{e}_x) = (-2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + \vec{e}_z) \text{ m}.$$

Az egyensúlyi egyenlet az új jelölésekkel:

$$\lambda_B \vec{a}_B + \lambda_C \vec{a}_C + \lambda_D \vec{a}_D = -\vec{F}.$$

Az egyensúlyi egyenlet mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} & a_{Cx} & a_{Dx} \\ a_{By} & a_{Cy} & a_{Dy} \\ a_{Bz} & a_{Cz} & a_{Dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_B \\ \lambda_C \\ \lambda_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_x \\ -F_y \\ -F_z \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_B \\ \lambda_C \\ \lambda_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

A lineáris algebrai egyenletrendszer megoldása:

$$\lambda_B = -1, \quad \lambda_C = 3, \quad \lambda_D = -2.$$

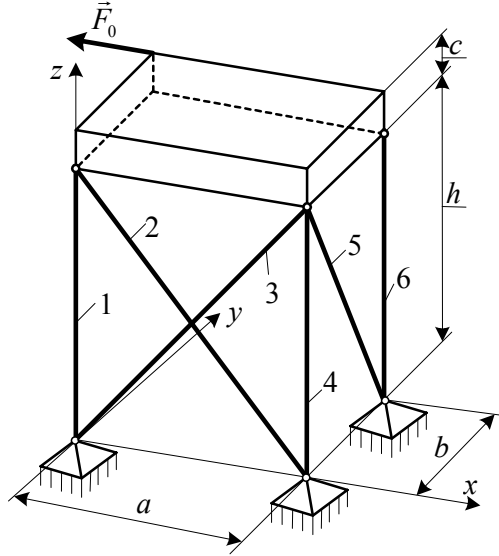
A támasztóerő vektorok:

$$\vec{F}_B = \lambda_B \vec{a}_B = (-4\vec{e}_x - 4\vec{e}_y - \vec{e}_z) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_C = \lambda_C \vec{a}_C = (12\vec{e}_y - 9\vec{e}_z) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_D = \lambda_D \vec{a}_D = (4\vec{e}_x - 8\vec{e}_y - 2\vec{e}_z) \text{ kN}.$$

3.3.2. feladat: Térbeli rúdszerkezet támasztóerői



Adott:

$$\vec{F}_0 = 1 \text{ kNm}, \quad a = 4 \text{ m}, \quad b = 2 \text{ m}, \\ c = 1 \text{ m}, \quad h = 5 \text{ m}.$$

Feladat:

A szerkezet támasztóerőinek meghatározása számítással.

Kidolgozás:

A szerkezet terhelésének redukciója a koordináta-rendszer kezdőpontjába:

$$\vec{F}_0 = (-\vec{e}_x) \text{ kN}, \\ \vec{M}_O = (2\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \times (-\vec{e}_x) = \\ = (2\vec{e}_z - 6\vec{e}_y) \text{ kNm}.$$

A szerkezet támasztóerői: $\vec{F}_i = \lambda_i \vec{a}_i$, $(i=1, 2, \dots, 6)$.

A támasztóerők irányvektorai:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_z, \\ \vec{a}_2 = (-4\vec{e}_x + 5\vec{e}_z), \\ \vec{a}_3 = (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z), \\ \vec{a}_4 = (\vec{e}_z), \\ \vec{a}_5 = (-2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z), \\ \vec{a}_6 = (\vec{e}_z).$$

Az irányvektorok nyomatéka a KR kezdőpontjára:

$$\vec{b}_1 = \vec{0}, \\ \vec{b}_2 = (4\vec{e}_x) \times (-4\vec{e}_x + 5\vec{e}_z) = (-20\vec{e}_y), \\ \vec{b}_3 = \vec{0}, \\ \vec{b}_4 = (4\vec{e}_x) \times (\vec{e}_z) = (-4\vec{e}_y), \\ \vec{b}_5 = (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \times (-2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z) = (10\vec{e}_x - 20\vec{e}_y - 8\vec{e}_z), \\ \vec{b}_6 = (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \times (\vec{e}_z) = (-4\vec{e}_y + 2\vec{e}_x).$$

Az egyensúlyi egyenletek mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & a_{4x} & a_{5x} & a_{6x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} & a_{4y} & a_{5y} & a_{6y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} & a_{4z} & a_{5z} & a_{6z} \\ b_{1x} & b_{2x} & b_{3x} & b_{4x} & b_{5x} & b_{6x} \\ b_{1y} & b_{2y} & b_{3y} & b_{4y} & b_{5y} & b_{6y} \\ b_{1z} & b_{2z} & b_{3z} & b_{4z} & b_{5z} & b_{6z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ez a λ_i ismeretlenekre inhomogén, lineáris algebrai egyenletrendszer.

Az egyenletrendszer a feladat adataival:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & -20 & 0 & -4 & -20 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

A 6. egyenletből: $-8\lambda_5 = -2, \Rightarrow \lambda_5 = \frac{1}{4}.$

A 4. egyenletből: $10 \cdot \frac{1}{4} + 2\lambda_6 = 0, \Rightarrow \lambda_6 = -\frac{5}{4}.$

A 2. egyenletből: $-2 \cdot \frac{1}{4} + 2\lambda_3 = 0, \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{4}.$

Az 1. egyenletből: $4 \cdot \frac{1}{4} - 4\lambda_2 = 1, \Rightarrow \lambda_2 = 0.$

Az 5. egyenletből: $-4 \cdot (-\frac{5}{4}) - 20 \cdot \frac{1}{4} - 4\lambda_4 = 6, \Rightarrow \lambda_4 = -1,5,$

A 3. egyenletből: $(-\frac{5}{4}) + 5 \cdot \frac{1}{4} + (-\frac{3}{2}) + 5 \cdot \frac{1}{4} + \lambda_1 = 1, \Rightarrow \lambda_1 = \frac{5}{4}.$

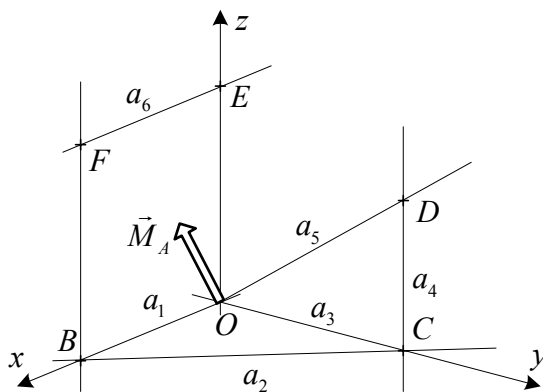
A szerkezet támasztóerői: $\vec{F}_i = \lambda_i \vec{a}_i, (i=1, 2, \dots, 6).$

$\vec{F}_1 = (1,25\vec{e}_z) \text{ kN}, \quad \vec{F}_4 = (-1,5\vec{e}_z) \text{ kN},$

$\vec{F}_2 = \vec{0}, \quad \vec{F}_5 = (-0,5\vec{e}_y + 1,25\vec{e}_z) \text{ kN},$

$\vec{F}_3 = (\vec{e}_x + 0,5\vec{e}_y + 1,25\vec{e}_z) \text{ kN}, \quad \vec{F}_6 = (-1,25\vec{e}_z).$

3.3.3. feladat: Nyomaték helyettesítése adott hatásvonalú erőkkel



Adott:

Az $\vec{M}_A$ koncentrált nyomatékból álló erőrendszer és az $a_i (i=1,2,\dots,6)$ lineárisan független egyenes, a helyettesítő erőrendszert alkotó erők hatásvonalai:

$\vec{M}_A = (\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z) \text{ kNm}.$

$A(0,0,0) \text{ m}, \quad D(0,3,4) \text{ m},$

$B(4,0,0) \text{ m}, \quad E(0,0,5) \text{ m},$

$C(0,3,0) \text{ m}, \quad F(4,0,5) \text{ m}.$

Feladat: Az $\vec{M}_A$ nyomaték helyettesítése az adott hatásvonalon.

Kidolgozás:

Helyettesítés $\equiv$ egyenértékűség:

$(E') = (E''), \quad (E'): \vec{M}_A, \quad (E''): \vec{F}_i \quad (i=1,2, \dots, 6).$

Az egyenértékűség feltétele (1. kritérium): $\sum_{i=1}^6 \vec{F}_i = \vec{F} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^6 \vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i = \vec{M}_O = \vec{M}_A.$

A helyettesítő erők: $\vec{F}_i = \lambda_i \vec{a}_i \quad (i=1,2,\dots,6)$.

A hatásvonalak *Plücker* vektorai:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \vec{e}_x, & \vec{a}_2 &= (-4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y), & \vec{a}_3 &= \vec{e}_y, & \vec{a}_4 &= \vec{e}_z, & \vec{a}_5 &= (3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z), & \vec{a}_6 &= \vec{e}_x. \\ \vec{b}_1 &= \vec{0}, & \vec{b}_2 &= (12\vec{e}_z), & \vec{b}_3 &= \vec{0}, & \vec{b}_4 &= (4\vec{e}_x), & \vec{b}_5 &= \vec{0}, & \vec{b}_6 &= (5\vec{e}_y). \end{aligned}$$

A lineáris algebrai egyenletrendszer általánosan: A példa adataival:

$$\begin{bmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & a_{4x} & a_{5x} & a_{6x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} & a_{4y} & a_{5y} & a_{6y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} & a_{4z} & a_{5z} & a_{6z} \\ b_{1x} & b_{2x} & b_{3x} & b_{4x} & b_{5x} & b_{6x} \\ b_{1y} & b_{2y} & b_{3y} & b_{4y} & b_{5y} & b_{6y} \\ b_{1z} & b_{2z} & b_{3z} & b_{4z} & b_{5z} & b_{6z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_{A_x} \\ M_{A_y} \\ M_{A_z} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Elvégezve a kijelölt mátrixszorzást:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 - 4\lambda_2 + \lambda_6 &= 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_5 &= 0 \\ \lambda_4 + 4\lambda_5 &= 0 \\ 3\lambda_4 &= 1 \Rightarrow \lambda_4 = 1/3 \\ 5\lambda_6 &= -2 \Rightarrow \lambda_6 = -2/5 \\ 12\lambda_2 &= 4 \Rightarrow \lambda_2 = 1/3. \end{aligned} \right\}$$

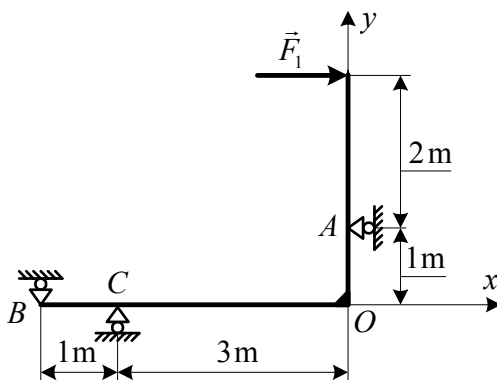
Az első három egyenletből:

$$\begin{aligned} \lambda_5 &= -\frac{\lambda_4}{4} = -\frac{1}{12}, \\ \lambda_3 &= -3(\lambda_2 + \lambda_5) = -3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right) = -\frac{3}{4}, \\ \lambda_1 &= 4\lambda_2 - \lambda_6 = \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{20+6}{15} = \frac{26}{15} \approx 1,73. \end{aligned}$$

A helyettesítő erőrendszer:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \lambda_1 \vec{a}_1 = (1,73\vec{e}_x) \text{ kN}, & \vec{F}_2 &= \lambda_2 \vec{a}_2 = \frac{1}{3}(-4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) = (-1,33\vec{e}_x + \vec{e}_y) \text{ kN}, \\ \vec{F}_3 &= \lambda_3 \vec{a}_3 = (-0,75\vec{e}_y) \text{ kN}, & \vec{F}_4 &= \lambda_4 \vec{a}_4 = \frac{1}{3}\vec{e}_z = (0,33\vec{e}_z) \text{ kN}, \\ \vec{F}_5 &= \lambda_5 \vec{a}_5 = -\frac{1}{12}(3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z) = (-0,25\vec{e}_y - 0,33\vec{e}_z) \text{ kN}, & \vec{F}_6 &= \lambda_6 \vec{a}_6 = -\frac{2}{5}\vec{e}_x = (-0,4\vec{e}_x) \text{ kN}. \end{aligned}$$

3.3.4. feladat: Síkbeli rúdszerkezet támasztóerői



Adott: $\vec{F}_1 = (30\vec{e}_x)$ kN, valamint a szerkezet méretei és megtámasztása.

Feladat:

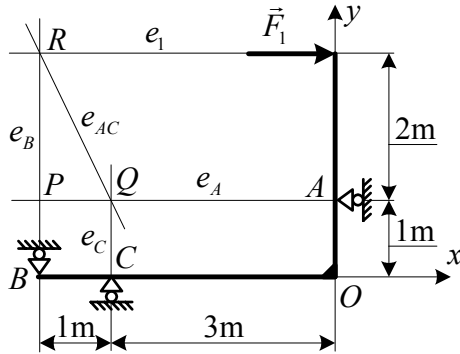
- A szerkezet támasztóerőinek meghatározása szerkesztéssel.
- A szerkezet támasztóerőinek meghatározása számítással.

Kidolgozás:

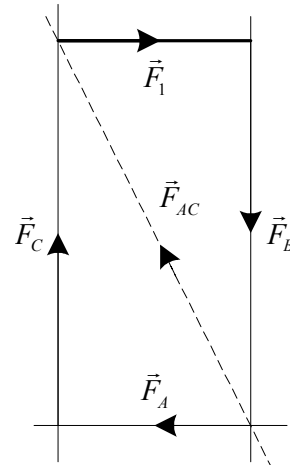
a) A szerkezet támasztó erőinek meghatározása szerkesztéssel:

A szerkezet egyensúlyát leíró vektoregyenlet: $\vec{F}_1 + \vec{F}_B + \underbrace{(\vec{F}_A + \vec{F}_C)}_{\vec{F}_{AC}} = \vec{0}$.

Helyzetábra:



Erőábra



e_{AC} a Culmann egyenes.

b) A szerkezet támasztó erőinek meghatározása számítással:

Az egyensúly feltétele (1. kritérium): $\sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = -\vec{F}$, $\sum_{i=1}^3 \vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i = -\vec{M}_O$.

A terhelés O pontba redukált vektorkettőse: $\vec{F} = \vec{F}_1 = (30\vec{e}_x)$ kN, $\vec{M}_O = (-90\vec{e}_z)$ kNm.

A támasztóerők iránya és hatásvonala ismert: $\vec{F}_A = \lambda_A \vec{a}_A$, $\vec{F}_B = \lambda_B \vec{a}_B$, $\vec{F}_C = \lambda_C \vec{e}_C$.

A hatásvonalak Plücker vektorai:

$$\vec{a}_A = \vec{e}_x, \quad \vec{a}_B = \vec{e}_y, \quad \vec{a}_C = \vec{e}_y, \\ \vec{b}_A = (-\vec{e}_z), \quad \vec{b}_B = (-4\vec{e}_z), \quad \vec{b}_C = (-3\vec{e}_z).$$

A lineáris algebrai egyenletrendszer általánosan:

A példa adataival:

$$\begin{bmatrix} a_{Ax} & a_{Bx} & a_{Cx} \\ a_{Ay} & a_{By} & a_{Cy} \\ b_{Az} & b_{Bz} & b_{Cz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_{Oz} \end{bmatrix}.$$

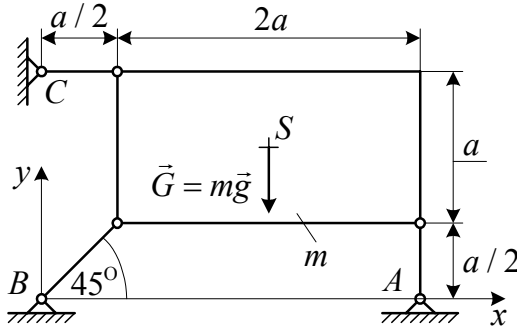
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ -90 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $\lambda_A = 30$ kN, $\lambda_B = -60$ kN, $\lambda_C = 60$ kN.

A támasztóerő vektorok:

$$\vec{F}_A = (-30\vec{e}_x) \text{ kN}, \quad \vec{F}_B = (-60\vec{e}_y) \text{ kN}, \quad \vec{F}_C = (60\vec{e}_y) \text{ kN}.$$

3.3.5. feladat: Síkbeli szerkezet támasztóerői



Adott: $m = 100 \text{ kg}$, $g \approx 10 \text{ m/s}^2$, $a = 1 \text{ m}$.

Feladat:

A szerkezet támasztóerőinek meghatározása számítással.

Kidolgozás:

A szerkezet támasztó erőinek meghatározása számítással:

A támasztóerők iránya és hatásvonala ismert: $\vec{F}_A = \lambda_A \vec{a}_A$, $\vec{F}_B = \lambda_B \vec{a}_B$, $\vec{F}_C = \lambda_C \vec{e}_C$.

A hatásvonalak Plücker vektorai:

$$\vec{a}_A = \vec{e}_y, \quad \vec{a}_B = (\vec{e}_x + \vec{e}_y), \quad \vec{a}_C = \vec{e}_x, \quad \vec{b}_A = (2, 5\vec{e}_z), \quad \vec{b}_B = \vec{0}, \quad \vec{b}_C = (-1, 5\vec{e}_z).$$

$$\text{Az egyensúly feltétele (1. kritérium): } \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = -\vec{F}, \quad \sum_{i=1}^3 \vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i = -\vec{M}_B.$$

A terhelés B pontba redukált vektorkettőse: $\vec{F} = \vec{G} = (-1000\vec{e}_y) \text{ N} = (-\vec{e}_y) \text{ kN}$,

$$\vec{M}_B = (-1, 5\vec{e}_z) \text{ kNm}.$$

A lineáris algebrai egyenletrendszer általánosan:

A példa adataival:

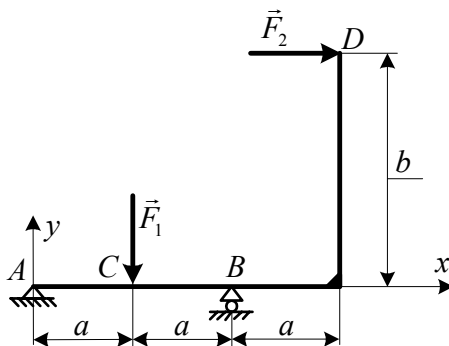
$$\begin{bmatrix} a_{Ax} & a_{Bx} & a_{Cx} \\ a_{Ay} & a_{By} & a_{Cy} \\ b_{Az} & b_{Bz} & b_{Cz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_{Bz} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2,5 & 0 & -1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1,5 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $\lambda_A = 0 \text{ kN}$, $\lambda_B = 1 \text{ kN}$, $\lambda_C = -1 \text{ kN}$.

A támasztóerő vektorok: $\vec{F}_A = \vec{0}$, $\vec{F}_B = (\vec{e}_x + \vec{e}_y) \text{ kN}$, $\vec{F}_C = (-\vec{e}_y) \text{ kN}$.

3.3.6. feladat: Kéttámaszú tartó támasztóerői



Adott:

$F_1 = 2 \text{ kN}$, $F_2 = 1 \text{ kN}$, $a = 1 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$.

Feladat:

Az $\vec{F}_A$ és $\vec{F}_B$ támasztóerők meghatározása.

Kidolgozás:

A szerkezet támasztó erőinek meghatározása számítással:

Az $\vec{F}_A$ erőnek az irányát nem ismerjük, azonban ha két ismert irányú összetevő összegeként írjuk fel, akkor két ismeretlen nagyságú, de ismert irányú erőként tudjuk kezelni:
 $\vec{F}_A = \vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2} = \lambda_1 \vec{e}_x + \lambda_2 \vec{e}_y$.

Az ismeretlen támasztóerők: $\vec{F}_{A1} = \lambda_1 \vec{a}_1$, $\vec{F}_{A2} = \lambda_2 \vec{a}_2$, $\vec{F}_B = \lambda_3 \vec{a}_3$.

A hatásvonalak Plücker vektorai:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_x, \quad \vec{a}_2 = \vec{e}_y, \quad \vec{a}_3 = \vec{e}_y, \quad \vec{b}_1 = \vec{0}, \quad \vec{b}_2 = \vec{0}, \quad \vec{b}_3 = (2\vec{e}_z).$$

A terhelés A pontba redukált vektorkettőse: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (\vec{e}_x - 2\vec{e}_y) \text{ kN}$,

$$\vec{M}_A = (-4\vec{e}_z) \text{ kNm}.$$

A lineáris algebrai egyenletrendszer általánosan:

A példa adataival:

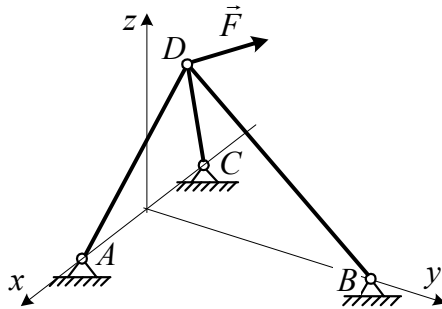
$$\begin{bmatrix} a_{Ax} & a_{Bx} & a_{Cx} \\ a_{Ay} & a_{By} & a_{Cy} \\ b_{Az} & b_{Bz} & b_{Cz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_{Az} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $\lambda_1 = -1 \text{ kN}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2 \text{ kN}$.

A támasztóerő vektorok: $\vec{F}_A = (-\vec{e}_x) \text{ kN}$, $\vec{F}_B = (2\vec{e}_y) \text{ kN}$.

3.3.7. feladat: Térbeli tartó támasztóerői



Adott:

$\vec{F} = (4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \text{ kN}$, $A(3, 0, 0) \text{ m}$, $B(0, 9, 0) \text{ m}$,

$C(-3, 0, 0) \text{ m}$, $D(-3, 3, 5) \text{ m}$.

Feladat: A térbeli rúdszerkezet támasztóerőinek meghatározása.

Megoldás:

A térbeli rúdszerkezet támasztóerői:

$$\vec{F}_A = (0,93\vec{e}_x - 0,46\vec{e}_y - 0,77\vec{e}_z) \text{ kN}, \quad \vec{F}_B = (-0,93\vec{e}_x - 1,86\vec{e}_y + 1,55\vec{e}_z) \text{ kN},$$

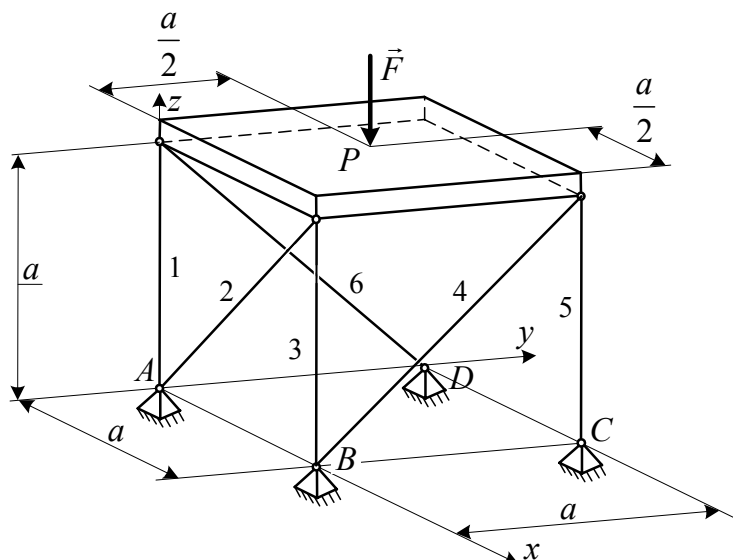
$$\vec{F}_C = (-1,66\vec{e}_y - 2,77\vec{e}_z) \text{ kN}.$$

Ellenőrzés:

$$\vec{F} + \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0},$$

$$(4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) + (0,93\vec{e}_x - 0,46\vec{e}_y - 0,77\vec{e}_z) + (-0,93\vec{e}_x - 1,86\vec{e}_y + 1,55\vec{e}_z) + (-1,66\vec{e}_y - 2,77\vec{e}_z) = \vec{0}.$$

3.3.8. feladat: Térbeli szerkezet támasztóerői



Adott:

Az $a \times a$ méretű merev lap és megtámasztó rudak geometriája és a szerkezet terhelése, $\vec{F} = (F_z)$ kN, $a = 1$ m.

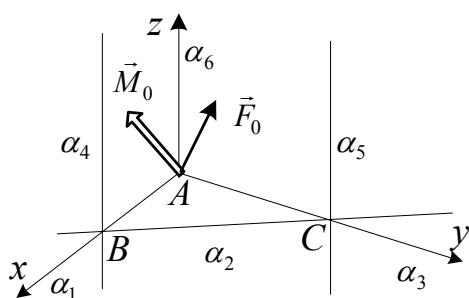
Feladat:

A rudakban ébredő támasztóerők meghatározása.

Megoldás:

$$\vec{F}_1 = (0, 5\vec{e}_z) \text{ kN}, \vec{F}_2 = \vec{0}, \vec{F}_3 = \vec{0}, \vec{F}_4 = \vec{0}, \vec{F}_5 = (0, 5\vec{e}_z) \text{ kN}, \vec{F}_6 = \vec{0}.$$

3.3.9. feladat: Térbeli erőrendszer helyettesítése



Adott: $\vec{F}_0 = (1, 5\vec{e}_x + 5\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \text{ kN},$

$$\vec{M}_0 = (-4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \text{ kNm},$$

$$B(3, 0, 0) \text{ m}, C(0, 4, 0) \text{ m}.$$

Feladat:

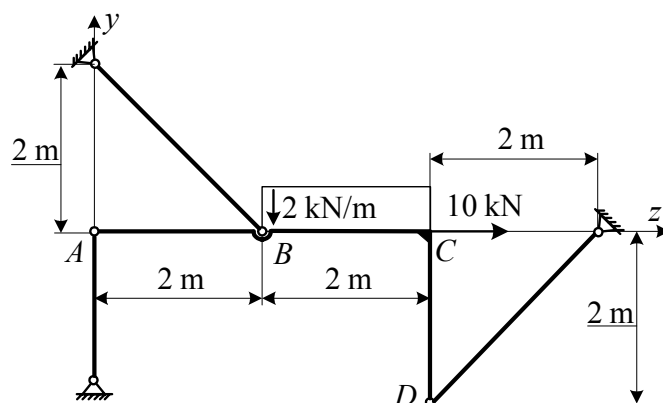
Az $\vec{F}_0, \vec{M}_0$ erőrendszer helyettesítése az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ hatásvonalon ható koncentrált erővel.

Megoldás:

$$\vec{F}_1 = (3\vec{e}_x) \text{ kN}, \vec{F}_2 = (-1, 5\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \text{ kN}, \vec{F}_3 = (3\vec{e}_y) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_4 = (-2\vec{e}_z) \text{ kN}, \vec{F}_5 = (-\vec{e}_z) \text{ kN}, \vec{F}_6 = (5\vec{e}_z) \text{ kN}.$$

3.3.10. feladat: Síkbeli szerkezet támasztóerői

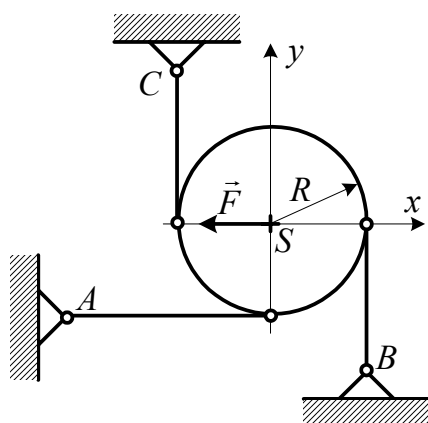


Adott: Szerkezet méretei és terhelése.

Feladat: A támasztóerők meghatározása.

Megoldás: $\vec{F}_A = (-4\vec{e}_y)$ kN, $\vec{F}_B = (9\vec{e}_y - 9\vec{e}_z)$ kN, $\vec{F}_C = (-\vec{e}_y - \vec{e}_z)$ kN.

3.3.11. feladat: Síkbeli szerkezet támasztóerői



Adott:

Az R sugarú merev henger, $\vec{F} = (-10\vec{e}_x)$ kN, $R = 2$ m.

Feladat:

A rudakban ébredő támasztóerők meghatározása.

Megoldás:

$\vec{F}_A = (10\vec{e}_x)$ kN, $\vec{F}_B = (-5\vec{e}_y)$ kN, $\vec{F}_C = (5\vec{e}_y)$ kN.