

7. RÚDSZERKEZETEK ALAKVÁLTOZÁSA, STATIKAILAG HATÁROZATLAN RÚDSZERKEZETEK

7.1. Alapfogalmak

a) Szerkezetek statikai határozottsága:

Statikailag határozott szerkezet:

- A szerkezet támasztóerői egyértelműen meghatározhatók statikai egyensúlyi egyenletek segítségével.
- Az ismeretlen támasztóerő koordináták száma megegyezik a rendelkezésre álló statikai egyensúlyi egyenletek számával.

Statikailag határozatlan szerkezet:

- A szerkezet támasztóerői nem határozhatók meg kizárólag statikai egyensúlyi egyenletek felhasználásával.
- Ismeretlen támasztóerő koordináták száma nagyobb, mint a rendelkezésre álló statikai egyenletek száma.

b) Rúdszerkezet alakváltozási energiája:

Az egész rúdszerkezet alakváltozási energiája:

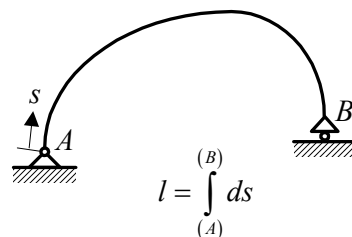
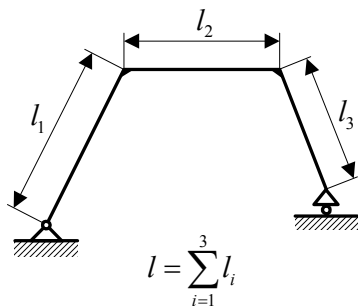
$$U = \underbrace{U_N}_{\text{húzás-nyomás}} + \underbrace{U_H}_{\text{hajlítás}} + \underbrace{U_C}_{\text{csavarás}} + \underbrace{U_T}_{\text{nyírás}}.$$

Rúdszerkezeteknél legtöbb esetben: $U_T \approx 0$.

Az alakváltozási energia részletesen kiírva: $U = \frac{1}{2} \int_{(l)} \left(\frac{N^2}{AE} + \frac{M_{hx}^2}{I_x E} + \frac{M_{hy}^2}{I_y E} + \frac{M_c^2}{I_p G} \right) ds$.

Feltételezés: x, y a keresztmetszet tehetetlenségi főtengelyei.

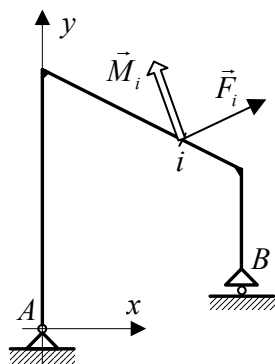
l - a rúdszerkezet középvonalának hossza.



7.2. Statikailag határozott rúdszerkezetek elmozdulásai, szögelfordulásai

A Castigliano tétel: (kiejtése: kasztiliánó)

A tétel síkbeli rúdszerkezetekre történő alkalmazásával foglalkozunk.



A síkbeli szerkezetet $\vec{F}_i, \vec{M}_i$, $(i=1,2,\dots,n)$ koncentrált erőrendszer terheli.

Síkbeli terhelés: $\vec{F}_i = F_{xi}\vec{e}_x + F_{yi}\vec{e}_y$, $\vec{M}_i = M_{zi}\vec{e}_k$

A támasztó erők:

$$\vec{F}_A = \vec{F}_A(\vec{F}_i, \vec{M}_i), \quad \vec{F}_B = \vec{F}_B(\vec{F}_i, \vec{M}_i).$$

Az alakváltozási energia: $U = U(F_{xi}, F_{yi}, M_{zi})$.

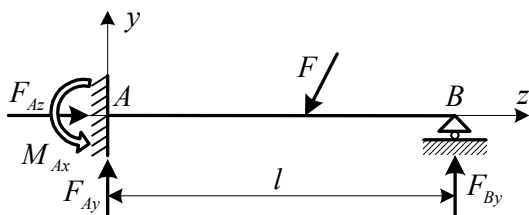
A Castigliano tétel síkbeli esetben: $u_i = \frac{\partial U}{\partial F_{ix}}, \quad v_i = \frac{\partial U}{\partial F_{iy}}, \quad \psi_i = \frac{\partial U}{\partial M_{iz}}.$

- A szerkezetet terhelő F_i erő támadáspontjának F_i irányába eső elmozdulása egyenlő a szerkezet belső energiájának az F_i erő szerinti deriváltjával.
- A szerkezetet terhelő M_i nyomaték keresztmetszetének az M_i nyomaték iránya (tengelye) körüli szögelfordulása egyenlő a szerkezet belső energiájának az M_i nyomaték szerinti deriváltjával.

7.3. Statikailag határozatlan rúdszerkezetek támasztóerői

a) A Castigliano tétel alkalmazása statikailag határozatlan szerkezetekre:

A tétel alkalmazását egy példán mutatjuk be.



Adott: a síkbeli terhelésű rúdszerkezet méretei, megtámasztásai és terhelése.

Feladat: a támasztó erőrendszer meghatározása.

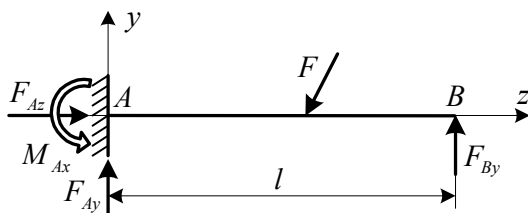
3 statikai egyenlet, 4 ismeretlen támasztó erő (nyomaték) koordináta. $\Rightarrow$ A tartó statikailag egyszerűen határozatlan.

A megoldás gondolatmenete:

1. lépés: A szerkezetet a megtámasztás módosításával statikailag határozottá tesszük.

A statikailag határozottá tétel többféle módon történhet.

- α) lehetőség:



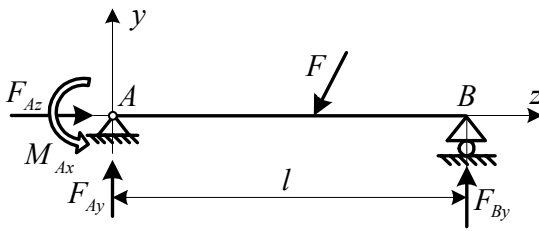
A görgős támaszt elhagyjuk.

Szükség van egy olyan F_{By} erőre, amely biztosítja, hogy a B pont y irányban ne mozduljon el.

Az F_{By} -ből származó igénybevételeket külön kezeljük:

$$T_y(z) = T_{y01}(z) + F_{By}t_1(z), \quad M_{hx}(z) = M_{01}(z) + F_{By}m_1(z).$$

- β) lehetőség:



A befalazás helyett csuklós támaszt alkalmazunk.

Szükség van egy olyan M_{Ax} nyomatékra, amely biztosítja, hogy az A keresztmetszet az x tengely körül ne forduljon el.

Az M_{Ax} -ból származó igénybevételeket külön kezeljük:

$$T_y(z) = T_{y02}(z) + M_{Ax}t_2(z), \quad M_{hx}(z) = M_{02}(z) + M_{Ax}m_2(z).$$

Még további lehetőségek is vannak.

A statikailag határozottá tett tartóra továbbra is hat a megfelelő támasztó erő / támasztó nyomaték koordináta, de ezt a terheléshez tartozónak tekintjük.

Így a statikailag határozottá tett tartó terhelése két részből fog állni:

- az eredeti tartó terhelése,
- az ismeretlen támasztóerő / támasztó nyomaték.

2. lépés: Előírjuk azt a kinematikai korlátozást, amely egyenértékű az elhagyott kényszerrel.

$$\alpha) v_B = 0,$$

$$\beta) \psi_A = 0.$$

3. lépés: Alkalmazzuk a Castigliano tételt:

$$\alpha) v_B = 0 = \frac{\partial U}{\partial F_{By}} = \frac{\partial}{\partial F_{By}} \int_{(l)} \frac{(M_{01} + F_{By}m_1)^2}{2I_x E} dz,$$

$$0 = \frac{1}{I_x E} \left[\int_{(l)} (M_{01} + F_{By}m_1)m_1 dz \right], \quad 0 = \frac{1}{I_x E} \left[\int_{(l)} M_{01}m_1 dz + F_{By} \int_{(l)} m_1^2 dz \right],$$

$$F_{By} = - \frac{\int_{(l)} M_{01}m_1 dz}{\int_{(l)} m_1^2 dz}.$$

$$\beta) \psi_A = 0 = \frac{\partial U}{\partial M_{Ax}} = \frac{\partial}{\partial M_{Ax}} \int_{(l)} \frac{(M_{02} + M_{Ax}m_2)^2}{2I_x E} dz,$$

$$0 = \frac{1}{I_x E} \left[\int_{(l)} (M_{02} + M_{Ax}m_2)m_2 dz \right], \quad 0 = \frac{1}{I_x E} \left[\int_{(l)} M_{02}m_2 dz + M_{Ax} \int_{(l)} m_2^2 dz \right],$$

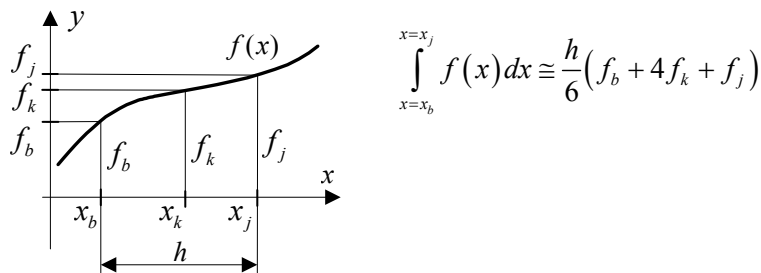
$$M_{Ax} = - \frac{\int_{(l)} M_{02} m_2 dz}{\int_{(l)} m_2^2 dz}.$$

4. lépés: Ezután a többi támasztóerő koordináta már statikai egyensúlyi egyenletekből meghatározható.

b) Integrálok kiszámítása:

Lehetőségek:

- Integrálás zárt alakban: $M_0(z), m(z)$ függvények felírása és integrálása a Matematikában tanultak szerint, probléma – törések, szakadások
- Numerikus integrálás - *Simpson* (kiejtése: szimpson) formula:

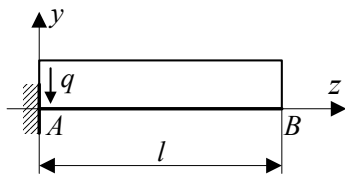


Megjegyzés:

- Ha az integrandusz harmadfokúnál nem magasabb fokszámú polinom, akkor a formula az integrál pontos értékét szolgáltatja.
- Ha az integrandusz nem polinom, vagy harmadfokúnál magasabb fokszámú polinom, akkor az integrál közelítő értékét kapjuk.
- Ha az integrálandó függvényben törés, vagy szakadás van, akkor az integrálást szakaszonként, a formula többszöri alkalmazásával kell elvégezni, mert a *Simpson*-formula csak folytonosan deriválható függvények integrálására alkalmas.

7.4. Gyakorló feladatok elmozdulások, szögelfordulások számítására

7.4.1 feladat: Rúdszerkezet elmozdulása és szögelfordulása



Adott: l, q, E, A, I_x .

Feladat:

- A rúd B jelű keresztmetszeténél az S pont y irányú, v_B elmozdulásának kiszámítása.
- A rúd B jelű keresztmetszetének x tengely körüli, φ_B szögelfordulásának kiszámítása.

Kidolgozás:

- A rúd B jelű keresztmetszeténél az S pont (a középvonal B pontja) y irányú, v_B elmozdulásának kiszámítása:

Castigliano tétel alkalmazása: $U \approx U_H$.

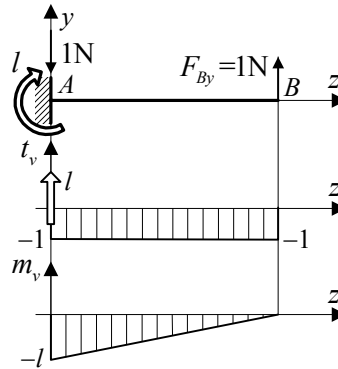
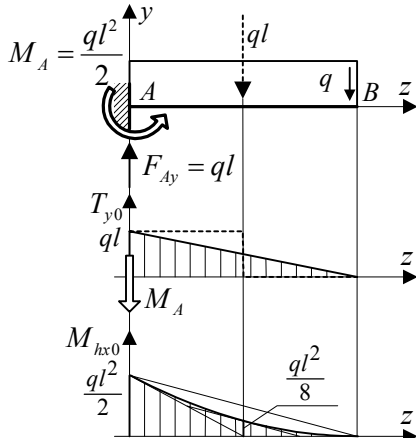
Az igénybevételek: $T_y = T_{y0} + F_{By} t_v$ és $M_{hx} = M_{hx0} + F_{By} m_v$,

ahol t_v és m_v az egységnyi F_{By} -hoz tartozó nyíróerő, illetve hajlítónyomaték.

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial F_{By}} \Big|_{F_{By}=0} = \frac{\partial}{\partial F_{By}} \left[\int_{(l)} \frac{(M_{hx0} + F_{By} m_v)^2}{2 I_x E} dz \right] \Big|_{F_{By}=0} =$$

$$= \frac{1}{I_x E} \left[\int_{(l)} (M_{hx0} + F_{By} m_v) m_v dz \right] \Big|_{F_{By}=0} = \frac{1}{I_x E} \int_{(l)} M_{hx0} m_v dz.$$

Az eredeti terhelés igénybevételi ábrái: Az $F_{By} = 1 \text{ N}$ -hoz tartozó igénybevételi ábrák:



Az elmozdulás kiszámítása:

$$v_B = \int_{(l)} \frac{M_{hx0} m_v}{I_x E} dx = \frac{1}{I_x E} \frac{l}{6} \left[\frac{ql^2}{2} (-l) + 4 \frac{ql^2}{8} \left(-\frac{l}{2} \right) + 0 \cdot 0 \right] =$$

$$= \frac{1}{I_x E} \frac{l}{6} \left[-\frac{ql^3}{2} - \frac{ql^3}{4} \right] = \frac{1}{I_x E} \frac{l}{6} \left(-\frac{3ql^3}{4} \right).$$

$$v_B = -\frac{ql^4}{8EI_x} \quad \downarrow \quad \text{Negatív előjel: a } B \text{ pont lefelé, az } F_{By} \text{-nal ellentétesen mozdul el.}$$

b) A rúd B jelű keresztmetszetének z tengely körüli, φ_B szögelfordulásának kiszámítása:

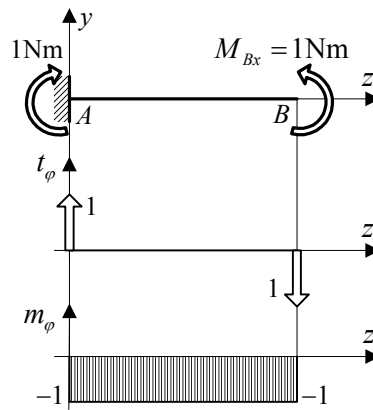
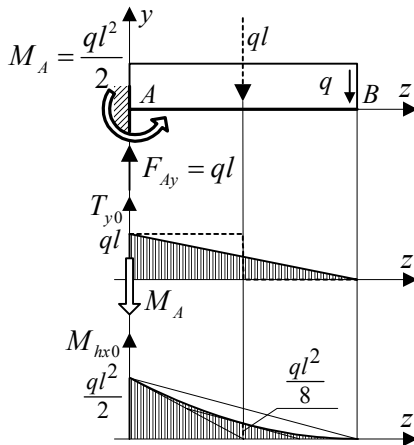
Castigliano tétel alkalmazása: $U \approx U_H$

Az igénybevételek: $T_y = T_{y0} + M_{Bx} t_\varphi$ és $M_{hx} = M_{hx0} + M_{Bx} m_\varphi$,

ahol t_φ és m_φ az egységnyi M_{Bx} -hoz tartozó nyíróerő, illetve hajlítónyomaték.

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \frac{\partial U}{\partial M_{Bx}} \bigg|_{M_{Bx}=0} = \frac{\partial}{\partial M_{Bx}} \left[\int_{(l)} \frac{(M_{hx0} + M_{Bx} m_\varphi)^2}{2I_x E} dz \right] \bigg|_{M_{Bx}=0} = \\ &= \frac{1}{I_x E} \left[\int_{(l)} (M_{hx0} + M_{Bx} m_\varphi) m_\varphi dz \right] \bigg|_{M_{Bx}=0} = \frac{1}{I_x E} \int_{(l)} M_{hx0} m_\varphi dz. \end{aligned}$$

Az eredeti terhelés igénybevételi ábrái: Az $M_{Bx} = 1 \text{ Nm}$ -hoz tartozó igénybevételi ábrák:

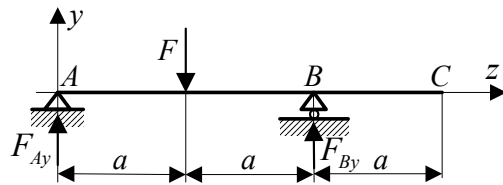


A szögelfordulás kiszámítása:

$$\varphi_B = \frac{1}{EI_x} \frac{l}{6} \left[\frac{ql^2}{2}(-1) + 4 \frac{ql^2}{8}(-1) + 0 \right] = \frac{1}{EI_x} \frac{l}{6} \left(-\frac{ql^2}{2} - \frac{ql^2}{2} \right) = -\frac{ql^3}{6EI_x}.$$

$$\varphi_B = -\frac{ql^3}{6EI_x} \quad \curvearrowright \quad \text{Negatív előjel: a } B \text{ keresztmetszet a felvett nyomatékkal ellentétesen fordul el.}$$

7.4.2. feladat: Rúdszerkezet elmozdulása és szögelfordulása



Adott: F, a, E, A, I_x .

Feladat: a) A rúd C jelű keresztmetszeténél az S pont y irányú, v_C elmozdulásának kiszámítása.

b) A rúd C jelű keresztmetszeténél a z tengely körüli φ_C szögelfordulás kiszámítása.

Kidolgozás:

a) A rúd C jelű keresztmetszeténél az S pont y irányú, v_C elmozdulásának kiszámítása:

Castigliano tétel alkalmazása: $U \approx U_H$.

Az igénybevételek: $T_y = T_{y0} + F_{Cy} t_v$ és $M_{hx} = M_{hx0} + F_{Cy} m_v$,

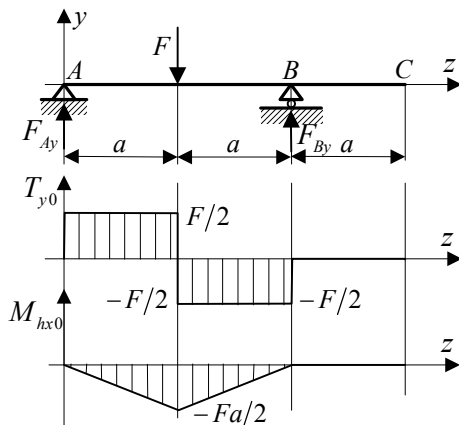
ahol t_v és m_v az egységnyi F_{Cy} -hoz tartozó nyíróerő, illetve hajlítónyomaték.

$$v_C = \frac{\partial U}{\partial F_{Cy}} \bigg|_{F_{Cy}=0} = \frac{\partial}{\partial F_{Cy}} \left[\int_{(l)} \frac{(M_{hx0} + F_{Cy} m_v)^2}{2 I_x E} dz \right] \bigg|_{F_{Cy}=0} =$$

$$= \frac{1}{I_x E} \left[\int_{(l)} (M_{hx0} + F_{Cy} m_v) m_v dz \right] \bigg|_{F_{Cy}=0} = \frac{1}{I_x E} \int_{(l)} M_{hx0} m_v dz.$$

Az eredeti terhelés igénybevételi ábrái:

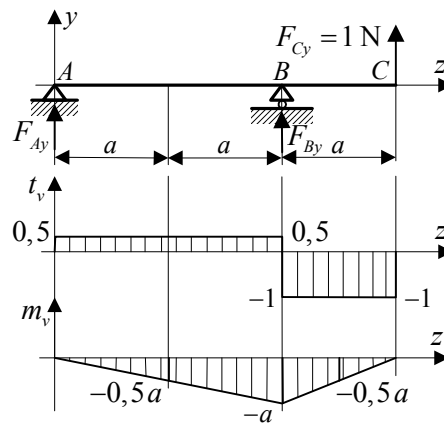
Támasztóerők: $F_{Ay} = F_{By} = F/2$.



Az $F_{Cy} = 1$ N-hoz tartozó igénybevételi ábrák:

Támasztóerők:

$F_{Ay} = 0,5$ N, $F_{By} = -1,5$ N.



A C ponti elmozdulás kiszámítása:

$$v_C = \int_{(l)} \frac{M_{hx0} m_v}{EI_x} dz =$$

$$= \frac{1}{I_x E} \left\{ \frac{a}{6} \left[0 + 4 \left(\frac{Fa}{4} \right) \frac{a}{4} + \left(\frac{Fa}{2} \right) \frac{a}{2} \right] + \frac{a}{6} \left[\left(\frac{Fa}{2} \right) \frac{a}{2} + 4 \frac{Fa}{4} \frac{3a}{4} + 0 \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{I_x E} \left\{ \frac{a}{6} \left(\frac{Fa^2}{4} + \frac{Fa^2}{4} \right) + \frac{a}{6} \left(\frac{Fa^2}{4} + \frac{3Fa^2}{4} \right) \right\} = \frac{Fa^3}{4I_x E} \quad \uparrow.$$

Pozitív előjel: a C pont felfelé mozdul el.

b) A rúd C jelű keresztmetszeténél a z tengely körüli φ_C szögelfordulásának kiszámítása:

Castigliano tétel alkalmazása: $U \approx U_H$

Az igénybevételek: $T_y = T_{y0} + M_{Cx} t_\varphi$ és $M_{hx} = M_{hx0} + M_{Cx} m_\varphi$,

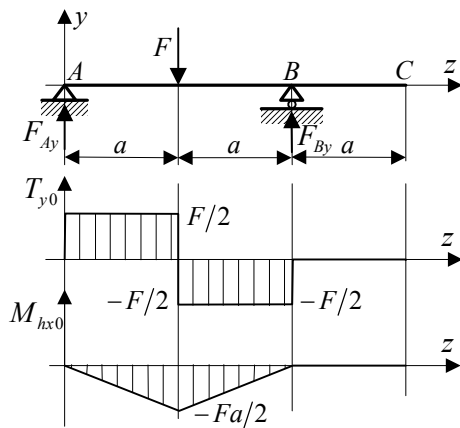
ahol t_φ és m_φ az egységnyi F_{By} -hoz tartozó nyíróerő, illetve hajlítónyomaték.

$$\varphi_C = \frac{\partial U}{\partial M_{Cx}} \Big|_{M_{Cx}=0} = \frac{\partial}{\partial M_{Cx}} \left[\int_{(I)} \frac{(M_{hx0} + M_{Cx} m_\varphi)^2}{2I_x E} dz \right] \Big|_{M_{Cx}=0} =$$

$$= \frac{1}{I_x E} \left[\int_{(I)} (M_{hx0} + M_{Cx} m_\varphi) m_\varphi dz \right] \Big|_{M_{Cx}=0} = \frac{1}{I_x E} \int_{(I)} M_{hx0} m_\varphi dz.$$

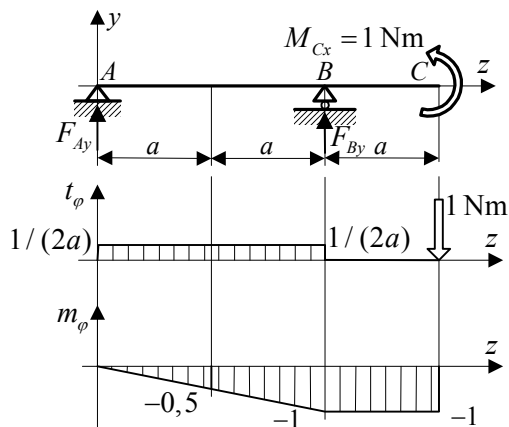
Az eredeti terhelés igénybevételi ábrái:

Támasztóerők: $F_{Ay} = F_{By} = F/2$.



Az $M_{Cx} = 1$ Nm-hoz tartozó igény-bevételi ábrák:

Támasztóerők: $F_{Ay} = -F_{By} = 1/(2a)$.



A szögelfordulás kiszámítása:

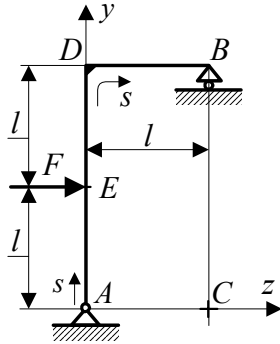
$$\varphi_C = \int_{(I)} \frac{M_{hx0} m_\varphi}{I_x E} dz = \frac{1}{I_x E} \left\{ \frac{a}{6} \left[0 + 4 \frac{Fa}{4} \frac{1}{4} + \frac{Fa}{2} \frac{1}{2} \right] + \frac{a}{6} \left[\frac{Fa}{2} \frac{1}{2} + 4 \frac{Fa}{4} \frac{3}{4} + 0 \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{I_x E} \left\{ \frac{a}{6} \left(\frac{Fa}{4} + \frac{Fa}{4} \right) + \frac{a}{6} \left(\frac{Fa}{4} + \frac{3Fa}{4} \right) \right\} = \frac{Fa^2}{4I_x E} \quad \curvearrowright.$$

Pozitív előjel: a C keresztmetszet a felvett nyomatékkal megegyező irányban fordul el.

A feladat megoldásának menetéből látszik, hogy a BC rúdszakaszon minden keresztmetszetnek ugyanakkora a szögelfordulása.

7.4.3. feladat: Tört középvonalú tartó elmozdulása



Adott:

Az ADB törtvonalú tartó méretei: l és F , E , A , I_x ,
 $I_x E = \text{állandó}$, $AE = \text{állandó}$.

Feladat:

A tartó B keresztmetszetében az S pont x irányú,
 w_B elmozdulásának meghatározása.

Kidolgozás:

A Castigliano tétel alkalmazása: $U \approx U_H + U_N$.

Az igénybevételek: $N = N_0 + F_{Bz} n_w$, $T_y = T_{y0} + F_{Bz} t_w$, és $M_{hx} = M_{hx0} + F_{Bz} m_w$,

ahol n_w , t_w és m_w az egységnyi F_{Bz} -hoz tartozó rúderő, nyíróerő, illetve hajlítónyomaték.

$$\begin{aligned} w_B = \frac{\partial U}{\partial F_{Bz}} \Big|_{F_{Bz}=0} &= \frac{\partial}{\partial F_{Bz}} \left[\int_{(l)} \frac{(N_0 + F_{Bz} n_w)^2}{2AE} dz + \int_{(l)} \frac{(M_{hx0} + F_{Bz} m_w)^2}{2I_x E} dz \right] \Big|_{F_{Bz}=0} = \\ &= \left[\frac{1}{AE} \int_{(l)} (N_0 + F_{Bz} n_w) n_w dz + \frac{1}{I_x E} \int_{(l)} (M_{hx0} + F_{Bz} m_w) m_w dz \right] \Big|_{F_{Bz}=0} = \\ &= \frac{1}{AE} \int_{(l)} N_0 n_w dz + \frac{1}{I_x E} \int_{(l)} M_{hx0} m_w dz. \end{aligned}$$

A támasztóerők meghatározása:

Az eredeti terhelés támasztó erői:

$$M_a = 0 \Rightarrow F_{By} = F \uparrow,$$

$$M_c = 0 \Rightarrow F_{Ay} = -F \downarrow,$$

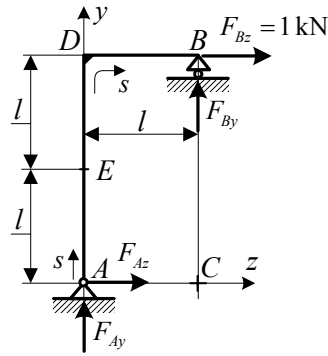
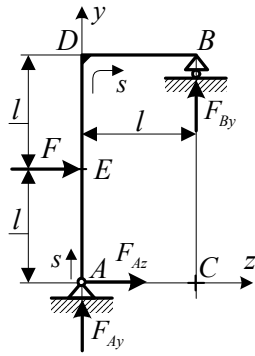
$$F_x = 0 \Rightarrow F_{Az} = -F \leftarrow.$$

Az $F_{Bz} = 1$ kN terhelés támasztó erői:

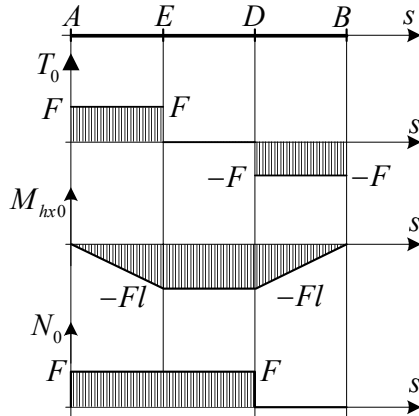
$$M_a = 0 \Rightarrow F_{By} = 2 \text{ kN} \uparrow,$$

$$M_c = 0 \Rightarrow F_{Ay} = -2 \text{ kN} \downarrow,$$

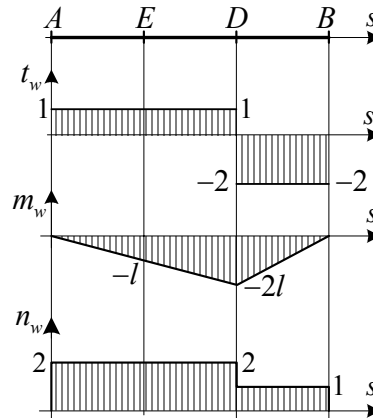
$$F_x = 0 \Rightarrow F_{Az} = -1 \text{ kN} \leftarrow.$$



Az eredeti terhelés igénybevételi ábrái:



Az $F_{Bz} = 1 \text{ kN}$ -hoz tartozó igénybevételi ábrák:



Az integrálok kiszámítása:

$$\int_{(3l)} \frac{M_{hx0} m_w}{EI_x} ds =$$

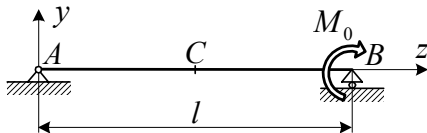
$$= \frac{1}{I_z E} \left\{ \frac{l}{6} \left[0 + 4 \frac{Fl}{2} \frac{l}{2} + Fl \cdot l \right] + \frac{l}{6} \left[Fl \cdot l + 4 Fl \frac{3}{2} l + Fl \cdot 2l \right] + \frac{l}{6} \left[Fl \cdot 2l + 4 \frac{Fl}{2} l + 0 \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{I_z E} \left\{ \frac{2Fl^3}{6} + \frac{9Fl^3}{6} + \frac{4Fl^3}{6} \right\} = \frac{1}{I_z E} \left(\frac{15}{6} Fl^3 \right) = \frac{5Fl^3}{2I_z E} \rightarrow .$$

$$\int_{(l)} \frac{N_0 n_w}{AE} ds = \frac{1}{AE} \left\{ \frac{2l}{6} [F \cdot 2 + 4 \cdot F \cdot 2 + F \cdot 2] \right\} = \frac{4Fl}{AE} \rightarrow .$$

$$w_B = \frac{5Fl^3}{2I_z E} + \frac{4Fl}{AE} \rightarrow .$$

7.4.4. feladat: Rúdszerkezet elmozdulása és szögelfordulása



Adott:

$$l = 1,2 \text{ m}, I_x = 50000 \text{ mm}^4,$$

$$M_0 = 3,1 \text{ kNm}, E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}.$$

Feladat:

- a) A C keresztmetszet S pontja y irányú v_C elmozdulásának meghatározása.
b) A B keresztmetszet x tengely körüli φ_B szögelfordulásának meghatározása.
A nyírásból származó alakváltozási energia elhanyagolható.

Kidolgozás:

- a) A C keresztmetszet y irányú v_C elmozdulásának meghatározása:

Castigliano tétel alkalmazása: $U \approx U_H$.

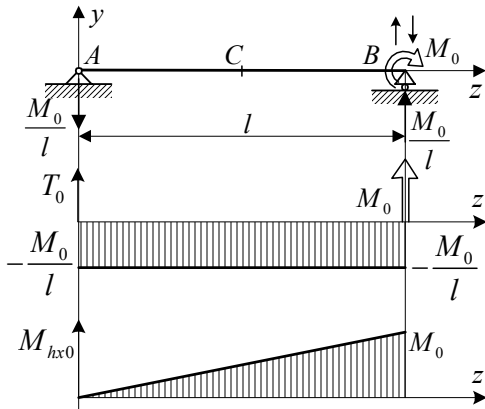
Az igénybevételek: $T_y = T_{y0} + F_{Cy} t_v$ és $M_{hx} = M_{hx0} + F_{Cy} m_v$,

ahol t_v és m_v az egységnyi F_{Cy} -hoz tartozó nyíróerő, illetve hajlítónyomaték.

$$v_C = \frac{\partial U}{\partial F_{Cy}} \bigg|_{F_{Cy}=0} = \frac{\partial}{\partial F_{Cy}} \left[\int_{(l)} \frac{(M_{hx0} + F_{Cy} m_v)^2}{2 I_x E} dz \right]_{F_{Cy}=0} =$$
$$= \frac{1}{I_x E} \left[\int_{(l)} (M_{hx0} + F_{Cy} m_v) m_v dz \right]_{F_{Cy}=0} = \frac{1}{I_x E} \int_{(l)} M_{hx0} m_v dz.$$

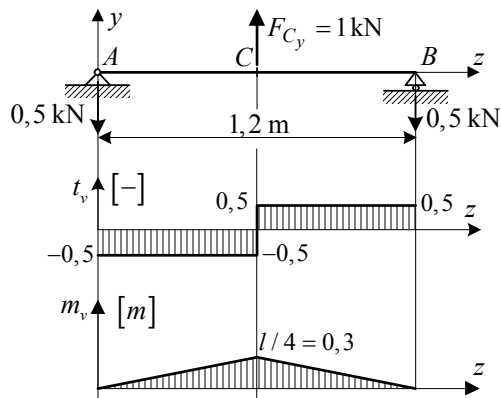
Az eredeti terhelés igénybevételi ábrái:

Támasztóerők: $F_{Ay} = -F_{By} = -M_0 / l$.



Az $F_{Cy} = 1$ N-hoz tartozó igénybevételi ábrák:

Támasztóerők: $F_{Ay} = F_{By} = -0,5$ kN.



Az integrál kiszámítása:

$$\int_{(l)} M_{hx0} m_1 dz = \frac{l}{2 \cdot 6} \left[0 + 4 \frac{M_0}{4} \frac{l}{8} + \frac{M_0}{2} \frac{l}{4} \right] + \frac{l}{2 \cdot 6} \left[\frac{M_0}{2} \frac{l}{4} + 4 \frac{3}{4} M_0 \frac{l}{8} + 0 \right] =$$
$$= \frac{l}{12} \left[\frac{M_0 l}{8} + \frac{M_0 l}{8} \right] + \frac{l}{12} \left[\frac{M_0 l}{8} + \frac{3 M_0 l}{8} \right] = \frac{M_0 l^2}{16}.$$

$$\text{Az elmozdulás: } v_C = \frac{1}{I_x E} \frac{M_0 l^2}{16} = \frac{3,1 \cdot 10^6 \cdot 1200^2}{16 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 2,1 \cdot 10^5} = 26,57 \text{ mm } \uparrow.$$

A C pont F_{Cy} irányában, vagyis felfelé mozdul el.

b) A B keresztmetszet z tengely körüli φ_B szögelfordulásának meghatározása:

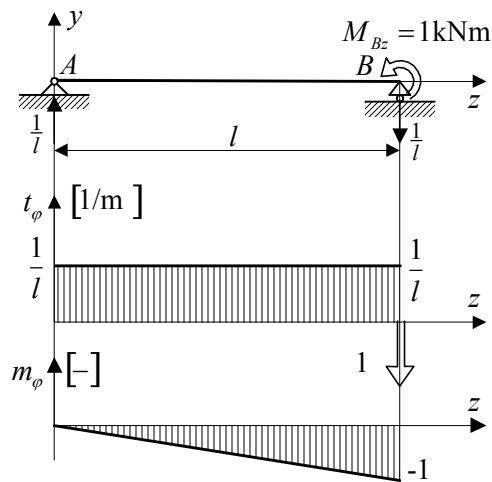
Castigliano tétel alkalmazása: $U \approx U_H$

Az igénybevételek: $T_y = M_{Bx} t_\varphi$ és $M_{hx} = M_{Bx} m_\varphi$,

ahol t_φ és m_φ az egységnyi M_{Bx} -hoz tartozó nyíróerő, illetve hajlítónyomaték.

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \frac{\partial U}{\partial M_{Bx}} \bigg|_{M_{Bx} = -M_0} = \frac{\partial}{\partial M_{Bx}} \left[\int_{(l)} \frac{(M_{Bx} m_\varphi)^2}{2 I_x E} dz \right] \bigg|_{M_{Bx} = -M_0} = \\ &= \frac{1}{I_x E} \left[\int_{(l)} (M_{Bx} m_\varphi) m_\varphi dz \right] \bigg|_{M_{Bx} = -M_0} = \frac{1}{I_x E} \left[-M_0 \int_{(l)} m_\varphi^2 dz \right] = -\frac{M_0}{I_x E} \int_{(l)} m_\varphi^2 dz. \end{aligned}$$

Az egységnyi M_{Bx} -hez tartozó igénybevételi ábrák:

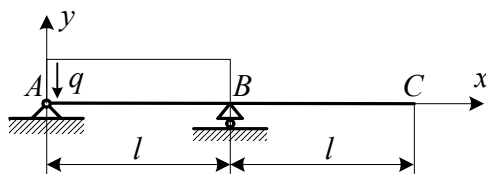


Az integrál kiszámítása: $\int_{(l)} m_\varphi^2 dz = \frac{l}{6} \left[0 + 4 \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + (-1)^2 \right] = \frac{l}{6} 2 = \frac{l}{3}.$

A szögelfordulás: $\varphi_B = -\frac{M_0}{I_x E} \frac{l}{3} = -\frac{3,1 \cdot 10^6 \cdot 1200}{3 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 2,1 \cdot 10^5} = -0,118 \text{ rad.}$ ↺

A B keresztmetszet óramutató járásával megegyező irányban (M_{Bz} irányában) fordul el.

7.4.5. feladat: Kéttámaszú konzolos tartó elmozdulása



Adott:

$l = 2 \text{ m}, I_z = 5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4,$

$q = 3 \text{ kN/m}, E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa.}$

A nyírásból származó alakváltozási energia elhanyagolható.

Feladat: A C keresztmetszet y irányú elmozdulásának meghatározása.

Megoldás:

Az igénybevételek: $T_y = T_{y0} + F_{Cy} t_v$ és $M_{hx} = M_{hx0} + F_{Cy} m_v$,

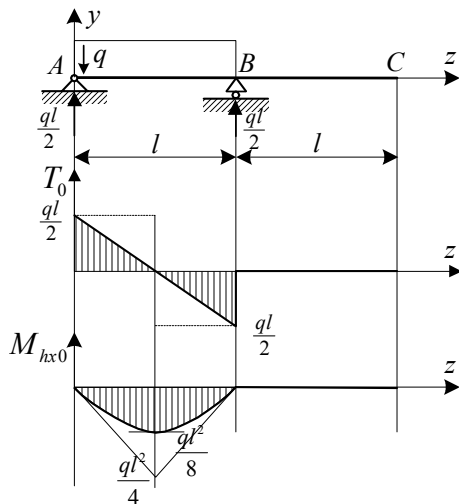
ahol t_v és m_v az egységnyi F_{Cy} -hoz tartozó nyíróerő, illetve hajlítónyomaték.

$$v_C = \frac{\partial U}{\partial F_{Cy}} \Big|_{F_{Cy}=0} = \frac{\partial}{\partial F_{Cy}} \left[\int_{(l)} \frac{(M_{hx0} + F_{Cy} m_v)^2}{2 I_x E} dz \right]_{F_{Cy}=0} =$$

$$= \frac{1}{I_x E} \left[\int_{(l)} (M_{hx0} + F_{Cy} m_v) m_v dz \right]_{F_{Cy}=0} = \frac{1}{I_x E} \int_{(l)} M_{hx0} m_v dz .$$

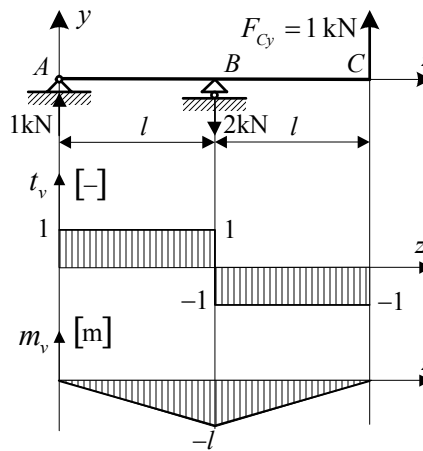
Az eredeti terhelés igénybevételi ábrái:

Támasztóerők: $F_{Ay} = F_{By} = ql / 2$.



Az $F_{Cy} = 1$ kN -hoz tartozó igénybevételi ábrák:

Támasztóerők: $F_{Ay} = 1$ kN, $F_{By} = -2$ kN.



Az integrál kiszámítása: $\int_{(l)} M_{hx0} m_v dx = \frac{q l^4}{24}$.

Az elmozdulás: $v_C = \frac{1}{I_x E} \left(\frac{q l^4}{24} \right) = 190,5 \text{ mm} \uparrow$.

A C pont y irányába (F_{Cy} irányába), vagyis felfelé mozdul el.

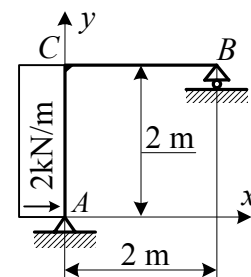
7.4.6. feladat: Törtvonalú tartó szögelfordulása

Adott: A tartó méretei, továbbá $I_z = 8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$,
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Feladat: A C keresztmetszet szögelfordulásának a meghatározása.

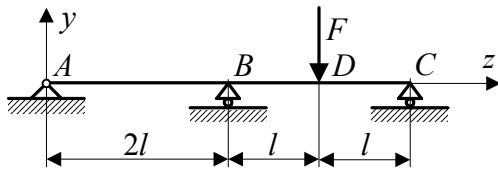
Megoldás:

A C keresztmetszet szögelfordulása: $\varphi_C = -1,67 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \curvearrowright$.



7.5. Gyakorló feladatok statikailag határozatlan rúdszerkezetek támasztóerőinek meghatározására

7.5.1. feladat: Statikailag határozatlan tartó támasztóerői és igénybevételi ábrái



Adott:

$$l = 2 \text{ m}, F = 32 \text{ kN}, I_x = 50000 \text{ mm}^4,$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}.$$

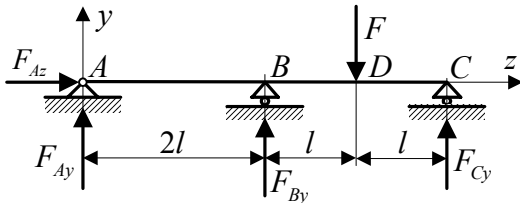
A nyírásból származó alakváltozási energiát elhanyagoljuk.

Feladat:

- A tartó statikai ismeretleneinek és a statikai egyenletek számának meghatározása.
- A tartó statikailag határozottá tétele.
- Kinematikai előírás a b) pontban kijelölt feladathoz és az ismeretlen támasztóerő meghatározása a *Castigliano* tétel segítségével.
- A többi támasztóerő koordináta meghatározása.
- A statikailag határozatlan tartó igénybevételi ábráinak megrajzolása.
- A tartó veszélyes keresztmetszetének meghatározása.

Kidolgozás:

- A tartó statikai ismeretleneinek és a statikai egyenletek számának meghatározása:



Az ismeretlen támasztóerő koordináták száma: $F_{Az}, F_{Ay}, F_{By}, F_{Cy} \Rightarrow n_i = 4$.

Statikai egyenletek száma: $n_e = 3$.

A tartó statikailag egyszeresen határozatlan.

- A tartó statikailag határozottá tétele:

A tartót háromféleképpen lehet határozottá tenni:

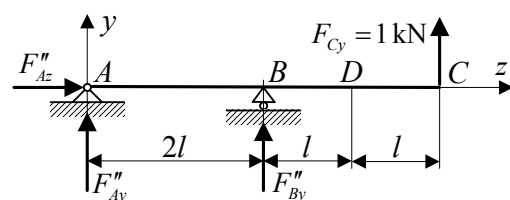
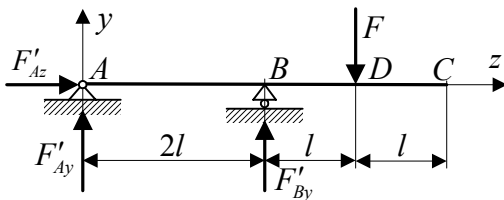
- Elhagyjuk az A pontban az y irányú támasztást.
- Elhagyjuk a B pontban az y irányú támasztást.
- Elhagyjuk a C pontban az y irányú támasztást.

Ha a harmadik esetet választjuk, akkor a tartó igénybevételei:

$$T_y = T_0 + F_{Cy} t_C, \quad M_{lx} = M_0 + F_{Cy} m_C.$$

A C ponti megtámasztás elhagyásával statikailag határozottá tett tartó igénybevételi ábrái:

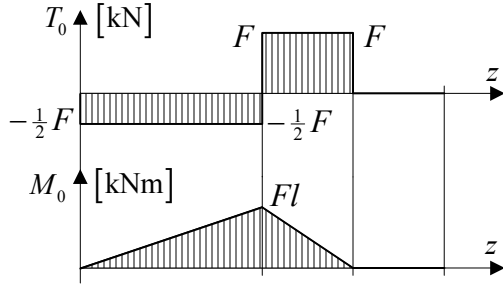
A statikailag határozott tartó eredeti terhelésének támasztóerői és igénybevételi ábrái: Az $F_{Cy} = 1 \text{ kN}$ terheléshez tartozó támasztóerők igénybevételi ábrái:



Az eredeti terheléshez tartozó támasztóerő-rendszer meghatározása:

$$\begin{aligned} M_a = 0 = 2l F'_{By} - 3l F &\Rightarrow F'_{By} = 1,5 F, \\ M_b = 0 = -2l F'_{Ay} - l F &\Rightarrow F'_{Ay} = -0,5 F, \\ F_z = 0 = F'_{Az} &\Rightarrow F'_{Az} = 0. \end{aligned}$$

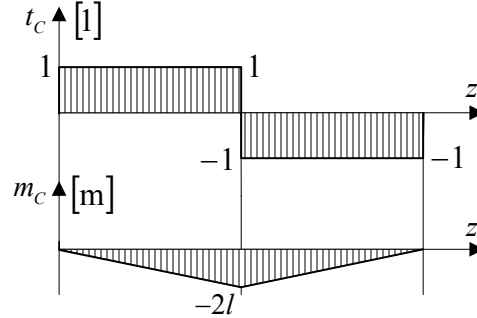
Az eredeti terheléshez tartozó igénybevételi ábrák:



Az $F_{Cy} = 1 \text{ kN}$ terheléshez tartozó támasztóerő-rendszer meghatározása:

$$\begin{aligned} M_a = 0 = 2l F''_{By} + 4l F_{Cy} &\Rightarrow F''_{By} = -2 F_{Cy}, \\ M_b = 0 = -2l F''_{Ay} + 2l F_{Cy} &\Rightarrow F''_{Ay} = F_{Cy}, \\ F_z = 0 = F''_{Az} &\Rightarrow F''_{Az} = 0. \end{aligned}$$

Az egységnyi F_{Cy} terheléshez tartozó igénybevételi ábrák:



c) Kinematikai előírás a b) pontban kijelölt feladathoz és az ismeretlen támasztóerő meghatározása a *Castigliano* tétel segítségével:

Kinematikai előírás: a C pont y irányú elmozdulása zérus ($v_C = 0$).

Castigliano tétel: $v_C = \frac{\partial U}{\partial F_{Cy}} = 0$.

$$U = \int_{(4l)} \frac{M_h^2}{2 I_x E} dz, \quad M_h = M_0 + F_{Cy} m_C, \quad \Rightarrow \quad U = \int_{(4l)} \frac{(M_0 + F_{Cy} m_C)^2}{2 I_x E} dz.$$

A kinematikai előírás: $v_C = \frac{\partial U}{\partial F_{Cy}} = 0 = \frac{1}{I_x E} \int_{(4l)} (M_0 + F_{Cy} m_C) m_C dz$.

$$0 = \frac{1}{I_x E} \left(\int_{(4l)} M_0 m_C dz + F_{Cy} \int_{(4l)} m_C^2 dz \right) \quad \Rightarrow \quad F_{Cy} = - \frac{\int_{(4l)} M_0 m_C dz}{\int_{(4l)} m_C^2 dz}.$$

Az integrálok kiszámítása:

$$\begin{aligned} \int_{(4l)} M_0 m_C dz &= \frac{2l}{6} \left[0 + 4 \left(\frac{Fl}{2} \right) (-l) + (Fl) (-2l) \right] + \\ &\quad + \frac{l}{6} \left[(Fl) (-2l) + 4 \left(\frac{Fl}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} l \right) + 0 \right] = -\frac{13 Fl^3}{6}, \\ \int_{(4l)} m_C^2 dz &= \frac{2l}{6} \left[0 + 4 (-l)^2 + (-2l)^2 \right] + \frac{2l}{6} \left[(-2l)^2 + 4 (-l)^2 + 0 \right] = \frac{32 l^3}{6}. \end{aligned}$$

$$F_{Cy} = -\frac{-\frac{13 F l^3}{6}}{\frac{32 l^3}{6}} = \frac{13}{32} F = 13 \text{ kN} .$$

Az F_{Cy} pozitív, tehát a felvett F_{Cy} irányába, vagyis felfelé mutat.

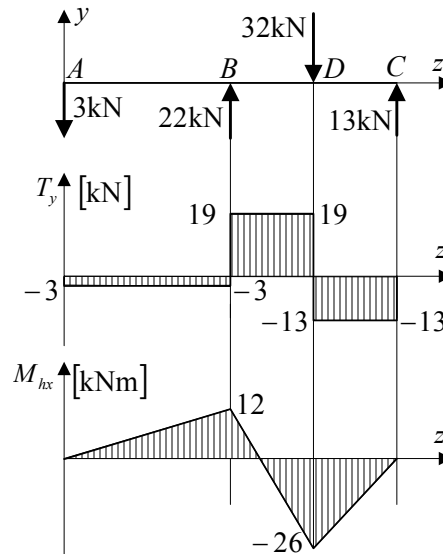
d) A többi támasztóerő koordináta meghatározása:

$$F_{Az} = F'_{Az} + F''_{Az} = 0 , \quad F_{Ay} = F'_{Ay} + F''_{Ay} = -0,5 F + F_{Cy} = -3 \text{ kN} ,$$

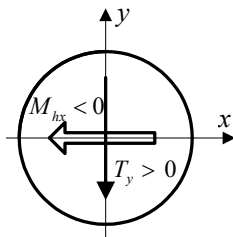
$$F_{By} = F'_{By} + F''_{By} = 1,5 F - 2 F_{Cy} = 22 \text{ kN} ,$$

$$F_{Cy} = 13 \text{ kN} .$$

e) A statikailag határozatlan szerkezet igénybevételi ábráinak a megrajzolása:



f) A veszélyes keresztmetszet meghatározása:



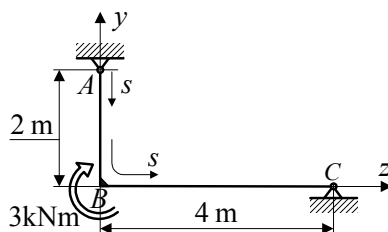
Veszélyes keresztmetszet: D^- .

A veszélyes keresztmetszet igénybevételei:

$$T_y = 19 \text{ kN} , \quad M_{hx} = -26 \text{ kNm} .$$

Az igénybevételeket az ábra szemlélteti.

7.5.2. feladat: Statikailag határozatlan tartó támasztóerői és igénybevételi ábrái



Adott:

A törtvonalú tartó méretei, terhelése és

$$I_x = \text{állandó} , \quad E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa} .$$

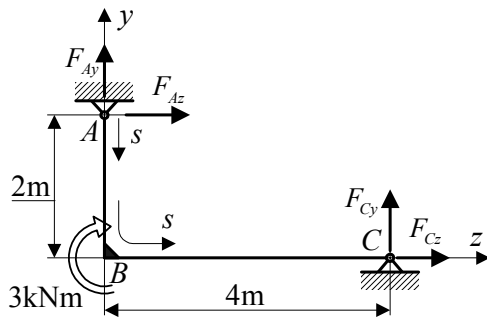
A nyírásból származó alakváltozási energiát elhanyagoljuk.

Feladat:

- A tartó ismeretlen támasztóerő koordinátái számának és a statikai egyenletek számának meghatározása.
- A tartó statikailag határozottá tétele.
- Kinematikai előírás a b) pontban kijelölt feladathoz és az ismeretlen támasztóerő koordináta meghatározása a *Castigliano* tétel segítségével.
- A többi támasztóerő koordináta meghatározása és az igénybevételi ábrák megrajzolása.

Kidolgozás:

- A tartó ismeretlen támasztóerő koordinátái számának és a statikai egyenletek számának meghatározása:



Az ismeretlen támasztóerő koordináták száma:

$$F_{Ay}, F_{Az}, F_{Cy}, F_{Cz} \Rightarrow n_i = 4.$$

A statikai egyenletek száma: $n_e = 3$.

A tartó statikailag egyszeresen határozatlan.

- A tartó statikailag határozottá tétele:

A tartót négyféleképpen lehet statikailag határozottá tenni:

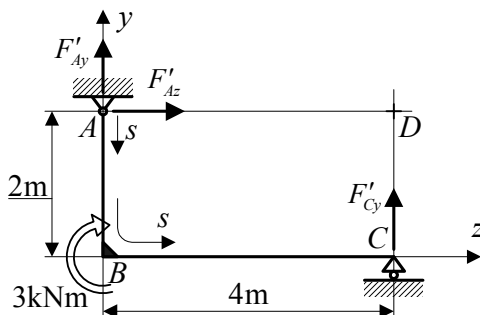
- Elhagyjuk az A pontban az y irányú megtámasztást.
- Elhagyjuk a C pontban az y irányú megtámasztást.
- Elhagyjuk az A pontban az z irányú megtámasztást.
- Elhagyjuk a C pontban az z irányú megtámasztást.

Ha a negyedik esetet választjuk, akkor a tartó igénybevételei:

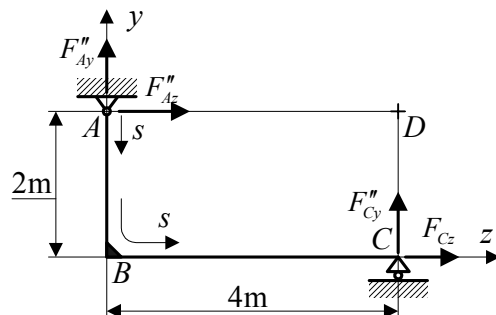
$$T = T_0 + F_{Cz} t_C, \quad M_{hx} = M_0 + F_{Cz} m_C.$$

A C pontbeli z irányú megtámasztás elhagyásával statikailag határozottá tett törtvonalú tartó igénybevételi ábrái:

Eredeti terheléshez tartozó igénybevételi ábrák:



A $F_{Cz} = 1$ kN terheléshez tartozó igénybevételi ábrák:



A támasztóerő-rendszer meghatározása:

$$M_a = 0 = -4 F'_{Cy} + 3 \Rightarrow F'_{Cy} = 0,75 \text{ kN},$$

A támasztóerő-rendszer meghatározása:

$$M_a = 0 = -4 F''_{Cy} - 2 F_{Cz} \Rightarrow F''_{Cy} = -0,5 F_{Cz},$$

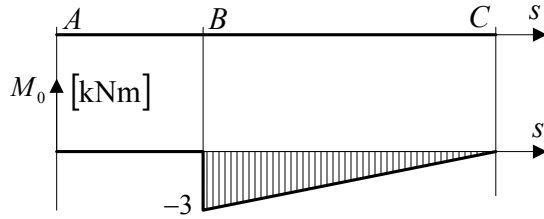
$$M_d = 0 = 4 F'_{Ay} + 3 \Rightarrow F'_{Ay} = -0,75 \text{ kN},$$

$$F_z = 0 = F'_{Az} \Rightarrow F'_{Az} = 0.$$

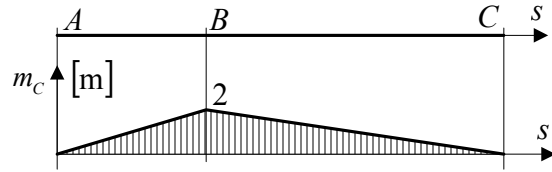
$$M_d = 0 = -4 F''_{Cy} + 2 F_{Cz} \Rightarrow F''_{Ay} = 0,5 F_{Cz},$$

$$F_z = 0 = F''_{Az} + F_{Cz} \Rightarrow F''_{Az} = -F_{Cz}.$$

Az eredeti terheléshez tartozó nyomatéki ábra:



Az egységnyi F_{Cz} terheléshez tartozó nyomatéki ábra:



c) Kinematikai előírás a b) pontban kijelölt feladathoz és az ismeretlen támasztóerő koordináta meghatározása a *Castigliano* tétel segítségével:

Kinematikai előírás az, hogy a C pont z irányú elmozdulása zérus ($w_C = 0$).

Castigliano tétel: $w_C = \frac{\partial U}{\partial F_{Cz}} = 0$.

$$U = \int_{(6m)} \frac{M_{hx}^2}{2 I_x E} ds, \quad M_{hx} = M_0 + F_{Cz} m_C, \quad \Rightarrow \quad U = \int_{(6m)} \frac{(M_0 + F_{Cz} m_C)^2}{2 I_x E} ds.$$

A kinematikai előírás:

$$w_C = \frac{\partial U}{\partial F_{Cz}} = 0 = \frac{1}{I_x E} \int_{(6m)} (M_0 + F_{Cz} m_C) m_C ds = \frac{1}{I_x E} \int_{(6m)} M_0 m_C ds + \frac{1}{I_x E} F_{Cz} \int_{(6m)} m_C^2 ds =$$

$$= \frac{1}{I_x E} \left(\int_{(6m)} M_0 m_C dz + F_{Cz} \int_{(6m)} m_C^2 dz \right).$$

Az integrálok kiszámítása:

$$\int_{(6m)} M_0 m_C dz = \frac{4}{6} [-3 \cdot 2 + 4(-1,5)1 + 0] = -8 \text{ kNm}^3,$$

$$\int_{(6m)} m_C^2 dz = \frac{2}{6} [0 + 4(1)^2 + (2)^2] + \frac{4}{6} [(2)^2 + 4(1)^2 + 0] = 8 \text{ m}^3.$$

A F_{Cz} támasztóerő koordináta meghatározása:

$$F_{Cz} = - \frac{\int_{(6m)} M_0 m_C dz}{\int_{(6m)} m_C^2 dz} = - \frac{-8}{8} = 1 \text{ kN}.$$

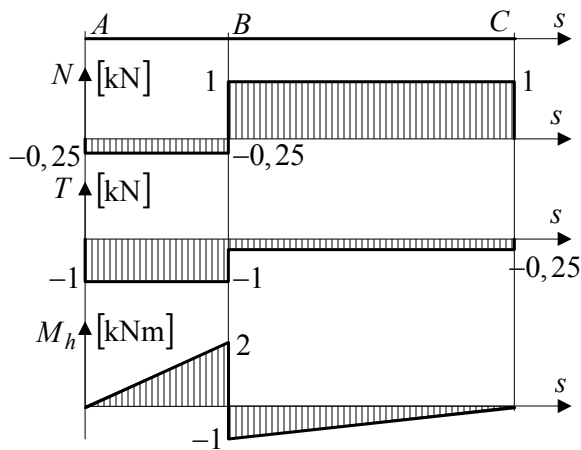
Az F_{Cz} pozitív, tehát z irányába mutat.

d) A többi támasztóerő koordináta meghatározása és az igénybevételi ábrák megrajzolása:

$$F_{Ay} = F'_{Ay} + F''_{Ay} = -0,75 + 0,5 = -0,25 \text{ kN},$$

$$F_{Cy} = F'_{Cy} + F''_{Cy} = 0,75 - 0,5 = 0,25 \text{ kN},$$

$$F_{Az} = F'_{Az} + F''_{Az} = 0 - 1 = -1 \text{ kN}.$$

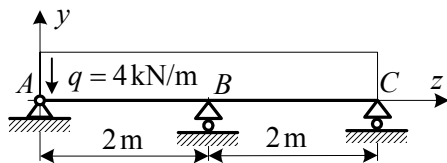


Veszélyes keresztmetszetek:

Hajlításra és nyírásra: B^- ,

Húzásra: B^+ .

7.5.3. feladat: Statikailag határozatlan tartó támasztóerői és igénybevételi ábrái



Adott:

A tartó méretei, terhelése és $I_x E = \text{állandó}$.

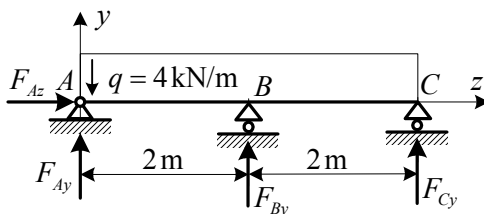
A nyírásból származó alakváltozási energiát elhanyagoljuk.

Feladat:

- A tartó statikai ismeretleneinek és a rendelkezésre álló statikai egyenletek számának meghatározása.
- A tartó statikailag határozottá tétele.
- Az ismeretlen támasztóerő koordináta meghatározása a *Castigliano* tétel segítségével.
- A támasztóerők meghatározása egyensúlyi egyenletekből és az igénybevételi ábrák megrajzolása.

Kidolgozás:

- A tartó statikai ismeretleneinek és a rendelkezésre álló statikai egyenletek számának meghatározása:

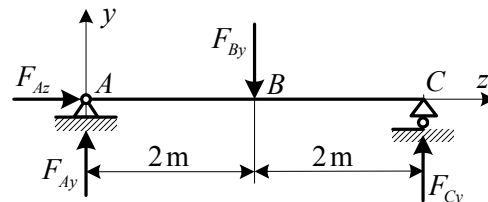
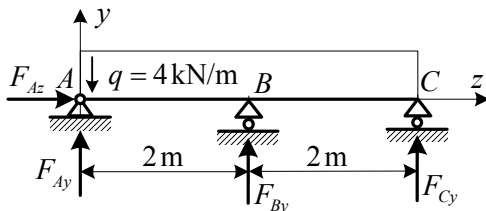


Ismeretlenek: $F_{Ay}, F_{Az}, F_{By}, F_{Cy}$.

A statikai egyenletek száma 3.

A tartó statikailag egyszeresen határozatlan.

- A tartó statikailag határozottá tétele: elhagyjuk a B görgőt.



c) Az ismeretlen F_{By} támasztóerő meghatározása a *Castigliano* tétel segítségével:

Eredeti terheléshez tartozó támasztóerő-rendszer meghatározása:

$$F_q = (2 + 2) \cdot 4 = 16 \text{ kN}, \quad F_{Az} = 0,$$

$$M_a = 0 = -2F_q + 4F_{Cy},$$

$$F_{Cy} = \frac{F_q}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ kN},$$

$$F_y = 0 = F_{Ay} - F_q + F_{cy},$$

$$F_{Ay} = F_q - F_{Cy} = 16 - 8 = 8 \text{ kN}.$$

Az F_{By} terheléshez tartozó támasztóerő-rendszer meghatározása:

$$F_{Az} = 0,$$

$$M_a = 0 = -2F_{By} + 4F_{Cy},$$

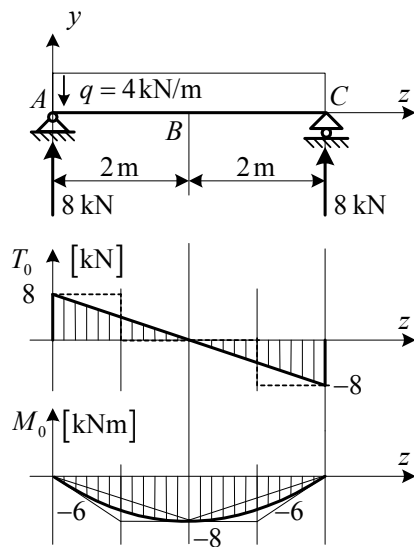
$$F_{Cy} = \frac{F_{By}}{2} = 0,5 \text{ kN},$$

$$F_y = 0 = F_{Ay} - F_{By} + F_{Cy},$$

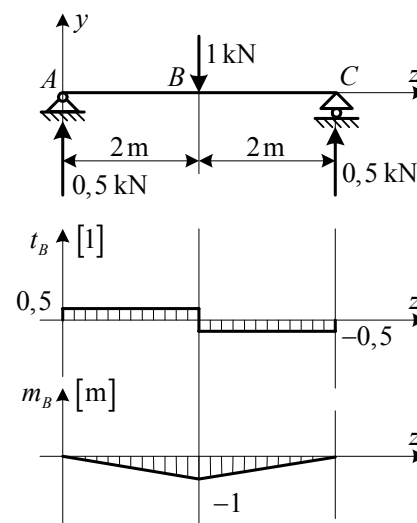
$$F_{Ay} = F_{By} - F_{Cy} = 1 - 0,5 = 0,5 \text{ kN}.$$

A statikailag határozottá tett tartó igénybevételi ábrái:

Eredeti terheléshez tartozó igénybevételi ábrák:



Az $F_{By} = 1 \text{ kN}$ terheléshez tartozó igénybevételi ábrák:



Az ismeretlen támasztóerő koordináta meghatározása a *Castigliano* tétel segítségével:

A kinematikai előírás az, hogy a B pont y irányú elmozdulása zérus ($w_B = 0$).

Castigliano tétel: $w_B = \frac{\partial U}{\partial F_{By}} = 0.$

$$U = \int_{(2l)} \frac{M_{hx}^2}{2 I_x E} dz, \quad M_{hx} = M_0 + F_{By} m_B, \quad \Rightarrow \quad U = \int_{(2l)} \frac{(M_0 + F_{By} m_B)^2}{2 I_x E} dz.$$

A kinematikai előírás:

$$\begin{aligned} w_B = \frac{\partial U}{\partial F_{By}} = 0 &= \frac{1}{I_x E} \int_{(2l)} (M_0 + F_{By} m_B) m_B dz = \frac{1}{I_x E} \int_{(2l)} M_0 m_B dz + \frac{1}{I_x E} F_{By} \int_{(2l)} m_B^2 dz = \\ &= \frac{1}{I_x E} \left(\int_{(2l)} M_0 m_B dz + F_{By} \int_{(2l)} m_B^2 dz \right). \end{aligned}$$

Az integrálok kiszámítása:

$$\int_{(2l)} M_0 m_B dz = 2 \int_{(l)} M_0 m_B dz = 2 \frac{2}{6} \{ 0 \cdot 0 + 4 \cdot (-6) \cdot (-0,5) + (-8) \cdot (-1) \} = \frac{2}{3} (12 + 8) = \frac{40}{3},$$

$$\int_{(2l)} m_B^2 dz = 2 \int_{(l)} m_B^2 dz = 2 \frac{2}{6} \{ 0^2 + 4 \cdot (-0,5)^2 + (-1)^2 \} = \frac{2}{3} (1 + 1) = \frac{4}{3}.$$

A F_{By} támasztóerő koordináta meghatározása:

$$F_{By} = - \frac{\int_{(2l)} M_0 m_B dz}{\int_{(2l)} m_B^2 dz} = - \frac{\frac{40}{3}}{\frac{4}{3}} = -10 \text{ kN}.$$

Az F_{By} negatív, tehát y irányába mutat.

d) A támasztóerők meghatározása egyensúlyi egyenletekből és az igénybevételi ábrák megrajzolása:

A többi támasztóerő koordinátát az eredeti tartóra felírható egyensúlyi egyenletekből határozzuk meg:

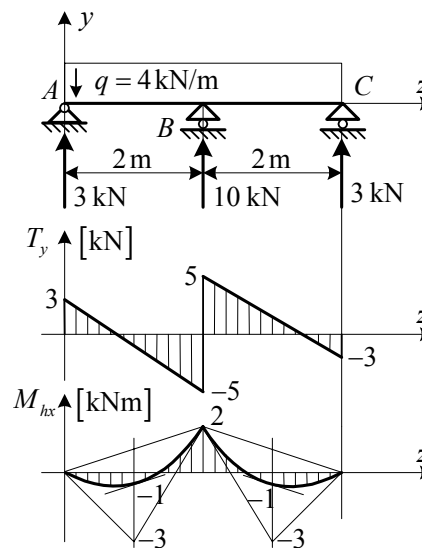
$$M_a = 0 = -2F_q + 2F_{By} + 4F_{Cy},$$

$$F_{Cy} = \frac{1}{2} (F_q - F_{By}) = \frac{1}{2} (16 - 10) = 3 \text{ kN},$$

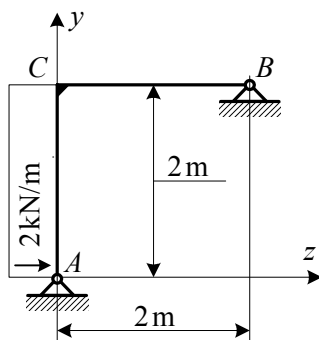
$$F_y = 0 = F_{Ay} - F_q + F_{By} + F_{Cy},$$

$$F_{Ay} = F_q - F_{By} - F_{Cy} = 16 - 10 - 3 = 3 \text{ kN}.$$

A tartó igénybevételi ábrái:



7.5.4. feladat: Statikailag határozatlan tartó támasztóerői és igénybevételi ábrái



Adott:

A törtvonalú tartó méretei, terhelése és $I_x E = \text{állandó}$.

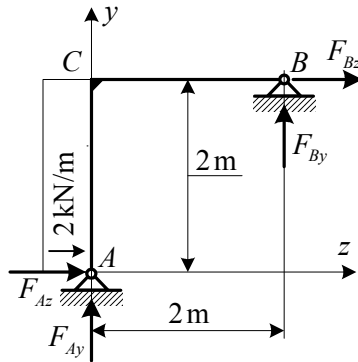
A nyírásból és a húzás-nyomásból származó alakváltozási energiát elhanyagoljuk.

Feladat:

- A tartó statikai ismeretleneinek és a rendelkezésre álló statikai egyenletek számának meghatározása.
- A tartó statikailag határozottá tétele.
- Az ismeretlen támasztóerő meghatározása a *Castigliano* tétel segítségével.
- A támasztóerők meghatározása egyensúlyi egyenletekből és az igénybevételi ábrák megrajzolása.

Kidolgozás:

- A tartó statikai ismeretleneinek és a rendelkezésre álló statikai egyenletek számának meghatározása:

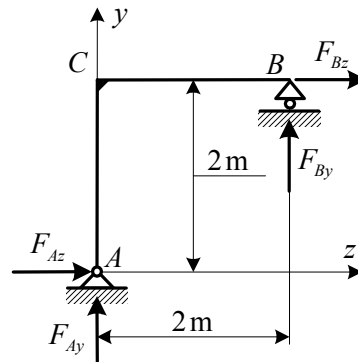
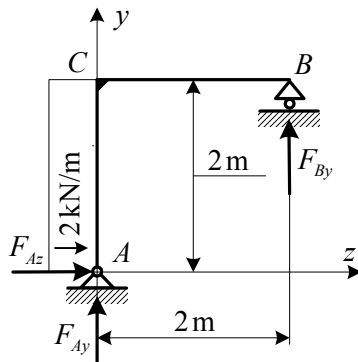


Ismeretlenek: $F_{Ay}, F_{Az}, F_{By}, F_{Bz}$.

A statikai egyenletek száma 3.

A tartó statikailag egyszeresen határozatlan.

- A tartó statikailag határozottá tétele.



- Az ismeretlen támasztóerő meghatározása a *Castigliano* tétel segítségével.

Az eredeti terheléshez tartozó támasztóerőrendszer meghatározása:

$$F_q = 2 \cdot 2 = 4 \text{ kN},$$

$$F_z = 0 = F_{Az} + 2 \cdot 2, \Rightarrow F_{Az} = -F_q = -4 \text{ kN},$$

$$M_a = 0 = -F_q \cdot 1 + 2F_{By}, \Rightarrow F_{By} = \frac{4}{2} = 2 \text{ kN},$$

$$F_y = 0 = F_{Ay} + F_{By}, \Rightarrow F_{Ay} = -F_{By} = -2 \text{ kN}.$$

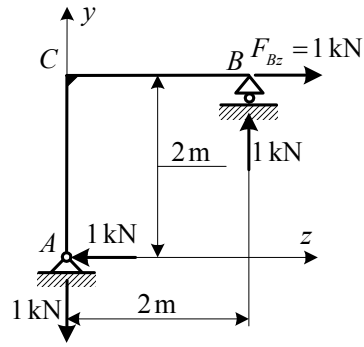
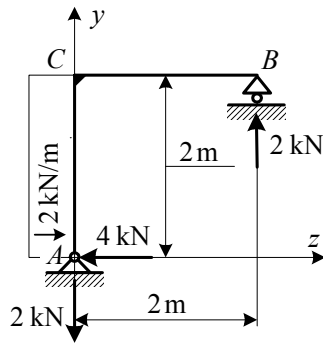
Az $F_{Bz} = 1 \text{ kN}$ terheléshez tartozó támasztóerőrendszer meghatározása:

$$F_z = 0 = F_{Az} + F_{Bz}, \Rightarrow F_{Az} = -F_{Bz} = -1 \text{ kN},$$

$$M_a = 0 = 2F_{By} - 2F_{Bz}, \Rightarrow F_{By} = F_{Bz} = 1 \text{ kN},$$

$$F_y = 0 = F_{Ay} + F_{By}, \Rightarrow F_{Ay} = -F_{By} = -1 \text{ kN}.$$

A támasztó erőrendszerek szemléltetése a tartón:

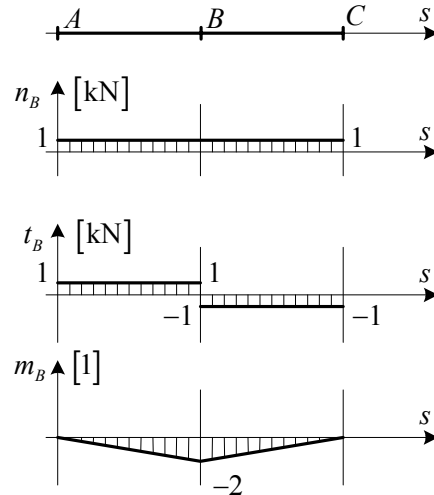
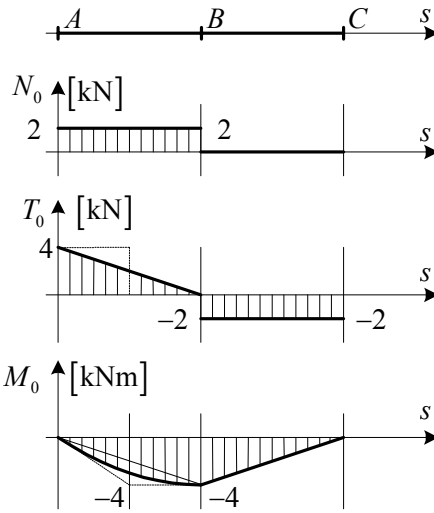


A statikailag határozottá tett tartó igénybevételi ábrái:

$$N(s) = N_0(s) + F_{Bz} n_B(s), \quad T(s) = T_0(s) + F_{Bz} t_B(s), \quad M_{hx}(s) = M_0(s) + F_{Bz} m_B(s).$$

Eredeti terheléshez tartozó igénybevételi ábrák:

Az $F_{Bz} = 1$ kN terheléshez tartozó igénybevételi ábrák:



Az ismeretlen támasztóerő meghatározása a *Castigliano* tétel segítségével:

A kinematikai előírás az, hogy a B pont z irányú elmozdulása zérus ($w_B = 0$).

Castigliano tétel: $w_B = \frac{\partial U}{\partial F_{Bz}} = 0$.

$$U = \int_{(2l)} \frac{M_{hx}^2}{2 I_x E} dz, \quad M_{hx} = M_0 + F_{Bz} m_B, \quad \Rightarrow \quad U = \int_{(2l)} \frac{(M_0 + F_{Bz} m_B)^2}{2 I_x E} dz.$$

A kinematikai előírás:

$$\begin{aligned} w_B = \frac{\partial U}{\partial F_{Bz}} = 0 &= \frac{1}{I_x E} \int_{(2l)} (M_0 + F_{Bz} m_B) m_B dz = \frac{1}{I_x E} \int_{(2l)} M_0 m_B dz + \frac{1}{I_x E} F_{Bz} \int_{(2l)} m_B^2 dz = \\ &= \frac{1}{I_x E} \left(\int_{(2l)} M_0 m_B dz + F_{Bz} \int_{(2l)} m_B^2 dz \right). \end{aligned}$$

Az integrálok kiszámítása:

$$\begin{aligned}\int_{(2l)} M_0 m_B dz &= \int_{(AC)} M_0 m_B dz + \int_{(CB)} M_0 m_B dz = \\ &= \frac{2}{6} \{0 \cdot 0 + 4 \cdot (-3) \cdot (-1) + (-4) \cdot (-2)\} + \frac{2}{6} \{(-4) \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) + 0 \cdot 0\} = \\ &= \frac{1}{3} (12 + 8) + \frac{1}{3} (8 + 8) = \frac{1}{3} (20 + 16) = \frac{36}{3} = 12, \\ \int_{(2l)} m_B^2 dz &= 2 \int_{(l)} m_B^2 dz = 2 \frac{2}{6} \{0^2 + 4 \cdot (-1)^2 + (-2)^2\} = \frac{2}{3} (4 + 4) = \frac{16}{3}.\end{aligned}$$

A támasztóerő koordináta meghatározása: $F_{By} = - \frac{\int_{(2l)} M_0 m_B dz}{\int_{(2l)} m_B^2 dz} = - \frac{12}{\frac{16}{3}} = - \frac{9}{4} = -2,25 \text{ kN}.$

Az F_{Bz} negatív, tehát $(-z)$ irányába mutat.

d) A támasztóerők meghatározása egyensúlyi egyenletekből és az igénybevételi ábrák megrajzolása:

A többi támasztóerőt az eredeti tartóra felírható egyensúlyi egyenletekből határozzuk meg.

$$F_z = 0 = F_{Ax} + F_q - 2,25,$$

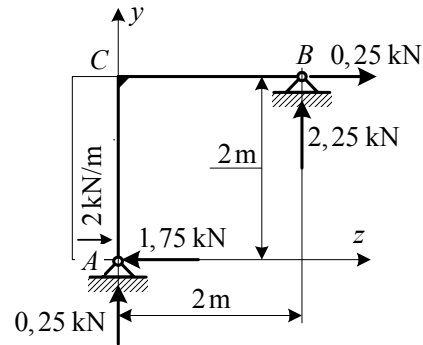
$$F_{Az} = 2,25 - F_q = 2,25 - 4 = -1,75 \text{ kN},$$

$$M_a = 0 = -1 F_q + 2 F_{By} - 2 F_{Bz},$$

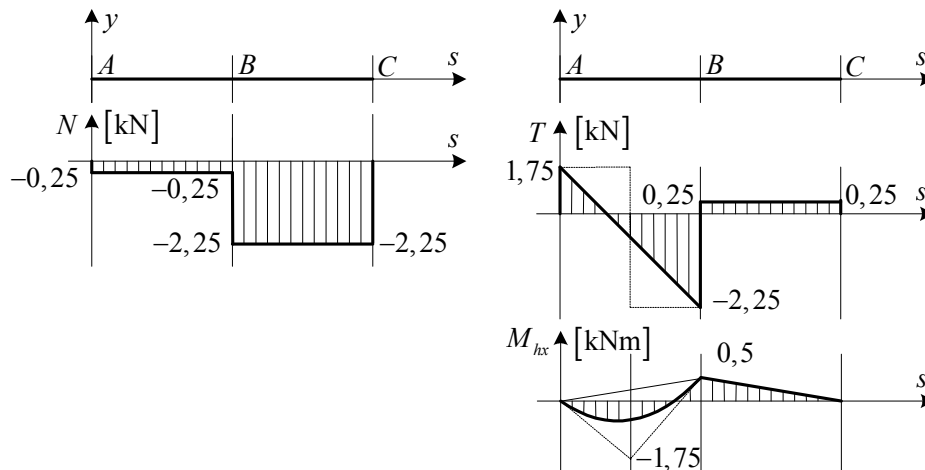
$$F_{By} = \frac{1}{2} (F_q + F_{Bz}) = \frac{1}{2} \left(4 + 2 \cdot \left(-\frac{9}{4} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4} = -0,25 \text{ kN},$$

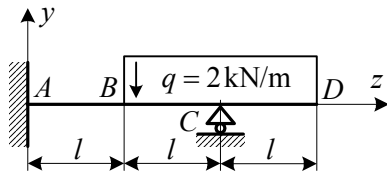
$$F_{Ay} = -F_{By} = 0,25 \text{ kN}.$$



A tartó igénybevételi ábrái:



7.5.5. feladat: Statikailag határozatlan rúdszerkezet támasztó erőrendszere és igénybevételi ábrái



Adott:

$$l = 1 \text{ m}, q_0 = 2 \text{ kN/m}, I_x E = \text{állandó}.$$

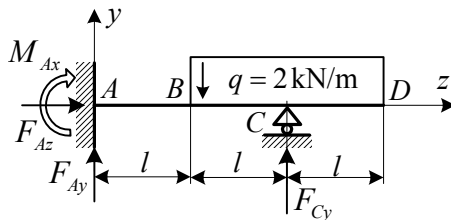
A nyírásból származó alakváltozási energiát elhanyagoljuk.

Feladat:

- A tartó statikai ismeretleneinek és a rendelkezésre álló statikai egyenletek számának meghatározása.
- A tartó statikailag határozottá tétele.
- Az ismeretlen támasztóerő koordináta meghatározása a *Castigliano* tétel segítségével.
- A többi támasztóerő koordináta meghatározása egyensúlyi egyenletekből és az igénybevételi ábrák megrajzolása.

Megoldás:

- A tartó statikai ismeretlenei és a rendelkezésre álló statikai egyenletek száma:

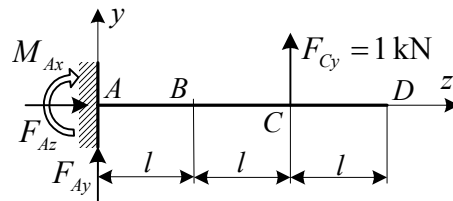
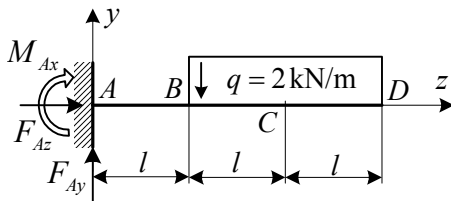


Ismeretlenek: $F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Cy}, M_A$ - 4 db. skálár.

A statikai egyenletek száma: 3.

A tartó statikailag egyszeresen határozatlan.

- A tartó statikailag határozottá tétele.



Eredeti terheléshez tartozó támasztóerő-rendszer meghatározása:

$$F_{q_0} = 2l q_0 = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4 \text{ kN},$$

$$F_{Az} = 0,$$

$$F_y = 0 = F_{Ay} - F_{q_0},$$

$$F_{Ay} = F_{q_0} = 4 \text{ kN},$$

$$M_a = 0 = M_{Ax} - 2l F_{q_0},$$

$$M_{Ax} = 2l F_{q_0} = 2 \cdot 1 \cdot 4 = 8 \text{ kNm}.$$

Az $F_{Cy} = 1 \text{ kN}$ terheléshez tartozó támasztóerő-rendszer meghatározása:

$$F_{Az} = 0,$$

$$F_y = 0 = F_{Ay} + F_{Cy},$$

$$F_{Cy} = -F_{Ay} = -1 \text{ kN},$$

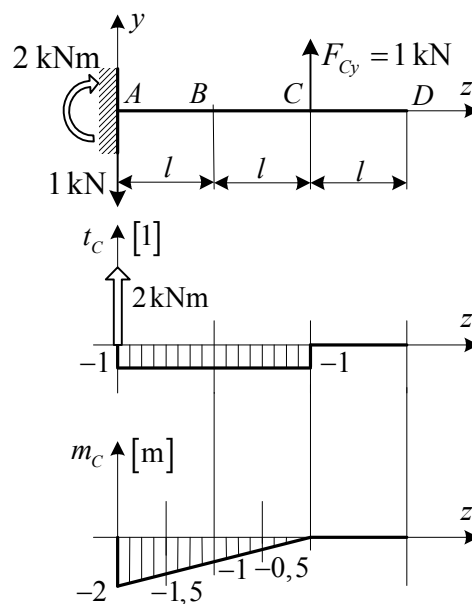
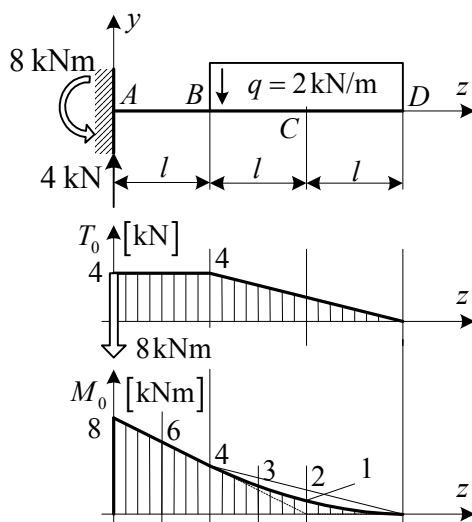
$$M_a = 0 = M_{Ax} + 2l F_{Cy},$$

$$M_{Ax} = -2l F_{Cy} = -2 \cdot 1 \cdot 1 = -2 \text{ kNm}.$$

- Az ismeretlen támasztóerő:

Eredeti terheléshez tartozó igénybevételi ábrák:

Az $F_{Cy} = 1 \text{ kN}$ terheléshez tartozó igénybevételi ábrák:



Castigliano tétel: $v_C = \frac{\partial U}{\partial F_{Cy}} = 0$.

$$v_C = \frac{1}{I_x E} \left(\int_{(3l)} M_0 m_C dz + F_{Cy} \int_{(3l)} m_C^2 dz \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Cy} = - \frac{\int_{(3l)} M_0 m_C dz}{\int_{(3l)} m_C^2 dz}.$$

Az integrálok: $\int_{(3l)} M_0 m_C dz = \int_{(AB)} M_0 m_C dz + \int_{(BC)} M_0 m_C dz = -\frac{64,5}{6}, \quad \int_{(3l)} m_C^2 dz = \frac{16}{6}.$

A támasztóerő koordináta: $F_{Cy} = - \frac{\int_{(3l)} M_0 m_C dz}{\int_{(3l)} m_C^2 dz} = \frac{64,5}{16} = 4,0325 \text{ kN} \approx 4 \text{ kN}.$

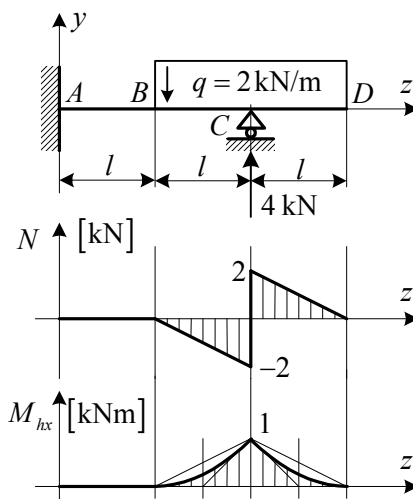
d) A többi támasztóerő koordináta és az igénybevételi ábrák:

$$F_y = 0 = F_{Ay} - F_{q_0} + F_{Cy} \quad \Rightarrow$$

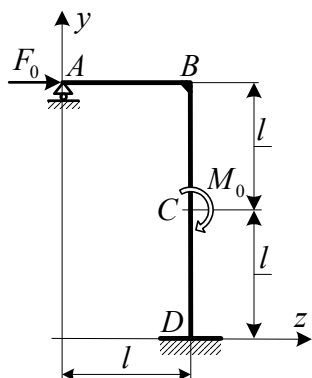
$$F_{Ay} = F_{q_0} - F_{Cy} = 4 - 4 = 0.$$

$$M_a = 0 = M_A - 2lF_{q_0} + 2lF_{Cy} \quad \Rightarrow$$

$$M_{Ax} = 2lF_{q_0} - 2lF_{Cy} = 2l(F_{q_0} - F_{Cy}) = 0.$$



7.5.6. feladat: Statikailag határozatlan rúdszerkezet támasztó erőrendszere és igénybevételi ábrái



Adott:

$$l = 1 \text{ m}, \quad a = 0,1 \text{ m}, \quad b = 0,2 \text{ m}, \quad F_0 = 2 \text{ kN},$$

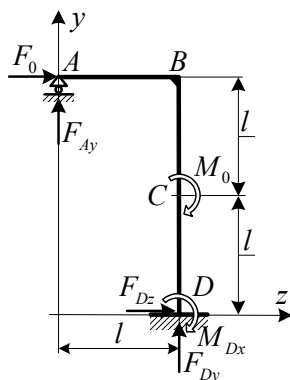
$$M_0 = 4 \text{ kNm}.$$

A húzás-nyomásból származó alakváltozási energiát beszámitjuk, a nyírásból származó alakváltozási energiát pedig elhanyagoljuk.

- Feladat:**
- A tartó statikai ismeretleneinek és a rendelkezésre álló statikai egyenletek számának meghatározása.
 - A tartó statikailag határozottá tétele.
 - Az ismeretlen támasztóerő meghatározása a *Castigliano* tétellel.
 - A többi támasztóerő koordináta meghatározása és az igénybevételi ábrák megrajzolása.

Megoldás:

- a) A tartó statikai ismeretlenei és a rendelkezésre álló statikai egyenletek száma:

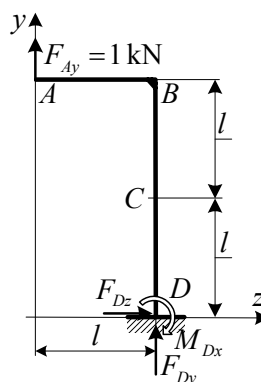
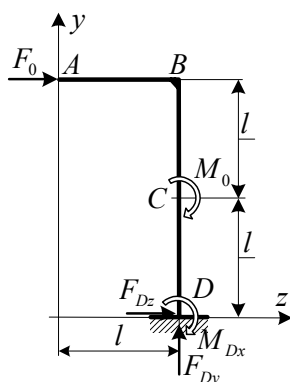


Ismeretlenek: $F_{Ay}, F_{Dy}, F_{Dz}, M_D$ - 4 db.

A statikai egyenletek száma: 3.

A tartó statikailag egyszerűen határozatlan.

- b) A tartó statikailag határozottá tétele:



Az eredeti terheléshez tartozó támasztóerő-rendszer meghatározása:

$$F_{Dy} = 0,$$

$$F_{Dz} = -F_0 = -2 \text{ kN},$$

$$M_d = 0 = M_D - M_0 - 2lF_0,$$

$$M_D = M_0 + 2lF_0 = 4 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 8 \text{ kNm}.$$

Az $F_{Ay} = 1 \text{ kN}$ terheléshez tartozó támasztóerő-rendszer meghatározása:

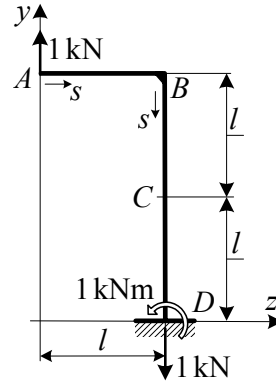
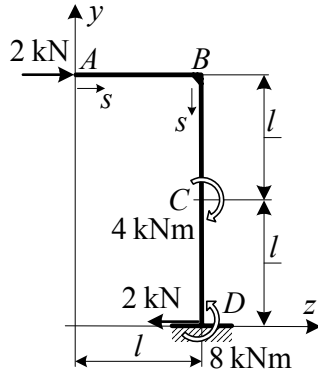
$$F_{Dz} = 0,$$

$$F_{Dy} = -F_{Ay} = -1 \text{ kN},$$

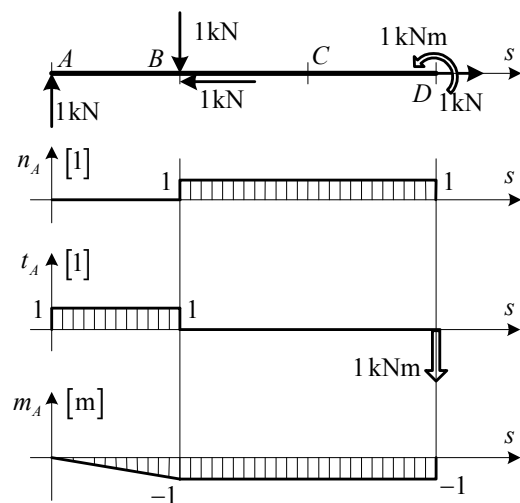
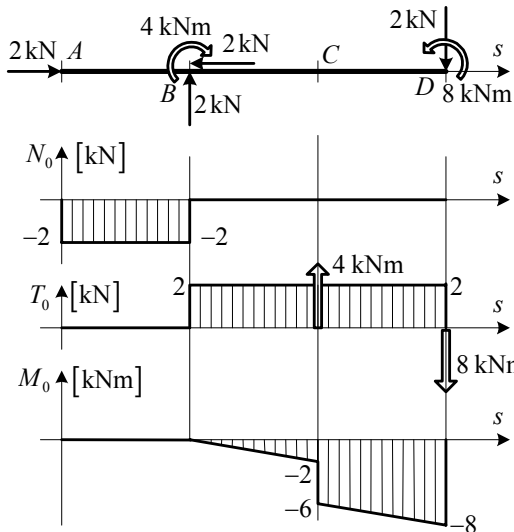
$$M_d = 0 = M_D - lF_{Ay},$$

$$M_D = lF_{Ay} = 1 \cdot 1 = 1 \text{ kNm}.$$

c) Az ismeretlen támasztóerő meghatározása a *Castigliano* tétel segítségével.



Igénybevételi ábrák:



Az ismeretlen támasztóerő meghatározása a *Castigliano* tétellel

Kinematikai előírás: az A pont y irányú elmozdulása zérus ($v_A = 0$).

Castigliano tétel: $v_A = \frac{\partial U}{\partial F_{Ay}} = 0$.

$$U \approx U_N + U_M = \frac{1}{2} \int_{(3l)} \frac{N^2}{AE} ds + \frac{1}{2} \int_{(3l)} \frac{M_{hx}^2}{I_x E} ds, \quad N = N_0 + F_{Ay} n_A, \quad M_{hx} = M_0 + F_{Ay} m_A.$$

$$\begin{aligned}
v_A = 0 &= \frac{\partial U}{\partial F_{Ay}} = \frac{\partial}{\partial F_{Ay}} (U_N + U_M) = \frac{\partial}{\partial F_{Ay}} \left(\frac{1}{2} \int_{(3l)} \frac{M_{hx}^2}{I_x E} ds + \frac{1}{2} \int_{(3l)} \frac{N^2}{A E} ds \right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial F_{Ay}} \left(\frac{1}{2} \int_{(3l)} \frac{(N_0 + F_{Ay} n_A)^2}{A E} ds + \frac{1}{2} \int_{(3l)} \frac{(M_0 + F_{Ay} m_A)^2}{I_x E} ds \right) = \\
&= \frac{1}{A E} \int_{(3l)} (N_0 + F_{Ay} n_A) n_A ds + \frac{1}{I_x E} \int_{(3l)} (M_0 + F_{Ay} m_A) m_A ds = \\
&= \frac{1}{A E} \int_{(3l)} N_0 n_A ds + \frac{1}{A E} F_{Ay} \int_{(3l)} n_A^2 ds + \frac{1}{I_x E} \int_{(3l)} M_0 m_A ds + \frac{1}{I_x E} F_{Ay} \int_{(3l)} m_A^2 ds .
\end{aligned}$$

$$F_{Ay} = - \frac{\frac{1}{A E} \int_{(3l)} N_0 n_A ds + \frac{1}{I_x E} \int_{(3l)} M_0 m_A ds}{\frac{1}{A E} \int_{(3l)} n_A^2 ds + \frac{1}{I_x E} \int_{(3l)} m_A^2 ds} = - \frac{\frac{I_x}{A} \int_{(3l)} N_0 n_A ds + \int_{(3l)} M_0 m_A ds}{\frac{I_x}{A} \int_{(3l)} n_A^2 ds + \int_{(3l)} m_A^2 ds} .$$

Az összefüggésben szereplő mennyiségek kiszámítása:

$$\frac{I_x}{A} = \frac{ab^3}{12ab} = \frac{b^2}{12} = \frac{200^2}{12} = \frac{40000}{12} = \frac{10000}{3} ,$$

$$\int_{(3l)} N_0 n_A ds = 0 , \quad \int_{(3l)} M_0 m_A ds = \int_{(BC)} M_0 m_A ds + \int_{(CD)} M_0 m_A ds = 8$$

$$\int_{(3l)} n_A^2 ds = \int_{(BD)} n_A^2 ds = 2 , \quad \int_{(3l)} m_A^2 ds = \int_{(AB)} m_A^2 ds + \int_{(BD)} m_A^2 ds = \frac{7}{3} .$$

A F_{By} támasztóerő koordináta meghatározása:

$$F_{Ay} = - \frac{\frac{I_x}{A} \int_{(3l)} N_0 n_A ds + \int_{(3l)} M_0 m_A ds}{\frac{I_x}{A} \int_{(3l)} n_A^2 ds + \int_{(3l)} m_A^2 ds} = - \frac{24}{20007} = 0,001199 \approx 0 \text{ kN} .$$

d) A többi támasztóerő koordináta meghatározása egyensúlyi egyenletekből és az igénybevé-
teli ábrák:

$$F_{Ay} = 0 \Rightarrow F_{Dy} = 0 ,$$

$$F_{Az} = -F_0 = -2 \text{ kN} ,$$

$$M_d = 0 = M_D - M_0 - 2lF_0 , \quad M_D = M_0 + 2lF_0 = 4 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 8 \text{ kNm}$$

A tartó igénybevételei ábrái:

