

6. RUDAK ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEI

6.1. Tönkremeneteli elméletek

- a) Speciális eset: az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzornak csak egy eleme nem nulla (pl. rudak egyszerű igénybevételeinél).

$$\sigma_z \leq \sigma_{meg}, \quad \tau_{\varphi z} \leq \tau_{meg}.$$

Itt nincs probléma, mert az anyagjellemzők ezekre az egyszerű esetekre rendelkezésre állnak.

- b) Általános eset:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Probléma: Nem tudom, hogy melyik feszültségkoordinátát hasonlítsam össze a σ_{meg} megengedett feszültséggel!

Redukált feszültség: Olyan feszültség, amely a pontbeli feszültségi állapotot tönkremenetel szempontjából egyértelműen jellemzi.

Redukált feszültség $\equiv$ *egyenértékű feszültség* $\equiv$ *összehasonlító feszültség*.

A redukált feszültség bevezetésével az általános térbeli feszültségállapotot visszavezetjük a speciális egyszerű esetre.

A redukált feszültség meghatározására különböző elméletek vannak.

- *Coulomb* elmélet: (kiejtése: kulomb)

Egy feszültségi állapot akkor nem okoz károsodást, ha a feszültségi állapothoz tartozó legnagyobb normál feszültség kisebb az anyag szakítószilárdságánál.

Redukált feszültség: $\sigma_{red}(\text{Coulomb}) = \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|)$,
ahol σ_1 a legnagyobb, σ_3 a legkisebb főfeszültség.

- *Mohr* elmélet: (kiejtése: mór)

Egy feszültségi állapot akkor nem okoz károsodást, ha a feszültségi állapothoz tartozó legnagyobb és legkisebb főfeszültség különbsége kisebb, mint az anyag folyáshatára / szakítószilárdsága

Redukált feszültség: $\sigma_{red}(\text{Mohr}) = (\sigma_1 - \sigma_3)$,
ahol σ_1 a legnagyobb, σ_3 a legkisebb főfeszültség.

- *Huber - Mises - Hencky* elmélet: (kiejtése huber-mizesz-henki)

Két feszültségi állapot akkor egyformán veszélyes, ha a hozzájuk tartozó torzulási energia azonos.

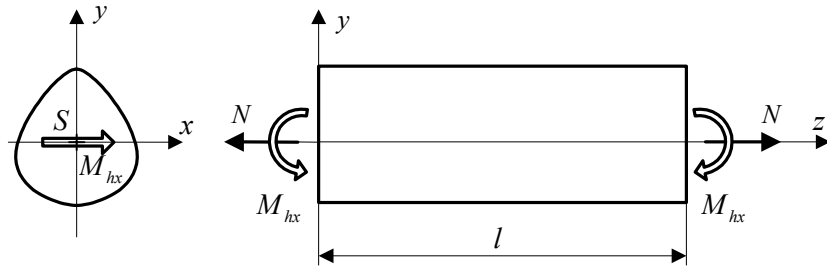
Redukált feszültség (a σ_{red} négyzete arányos a fajlagos torzulási energiával):

$$\sigma_{red}(\text{HMH}) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]},$$

ahol $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ főfeszültségek, vagy

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right]}.$$

6.2. Húzás – nyomás és egyenes hajlítás



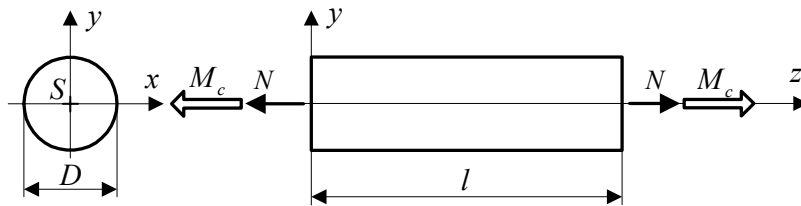
A y tengely a keresztmetszet szimmetria tengelye $\Rightarrow$ az x és y tengelyek a keresztmetszet S ponti tehetetlenségi főtengelyei.

Feszültségi állapot:

$$\begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{xyz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma_z &= \sigma'_z + \sigma''_z, \\ \sigma_z &= \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y. \end{aligned}$$

Veszélyes pont: ahol a σ_z a maximális (ez általában a keresztmetszetnek az x tengelytől leg-távolabb levő pontja, ahol a σ''_z és σ'_z azonos előjelű).

6.3. Kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak húzás – nyomása és csavarása



A rúd keresztmetszete kör, vagy körgyűrű lehet.

Feszültségi állapot:

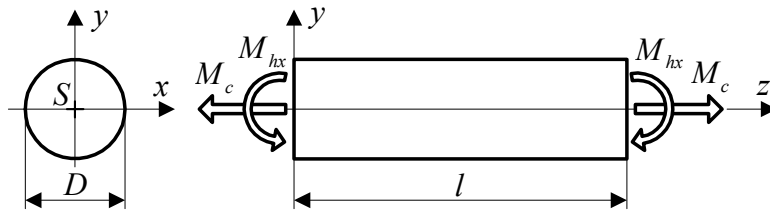
$$\begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{R\varphi z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{N}{A}, & \tau_{\varphi z} &= \frac{M_c}{I_p} R. \end{aligned}$$

Veszélyes pontok: a keresztmetszet kerületén lévő pontok ($R = D/2$).

Redukált feszültség:

$$\begin{aligned} - \sigma_{red}(Coulomb) &= \frac{|\sigma_z|}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\varphi z}^2}, \\ - \sigma_{red} &= \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{\varphi z}^2}, \quad \begin{cases} \beta = 3 & \text{Huber – Mises – Hencky (HMH),} \\ \beta = 4 & \text{Mohr.} \end{cases} \end{aligned}$$

6.4. Kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak hajlítása és csavarása

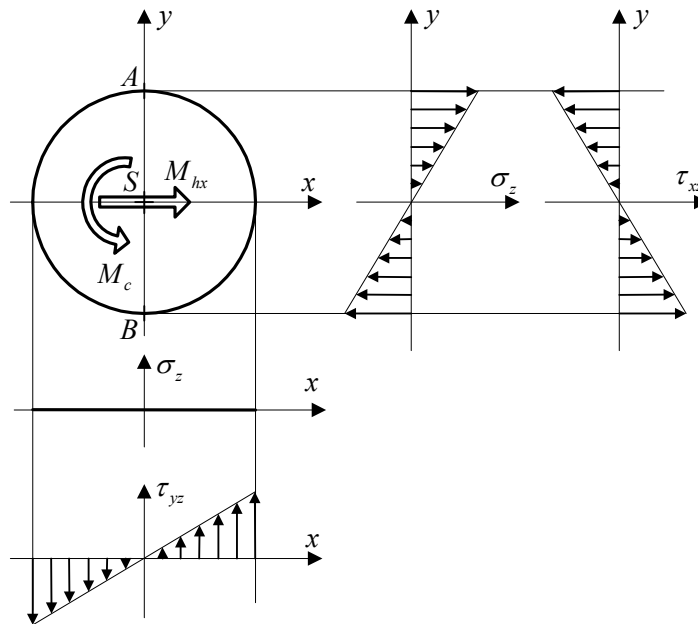


A rúd keresztmetszete kör, vagy körgyűrű lehet. (Egyenes hajlítás)

Feszültségi állapot:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{F}} \\ R\varphi z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} R, \quad \sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y.$$

Feszültségeloszlás:



Veszélyes pontok: A, B

$$\text{Maximális feszültségek: } |\sigma_{z \max}| = \frac{|M_{hx}|}{I_x} \frac{D}{2} = \frac{|M_{hx}|}{K_x}, \quad |\tau_{\varphi z \max}| = \frac{|M_c|}{I_p} \frac{D}{2} = \frac{|M_c|}{K_p}.$$

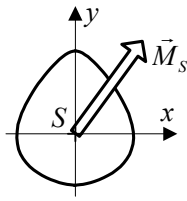
$$\text{Kör és körgyűrű keresztmetszet esetén: } I_p = 2I_x \quad \Rightarrow \quad K_p = 2K_x.$$

$$\text{Redukált feszültség: } \sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{\varphi z}^2}, \quad \begin{cases} \beta = 3 & \text{HMH,} \\ \beta = 4 & \text{Mohr.} \end{cases}$$

$$\sigma_{\text{red max}} = \sigma_{\text{red}}(A) = \sigma_{\text{red}}(B).$$

$$\sigma_{\text{red max}} = \sqrt{\sigma_{z \max}^2 + \beta \tau_{\varphi z \max}^2} = \sqrt{\frac{M_{hx}^2}{K_x^2} + \frac{\beta}{4} \frac{M_c^2}{K_x^2}} = \frac{M_{\text{red}}}{K_x}, \quad M_{\text{red}} = \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2}.$$

6.5. Ferde hajlítás



Ferde hajlítás esetén az $\vec{M}_S$ nyomatékvektor nem párhuzamos egyik S ponti tehetetlenségi főtengellyel sem.

$$\vec{M}_S = (M_{hx}\vec{e}_x - M_{hy}\vec{e}_y).$$

Az x, y tengelyek a keresztmetszet S ponti tehetetlenségi főtengelyei.

Tehetlenségi főtengely: $I_{xy} = I_{yx} = 0$.

Ferde hajlítás $\equiv$ két egyenes hajlítás szuperpozíciója (összege).

Feszültségi állapot:

$$\begin{bmatrix} F \\ \underline{\underline{F}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix},$$

$$\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z,$$

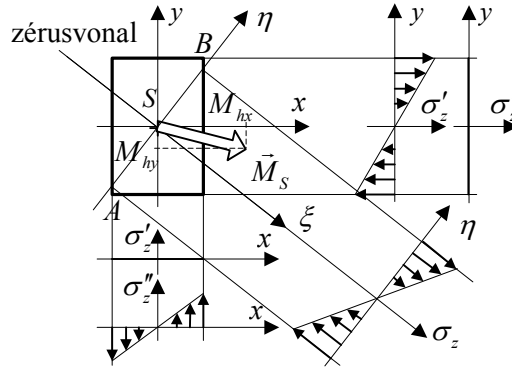
$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x}y + \frac{M_{hy}}{I_y}x$$

Zérusvonal: $\sigma_z = 0 = \frac{M_{hx}}{I_x}y + \frac{M_{hy}}{I_y}x$, $y = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}} \frac{I_x}{I_y}x$ - a zérusvonal nem párhuzamos a nyomatékkal.

Feszültségeloszlás:

Veszélyes pontok:

A, B (a keresztmetszet zérusvonaltól legtávolabb lévő pontok).



6.6. Nyírás és hajlítás

A nyírás rúdszerkezeteknél általában hajlítással együtt lép fel.

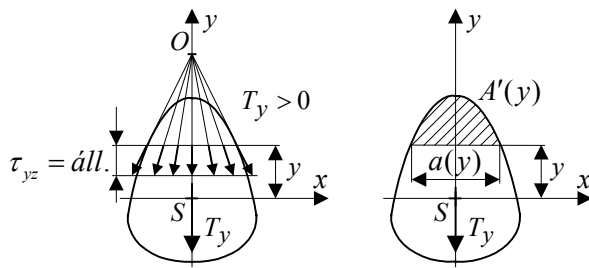
A nyírás és hajlítás kapcsolata:

$$\frac{dM_{hx}(z)}{dz} = -T_y(z) \quad , \quad M_{hx}(z) - M_{hx}(z=0) = - \int_{\zeta=0}^z T_y(\zeta) d\zeta$$

Közelítő megoldás:

- σ_z úgy számítható, mint tiszta hajlításnál.
- x, y a keresztmetszet S ponti tehetlenségi főtengelyei.
- a $\vec{\tau}_z$ feszültségek az y tengelyen egy pontban metsződnek.
- az x tengellyel párhuzamos egyenes mentén a τ_{yz} állandó.

A feszültségek kiszámítása:



$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y,$$

$$\tau_{yz} = -\frac{T_y S_x(A')}{I_x a(y)}.$$

τ_{xz} a $\vec{\tau}_z$ irányából határozható meg.

Közepes nyírófeszültség: $\tau_{köz} = \frac{|T_y|}{A}.$

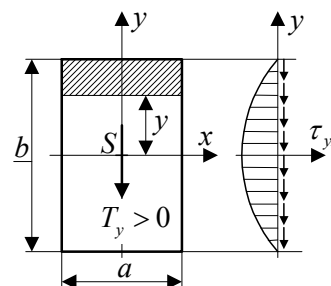
A feszültségi tenzor:
$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

A τ_{yz} számítása téglalap keresztmetszetű rúdnál:

$$\tau_{yz}(y) = -\frac{6T_y}{A} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{b^2} \right) \text{ – parabola,}$$

$$A = ab,$$

$$\tau_{yz \max} = \frac{3}{2} \tau_{köz}.$$

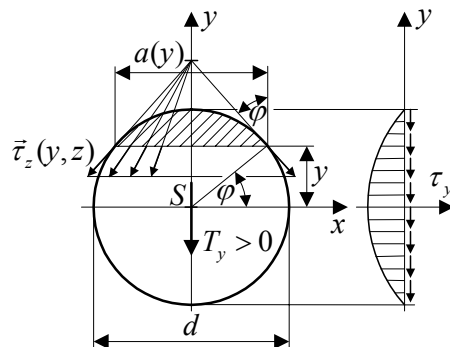


A τ_{yz} számítása kör keresztmetszetű rúdnál:

$$\tau_{yz}(y) = -\frac{4}{3} \frac{T_y}{A} \frac{4}{d^2} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right) \text{ – parabola,}$$

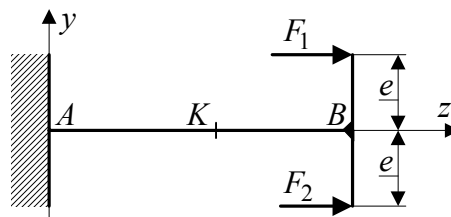
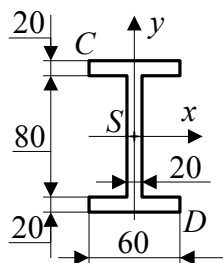
$$A = \frac{d^2 \pi}{4},$$

$$\tau_{yz \max} = \frac{4}{3} \tau_{köz}.$$



6.7. Gyakorló feladatok rudak összetett igénybevételeire

6.7.1. feladat: Húzás-nyomás és egyenes hajlítás



Adott:

$$F_1 = 80 \text{ kN}, F_2 = 120 \text{ kN},$$

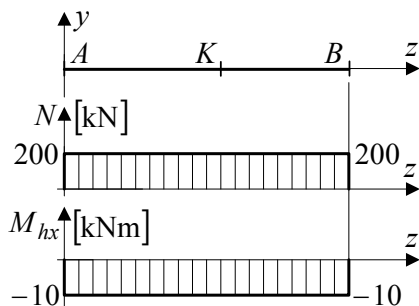
$$e = 250 \text{ mm},$$

$$\sigma_{\text{meg}} = 100 \text{ MPa}$$

- Feladat: a) Az AB rúdszakasz igénybevételi ábráinak megrajzolása.
 b) Feszültségeloszlás megrajzolása a K keresztmetszeten.
 c) A σ_z feszültség meghatározása a C , S és a D pontokban.
 d) A tartó ellenőrzése feszültségcsúcsra.

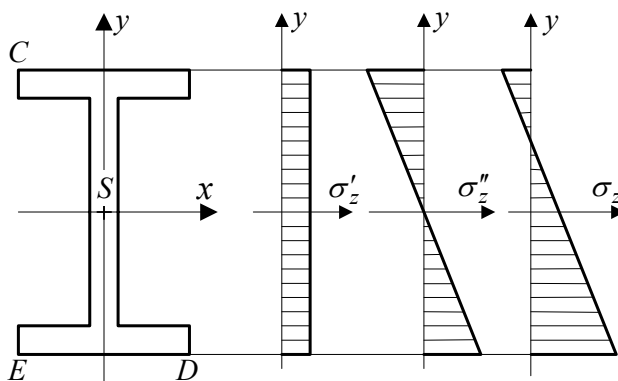
Kidolgozás:

- a) Az AB rúd igénybevételi ábráinak megrajzolása:



Veszélyes keresztmetszet: a rúd AB szakasza azonos mértékben veszélyes.

- b) Feszültségeloszlás megrajzolása a K keresztmetszeten:



$$\sigma_z(y) = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y = \sigma'_z + \sigma''_z,$$

$$N = 200 \text{ kN} = \text{állandó},$$

$$M_{hx} = -10 \text{ kNm} = \text{állandó}.$$

Veszélyes pontok: az ED szakasz minden pontja azonos mértékben veszélyes

- c) A σ_z feszültség meghatározása a C , S és a D pontokban:

A keresztmetszeti jellemzők:

$$A = 60 \cdot 120 - 80 \cdot 40 = 4000 \text{ mm}^2, \quad I_x = \frac{60 \cdot 120^3}{12} - 2 \frac{20 \cdot 80^3}{12} = 6,933 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

$$\text{A feszültségek: } \sigma_z(S) = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_S = \frac{200 \cdot 10^3}{4000} = 50 \text{ MPa},$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(C) &= \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_C = \frac{200 \cdot 10^3}{4000} + \frac{-10^7}{6,933 \cdot 10^6} 60 = \\ &= 50 - 86,54 = -36,54 \text{ MPa}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(D) &= \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_D = \frac{200 \cdot 10^3}{4000} + \frac{-10^7}{6,933 \cdot 10^6} (-60) = \\ &= 50 + 86,54 = 136,54 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

- d) A tartó ellenőrzése feszültségcsúcsra:

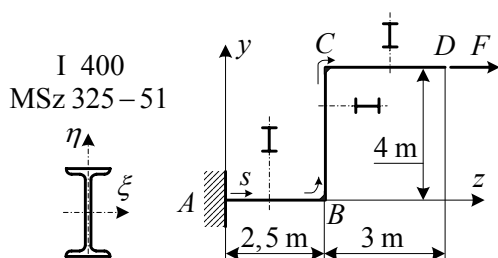
A tartó szilárdsági szempontból megfelel, ha a veszélyes keresztmetszet veszélyes pontjában $\sigma_{z \max} \leq \sigma_{\text{meg}}$.

A veszélyes pontokban a feszültség: $\sigma_{z \max} = \sigma_z(D) = \sigma_z(E) = 136,54 \text{ MPa}$.

A tartó nem felel meg, mert a $\sigma_{z \max} \leq \sigma_{\text{meg}}$ egyenlőtlenség nem teljesül.

Itt $\sigma_{z \max} = 136,54 \text{ MPa} > \sigma_{\text{meg}} = 100 \text{ MPa}$, tehát a tartó szilárdsági szempontból nem felel meg.

6.7.2. feladat: Húzás-nyomás és egyenes hajlítás



Adott:

$F = 20 \text{ kN}$, $\sigma_F = R_{p0,2} = 160 \text{ MPa}$,

$n_F = 2,5$.

Az I 400-as szelvény keresztmetszeti jellemzői szabványból:

$A = 118 \text{ cm}^2$, $I_\xi = 29210 \text{ cm}^4$,

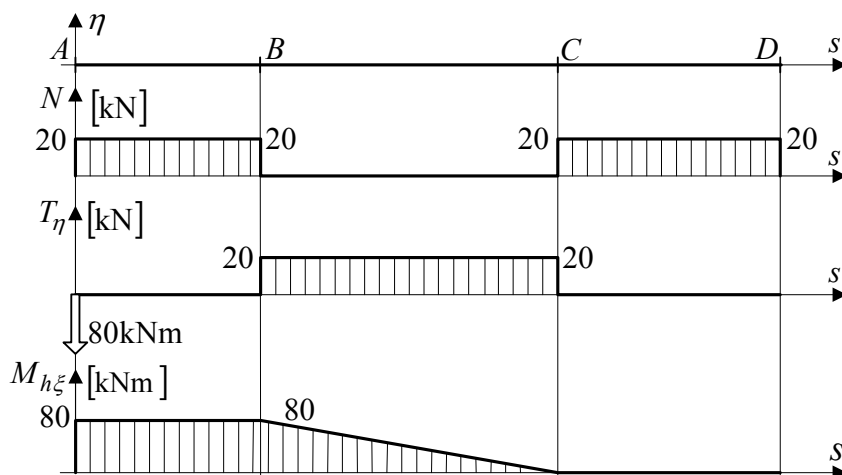
$K_\xi = 1460 \text{ cm}^3$.

Feladat:

- Az ABCD rúd igénybevételi ábráinak megrajzolása, a veszélyes keresztmetszet meghatározása.
- Feszültségeloszlás megrajzolása a veszélyes keresztmetszeten, a veszélyes pont meghatározása.
- A tartó ellenőrzése feszültségcsúcsra.

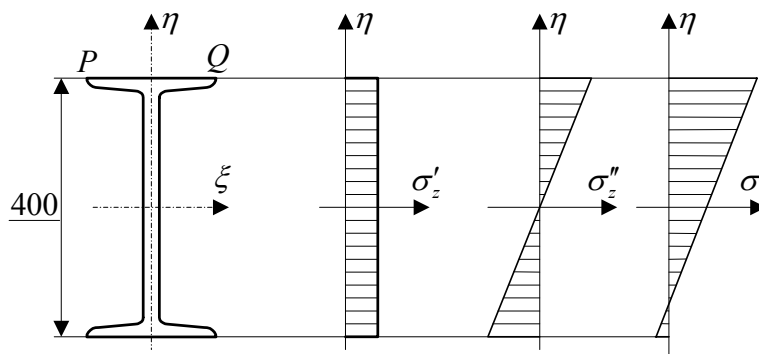
Kidolgozás:

- Az ABCD rúd igénybevételi ábráinak megrajzolása, a veszélyes keresztmetszet meghatározása:



Veszélyes keresztmetszet: az AB rúdszakasz minden keresztmetszete.

- Feszültségeloszlás megrajzolása a veszélyes keresztmetszeten:



Veszélyes pontok: a PQ vonalszakasz minden pontja

c) A tartó ellenőrzése feszültségcsúcsra:

Megfelel a tartó, ha a veszélyes keresztmetszet veszélyes pontjaiban:

$$\sigma_{z \max} \leq \frac{R_{p0,2}}{n_F}.$$

A veszélyes pontban a feszültség: $\sigma_{z \max} = \sigma'_{z \max} + \sigma''_{z \max}$,

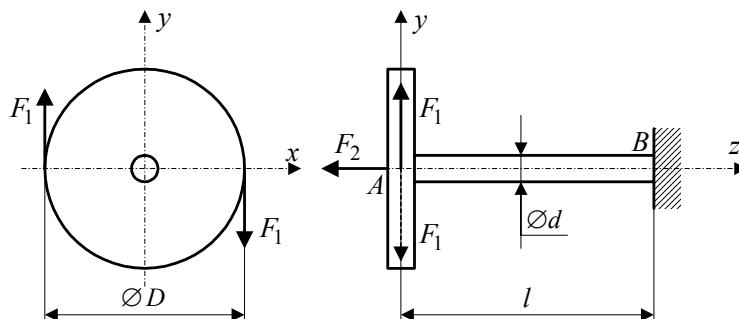
$$\sigma'_{z \max} = \frac{N}{A}, \text{ illetve } \sigma''_{z \max} = \frac{M_{h\xi}}{K_\xi}.$$

$$\text{Behelyettesítve: } \sigma_{z \max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{h\xi}}{K_\xi} = \frac{20 \cdot 10^3}{118 \cdot 10^2} + \frac{80 \cdot 10^6}{1460 \cdot 10^3} = 1,69 + 54,79 = 56,48 \text{ MPa}.$$

A megengedett legnagyobb feszültség: $\sigma_{\text{meg}} = \frac{R_{p0,2}}{n_F} = 64 \text{ MPa}.$

A tartó megfelel, mert $\sigma_{z \max} \leq \sigma_{\text{meg}}$, vagyis $56,48 < 64$.

6.7.3. feladat: Húzás-nyomás és csavarás



Adott:

$$F_1 = 5 \text{ kN}, F_2 = 20 \text{ kN},$$

$$d = 80 \text{ mm}, D = 1,2 \text{ m},$$

$$R_{p0,2} = 180 \text{ MPa},$$

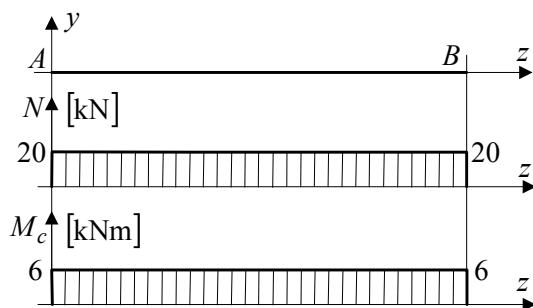
$$n_F = 1,5.$$

Feladat:

- Az igénybevételi ábrák megrajzolása, a veszélyes keresztmetszet meghatározása.
- A feszültségeloszlás megrajzolása a $z = l/2$ helyen, a veszélyes pontok meghatározása.
- A tartó ellenőrzése feszültségcsúcsra.

Kidolgozás:

- Az igénybevételi ábrák megrajzolása, a veszélyes keresztmetszet meghatározása:

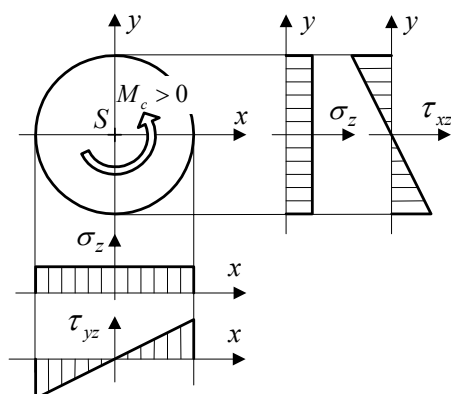


A M_c csavaró nyomaték nagysága:

$$M_c = D F_1 = 1,2 \cdot 5 = 6 \text{ kNm}.$$

Veszélyes keresztmetszet: a tartó minden keresztmetszete azonos mértékben veszélyes.

b) A feszültségeloszlás megrajzolása a $z = l/2$ helyen, a veszélyes pontok meghatározása:



Veszélyes pontok: a palást pontjai ($R = \frac{d}{2}$).

c) A tartó ellenőrzése feszültségcsúcsra:

Megfelel a tartó, ha a veszélyes keresztmetszet veszélyes pontjaiban:

$$\sigma_{\text{red max}} \sigma_{\text{meg}} = \frac{\sigma_F}{n_F} = \frac{180}{1,5} = 120 \text{ MPa}.$$

Keresztmetszeti

jellemzők:

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{80^2 \pi}{4} = 5026,5 \text{ mm}^2,$$

$$K_p = \frac{d^3 \pi}{16} = \frac{80^3 \pi}{16} = 100,53 \cdot 10^3 \text{ mm}^3.$$

A feszültségi koordináták a palást pontjaiban ($R = D/2$):

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{20 \cdot 10^3}{5026,5} = 3,98 \text{ MPa}, \quad \tau_{zy \text{ max}} = \frac{M_c}{K_p} = \frac{6 \cdot 10^6}{100,53 \cdot 10^3} = 59,68 \text{ MPa}.$$

A $\sigma_{\text{red max}}$ Mohr szerint:

$$\sigma_{\text{red max}} = \sigma_{\text{red}}(P) = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{yz \text{ max}}^2} = \sqrt{3,98^2 + 4 \cdot 59,68^2} = 119,43 \text{ MPa}.$$

A tartó Mohr elmélet szerint megfelel, mert

$$\sigma_{\text{red max}} = 119,43 \text{ MPa} < \sigma_{\text{meg}} = 120 \text{ MPa} \text{ teljesül.}$$

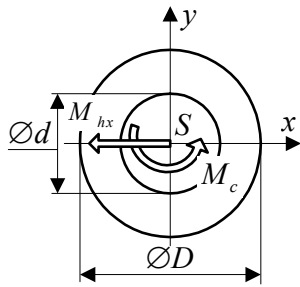
A $\sigma_{\text{red max}}$ Huber-Mises-Hencky szerint:

$$\sigma_{\text{red max}} = \sigma_{\text{red}}(P) = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{yz \text{ max}}^2} = \sqrt{3,98^2 + 3 \cdot 59,68^2} = 103,45 \text{ MPa}$$

A tartó Huber-Mises-Hencky szerint megfelel, mert

$$\sigma_{\text{red max}} = 103,45 \text{ MPa} < \sigma_{\text{meg}} = 120 \text{ MPa} \text{ teljesül.}$$

6.7.4. feladat: Csavarás és egyenes hajlítás



Adott: egy körgyűrű keresztmetszetű tartó veszélyes keresztmetszetének igénybevétele:

$$\vec{M}_S = (M_c \vec{e}_z + M_{hx} \vec{e}_x) = (800 \vec{e}_z - 600 \vec{e}_x) \text{ Nm}, \quad \text{valamint}$$

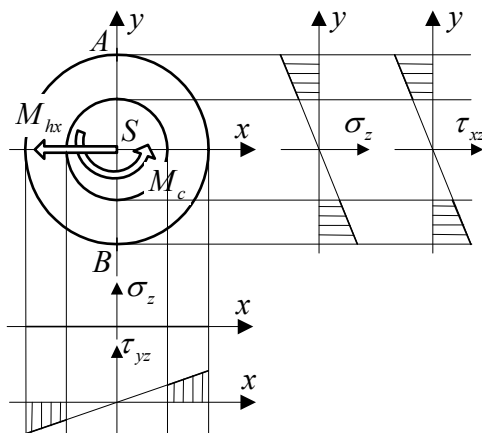
$$D = 2d, \quad \sigma_{\text{meg}} = 80 \text{ MPa}.$$

Feladat:

- Feszültségeloszlások rajzolása a keresztmetszet x és y tengelye mentén, valamint a veszélyes pont(ok) meghatározása.
- Az M_{red} redukált nyomaték meghatározása.
- A keresztmetszet méretezése *Mohr* elmélet szerint.

Kidolgozás:

- Feszültségeloszlások rajzolása a keresztmetszet x és y tengelye mentén, valamint a veszélyes pont(ok) meghatározása:



$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y,$$

$$\tau_{xz} = \frac{M_c}{I_p} y, \quad \tau_{zy} = \frac{-M_c}{I_p} x$$

Veszélyes pontok:

- hajlításból az A és B pont,
- csavarásból a palást valamennyi pontja,
- hajlításból és csavarásból együttesen az A és B pont veszélyes.

Tehát a keresztmetszet méretezését az A , vagy B pontbeli redukált feszültségek figyelembevételével kell elvégezni.

- Az M_{red} redukált nyomaték meghatározása:

$$\sigma_{\text{red max}} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{K_x}\right)^2 + \beta \left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2}}{K_x} = \frac{M_{\text{red}}}{K_x}.$$

$$\text{Mohr szerint } \beta = 4: \quad M_{\text{red}} = \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2} = \sqrt{\left(60^2 + \frac{4}{4} 80^2\right)} 10^4 = 1000 \text{ Nm}.$$

Huber-Mises-Hencky szerint $\beta = 3$:

$$M_{\text{red}} = \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2} = \sqrt{\left(60^2 + \frac{3}{4} 80^2\right)} 10^4 = 916,5 \text{ Nm}.$$

- A keresztmetszet méretezése *Mohr* szerint:

$$\text{A tartó megfelel, ha } \sigma_{\text{red max}} \leq \sigma_{\text{meg}}, \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{\text{red}}}{K_x} \leq \sigma_{\text{meg}}.$$

$$\text{Ebből } K_x \geq \frac{M_{\text{red}}}{\sigma_{\text{meg}}}.$$

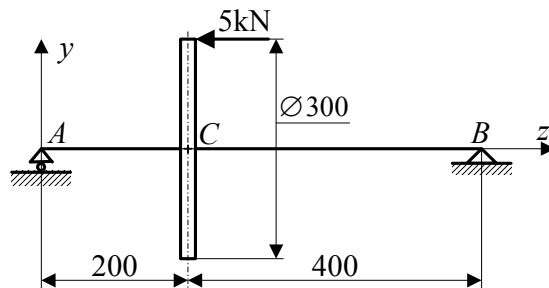
$$\text{Mivel } D = 2d, \text{ ezért } K_x = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{64} \frac{2}{D} = \frac{(16 - 1) d^4 \pi}{64 d} = \frac{15}{64} d^3 \pi$$

$$\text{A méretezési egyenlőtlenségből: } d \geq \sqrt[3]{\frac{64}{15 \pi} \frac{M_{\text{red}}}{\sigma_{\text{meg}}}} = \sqrt[3]{\frac{64}{15 \pi} \frac{10^6}{80}} = 25,7 \text{ mm},$$

$$\Rightarrow D = 51,4 \text{ mm}.$$

Szabványos külső átmérőt választva (MSz 4337-64): $D = 60 \text{ mm}$ és $d = 30 \text{ mm}$.

6.7.5. feladat: Húzás-nyomás és egyenes hajlítás



Adott:

A kör keresztmetszetű kéttámaszú tartó méretei és

$$\sigma_{\text{meg}} = R_{p0,2} = 160 \text{ MPa},$$

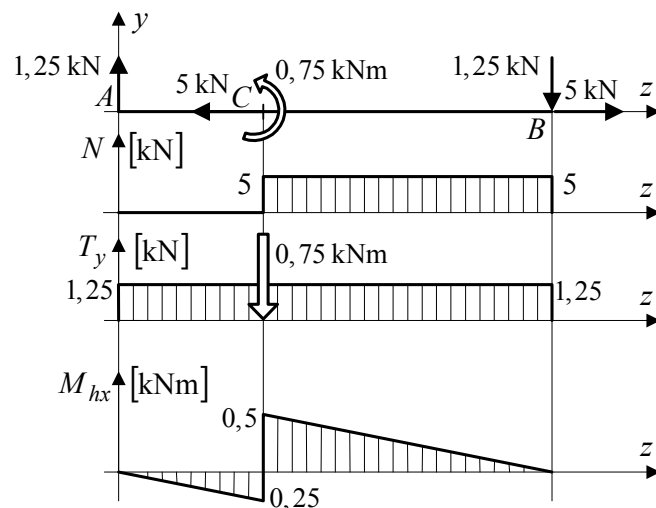
$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}.$$

Feladat:

- Az ACB rúd igénybevételi ábráinak megrajzolása, a veszélyes keresztmetszet meghatározása.
- A feszültségeloszlás megrajzolása a veszélyes keresztmetszeten.
- A tartó méretezése feszültségcsúcsra.
- A rúdban felhalmozott alakváltozási energia meghatározása.

Kidolgozás:

- Az ACB rúd igénybevételi ábráinak megrajzolása, a veszélyes keresztmetszet meghatározása:



$$M_c = -5 \cdot 0,15 = -0,75 \text{ kNm}$$

$$M_a = 0 = -0,75 - F_{By} \cdot 0,6,$$

$$F_{By} = -1,25 \text{ kN},$$

$$M_b = 0 = F_{Ay} \cdot 0,6 - 0,75,$$

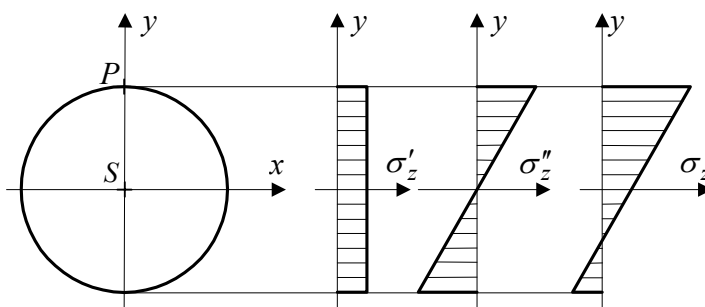
$$F_{Ay} = 1,25 \text{ kN},$$

$$\sum F_x = 0 = -5 + F_{Bx},$$

$$F_{Bx} = 5 \text{ kN}.$$

Veszélyes keresztmetszet a C^+ .

- Feszültségeloszlás megrajzolása a veszélyes keresztmetszeten:



Veszélyes pont: P .

c) A tartó méretezése feszültségcsúcsra:

A tartó megfelel, ha a veszélyes keresztmetszet veszélyes pontjaiban $\sigma_{z \max} \leq \sigma_{\text{meg}}$.

$$\sigma_{z \max} = \sigma'_{z \max} + \sigma''_{z \max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{K_x},$$

a keresztmetszeti jellemzők: $A = \frac{d^2 \pi}{4}$, $K_x = \frac{d^3 \pi}{32}$.

A keresztmetszeti jellemzőket a méretezési egyenlőtlenségbe behelyettesítve:

$$\frac{4N}{d^2 \pi} + \frac{32M_{hx}}{d^3 \pi} \leq \sigma_{\text{meg}}. \quad \text{Ez a } d \text{ ismeretlenre nézve harmadfokú egyenlet.}$$

A harmadfokú egyenlet megoldása helyett a tartót először csak hajlításra méretezzük, majd a kapott méretet megnövelve hajlításra és húzásra ellenőrizzük:

$$\frac{32M_{hx}}{d^3 \pi} \leq \sigma_{\text{meg}} \Rightarrow d \sqrt[3]{\frac{32M_{hx}}{\sigma_{\text{meg}} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,5 \cdot 10^6}{160 \pi}} = 33,96 \text{ mm}.$$

Az átmérőre egy ennél nagyobb szabványos d értéket (MSz 4337-64) választva, legyen: $d = 36 \text{ mm}$.

Ezzel az átmérővel a keresztmetszeti jellemzők: $A = \frac{36^2 \pi}{4} = 1017,88 \text{ mm}^2$,

$$K_x = \frac{36^3 \pi}{32} = 4580,44 \text{ mm}^3, \quad I_x = \frac{36^4 \pi}{64} = 82447,96 \text{ mm}^4.$$

A rúd ellenőrzése húzásra és hajlításra:

$$\sigma_{z \max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{K_x} = \frac{5 \cdot 10^3}{1017,88} + \frac{0,5 \cdot 10^6}{4580,44} = 4,91 + 109,16 = 114,07 \text{ MPa}.$$

A rúd megfelel, mivel $\sigma_{z \max} \leq \sigma_{\text{meg}}$, vagyis $114,07 < 130$.

d) A rúdban felhalmozott alakváltozási energia meghatározása: $U = U_{\text{húz.}} + U_{\text{hajl.}} + U_{\text{nyír.}}$.

A nyírásból származó alakváltozási energiát elhanyagolva:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{N^2}{AE} dz + \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{M_{hx}^2}{I_x E} dz = \\ &= \frac{1}{2} \frac{N^2 l_{CB}}{AE} + \frac{1}{2} \frac{l_{AC}}{I_x E} \left\{ 0 + 4[M_{hx}(0,1)]^2 + [M_{hx}(0,2)]^2 \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2 I_x E} \frac{l_{CB}}{6} \{ [M_{hx}(0,2)]^2 + 4 [M_{hx}(0,4)]^2 + 0 \} = \frac{(5 \cdot 10^3)^2 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 1017,88 \cdot 2 \cdot 10^5} + \\
& + \frac{1}{2 \cdot 82447,96 \cdot 2 \cdot 10^5} \frac{0,2 \cdot 10^3}{6} [0 + 4 \cdot (-0,125 \cdot 10^6)^2 + (-0,25 \cdot 10^6)^2] + \\
& + \frac{1}{2 \cdot 82447,96 \cdot 2 \cdot 10^5} \frac{0,4 \cdot 10^3}{6} [(0,5 \cdot 10^6)^2 + 4 \cdot (0,25 \cdot 10^6)^2 + 0] = \\
& = 24,56 + 63,17 + 505,37 = 593,1 \text{ Nmm} = 0,5931 \text{ J} .
\end{aligned}$$

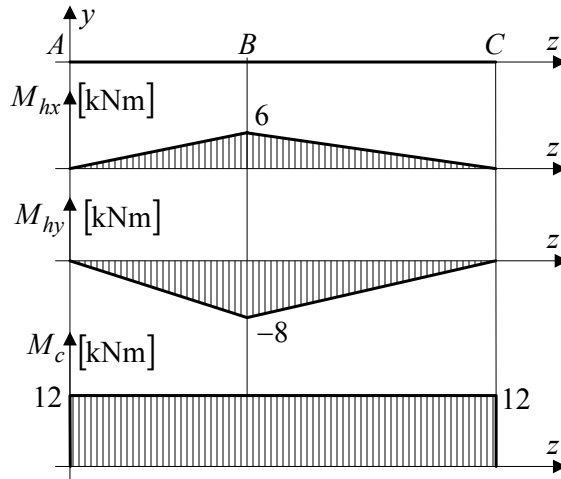
6.7.6. feladat: Csavarás és egyenes hajlítás

Adott:

A d átmérőjű rúd igénybevételi ábrái és a rúd anyagának $\sigma_{\text{meg}} = 120 \text{ MPa}$ megengedett feszültsége.

Feladat:

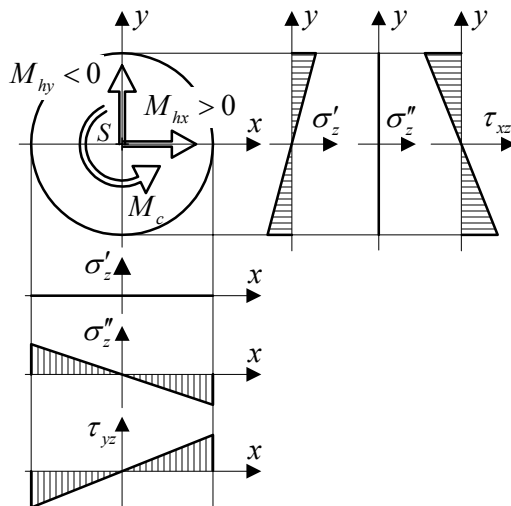
- A veszélyes keresztmetszet meghatározása és a feszültségeloszlás megrajzolása a veszélyes keresztmetszeten.
- A Mohr szerinti redukált nyomaték meghatározása a veszélyes keresztmetszeten.
- A rúd méretezése Mohr szerint.



Kidolgozás:

- A veszélyes keresztmetszet meghatározása és a feszültségeloszlás megrajzolása a veszélyes keresztmetszeten:

A veszélyes keresztmetszet: B.



A $\sigma_z(x, y)$ feszültségeloszlás zérusvonal:

$$\sigma_z(x, y) = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x = 0 .$$

Mivel $I_x = I_y$, ezért a zérusvonal

$$\text{egyenlete: } y = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}} x .$$

A keresztmetszet veszélyes pontjai:

- csavarásból az $R = d / 2$ pontok,
- hajlításból a zérusvonalától legtávolabb levő két pont.

A zérusvonal párhuzamos az $\vec{M}_h = M_{hx} \vec{e}_x - M_{hy} \vec{e}_y$ nyomatékvektorral $\Rightarrow$ egyenes hajlítás.

b) A Mohr szerinti redukált nyomaték meghatározása a veszélyes keresztmetszeten:

$$M_{\text{red}} = \sqrt{(M_{hx}^2 + M_{hy}^2) + \frac{\beta}{4} M_c^2} = \sqrt{6^2 + 8^2 + 12^2} = 15,62 \text{ kNm}.$$

c) A rúd méretezése a Mohr elmélet szerint:

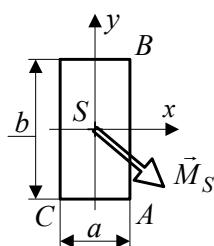
A tartó megfelel, ha: $\sigma_{\text{red max}} \leq \sigma_{\text{meg}}$.

A veszélyes pontban a feszültség: $\sigma_{\text{red max}} = \frac{M_{\text{red}}}{K_x}$, $K_x = \frac{d^3 \pi}{32}$.

$$\frac{32 M_{\text{red}}}{d^3 \pi} \leq \sigma_{\text{meg}} \Rightarrow d \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{red}}}{\sigma_{\text{meg}} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 15,62 \cdot 10^6}{120 \pi}} = 109,86 \text{ mm}.$$

Szabványos (MSz 4337-64) d értéket választva, a rúd átmérője: $d = 110 \text{ mm}$.

6.7.7. feladat: Ferde hajlítás



Adott:

A rúd K keresztmetszetének méretei és igénybevétele:

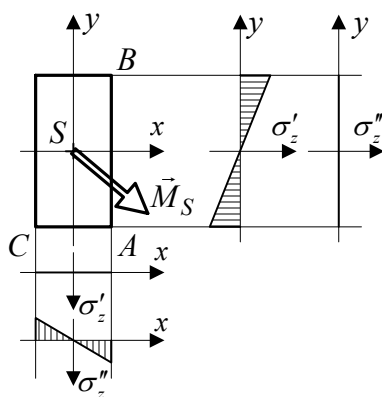
$$\vec{M}_S = (160 \vec{e}_x - 100 \vec{e}_y) \text{ kNm}, \quad a = 25 \text{ mm}, \quad b = 50 \text{ mm}.$$

Feladat:

- A feszültségeloszlás megrajzolása és a veszélyes pontok meghatározása.
- A feszültségállapot meghatározása az A , B és C pontokban.
- A zérusvonal egyenletének meghatározása.

Kidolgozás:

a) A feszültségeloszlás megrajzolása és a veszélyes pontok meghatározása:



Feszültségeloszlás:

$$\sigma_z(x, y) = \sigma'_z + \sigma''_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x.$$

Veszélyes pontok a B és C .

b) A feszültségállapot meghatározása az A , B és C pontokban:

Keresztmetszeti jellemzők:

$$K_x = \frac{2 I_x}{b} = \frac{25 \cdot 50^2}{6} = 10417 \text{ mm}^3 \quad K_y = \frac{2 I_y}{a} = \frac{50 \cdot 25^2}{6} = 5208 \text{ mm}^3.$$

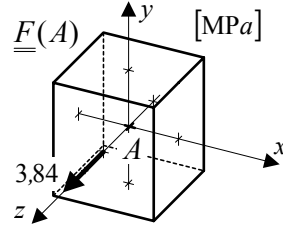
A keresztmetszet igénybevétele ferde hajlítás: $M_{hx} = 160 \text{ Nm}$, $M_{hy} = 100 \text{ Nm}$.

A σ_z feszültség a keresztmetszet tetszőleges P pontjában: $\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y_P + \frac{M_{hy}}{I_y} x_P$.

Feszültségállapot az A , B és C pontokban:

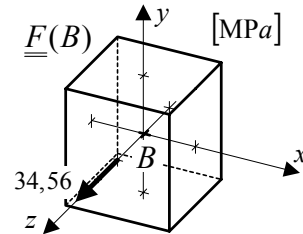
$$\sigma_z(A) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_A + \frac{M_{hy}}{I_y} x_A = -\frac{M_{hx}}{K_x} + \frac{M_{hy}}{K_y} = -\frac{160 \cdot 10^3}{10417} + \frac{100 \cdot 10^3}{5208} = 3,84 \text{ MPa},$$

$$\underline{\underline{F}}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,84 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$



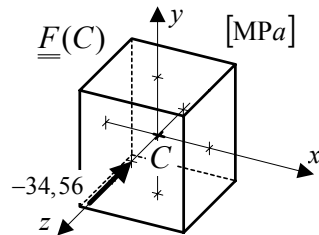
$$\sigma_z(B) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_B + \frac{M_{hy}}{I_y} x_B = \frac{M_{hx}}{K_x} + \frac{M_{hy}}{K_y} = \frac{160 \cdot 10^3}{10417} + \frac{100 \cdot 10^3}{5208} = 34,56 \text{ MPa},$$

$$\underline{\underline{F}}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 34,56 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$



$$\sigma_z(C) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_C + \frac{M_{hy}}{I_y} x_C = -\frac{M_{hx}}{K_x} - \frac{M_{hy}}{K_y} = -\frac{160 \cdot 10^3}{10417} - \frac{100 \cdot 10^3}{5208} = -34,56 \text{ MPa}$$

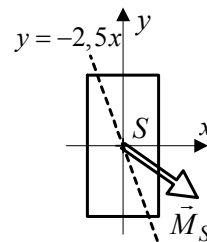
$$\underline{\underline{F}}_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -34,56 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



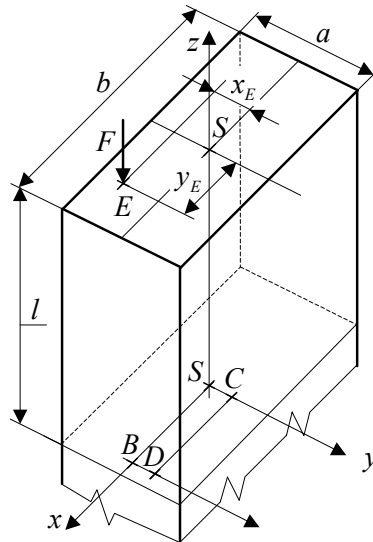
c) A zérusvonal egyenletének meghatározása:

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x = 0.$$

$$y = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}} \frac{I_x}{I_y} x = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}} \frac{K_x}{K_y} \frac{b}{a} x = -\frac{100}{160} \frac{10417}{5208} \frac{50}{25} x = -2,5 x.$$



6.7.8. feladat: Excentrikus húzás-nyomás



Adott:

$F = 6 \text{ MN} = 6 \cdot 10^6 \text{ N}$, $a = 1,2 \text{ m}$, $b = 2,5 \text{ m}$,
 $E = (0,8; -0,4; l) \text{ m}$, $B = (1,2; 0; 0) \text{ m}$, $l = 3 \text{ m}$,
 $C = (0; 0,5; 0) \text{ m}$, $D = (1,2; 0,5; 0) \text{ m}$.

Feladat:

- A $z = 0$ keresztmetszeten a rúd igénybevétele, a keresztmetszet jellemzőinek, illetve az S , B , C és a D pontokban a feszültségeknek a meghatározása.
- A zérusvonal egyenletének a felírása és a veszélyes pont meghatározása.
- Feszültségeloszlás megrajzolása az x és az y tengelyek mentén, valamint.
- A keresztmetszeten fellépő legnagyobb feszültség meghatározása.
- Az önsúlyt figyelembe véve az a) és d) feladat megoldása, ha $\rho = 8600 \text{ kg/m}^3$.

Kidolgozás:

- A $z = 0$ keresztmetszeten a rúd igénybevétele, a keresztmetszet jellemzőinek, illetve az S , B , C és a D pontokban a feszültségeknek a meghatározása:

A keresztmetszet igénybevétele:

$$N = -F = -6 \cdot 10^6 \text{ N}, \quad M_{hx} = -F y_E = -6 \cdot 10^6 (-0,4) = 2,4 \cdot 10^6 \text{ Nm},$$

$$M_{hy} = -F x_E = -6 \cdot 10^6 \cdot 0,8 = -4,8 \cdot 10^6 \text{ Nm}.$$

A keresztmetszet geometriai jellemzői: $A = a b = 1,2 \cdot 2,5 = 3 \text{ m}^2$,

$$I_x = \frac{b a^3}{12} = \frac{2,5 \cdot 1,2^3}{12} = 0,36 \text{ m}^4, \quad I_y = \frac{a b^3}{12} = \frac{1,2 \cdot 2,5^3}{12} = 1,5625 \text{ m}^4.$$

$$\text{Feszültség számítás: } \sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z + \sigma'''_z = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x,$$

$$\sigma_z(S) = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_S + \frac{M_{hy}}{I_y} x_S = \frac{-6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} = -2 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z(B) = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_B + \frac{M_{hy}}{I_y} x_B = \frac{-6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} + \frac{-4,8 \cdot 10^9}{1,5625 \cdot 10^{12}} 1,2 \cdot 10^3 =$$

$$= -2 - 3,69 = -5,69 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z(C) = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_C + \frac{M_{hy}}{I_y} x_C = \frac{-6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} + \frac{2,4 \cdot 10^9}{0,36 \cdot 10^{12}} 0,5 \cdot 10^3 =$$

$$= -2 + 3,33 = 1,33 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z(D) = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_D + \frac{M_{hy}}{I_y} x_D = \frac{-6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} + \frac{-4,8 \cdot 10^9}{1,5625 \cdot 10^{12}} 1,2 \cdot 10^3 + \frac{2,4 \cdot 10^9}{0,36 \cdot 10^{12}} 0,5 \cdot 10^3 =$$

$$= -2 - 3,69 + 3,33 = -2,36 \text{ MPa}.$$

b) A zérusvonal egyenletének a felírása és a veszélyes pont meghatározása:

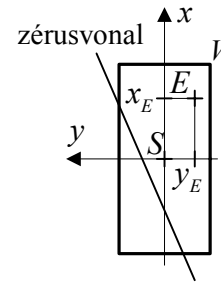
$$\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z + \sigma'''_z = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x = 0,$$

$$y = -\frac{N}{M_{hx}} \frac{I_x}{A} - \frac{M_{hy}}{M_{hx}} \frac{I_x}{I_y} x = -\frac{1}{y_E} \frac{I_x}{A} - \frac{x_E}{y_E} \frac{I_x}{I_y} x,$$

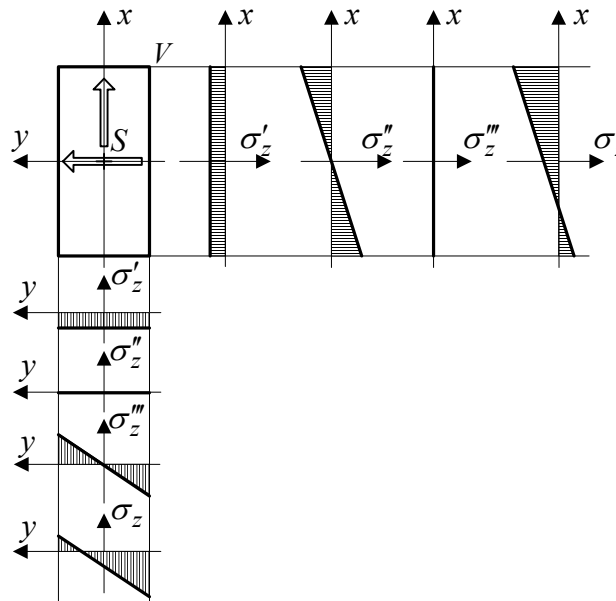
$$y = -\frac{1}{-0,4} \frac{0,36}{3} - \frac{0,8}{-0,4} \frac{0,36}{1,5625} x,$$

Zérusvonal egyenlete: $y = 0,3 + 0,4608 x$.

Veszélyes pont: V – a keresztmetszet zérusvonalától legtávolabb lévő pontja.



c) Feszültségeloszlás megrajzolása az x és az y tengelyek mentén:



d) A keresztmetszeten fellépő legnagyobb feszültség meghatározása:

$$\sigma_{z \max} = \sigma_z(V) = \sigma'_z(V) + \sigma''_z(V) + \sigma'''_z(V) = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_V + \frac{M_{hy}}{I_y} x_V,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{z \max} &= \frac{-6 \cdot 10^6}{3} + \frac{-4,8 \cdot 10^6}{1,5625} 1,25 + \frac{2,4 \cdot 10^6}{0,36} (-0,6) = \\ &= -2 \cdot 10^6 - 3,84 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^6 = -9,84 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -9,84 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

e) Az önsúlyt figyelembevéve az a) és d) feladat megoldása:

Terhelés az önsúlyból: $N_g = -G = -\rho g l a b = -8600 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 1,2 \cdot 2,5 = -774000 \text{ N}$.

Az igénybevételek: $N = -F + N_g = -6 \cdot 10^6 - 774000 = -6,774 \cdot 10^6 \text{ N}$.

Az M_{hx} -et és az M_{hy} -t nem változtatja meg az önsúly figyelembevétele.

A feszültségek:

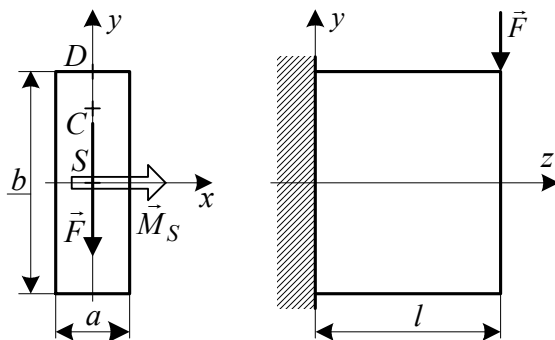
$$\begin{aligned}\sigma_z(S) &= \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_S + \frac{M_{hy}}{I_y} x_S = \frac{-6,774 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} = -2,258 \text{ MPa}, \\ \sigma_z(B) &= \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_B + \frac{M_{hy}}{I_y} x_B = \frac{-6,774 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} + \frac{-4,8 \cdot 10^9}{1,5625 \cdot 10^{12}} 1,2 \cdot 10^3 = \\ &= -2,258 - 3,69 = -5,948 \text{ MPa}, \\ \sigma_z(C) &= \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_C + \frac{M_{hy}}{I_y} x_C = \frac{-6,774 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} + \frac{2,4 \cdot 10^9}{0,36 \cdot 10^{12}} 0,5 \cdot 10^3 = \\ &= -2,258 + 3,33 = 1,072 \text{ MPa}, \\ \sigma_z(D) &= \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_D + \frac{M_{hy}}{I_y} x_D = \\ &= \frac{-6,774 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} + \frac{-4,8 \cdot 10^9}{1,5625 \cdot 10^{12}} 1,2 \cdot 10^3 + \frac{2,4 \cdot 10^9}{0,36 \cdot 10^{12}} 0,5 \cdot 10^3 = \\ &= -2,258 - 3,69 + 3,33 = -2,618 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

Veszélyes pont: változatlanul a V .

A keresztmetszeten fellépő legnagyobb feszültség a meghatározása:

$$\begin{aligned}\sigma_{z \max} &= \sigma_z(V) = \sigma'_z(V) + \sigma''_z(V) + \sigma'''_z(V) = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_V + \frac{M_{hy}}{I_y} x_V, \\ \sigma_{z \max} &= \frac{-6,774 \cdot 10^6}{3} + \frac{-4,8 \cdot 10^6}{1,5625} 1,25 + \frac{2,4 \cdot 10^6}{0,36} (-0,6) = \\ &= -2,258 \cdot 10^6 - 3,84 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^6 = -10,098 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -10,098 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

6.7.9. feladat: Nyírás és hajlítás



Adott:

$$\vec{F} = (-30 \vec{e}_y) \text{ kN}, \quad a = 20 \text{ mm},$$

$$b = 60 \text{ mm}, \quad l = 50 \text{ mm},$$

$$y_C = 20 \text{ mm}.$$

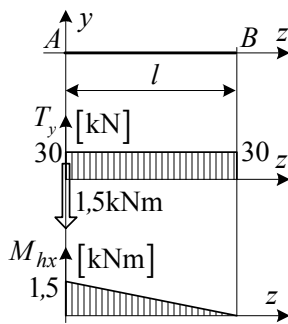
Feladat:

a) A rúd igénybevételi ábráinak megrajzolása és a veszélyes keresztmetszet meghatározása.

- A feszültségeloszlások megrajzolása és a veszélyes pont(ok) meghatározása a veszélyes keresztmetszeten.
- A feszültségállapot meghatározása a veszélyes keresztmetszeten a D , C és az S pontokban.
- A *Mohr* szerinti σ_{red} redukált feszültség meghatározása a veszélyes pontokban.

Kidolgozás:

a) A rúd igénybevételi ábráinak megrajzolása és a veszélyes keresztmetszet meghatározása:



Veszélyes keresztmetszet a befalazás helye: A.

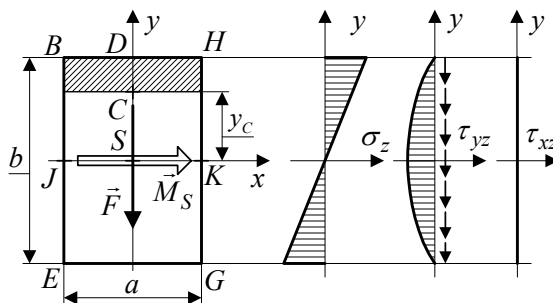
A veszélyes keresztmetszet igénybevétele:

- x tengely körüli hajlítás: $M_{hx} = 1,5 \text{ kNm}$,
- y irányú nyírás: $T_y = 30 \text{ kN}$.

A keresztmetszet x tengelyre számított másodrendű nyomatéka:

$$I_x = \frac{a b^3}{12} = \frac{20 \cdot 60^3}{12} = 0,36 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

b) A feszültségeloszlások megrajzolása és a veszélyes pont(ok) meghatározása a veszélyes keresztmetszeten:



$$\sigma_x = \frac{M_{hz}}{I_z} y,$$

$$\tau_{yz} = -\frac{T_y S_x(y)}{I_x a(y)} = -\frac{T_y}{2 I_x} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right).$$

Veszélyes pontok:

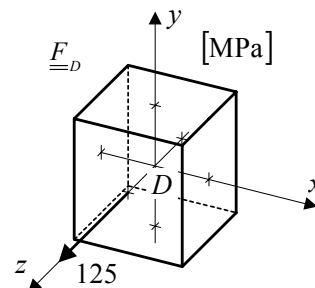
Hajlításból a BDH és EG egyenes pontjai, nyírásból az x tengely, azaz a JSK egyenes pontjai.

c) A feszültségállapot meghatározása a veszélyes keresztmetszeten a D , C és az S pontokban:

A D pontban: $\tau_{yz}(D) = 0$, $\sigma_z(D) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_D$,

$$\sigma_z(D) = \frac{1,5 \cdot 10^6}{0,36 \cdot 10^6} 30 = 125 \text{ MPa}.$$

$$[\underline{F}_D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 125 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

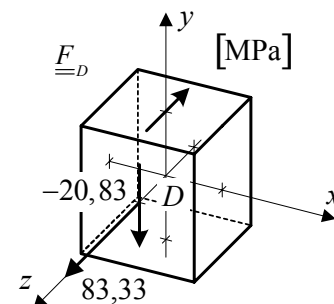


A C pontban:

$$\begin{aligned} \tau_{yz}(C) &= -\frac{3 T_y}{2 A} \left(1 - \frac{4 y_C^2}{b^2} \right) = \\ &= -\frac{3 \cdot 30 \cdot 10^3}{2 \cdot 20 \cdot 60} \left(1 - \frac{4 \cdot 20^2}{60^2} \right) = -20,83 \text{ MPa}, \end{aligned}$$

$$\sigma_z(C) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_C = \frac{1,5 \cdot 10^6}{0,36 \cdot 10^6} 20 = 83,33 \text{ MPa}.$$

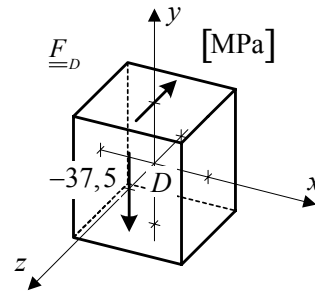
$$[\underline{F}_C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20,83 \\ 0 & -20,83 & 83,33 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$



Az S pontban: $\sigma_z(S) = 0$,

$$\tau_{yz}(S) = -\frac{3 T_y}{2 A} = -\frac{3 \cdot 30 \cdot 10^3}{2 \cdot 20 \cdot 60} = -37,5 \text{ MPa},$$

$$\left[\underline{\underline{F}}_c \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -37,5 \\ 0 & -37,5 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$



d) A *Mohr* szerinti σ_{red} redukált feszültség meghatározása a veszélyes pontokban.

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{yz}^2} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4 \tau_{yz}^2}.$$

A BDH és EG egyenes mentén csak hajlításból származó feszültség ébred:

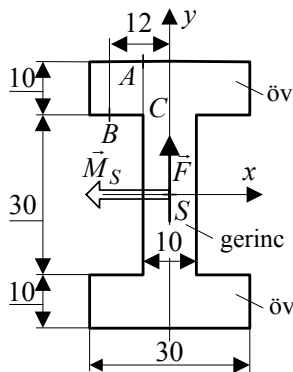
$$\tau_{yz}(y = \pm b/2) = 0. \Rightarrow \sigma_{red} = \sigma_{z \max} = \sigma_z(D) = 125 \text{ MPa}.$$

A JSK egyenes mentén csak nyírásból származó feszültség ébred:

$$\sigma_z(y = 0) = 0. \Rightarrow \sigma_{red} = 2 |\tau_{yz \max}| = 2 |\tau_{yz}(S)| = 2 \cdot 37,5 = 75 \text{ MPa}.$$

A keresztmetszeten a redukált feszültség maximuma: $\sigma_{red \max} = 125 \text{ MPa}.$

6.7.10. feladat: Nyírás és hajlítás



Adott: a keresztmetszet méretei és $\vec{F} = (25 \vec{e}_y) \text{ kN}$,

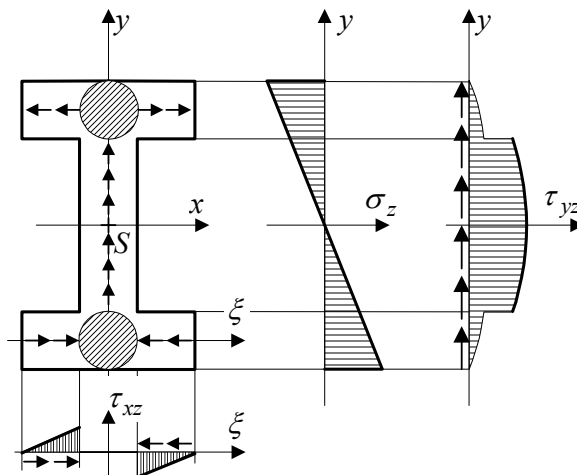
$$\vec{M}_S = (-\vec{e}_x) \text{ kNm}.$$

Feladat:

- A feszültségeloszlások megrajzolása.
- A feszültségállapot, valamint a *Mohr* szerinti redukált feszültség meghatározása a keresztmetszet A , B , C és S pontjában.

Kidolgozás:

a) A feszültségeloszlások megrajzolása:



$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y, \quad \tau_{yz} = -\frac{T_y S_x(y)}{I_x a(y)}, \quad \tau_{xz} = -\frac{T_y S_x(x)}{I_x a(x)}.$$

Ebben az esetben $M_{hx} < 0$ és $T_y < 0$.

A τ feszültség nyílfollyama a szelvény középvonala mentén folytonos $\Rightarrow$ ebből adódik ki a τ_{xz} feszültség előjele.

A τ_{yz} eloszlásban a szakadás abból adódik, hogy a gerincben $a = 10$ mm, az övben pedig $a = 30$ mm.

A keresztmetszet sraffozott tartományaiban a τ feszültségek nagysága bizonytalan.

b) A feszültségállapot, valamint a Mohr szerinti redukált feszültség meghatározása a keresztmetszet A , B , C és S pontjában:

$$\text{Az } I_x \text{ másodrendű nyomaték: } I_x = \frac{30 \cdot 50^3}{12} - \frac{20 \cdot 30^3}{12} = 267,5 \cdot 10^3 \text{ mm}^4.$$

- Az A pontban:

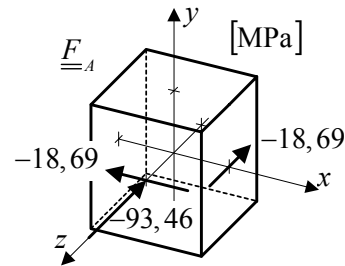
$$\tau_{yz}(A) = 0, \quad \sigma_z(A) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_A = \frac{-10^6}{267,5 \cdot 10^3} 25 = -93,46 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xz}(A) = -\frac{T_y S_x(x_A)}{I_x v}, \quad S_x(x_A) = 10 \cdot 10 \cdot 20 = 2000 \text{ mm}^3, \quad v = 10 \text{ mm},$$

$$\tau_{xz}(A) = -\frac{25 \cdot 10^3 \cdot 2000}{267,5 \cdot 10^3 \cdot 10} = -18,69 \text{ MPa},$$

$$\left[\underline{F}_A \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -18,69 \\ 0 & 0 & 0 \\ -18,69 & 0 & -93,46 \end{bmatrix} \text{ MPa},$$

$$\begin{aligned} \sigma_{red}(A) &= \sqrt{\sigma_z^2 + 4 \tau_{xz}^2} = \\ &= \sqrt{93,46^2 + 4 \cdot 18,69^2} = 100,65 \text{ MPa}. \end{aligned}$$



- A B pontban:

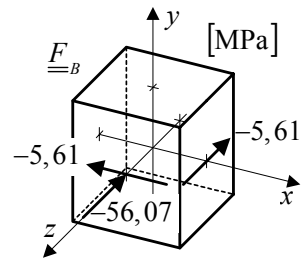
$$\tau_{yz}(B) = 0, \quad \sigma_z(B) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_B = \frac{-10^6}{267,5 \cdot 10^3} 15 = -56,07 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xz}(B) = -\frac{T_y S_x(x_B)}{I_x v}, \quad S_x(x_B) = 10 \cdot 3 \cdot 20 = 600 \text{ mm}^3, \quad v = 10 \text{ mm},$$

$$\tau_{xz}(B) = -\frac{25 \cdot 10^3 \cdot 600}{267,5 \cdot 10^3 \cdot 10} = -5,61 \text{ MPa},$$

$$\begin{bmatrix} F \\ \underline{\underline{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5,61 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5,61 & 0 & -56,07 \end{bmatrix} \text{ MPa,}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{red}(B) &= \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2} = \\ &= \sqrt{56,07^2 + 4 \cdot 5,69^2} = 57,19 \text{ MPa.} \end{aligned}$$



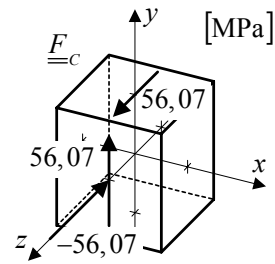
- A C pontban:

$$\tau_{xz}(C) = 0. \quad \tau_{yz}(C) = -\frac{T_y S_x(y_C)}{I_x a} = -\frac{-25 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 30 \cdot 20}{267,5 \cdot 10^3 \cdot 10} = 56,07 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_z(C) = \sigma_z(B) = -56,07 \text{ MPa,}$$

$$\begin{bmatrix} F \\ \underline{\underline{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 56,07 \\ 0 & 56,07 & -56,07 \end{bmatrix} \text{ MPa,}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{red}(C) &= \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{yz}^2} = \\ &= \sqrt{56,07^2 + 4 \cdot 56,07^2} = 125,38 \text{ MPa} \end{aligned}$$



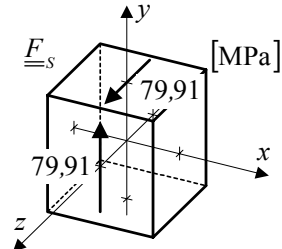
- Az S pontban: $\sigma_z(S) = 0$, $\tau_{xz}(S) = 0$, $\tau_{yz}(S) = -\frac{T_y S_x(y_S)}{I_x a}$.

$$S_x(y_S) = 10 \cdot 30 \cdot 20 + 15 \cdot 10 \cdot 7,5 = 7125 \text{ mm}^3,$$

$$\tau_{yz}(S) = -\frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 7125}{267,5 \cdot 10^3 \cdot 10} = 79,91 \text{ MPa,}$$

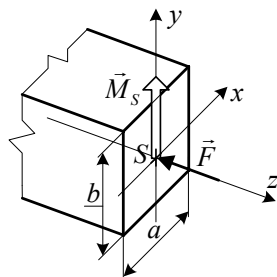
$$\begin{bmatrix} F \\ \underline{\underline{S}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 79,91 \\ 0 & 79,91 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa,}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{red}(S) &= \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{yz}^2} = 2\tau_{yz} = \\ &= 2 \cdot 79,91 = 159,82 \text{ MPa} \end{aligned}$$



A keresztmetszet veszélyes pontjai az x tengelyen vannak.

6.7.11. feladat: Nyomás és egyenes hajlítás



Adott:

$$a = 40 \text{ mm, } b = 60 \text{ mm,}$$

$$\vec{F} = (-120 \vec{e}_z) \text{ kN, } \vec{M}_S = (4 \vec{e}_y) \text{ kNm,}$$

$$R_{p0,2} = \sigma_F = 390 \text{ MPa.}$$

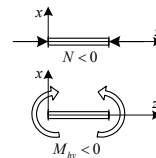
- Feladat:** a) A rúd igénybevételeinek meghatározása.
 b) A zérusvonal egyenletének felírása.
 c) Feszültségeloszlás megrajzolása az y és a z tengelyek mentén, illetve a veszélyes pontok meghatározása.
 d) A legnagyobb feszültségek meghatározása.
 e) A tényleges biztonsági tényező meghatározása.

Megoldás:

- a) A rúd igénybevételei:

A rúd nyomott: $N = -120 \text{ kN}$.

A rúd y tengely körül hajlított: $M_{hy} = -4 \text{ kNm}$.



- b) A zérusvonal egyenlete:

$$\sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x = \frac{N}{A} + \frac{M_{hy}}{I_y} x = 0 \Rightarrow x = -\frac{N}{A} \frac{I_y}{M_{hy}} \Rightarrow x = -4 \text{ mm}.$$

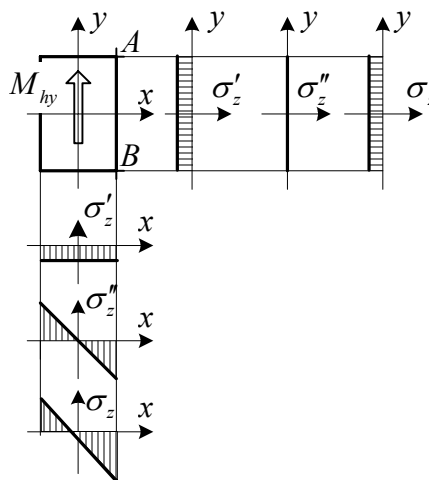
- c) Feszültségeloszlás az x, y tengelyek mentén:
 Veszélyes pontok: az AB oldalon lévő pontok.

- d) A legnagyobb feszültségek:

$$\sigma'_z = \frac{N}{A} = -50 \text{ MPa},$$

$$\sigma''_z(x = a/2) = \frac{M_{hy}}{I_y} \left(\frac{a}{2} \right) = -250 \text{ MPa},$$

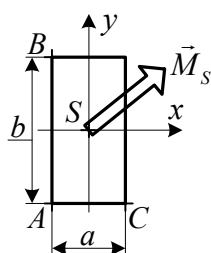
$$\sigma_{z \max} = |\sigma_z(x = a/2)| = 50 + 250 = 300 \text{ MPa}.$$



- e) A tényleges biztonsági tényező:

$$\sigma_{z \max} \leq \frac{\sigma_{jell}}{n} = \frac{R_{p0,2}}{n} \Rightarrow n_t = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{z \max}} = \frac{390}{300} = 1,3.$$

6.7.12. feladat: Ferde hajlítás



Adott:

A rúd K keresztmetszetének méretei és igénybevétele:

$$\vec{M}_s = (160 \vec{e}_x + 100 \vec{e}_y) \text{ Nm}, a = 25 \text{ mm}, b = 50 \text{ mm}.$$

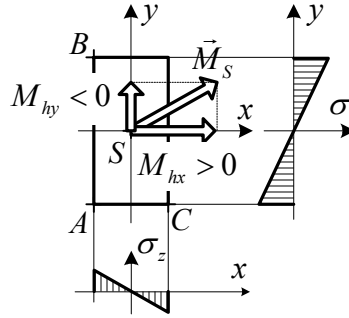
Feladat: a) A feszültségeloszlás megrajzolása és a veszélyes pontok megkeresése.

- b) A feszültségállapot meghatározása az A, B és C pontokban.
 c) A zérusvonal egyenletének meghatározása.

Megoldás:

a) Feszültségeloszlás és a veszélyes pontok:

Veszélyes pontok a B és C .



b) Feszültségállapot az A , B és C pontokban:

$$\sigma_z(A) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_A + \frac{M_{hy}}{I_y} x_A = -\frac{M_{hx}}{K_x} + \frac{M_{hy}}{K_y} = 3,84 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z(B) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_B + \frac{M_{hy}}{I_y} x_B = \frac{M_{hx}}{K_z} + \frac{M_{hy}}{K_y} = 34,56 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z(C) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_C + \frac{M_{hy}}{I_y} z_C = -\frac{M_{hx}}{K_z} - \frac{M_{hy}}{K_y} = -34,56 \text{ MPa},$$

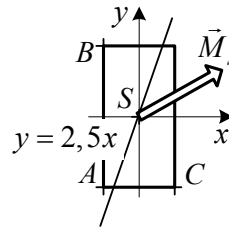
$$\begin{bmatrix} \underline{F} \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,84 \end{bmatrix} \text{ MPa}, \begin{bmatrix} \underline{F} \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 34,56 \end{bmatrix} \text{ MPa}, \begin{bmatrix} \underline{F} \end{bmatrix}_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -34,56 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

c) A zérusvonal egyenlete:

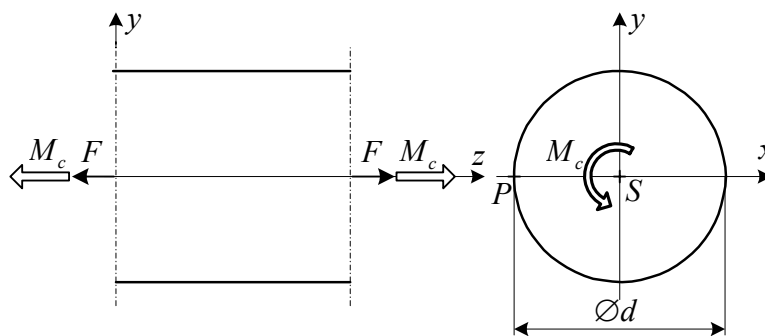
$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x = 0.$$

$$y = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}} \frac{I_x}{I_y} x = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}} \frac{K_x}{K_y} \frac{b}{a} x,$$

$$y = 2,5x.$$



6.7.13. feladat: Húzás-nyomás, csavarás



Adott:

$$F = 117,8 \text{ kN},$$

$$M_c = 0,9818 \text{ kNm},$$

$$d = 50 \text{ mm},$$

$$G = 80 \text{ GPa},$$

$$\nu = 0,3.$$

Feladat:

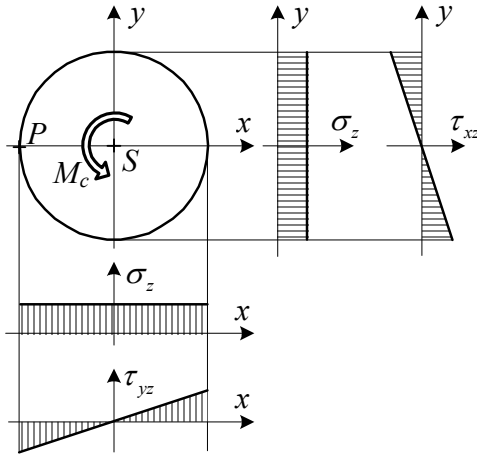
- A keresztmetszet területének és poláris másodrendű nyomatékának a meghatározása.
- A feszültségeloszlás ábrázolása és a veszélyes pont(ok) meghatározása.
- A P pontbeli feszültségi állapot meghatározása és szemléltetése az elemi kockán.
- A főfeszültségek és a redukált feszültségek meghatározása a P pontban.
- Az alakváltozási állapot meghatározása a P pontban.

Megoldás:

- A keresztmetszet területe és poláris másodrendű nyomatéka:

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = 1963,5 \text{ mm}^2, \quad I_p = \frac{d^4 \pi}{32} = 613,6 \cdot 10^3 \text{ mm}^4.$$

- A feszültségeloszlás ábrázolása és a veszélyes pont(ok) meghatározása:



Veszélyes pontok:

Húzásból veszélyes a keresztmetszet valamennyi pontja.

$$\sigma_z = \frac{N}{A}.$$

Csavarásból veszélyesek a keresztmetszet paláston lévő pontjai.

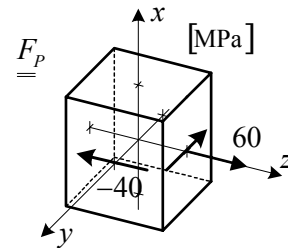
$$\tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} R.$$

Együttesen *húzásból* és *csavarásból* veszélyesek a keresztmetszet paláston lévő pontjai.

- A P pontbeli feszültségi állapot meghatározása és szemléltetése az elemi kockán:

$$\begin{bmatrix} \underline{F}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \\ 0 & -40 & 60 \end{bmatrix} \text{ MPa},$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = 60 \text{ MPa}, \quad \tau_{yz} = \frac{M_c}{I_p} x_P = -40 \text{ MPa}.$$



- A főfeszültségek és a redukált feszültségek meghatározása a P pontban:

$$\det \begin{vmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & -40 \\ 0 & -40 & (60-\sigma) \end{vmatrix} = (-\sigma) [-60\sigma + \sigma^2 - 1600] = 0$$

$$\sigma^2 - 60\sigma - 1600 = 0, \quad \sigma_{1,3} = \frac{60 \pm \sqrt{3600 + 6400}}{2} = \frac{60 \pm 100}{2}.$$

A főfeszültségek: $\sigma_1 = 80 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -20 \text{ MPa}$.

Redukált feszültség *Coulomb* szerint: $\sigma_{red} = \sigma_1 = 80 \text{ MPa}$.

Redukált feszültség *Mohr* szerint: $\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 = 100 \text{ MPa}$, vagy

$$\sigma_{red} = \sqrt{(\sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 100 \text{ MPa}.$$

Redukált feszültség *Huber-Mises-Hencky* szerint:

$$\sigma_{red} = \sqrt{(\sigma_x)^2 + 3\tau_{xy}^2} = 91,65 \text{ MPa.}$$

e) Az alakváltozási állapot meghatározása a P pontban:

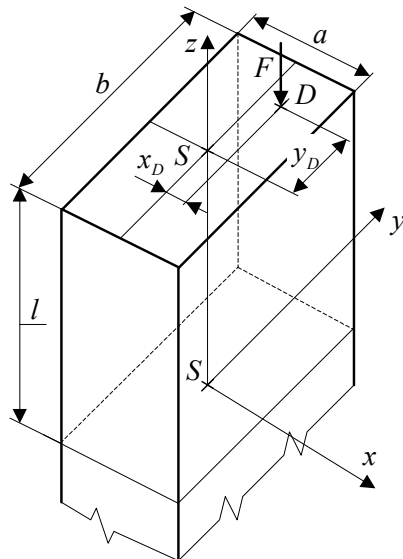
$$\left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \frac{1}{2G} \left[\underline{\underline{F}}_P - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \underline{\underline{E}} \right], \quad F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 60 \text{ MPa,}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2G} \left[\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right] = 2,88 \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2G} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right] = -0,86 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right] = -0,86 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2G} \left[\tau_{yz} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \cdot 0 \right] = \frac{\tau_{xy}}{2G} = -2,5 \cdot 10^{-4},$$

$$\left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ 0 & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,86 & 0 & 0 \\ 0 & -0,86 & -2,5 \\ 0 & -2,5 & 2,88 \end{bmatrix} 10^{-4}.$$

6.7.14. feladat: Excentrikus húzás-nyomás



Adott:

$$F = 10 \text{ MN} = 10^7 \text{ N}, \quad D(0,3; 0,6; l) \text{ m}, \\ a = 1 \text{ m}, \quad b = 2 \text{ m}$$

Feladat:

- A rúd igénybevételeinek és a keresztmetszet jellemzőinek meghatározása a $z=0$ keresztmetszeten.
- A zérusvonal egyenletének felírása és a veszélyes pont meghatározása.
- Feszültségeloszlás az x és a y tengelyek mentén.
- A keresztmetszeten fellépő legnagyobb feszültség meghatározása.

Megoldás:

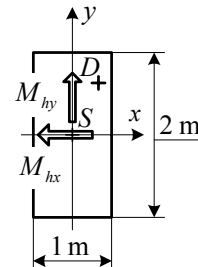
a) A rúd igénybevételei a $z=0$ keresztmetszeten és a keresztmetszet jellemzők:

A D pontban támadó erőt redukáljuk a keresztmetszet súlypontjába: a keresztmetszet igénybevétele nyomás és ferde hajlítás:

$$N = -F = -10^7 \text{ N},$$

$$M_{hx} = -F y_D = -6 \cdot 10^6 \text{ Nm},$$

$$M_{hy} = -F x_D = -3 \cdot 10^6 \text{ Nm}.$$



A keresztmetszet geometriai jellemzői: $A = a \cdot b = 2 \text{ m}^2$,

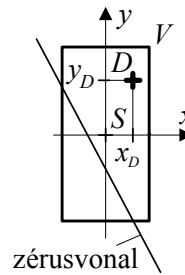
$$I_y = \frac{b a^3}{12} = 0,1667 \text{ m}^4, \quad I_x = \frac{a b^3}{12} = 0,6667 \text{ m}^4.$$

b) A zérusvonal egyenlete és a veszélyes pont:

$$\sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x + \sigma'''_x = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x = 0,$$

$$y = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}} \frac{I_x}{I_y} x - \frac{N}{M_{hx}} \frac{I_x}{A}, \quad y = -2x - 0,5556.$$

Veszélyes pont: V – a keresztmetszet zérusvonalától legtávolabb lévő pontja.

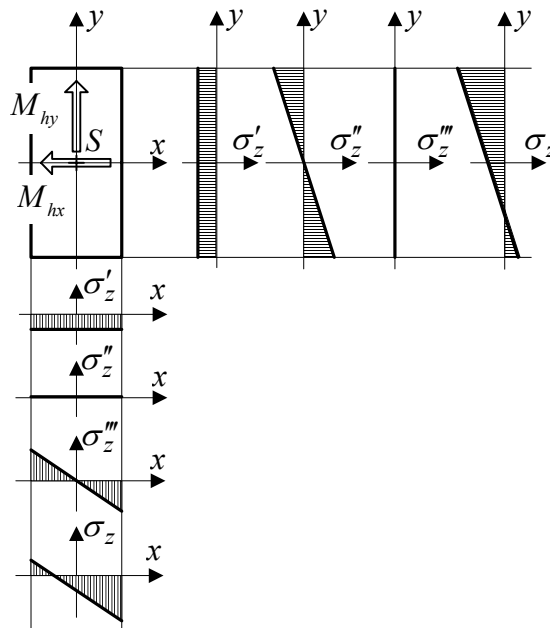


c) Feszültségeloszlás az x és a y tengelyek mentén:

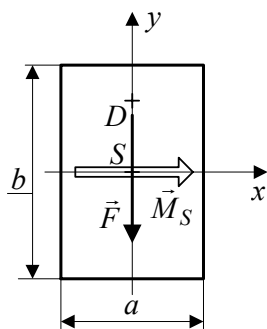
d) A keresztmetszeten fellépő legnagyobb feszültség:

$$\begin{aligned} \sigma_{z \max} &= \sigma_z(V) = \sigma'_z(V) + \sigma''_z(V) + \sigma'''_z(V) = \\ &= \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_V + \frac{M_{hy}}{I_y} x_V. \end{aligned}$$

$$\sigma_{z \max} = -23 \text{ MPa}.$$



6.7.15. feladat: Nyírás és hajlítás



Adott:

A rúd egy keresztmetszetének méretei és igénybevételei:

$$\vec{M}_S = (0, 72 \vec{e}_x) \text{ kNm}, \quad \vec{F} = (-24 \vec{e}_y) \text{ kN}, \quad a = 40 \text{ mm}, \quad b = 60 \text{ mm}.$$

Feladat:

- A feszültségeloszlások megrajzolása és a veszélyes pont(ok) meghatározása.
- A feszültségkoordináták felírása a D pontban az y_D függvényében.

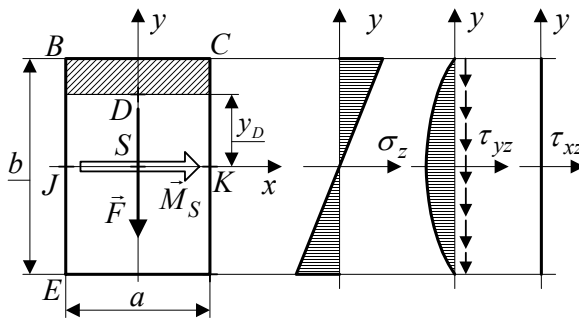
c) A σ_{red} redukált feszültség meghatározása Mohr szerint a veszélyes pontokban.

d) A σ_{red} redukált feszültség meghatározása Huber-Mises-Hencky szerint a veszélyes pontokban.

Megoldás:

a) A feszültségeloszlások és a veszélyes pont(ok):

A keresztmetszet igénybevétele: $M_{hx} = 0,72 \text{ kNm}$ és $T_y = 24 \text{ kN}$.



$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y,$$

$$\tau_{yz} = -\frac{T_y S_x(y)}{I_x a(y)} = -\frac{T_y}{2 I_x} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right)$$

Veszélyes pontok:
hajlításból a BC és EG egyenes szakasz pontjai, nyírásból az x tengely.

b) A feszültségkoordináták a D pontban az y_D függvényében:

$$\sigma_z(D) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_D, I_x = \frac{a b^3}{12}, \sigma_z(D) = \frac{12 M_{hx}}{a b^3} y_D.$$

$$\tau_{yz}(D) = -\frac{T_y S_x(y_D)}{I_x a}, S_x(y_D) = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} + y_D \right) a \left(\frac{b}{2} - y_D \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{4} - y_D^2 \right) a.$$

$$\tau_{yz}(D) = -\frac{12 T_y \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{4} - y_D^2 \right) a}{a b^3 a} = -\frac{3 T_y}{2 A} \left(1 - \frac{4 y_D^2}{b^2} \right).$$

c) A σ_{red} redukált feszültség *Mohr* szerint a veszélyes pontokban:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{yz}^2} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4 \tau_{yz}^2}.$$

A BC és EG egyenes mentén csak hajlításból származó feszültség ébred: $\tau_{yz} = 0$,

$$\sigma_{red} = \sigma_{z \max} = \frac{12 |M_{hx}|}{a b^3} |y_{\max}| = 30 \text{ MPa}.$$

A JK egyenes mentén csak nyírásból származó feszültség ébred: $\sigma_z = 0$.

$$\sigma_{red} = 2 |\tau_{yz \max}| = 2 \frac{3 T_y}{2 A} = 30 \text{ MPa}.$$

d) A σ_{red} redukált feszültség *Huber-Mises-Hencky* szerint a veszélyes pontokban.

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{yz}^2} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3 \tau_{yz}^2}.$$

A BC és EG egyenes mentén csak hajlításból származó feszültség ébred: $\tau_{yz} = 0$,

$$\sigma_{red} = \sigma_{z \max} = \frac{12 |M_{hx}|}{a b^3} |y_{\max}| = 30 \text{ MPa}.$$

A JK egyenes mentén csak nyírásból származó feszültség ébred: $\sigma_z = 0$.

$$\sigma_{red} = \sqrt{3} |\tau_{yz \max}| = \sqrt{3} \frac{3 T_y}{2 A} = 25,98 \text{ MPa}.$$

6.7.16. feladat: Redukált feszültségek

Adott: A szilárd test P pontjában a feszültségi tenzor zérustól különböző elemei:

$$\sigma_x = -30 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 30 \text{ MPa}, \quad \sigma_z = 90 \text{ MPa}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = -40 \text{ MPa}.$$

Feladat: (a) A P pontbeli feszültségi tenzor mátrixának felírása.

(b) A főfeszültségek meghatározása.

(c) A *Huber-Mises-Hencky*-féle, a *Coulomb*-féle és a *Mohr*-féle redukált feszültség kiszámítása.

Kidolgozás:

(a) A P pontbeli feszültségi tenzor mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \underline{F}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -40 \\ 0 & -40 & 90 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

(b) A főfeszültségek meghatározása:

Főfeszültségek meghatározása $\Rightarrow$ sajátérték feladat: $(\underline{F} - \sigma \underline{E})\vec{e} = 0$.

$$\begin{bmatrix} (-30 - \sigma) & 0 & 0 \\ 0 & (30 - \sigma) & -40 \\ 0 & -40 & (90 - \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A nemtriviális megoldás létezésének feltétele: $\det[\underline{F} - \sigma \underline{E}] = 0$.

Karakterisztikus egyenlet: $(-30 - \sigma)[(30 - \sigma)(90 - \sigma) - 1600] = 0$.

$$(-30 - \sigma)(\sigma^2 - 120\sigma + 1100) = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai:

$$(-30 - \sigma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = -30 \text{ MPa},$$

$$[\sigma^2 - 120\sigma - 1100] = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{120 \pm \sqrt{14400 - 4400}}{2} = \begin{cases} 110 \text{ MPa} \\ 10 \text{ MPa} \end{cases}.$$

A főfeszültségek: $\sigma_1 = 110 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 10 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -30 \text{ MPa}$.

(c) A *Huber-Mises-Hencky*-féle, a *Coulomb*-féle és a *Mohr*-féle redukált feszültség:

A *Huber-Mises-Hencky*-féle redukált feszültség:

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{I}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]},$$

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{I}{2}(100^2 + 140^2 + 40^2)} = 124,9 \text{ MPa}.$$

A *Coulomb*-féle redukált feszültség: $\sigma_{red}(\text{Coulomb}) = \sigma_1 = 110 \text{ MPa}$.

A *Mohr*-féle redukált feszültség: $\sigma_{red}(\text{Mohr}) = \sigma_1 - \sigma_3 = 110 - (-30) = 140 \text{ MPa}$.

6.7.17. feladat: Redukált feszültségek

Adott: A szilárd test P pontjában a feszültségi tenzor zérustól különböző elemei:

$$\sigma_x = 70 \text{ MPa}, \sigma_y = 50 \text{ MPa}, \sigma_z = 10 \text{ MPa}, \tau_{zx} = \tau_{xz} = 40 \text{ MPa}.$$

Feladat: (a) A P pontbeli feszültségi tenzor mátrixának felírása.

(b) A főfeszültségek és a feszültségi főirányok meghatározása.

(c) A *Huber-Mises-Hencky*-féle, a *Coulomb*-féle és a *Mohr*-féle redukált feszültség kiszámítása.

Kidolgozás:

(a) A P pontbeli feszültségi tenzor mátrixának felírása:

$$\underline{\underline{F_P}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 40 \\ 0 & 50 & 0 \\ 40 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

(b) A főfeszültségek és a feszültségi főirányok meghatározása:

Főfeszültségek meghatározása $\Rightarrow$ sajátérték feladat: $(\underline{\underline{F}} - \sigma \underline{\underline{E}})\vec{e} = \vec{0}$.

$$\begin{bmatrix} (70 - \sigma) & 0 & 40 \\ 0 & (50 - \sigma) & 0 \\ 40 & 0 & (10 - \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A nemtriviális megoldás létezésének feltétele: $\det[\underline{\underline{F}} - \sigma \underline{\underline{E}}] = 0$.

A karakterisztikus egyenlet: $(50 - \sigma)(\sigma^2 - 80\sigma - 900) = 0$.

A karakterisztikus egyenlet megoldásai:

$$(50 - \sigma) = 0 \Rightarrow \sigma = 50 \text{ MPa},$$

$$[\sigma^2 - 80\sigma - 900] = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{80 \pm \sqrt{6400 + 3600}}{2} = \begin{cases} 90 \text{ MPa} \\ -10 \text{ MPa} \end{cases}.$$

A főfeszültségek: $\sigma_1 = 90 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = \sigma_y = 50 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -10 \text{ MPa}$.

A főfeszültségi irányok meghatározása – visszahelyettesítés a lineáris algebrai egyenletrendszerbe:

- A $\sigma_1 = 90 \text{ MPa}$ főfeszültséghez tartozó $\vec{e}_1$ főirány meghatározása:

$$\begin{bmatrix} (70 - \sigma_1) & 0 & 40 \\ 0 & (50 - \sigma_1) & 0 \\ 40 & 0 & (10 - \sigma_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -20 & 0 & 40 \\ 0 & -40 & 0 \\ 40 & 0 & -80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $-20e_x + 40e_z = 0, \Rightarrow e_x = 2e_z.$

$$-40e_y = 0, \Rightarrow e_y = 0.$$

$$40e_x - 80e_z = 0, \Rightarrow e_x = 2e_z.$$

Az egyenletek nem függetlenek egymástól, így az egyik változót szabadon megválaszthatjuk. Legyen $e_x = 1$, ekkor $e_y = 0$, $e_z = 0,5$.

Az irányvektor: $\vec{e}_1 = (\vec{e}_x + 0,5\vec{e}_z)$.

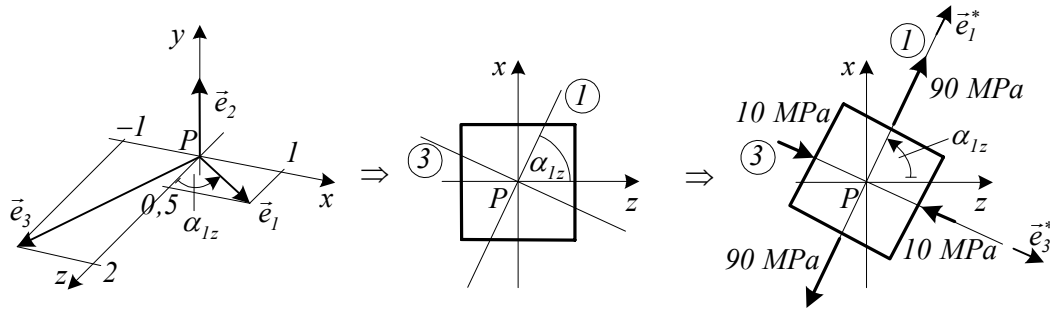
Az irány egységvektor: $\vec{e}_1^* = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|} = \frac{(\vec{e}_x + 0,5\vec{e}_z)}{\sqrt{1^2 + 0,5^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_z \right) = (0,894\vec{e}_x + 0,447\vec{e}_z)$.

Hasonló gondolatmenet alapján:

$$\sigma_2 = 50 \text{ MPa}, \quad \vec{e}_2 = (\vec{e}_y), \quad \vec{e}_2^* = (\vec{e}_y),$$

$$\sigma_3 = -10 \text{ MPa}, \quad \vec{e}_3 = (-\vec{e}_x + 2\vec{e}_z), \quad \vec{e}_3^* = (-0,447\vec{e}_x + 0,894\vec{e}_z).$$

A sajátvektorok (feszültségi főirányok) szemléltetése:



$$\operatorname{tg} \alpha_{1z} = \frac{1}{0,5} = 2 \Rightarrow \alpha_{1z} = 63,43^\circ.$$

Megjegyzés: Az $\vec{e}_i^*$, ($i=1, 2, 3$) és a $-\vec{e}_i^*$ egyaránt főfeszültségi irányok.

Az $\vec{e}_1^*$ és $\vec{e}_2^*$ főirány meghatározása után az $\vec{e}_i^*$ főirányt úgy vettük fel, hogy az $\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*$ vektorhármassal jobbsodrású rendszert alkossanak. $\vec{e}_3^* = \vec{e}_1^* \times \vec{e}_2^*$.

c) A redukált feszültségek meghatározása:

A *Huber-Mises-Hencky*-féle redukált feszültség:

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]},$$

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2}[(90 - 50)^2 + (50 - (-10))^2 + (-10 - 90)^2]} = 87,18 \text{ MPa}.$$

A *Coulomb*-féle redukált feszültség: $\sigma_{red}(Coulomb) = \sigma_1 = 90 \text{ MPa}$.

A *Mohr*-féle redukált feszültség: $\sigma_{red}(Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3 = 90 - (-10) = 100 \text{ MPa}$.