

5. SZILÁRDSÁGTANI ÁLLAPOTOK

5.1. Alapfogalmak

Szilárdságtan: a terhelés előtt és után is tartós nyugalomban levő alakváltozásra képes testek kinematikája, dinamikája és anyagszerkezeti viselkedése.

Terhelés: ismert külső erőrendszer.

Tartós nyugalom: - a testre ható erőrendszer egyensúlyi,
- a test megtámasztása nem enged meg merevtestszerű elmozdulásokat.

Alakváltozás: terhelés hatására

- a test pontjai egymáshoz képest elmozdulnak,
- a test anyagi geometriai alakzatai (hossz, szög, felület, térfogat) megváltoznak.

Kinematika a szilárdságtanban: leírja a terhelés hatására bekövetkező elmozdulásokat és alakváltozásokat.

Dinamika a szilárdságtanban: leírja a terhelés hatására a testben fellépő erőrendszert

Anyagszerkezeti viselkedés a szilárdságtanban: megadja az alakváltozást jellemző mennyiségek és a belső erőrendszer közötti kapcsolatot.

Rugalmas alakváltozás: A terhelés hatására alakváltozott test a terhelés megszüntetése (levétele) után visszanyeri eredeti alakját.

Képlékeny alakváltozás: A test tehermentesítés után nem nyeri vissza eredeti alakját.

Kis elmozdulás: a test pontjainak elmozdulása nagyságrendekkel kisebb a test jellemző geometriai méreteinél.

Kis alakváltozás: a test alakváltozását jellemző mennyiségek lényegesen kisebbek, mint 1.

$$\varepsilon \ll 1, \gamma \ll 1.$$

Csak kis elmozdulásokkal, kis alakváltozásokkal foglalkozunk.

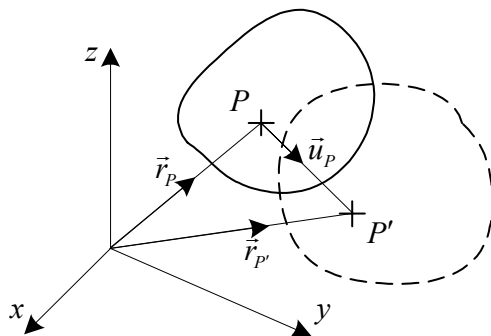
Elemi környezet / elemi tömeg / tömegpont:

Tömegpontokhoz, vagy elemi tömegekhez úgy jutunk, hogy a testet gondolatban végtelen sok kis részre bontjuk.

Tömegpont a szilárdságtanban egy olyan kis testrész, amelynek méretei a test méreteihez képest elhanyagolhatóan kicsik.

Elemi környezet: egy pontot, illetve az elemi triédert magában foglaló elemi tömeg.

5.2. Az elmozdulási állapot



A terhelés utáni állapotot vesszővel különböztetjük meg.

A tetszőleges P pont elmozdulása:

$$\vec{u}_P = u_P \vec{e}_x + v_P \vec{e}_y + w_P \vec{e}_z.$$

Test elmozdulása (a test összes pontjának elmozdulása) – elmozdulás-mező:

$$\vec{u}(x, y, z) = u(x, y, z) \vec{e}_x + v(x, y, z) \vec{e}_y + w(x, y, z) \vec{e}_z.$$

$$\left. \begin{aligned} u(\vec{r}) &= u(x, y, z) \\ v(\vec{r}) &= v(x, y, z) \\ w(\vec{r}) &= w(x, y, z) \end{aligned} \right\}.$$

6.3. Az alakváltozási állapot

a) Alapfogalmak:

Elemi triéder: A P pontban felvett, a terhelés előtt egymásra kölcsönösen merőleges $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ egységvektor-hármas.

Feltételezzük, hogy az $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ egységvektorok a P pont elemi környezetén belül helyezkednek el.

Az elemi triéder egységvektorainak végpontjait A, B, C jelöli.

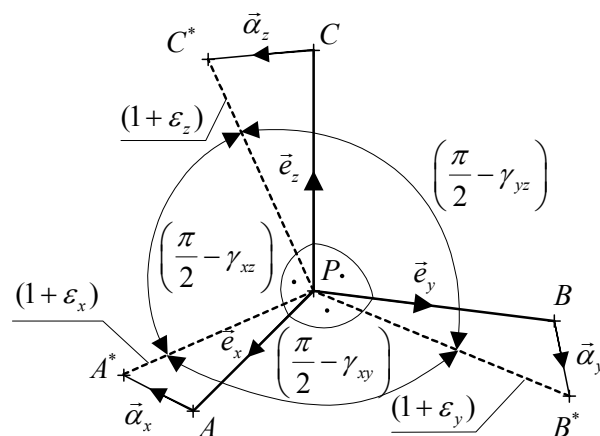
Elemi környezet deformációja: Az A, B, C pontok elmozdulása három részből áll: párhuzamos eltolás + merevtestszerű forgás + alakváltozás.

Párhuzamos eltolás: mindhárom pont elmozdulása azonos.

Merevtestszerű forgás: a három pont elmozdulása különböző, de a hosszak és szögek nem változnak.

Alakváltozás: a hosszak és a szögek megváltozása.

b) Elemi környezet alakváltozási állapota:



A megváltozott hosszak:

$$\overline{PA^*} = 1 + \varepsilon_x,$$

$$\overline{PB^*} = 1 + \varepsilon_y,$$

$$\overline{PC^*} = 1 + \varepsilon_z.$$

A megváltozott szögek:

$$\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}\right), \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{yz}\right), \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xz}\right).$$

A szögváltozások az értelmezésből következően:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}.$$

Alakváltozási jellemzők:

- fajlagos nyúlások: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$,

- fajlagos szögtorzulások (szögváltozások): $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$.

Az alakváltozási jellemzők előjele:

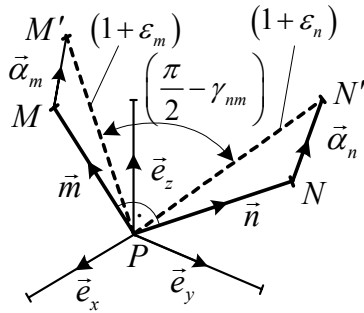
- $\varepsilon > 0$ megnyúlás, $\varepsilon < 0$ rövidülés,

- $\gamma > 0$: az eredeti $\pi/2$ -es szög csökken, $\gamma < 0$: az eredeti $\pi/2$ -es szög növekszik.

Az alakváltozási jellemzők mértékegysége: $\frac{\text{mm}}{\text{mm}}, \text{ rad}, 1.$

Kis alakváltozások esetén: $\varepsilon = 10^{-3} \sim 10^{-5}, \gamma = 10^{-3} \sim 10^{-5}.$

Az alakváltozási jellemzők általánosítása:



Az $\vec{n}$, $\vec{m}$ egymásra merőleges egységvektorok:

$$|\vec{n}| = |\vec{m}| = 1, \quad \vec{n} \cdot \vec{m} = 0.$$

ϵ_n - az n irányú fajlagos nyúlás,

$\gamma_{mn} = \gamma_{nm}$ - a terhelés előtt egymásra merőleges $\vec{n}$, $\vec{m}$ irányokhoz tartozó szögváltozás.

A P pont elemi környezetének alakváltozási állapotát az alakváltozási tenzor jellemzi egyértelműen.

Az alakváltozási tenzor:

- Diadikus előállítás: $\underline{\underline{A}}_P = \vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z$.

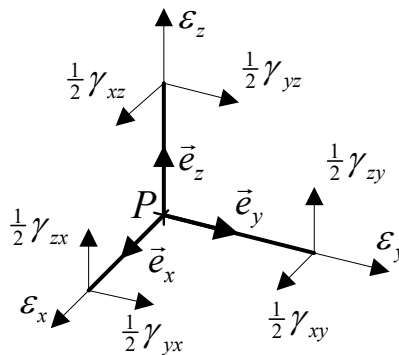
- Mátrixos előállítás: $\left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}$ - szimmetrikus tenzor.

Az alakváltozási tenzor oszlopai az $\vec{\alpha}_x$, $\vec{\alpha}_y$, $\vec{\alpha}_z$ alakváltozási vektorok koordinátáit tartalmazzák.

Az alakváltozási vektorok koordinátái:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_x &= \epsilon_x \vec{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yx} \vec{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{zx} \vec{e}_z, \\ \vec{\alpha}_y &= \frac{1}{2}\gamma_{xy} \vec{e}_x + \epsilon_y \vec{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{yz} \vec{e}_z, \\ \vec{\alpha}_z &= \frac{1}{2}\gamma_{xz} \vec{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yz} \vec{e}_y + \epsilon_z \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Az alakváltozási állapot szemléltetése: az elemi triéder végpontjaiba felmérjük az alakváltozási vektorok koordinátáit.



Adott irányokhoz tartozó alakváltozási jellemzők meghatározása az alakváltozási tenzorból:

$$\underline{\underline{\alpha}}_n = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n} ,$$

$$\varepsilon_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{\alpha}}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n} , \quad \frac{1}{2} \gamma_{mn} = \frac{1}{2} \gamma_{nm} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{m}$$

5.4. A feszültségi állapot

- a) A feszültségvektor: a test egy metszetsíkján megoszló belső erőrendszer sűrűségvektora (intenzitásvektora).

Jelölése: $\vec{\rho} = \vec{\rho}(\vec{r}, \vec{n})$

$\vec{r}$ - annak P pontnak helyvektora, amely a metszetsíkján van,

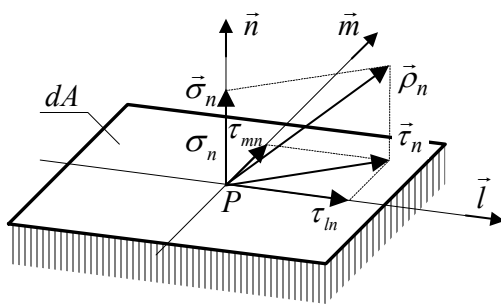
$\vec{n}$ - a P ponton átmenő metszetsíkjának a testből kifelé mutató normális egységvektora.

- b) Pontbeli feszültségi állapot (elemi környezet feszültségi állapota):

Az adott P pontra illeszkedő összes elemi felületen fellépő feszültségvektorok összessége (halmaza).

Ha P rögzített: $\vec{\rho} = \vec{\rho}(\vec{n}) = \vec{\rho}_n$, tulajdonsága: $\vec{\rho}_{(-\vec{n})} = -\vec{\rho}_n$.

A feszültségvektor összetevői, koordinátái:



$\vec{n}$ - az elemi felület normális egységvektora,

$\vec{l}, \vec{m}$ - az elemi felület síkjába eső, egymásra merőleges egységvektorok.

Az $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ egységvektorok jobbsodratú derékszögű koordináta-rendszert alkotnak.

A feszültségvektor összetevői (vektorok):

- a normál feszültségvektor: $\vec{\sigma}_n = \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{\rho}_n)}_{\sigma_n} \vec{n}$.

- a csúszató feszültségvektor: $\vec{\tau}_n = \vec{\rho}_n - \sigma_n \vec{n} = (\vec{n} \times \vec{\rho}_n) \times \vec{n}$.

A feszültségvektor koordinátái (skalárok):

- a normál feszültségi koordináta: $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{n} \cdot \vec{\sigma}_n$.

- a csúszató feszültségi koordináták: $\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{m} \cdot \vec{\tau}_n$.

$$\tau_{ln} = \vec{l} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{l} \cdot \vec{\tau}_n .$$

Mértékegység: SI alap mértékegység: $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$. (Pascal, kiejtés paszkál)

A mérnöki gyakorlatban szokásos mértékegység: $\text{N/mm}^2 = \text{MN/m}^2 = \text{MPa}$.

A feszültségi tenzor:

A P pont elemi környezetének feszültségi állapotát a feszültségi tenzor jellemzi egyértelműen.

A $\vec{\rho}_n$ feszültségvektor az $\vec{n}$ homogén, lineáris függvénye – tenzor.

- Diadikus előállítás: $\underline{\underline{F}}_P = \vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z$.

- Mátrixos előállítás: $\left[\underline{\underline{F}}_P \right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$ - szimmetrikus tenzor.

A feszültségi tenzor oszlopai az $\vec{\rho}_x, \vec{\rho}_y, \vec{\rho}_z$ feszültség vektorok koordinátáit tartalmazzák.

Pl. $\vec{\rho}_x$ - az $\vec{e}_x$ normálisú elemi felületen ébredő feszültségvektor.

σ_x - az $\vec{e}_x$ normálisú síkon fellépő normálfeszültség,

τ_{yx} - az $\vec{e}_x$ normálisú síkon fellépő y irányú csúsztató feszültség.

Szimmetria: $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$

Az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor hat egymástól független skaláris mennyiséggel adható meg.

Az $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ normálisú felületen fellépő feszültségvektorok koordinátái:

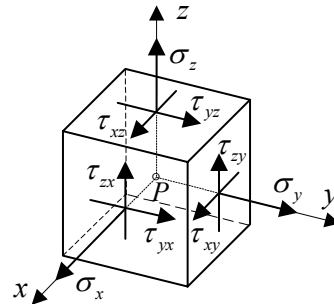
$$\vec{\rho}_x = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_x = \sigma_x \vec{e}_x + \tau_{yx} \vec{e}_y + \tau_{zx} \vec{e}_z,$$

$$\vec{\rho}_y = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_y = \tau_{xy} \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \tau_{zy} \vec{e}_z,$$

$$\vec{\rho}_z = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_z = \tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z.$$

A feszültségi állapot szemléltetése:

A $\vec{\rho}_x, \vec{\rho}_y, \vec{\rho}_z$ feszültségvektorok koordinátáit ábrázoljuk a P pontbeli, három egymásra merőleges síkon (a P pont környezetéből kiragadott elemi kocka látható oldallapjain).



Más irányokhoz tartozó feszültségkoordináták előállítása a feszültségi tenzorból:

$$\vec{\rho}_n = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n},$$

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}, \quad \tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{m} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{m}.$$

c) Feszültségi főtengelyek, főfeszültségek:

Definíció: Ha az $\vec{e}$ egységvektorra merőleges elemi felületen $\vec{\tau}_e = \vec{0}$, azaz $\vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e}$, akkor az $\vec{e}$ feszültségi főirány (főtengely), σ_e főfeszültség, az $\vec{e}$ -re merőleges elemi felület főfeszültségi sík.

Megjegyzés:- Minden pontban létezik legalább három főirány, amelyek egymásra kölcsönösen merőlegesek.

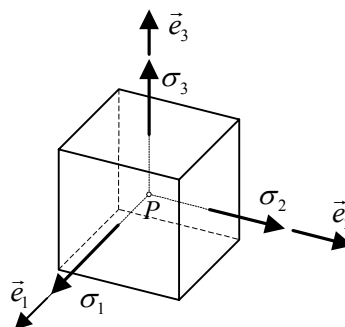
- σ_e lehet zérus is: $\vec{\rho}_n = \vec{0}$.

Feszültségi tenzor a főirányok koordináta-rendszerében

$$\left[\underline{\underline{F}}_{1,2,3} \right] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Megállapodás a jelölésre és sorszámozásra:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$



Főtengelyprobléma (sajátérték feladat):

Feladat: azoknak az $\vec{e}$ főirányoknak és σ_e főfeszültségeknek a meghatározása, amelyek eleget tesznek a definícióban megadott feltételeknek.

A főtengelyprobléma (sajátérték feladat) azonos módon írható fel a feszültségi és az alakváltozási állapotra.

$$\vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e},$$

$$\vec{\alpha}_e = \varepsilon_e \vec{e},$$

$$\underline{\underline{F}} \cdot \vec{e} = \sigma_e \underline{\underline{I}} \cdot \vec{e},$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{e} = \varepsilon_e \underline{\underline{I}} \cdot \vec{e},$$

$$(\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{I}}) \cdot \vec{e} = \vec{0}.$$

$$(\underline{\underline{A}} - \varepsilon_e \underline{\underline{I}}) \cdot \vec{e} = \vec{0}.$$

A fenti egyenletekben:

$$\left[\underline{\underline{I}} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{egységtenzor (identenzor)}.$$

ε_e - főnyúlás,

σ_e - főfeszültség,

$\vec{e}$ - feszültségi / alakváltozási főirány.

Ez mindkét esetben egy homogén lineáris algebrai egyenletrendszer az $\vec{e}$ vektor e_x, e_y, e_z skaláris koordinátáira.

A mátrixokat részletesen kiírva:

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_e) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_e) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} (\varepsilon_x - \varepsilon_e) & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & (\varepsilon_y - \varepsilon_e) & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & (\varepsilon_z - \varepsilon_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Megjegyzés: - Mindig van legalább három főirány, amelyek kölcsönösen merőlegesek egymásra.

- A σ_e főfeszültség / ε_e főnyúlás nulla is lehet.

A lineáris algebrai egyenletrendszer nemtriviális (nem nulla) megoldásának feltétele az, hogy a lineáris algebrai egyenletrendszer együttható mátrixának elemeiből álló determinánsnak nullának kell lennie:

$$\det \underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{I}} = 0, \quad \det \underline{\underline{A}} - \varepsilon_e \underline{\underline{I}} = 0.$$

Részletesen kiírva:

$$\det \begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_e) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_e) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_e) \end{vmatrix} = 0, \quad \det \begin{vmatrix} (\varepsilon_x - \varepsilon_e) & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & (\varepsilon_y - \varepsilon_e) & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & (\varepsilon_z - \varepsilon_e) \end{vmatrix} = 0.$$

A megoldás további lépéseit csak a feszültségi állapotra mutatjuk be.

A determinánst kifejtve kapjuk a karakterisztikus egyenletet:

$$\sigma_e^3 - F_I \sigma_e^2 + F_{II} \sigma_e - F_{III} = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet egy harmadfokú algebrai egyenlet a σ_e főfeszültségekre.

A főfeszültségek meghatározása:

Karakterisztikus egyenlet megoldásai: a $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ főfeszültségek.

A karakterisztikus egyenlet együtthatói a feszültségi tenzor skaláris invariánsai:

$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ - a feszültségi tenzor első skaláris invariánsa,

$$F_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} = \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2 - \text{a második skalár invariáns,}$$

$$F_{III} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - \text{a feszültségi tenzor harmadik skalár invariánsa.}$$

Invariáns: koordináta transzformációval szemben állandó (koordináta-rendszer választásától függetlenül ugyanaz az érték).

A feszültségi főirányok meghatározása:

Visszahelyettesítés a lineáris algebrai egyenletrendszerbe:

$$\sigma_1 \rightarrow \underbrace{e_{1x}, e_{1y}, e_{1z}}_{1. \text{ főirány}}, \quad \sigma_2 \rightarrow \underbrace{e_{2x}, e_{2y}, e_{2z}}_{2. \text{ főirány}}, \quad \sigma_3 \rightarrow \underbrace{e_{3x}, e_{3y}, e_{3z}}_{3. \text{ főirány}}.$$

A $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ főfeszültségeket a lineáris algebrai egyenletrendszerbe külön-külön behelyettesítve, azt tapasztaljuk, hogy az egyenletek nem függetlenek egymástól (a három közül egy egyenlet a másik kettő lineáris kombinációja lesz).

Ezért a megoldást úgy kapjuk, hogy az ismeretlen e_{ix}, e_{iy}, e_{iz} ($i=1, 2, 3$) koordináták közül egyet ismertnek tekintünk és a másik kettőt pedig a két független egyenletből az ismertnek

tekintett koordináta függvényében meghatározzuk. Az ismertnek tekintett koordináta végül abból a feltételből számítható, hogy az $\vec{e}$ egységvektor: $|\vec{e}| = 1 = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}$.

5.5. Gyakorló feladatok szilárdságtani állapotokra

5.5.1. feladat: P pont elemi környezetének alakváltozási állapota

Adott: A P pont elemi környezetében az alakváltozási jellemzők és egy irány egységvektora:

$$\varepsilon_x = 5 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_y = 4 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_z = 10 \cdot 10^{-3},$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = -10 \cdot 10^{-3}, \quad \vec{e}_n = 0,8 \vec{e}_x + 0,6 \vec{e}_z.$$

Feladat:

- Az $\underline{\underline{A}}_P$ alakváltozási tenzor mátrixának a felírása és a pontbeli alakváltozási állapot szemléltetése az elemi triéderen.
- Az ε_n fajlagos nyúlás és γ_{ny} fajlagos szögtorzulás meghatározása.

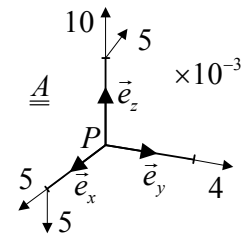
Kidolgozás:

- Az $\underline{\underline{A}}_P$ alakváltozási tenzor mátrixának a felírása és a pontbeli alakváltozási állapot szemléltetése az elemi triéderen:

Az alakváltozási tenzor:

$$[\underline{\underline{A}}_P] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad [\underline{\underline{A}}_P] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 10 \end{bmatrix} 10^{-3}.$$

Az alakváltozási állapot szemléltetése:



- Az ε_n fajlagos nyúlás és γ_{ny} fajlagos szögtorzulás meghatározása:

$$\vec{\alpha}_n = \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{n},$$

$$[\vec{\alpha}_n] = [\underline{\underline{A}}_P] \cdot [\vec{n}] = 10^{-3} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0 \\ 0,6 \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 4-3 \\ 0 \\ -4+6 \end{bmatrix}, \quad [\vec{\alpha}_n] = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\varepsilon_n = \vec{e}_n \cdot \vec{\alpha}_n = [0,8 \quad 0 \quad 0,6] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} 10^{-3} = (0,8 + 1,2) 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-3},$$

$$\gamma_{ny} = 2 \vec{e}_y \cdot \vec{\alpha}_n = 0.$$

5.5.2. feladat: P pont elemi környezetének feszültségi állapota

Adott: a P pontban az $\underline{\underline{F}}_P$ feszültségi tenzor és három, egymásra kölcsönösen merőleges irány.

$$[\underline{\underline{F}}_P] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \text{ MPa ,}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{3}\vec{e}_x + \frac{2}{3}\vec{e}_y + \frac{2}{3}\vec{e}_z, \quad \vec{m} = -\frac{2}{3}\vec{e}_x - \frac{1}{3}\vec{e}_y + \frac{2}{3}\vec{e}_z, \quad \vec{l} = \frac{2}{3}\vec{e}_x - \frac{2}{3}\vec{e}_y + \frac{1}{3}\vec{e}_z$$

$$|\vec{n}| = |\vec{m}| = |\vec{l}| = 1, \quad \vec{n} \cdot \vec{m} = \vec{l} \cdot \vec{m} = \vec{n} \cdot \vec{l} = 0.$$

Feladat: a) A P pontban a $\vec{\rho}_x, \vec{\rho}_y, \vec{\rho}_z$ feszültségvektorok meghatározása.

b) A pontbeli feszültségi állapot szemléltetése az elemi kockán.

c) A P pontban a $\vec{\rho}_n$ feszültségvektor és a $\sigma_n, \tau_{nm}, \tau_{nl}$ feszültség koordináták meghatározása.

Kidolgozás:

a) A P pontban a $\vec{\rho}_x, \vec{\rho}_y, \vec{\rho}_z$ feszültségvektorok meghatározása:

$$[\vec{\rho}_x] = [\underline{\underline{F}}_P][\vec{e}_x] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ -40 \end{bmatrix} \text{ MPa ,}$$

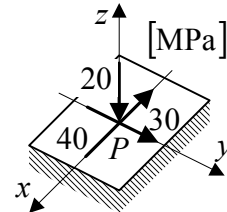
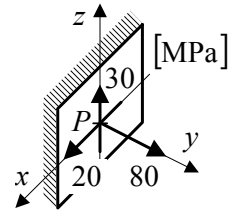
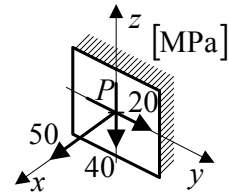
$$\vec{\rho}_x = \sigma_x \vec{e}_x + \tau_{xy} \vec{e}_y + \tau_{xz} \vec{e}_z = (50\vec{e}_x + 20\vec{e}_y - 40\vec{e}_z) \text{ MPa .}$$

$$[\vec{\rho}_y] = [\underline{\underline{F}}_P][\vec{e}_y] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix} \text{ MPa ,}$$

$$\vec{\rho}_y = \tau_{yx} \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \tau_{yz} \vec{e}_z = (20\vec{e}_x + 80\vec{e}_y + 30\vec{e}_z) \text{ MPa .}$$

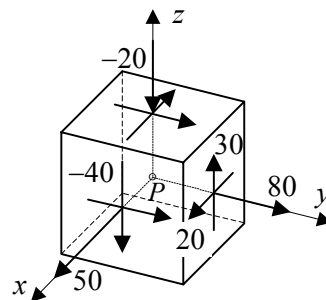
$$[\vec{\rho}_z] = [\underline{\underline{F}}_P][\vec{e}_z] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ 30 \\ -20 \end{bmatrix} \text{ MPa ,}$$

$$\vec{\rho}_z = \tau_{zx} \vec{e}_x + \tau_{zy} \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z = (-40\vec{e}_x + 30\vec{e}_y - 20\vec{e}_z) \text{ MPa .}$$



b) feszültségi állapot szemléltetése az elemi kockán:

Az elemi kocka $\vec{e}_x$ normálisú lapjára a $\vec{\rho}_x$ koordinátáit, az $\vec{e}_y$ normálisú lapra a $\vec{\rho}_y$ koordinátáit, a $\vec{e}_z$ normálisú lapra pedig a $\vec{\rho}_z$ koordinátáit rajzoljuk fel.



c) A P pontban a $\vec{\rho}_n$ feszültségvektor és a $\sigma_n, \tau_{nm}, \tau_{nl}$ feszültség koordináták meghatározása:

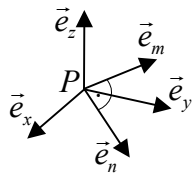
$$[\vec{\rho}_n] = [\underline{F}_p] \cdot [\vec{n}] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/3 + 40/3 - 80/3 \\ 20/3 + 160/3 + 60/3 \\ -40/3 + 60/3 - 40/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 80 \\ -20/3 \end{bmatrix} \text{ MPa ,}$$

$$\sigma_n = \vec{\rho}_n \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 10/3 & 80 & -20/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \frac{10}{9} + \frac{160}{3} - \frac{40}{9} = 50 \text{ MPa ,}$$

$$\tau_{nl} = \vec{\rho}_n \cdot \vec{l} = \begin{bmatrix} 10/3 & 80 & -20/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \frac{20}{9} - \frac{160}{3} - \frac{20}{9} = -\frac{160}{3} \text{ MPa ,}$$

$$\tau_{nm} = \vec{\rho}_n \cdot \vec{m} = \begin{bmatrix} 10/3 & 80 & -20/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = -\frac{20}{9} - \frac{80}{3} - \frac{40}{9} = -\frac{100}{3} \text{ MPa .}$$

5.5.3. feladat: P pont elemi környezetének feszültségi állapota



Adott:

$$\sigma_x = -60 \text{ MPa , } \sigma_z = 60 \text{ MPa , } \tau_{xz} = 60 \text{ MPa , } \tau_{yz} = 0 ,$$

$$\vec{e}_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y , \quad \vec{e}_m = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y ,$$

$$\sigma_n = -85 \text{ MPa , } \tau_{mn} = 15 \text{ MPa .}$$

Feladat: a) A σ_y normál feszültség és a τ_{xy} csúsztató feszültség meghatározása.

b) A τ_{zn} csúsztató feszültség meghatározása.

Kidolgozás:

a) A σ_y normál feszültség, és a τ_{xy} csúsztató feszültség meghatározása:

$$\text{A feszültségi tenzor az ismert és ismeretlen koordinátákkal: } [\underline{F}_p] = \begin{bmatrix} -60 & \tau_{xy} & 60 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 60 & 0 & 60 \end{bmatrix} \text{ MPa .}$$

$$\text{Az egyenletek, amiből az ismeretlenek meghatározhatók: } \sigma_n = \vec{e}_n \cdot \vec{\rho}_n , \quad \tau_{mn} = \vec{e}_m \cdot \vec{\rho}_n .$$

Részletszámítások az első egyenlet felírásához:

$$[\vec{\rho}_n] = [\underline{F}_p] \cdot [\vec{e}_n] = \begin{bmatrix} -60 & \tau_{xy} & 60 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 60 & 0 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_{xy} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_{xy} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_y \\ 60 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} ,$$

$$\begin{aligned}\sigma_n = \vec{e}_n \cdot \vec{\rho}_n &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y \right) \cdot \left[\left(-60\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_{xy} \right) \vec{e}_x + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \tau_{xy} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_y \right) \vec{e}_y + 60\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_z \right] = -30 + \tau_{xy} + \frac{1}{2} \sigma_y.\end{aligned}$$

Részletszámítások a második egyenlet felírásához:

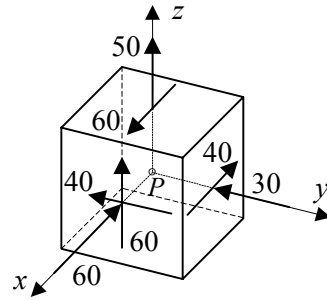
$$\begin{aligned}\tau_{mn} = \vec{e}_m \cdot \vec{\rho}_n &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y \right) \cdot \left[\left(-60\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_{xy} \right) \vec{e}_x + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \tau_{xy} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_y \right) \vec{e}_y + 60\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_z \right] = 30 + 0,5 \sigma_y.\end{aligned}$$

A megoldandó egyenletrendszer és megoldása:

$$\left. \begin{aligned}\tau_{xy} + \frac{1}{2} \sigma_y &= 30 - 85 \\ \frac{1}{2} \sigma_y &= -30 + 15\end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned}\sigma_y &= -30 \text{ MPa}, \\ \tau_{xy} &= -40 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

A feszültségi tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{F}}_P] = \begin{bmatrix} -60 & -40 & 60 \\ -40 & -30 & 0 \\ 60 & 0 & 50 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$



b) A τ_{zn} csúsztató feszültség meghatározása:

$$\tau_{zn} = \vec{e}_n \cdot \vec{\rho}_z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y \right) \cdot (60\vec{e}_x + 50\vec{e}_z) = 30\sqrt{2} \cong 42,3 \text{ MPa}.$$

5.5.4. feladat: A P pontban a főfeszültségek és a feszültségi főirányok meghatározása

$$\text{Adott: } [\underline{\underline{F}}_P] = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -40 \\ 0 & -40 & 90 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

Feladat: A P pontbeli főfeszültségek és feszültségi főirányok meghatározása.

Kidolgozás:

$$\text{Sajátérték feladat: } \vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e} = \sigma_e \underline{\underline{I}} \cdot \vec{e} \quad \Rightarrow \quad (\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{I}}) \cdot \vec{e} = \vec{0}.$$

$$\begin{aligned}\text{Lineáris algebrai egyenletrendszer:} \quad & (-20 - \sigma_e) e_x + 0 + 0 = 0, \\ & 0 + (30 - \sigma_e) e_y - 40 e_z = 0, \\ & 0 - 40 e_y + (90 - \sigma_e) e_z = 0.\end{aligned}$$

A nemtriviális megoldás feltétele – karakterisztikus egyenlet: $\det[\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{I}}] = 0$.

$$\text{Részletezve: } (20 + \sigma_e) [(30 - \sigma_e)(90 - \sigma_e) - 40^2] = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldása: $\sigma_3 = -20 \text{ MPa}$.

Ehhez a gyökhöz tartozó feszültségi főirány: $\vec{e}_3 = \vec{e}_x$.

A karakterisztikus egyenlet további gyökei:

$$(30 - \sigma_e)(90 - \sigma_e) - 40^2 = 0 \Rightarrow \sigma_e^2 - 120\sigma_e + 1100 = 0.$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{120 \pm \sqrt{14400 - 4400}}{2} = \frac{120 \pm 100}{2} \Rightarrow \sigma_1 = 110 \text{ MPa}, \sigma_2 = 10 \text{ MPa}.$$

A feszültségi főirányok meghatározása – a főfeszültségeket visszahelyettesítjük a lineáris algebrai egyenletrendszerbe.

1. főirány:

$$\begin{bmatrix} -130 & 0 & 0 \\ 0 & -80 & -40 \\ 0 & -40 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

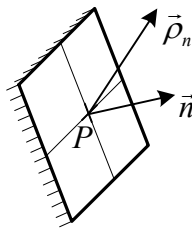
Az egyenletrendszer megoldása: $e_{1x} = 0, e_{1z} = -2e_{1y}$.

$$|\vec{e}_1| = 1 = \sqrt{e_{1y}^2 + e_{1z}^2} = \sqrt{5} e_{1y} \Rightarrow e_{1y} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{e}_y - 2\vec{e}_z).$$

$$2. \text{ főirány: } \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_x \times \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{e}_y - 2\vec{e}_z) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{e}_y + \vec{e}_z).$$

5.5.5. feladat: A P pont elemi környezetének feszültségi állapota



Adott:

$$\vec{\rho}_n = (-400 \vec{e}_x + 300 \vec{e}_y + 200 \vec{e}_z) \text{ MPa},$$

$$\vec{n} = 0,8 \vec{e}_x + 0,6 \vec{e}_z.$$

Feladat: a) A σ_n normál feszültség koordináta meghatározása.

b) A $\vec{\tau}_n$ csúsztató feszültségi vektor meghatározása.

Kidolgozás:

a) A σ_n normál feszültség meghatározása:

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = (-400 \vec{e}_x + 300 \vec{e}_y + 200 \vec{e}_z) \cdot (0,8 \vec{e}_x + 0,6 \vec{e}_z) = -200 \text{ MPa}.$$

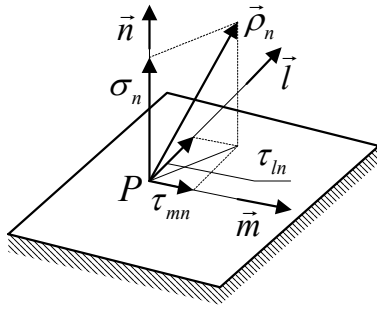
b) A $\vec{\tau}_n$ csúsztató feszültségi vektor meghatározása:

A kétszeres vektoriális szorzást a kifejtési szabállyal számítjuk ki.

$$\vec{\tau}_n = (\vec{n} \times \vec{\rho}_n) \times \vec{n} = (\vec{n} \cdot \vec{n}) \vec{\rho}_n - (\vec{n} \cdot \vec{\rho}_n) \vec{n} = \vec{\rho}_n - \sigma_n \vec{n} =$$

$$= (-400 \vec{e}_x + 300 \vec{e}_y + 200 \vec{e}_z) - (-200)(0,8 \vec{e}_x + 0,6 \vec{e}_z) = (-240 \vec{e}_x + 300 \vec{e}_y + 320 \vec{e}_z) \text{ MPa}.$$

5.5.6. feladat: A P pont elemi környezetének feszültségi állapota



Adott:

$$\vec{\rho}_n = (581 \vec{e}_x - 100 \vec{e}_y + 200 \vec{e}_z) \text{ MPa},$$

$$\vec{n} = 0,5 \vec{e}_x + 0,5 \vec{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_z,$$

$$\vec{m} = -0,5 \vec{e}_x - 0,5 \vec{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_z,$$

$$\vec{l} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y.$$

Feladat: a) A σ_n normál feszültség meghatározása.

b) A τ_{mn} csúsztató feszültség meghatározása.

c) A τ_{ln} csúsztató feszültség meghatározása.

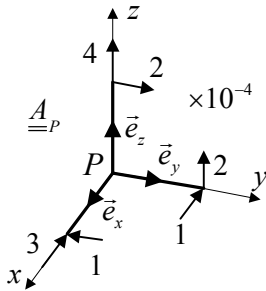
Megoldás:

a) $\sigma_n = 381,9 \text{ MPa}.$

b) $\tau_{mn} = -99,08 \text{ MPa}.$

c) $\tau_{ln} = 481,5 \text{ MPa}.$

5.5.7. feladat: A P pont elemi környezetének alakváltozási állapota



Adott:

A P pont alakváltozási állapota az ábrán látható módon és

$$\vec{n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_z \right), \quad \vec{m} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_z \right).$$

Feladat: a) A P pont alakváltozási tenzorának felírása.

b) Az $\varepsilon_x, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ alakváltozási jellemzők meghatározása.

c) Az $\varepsilon_n, \varepsilon_m, \gamma_{nm}$ alakváltozási jellemzők meghatározása.

Megoldás:

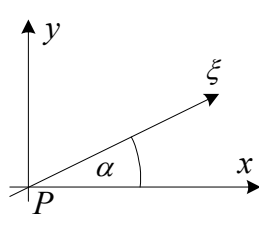
a)
$$\left[A_P \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} 10^{-4}.$$

b) $\varepsilon_x = -3 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 4 \cdot 10^{-4}.$

c) $\varepsilon_n = 0,5 \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_m = 0,5 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{nm} = -7 \cdot 10^{-4}.$

5.5.8. feladat: A P pont elemi környezetének alakváltozási állapota

Ismert: Szilárd test terheletlen felületén levő P pontban az alakváltozási tenzor négy skaláris koordinátával adható meg. Adott az alakváltozási tenzorban szereplő három fajlagos nyúlás és a felület érintő síkjába eső ξ irányhoz tartozó fajlagos nyúlás.



$$[\underline{A}_P] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= 4 \cdot 10^{-3}, \\ \varepsilon_y &= -2 \cdot 10^{-3}, \\ \varepsilon_z &= 5 \cdot 10^{-3}, \\ \varepsilon_\xi &= 0,5 \cdot 10^{-3}, \\ \alpha &= 30^\circ. \end{aligned}$$

Feladat: a) A P pontbeli $\underline{A}_P$ alakváltozási tenzor számszerű felírása.

b) A P pontbeli alakváltozási állapot szemléltetése az elemi triéderen.

Megoldás:

a) A P pontbeli $\underline{A}_P$ alakváltozási tenzor számszerű felírása:

$$\vec{e}_\xi = \cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x + \frac{1}{2} \vec{e}_y = 0,866 \vec{e}_x + 0,5 \vec{e}_y,$$

$$[\underline{A}_P] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 10^{-3} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & -2 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

$$\varepsilon_\xi = \vec{e}_\xi \cdot \vec{\alpha}_\xi = \vec{e}_\xi \cdot \underline{A} \cdot \vec{e}_\xi,$$

$$0,5 \cdot 10^{-3} = 2,5 \cdot 10^{-3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{xy} = -\frac{8}{\sqrt{3}} 10^{-3} = -4,62 \cdot 10^{-3}.$$

$$[\underline{A}_P] = \begin{bmatrix} 4 \cdot 10^{-3} & -2,31 \cdot 10^{-3} & 0 \\ -2,31 \cdot 10^{-3} & -2 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

b) A P pontbeli alakváltozási állapot szemléltetése az elemi triéderen:

