

8. RUGALMASSÁGTANI EGYENLETEK

8.1. A rugalmasságtani peremérték feladat

Adott: - a test/alkatrész alakja és méretei,

- a test/alkatrész anyaga,

- test/alkatrész terhelései és megtámasztásai.

Keresett: $\vec{u}$, $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{A}}$, u , a test szilárdságtani állapotait jellemző mennyiségek.

$\vec{u}(x, y, z)$ a test tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjának elmozdulás vektora,

$\underline{\underline{F}}(x, y, z)$ a test tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjában a feszültségi tenzor,

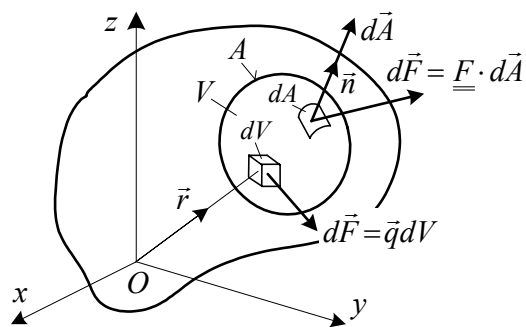
$\underline{\underline{A}}(x, y, z)$ a test tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjában az alakváltozási tenzor,

$u(x, y, z)$ a test tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjában a fajlagos alakváltozási energia.

Kérdés: Milyen általános összefüggések állnak fent ezek között az állapotjellemző mennyiségek között?

Válasz: A rugalmasságtani egyenletek.

8.2. Az egyensúlyi egyenletek



A vizsgált test tetszőleges alakú.

A testből kiragadunk egy olyan V térfogatot, amelyet az A zárt felület határol és amely teljes egészében a vizsgált test belsejében helyezkedik el.

A (V) környezetének mechanikai hatásait erőkkel vesszük figyelembe:

- az elemi térfogaton megoszló erő: $d\vec{F} = \vec{q} dV$,

- az elemi felületen megoszló erő: $d\vec{F} = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA$.

A (V) testrész egyensúlyban van: $\vec{F} = \vec{0} = \int_{(V)} \vec{q} dV + \oint_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA$.

Matematikai emlékeztető: a Gauss (kiejtése: gausz) - Ostrogradskij-féle integrál átalakítási tétel:

$$\oint_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA = \int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV$$

A *Hamilton*-féle (kiejtése: hemilton), vagy *nabla* (kiejtése: nábla) differenciál operátor derékszögű *descartesi* (kiejtése: dékárti) koordináta-rendszerben: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$,

Az integrál átalakítási tételt alkalmazva: $\vec{F} \cdot \vec{0} = \int_{(V)} (\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q}) dV$.

Az integrálnak bármely (V) választás esetén el kell tűnnie $\Rightarrow$ az integrandusz zérus.

Az egyensúlyi egyenlet:

$$\vec{F} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}. \quad (\text{vektor egyenlet} \equiv 3 \text{ db skaláris egyenlet}).$$

A skaláris egyenletek derékszögű *descartesi* (dékárti) koordináta-rendszerben:

$$(\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) + \vec{q} = \vec{0}.$$

Mátrix alakban felírva:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

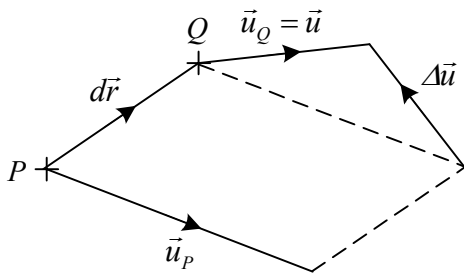
A mátrixszorzást elvégezve, három skaláris egyenletet kapunk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z &= 0. \end{aligned}$$

Egyensúlyi egyenletek: kapcsolat a térfogati terhelés és a belső erőrendszer/feszültségi állapot között.

Az $\vec{M}_O = \vec{0}$ egyensúlyi egyenletből az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor szimmetriája vezethető le.

8.3. Kinematikai (geometriai/ kompatibilitási) egyenletek



A test egy tetszőleges P pontjának elemi környezetét vizsgáljuk meg.

A Q pont a P pont elemi környezetében helyezkedik el.

$$d\vec{r} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z.$$

Az elmozdulásmező: $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z) = u(x, y, z)\vec{e}_x + v(x, y, z)\vec{e}_y + w(x, y, z)\vec{e}_z$.

A P ponthoz képest a Q pont elmozdulása: $\Delta\vec{u} = \vec{u}_Q - \vec{u}_P = \vec{u} - \vec{u}_P$.

Sorfejtés:

$$\vec{u}(x, y, z) = \underbrace{\vec{u}_P}_{\text{merevtestszerű eltolás}} + \underbrace{\left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right|_P dx + \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \right|_P dy + \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right|_P dz}_{\text{lineáris rész}} + \underbrace{\left(\dots \right)}_{\text{magasabbrendű tagok}}$$

$$\text{Lineáris közelítés esetén: } \Delta\vec{u} \approx d\vec{u} = \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right|_P \underbrace{dx}_{\vec{e}_x \cdot d\vec{r}} + \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \right|_P \underbrace{dy}_{\vec{e}_y \cdot d\vec{r}} + \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right|_P \underbrace{dz}_{\vec{e}_z \cdot d\vec{r}}.$$

$$\text{Minden tagból } d\vec{r} \text{ -t kiemelve: } d\vec{u} = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot d\vec{r} = \underline{\underline{D}} \cdot d\vec{r}.$$

Az elmozdulásmező derivált tenzora: $\underline{\underline{D}} = \vec{u} \circ \nabla$ (Nem szimmetrikus tenzor).

A derivált tenzor felbontása (minden tenzor felbontható egy szimmetrikus és egy ferdeszimmetrikus részre):

$$\underline{\underline{D}} = \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T)}_{\text{szimmetrikus rész}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T)}_{\text{ferdeszimmetrikus rész}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{\Psi}}.$$

A forgató tenzor: a P pont elemi környezetének merevtestszerű szögelfordulását jellemzi.

$$\underline{\underline{\Psi}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2}(\vec{u} \circ \nabla - \nabla \circ \vec{u}) \quad (\text{ferdeszimmetrikus}).$$

Az alakváltozási tenzor: a P pont elemi környezetének alakváltozását jellemzi.

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2}(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}) \quad (\text{szimmetrikus}).$$

Kis alakváltozások esetén ez a tenzoregyenlet a kinematikai/geometriai egyenlet.

A tenzorok mátrixa részletesen kiírva:

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad [\underline{\underline{D}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad [\underline{\underline{D}}^T] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Az alakváltozási tenzor koordinátái (elemei):

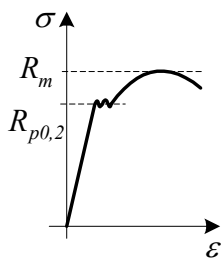
$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Skaláris egyenletek:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \text{ a szimmetria miatt hat skaláris egyenlet.}$$

Kinematikai egyenletek: kapcsolat az alakváltozási tenzor és az elmozdulás vektor koordinátái között. (Az alakváltozási tenzor elemei nem függetlenek egymástól – a három elmozdulásmezőből származtathatók.)

8.4 Anyagegyenletek – általános Hooke törvény



Az általános Hooke (kiejtése: huk) törvény a lineárisan rugalmas, izotróp anyagi viselkedést írja le.

Lineárisan rugalmas: az alakváltozások és a feszültségek között lineáris függvénykapcsolat van.

Izotróp: az anyagi viselkedés iránytól független. (Például a fémek esetében.)

Lineárisan rugalmas alakváltozás esetén a szakító diagram lineáris szakaszán vagyunk.

Az általános Hooke törvény két, egymással egyenértékű alakja:

$$\alpha) \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu F_I}{1+\nu} \underline{\underline{E}} \right), \quad \beta) \underline{\underline{F}} = 2G \left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu A_I}{1-2\nu} \underline{\underline{E}} \right).$$

Az egyenletekben szereplő mennyiségek jelentése:

G – csúsztató rugalmassági modulus } anyagjellemzők,
 ν – Poisson tényező

F_I – a feszültségi tenzor } első skalár invariánsa,
 A_I – az alakváltozási tenzor

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ az egységtenzor.}$$

Az α) alak skaláris egyenletei:

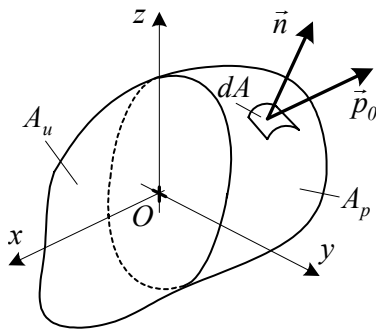
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{yx}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}. \end{aligned}$$

A β) alak skaláris egyenletei:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{xz} &= G \gamma_{xz}. \end{aligned}$$

Anyagegyenletek: kapcsolat az alakváltozási jellemzők és a feszültségek között.

8.5. Peremfeltételek



Dinamikai peremfeltétel: $\underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0$.

A $\vec{p}_0$ előírt (ismert) felületi terhelés az A_p -n.

Kinematikai peremfeltétel: $\vec{u} = \vec{u}_0$.

Az $\vec{u}_0$ előírt (ismert) elmozdulás az A_u -n.

8.6. A rugalmasságtani peremérték feladat megoldása

Egzisztencia és unicitás: Bebizonyítható, hogy a rugalmasságtani egyenleteknek adott peremfeltételek mellett egy és csak egy megoldása létezik.

Egzakt megoldás: A keresett mezők (függvények) minden rugalmasságtani egyenletet és peremfeltételt kielégítenek.

Közelítő megoldás: A keresett mezők (függvények) a rugalmasságtani egyenletek és peremfeltételek nem minden egyenletét elégítik ki.

8.7. A kompatibilitási (összeférhetőségi) egyenlet más alakjai

a) A Saint-Venant (kiejtése: szan-venan) – féle kompatibilitási egyenlet:

Tenzoriális alak: $\nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla = \underline{\underline{0}}$.

Skaláris egyenletek a derékszögű descartesi koordináta-rendszerben (DDKR-ben):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}, & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}, & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Fizikai tartalom: az alakváltozási tenzor koordinátái nem függetlenek egymástól.

b) A Beltrami-Michell (kiejtése: beltrámi-micsel) féle kompatibilitási egyenlet:

A *Saint-Venant* – féle kompatibilitási egyenletbe behelyettesítjük a Hooke-törvényt és $\bar{q} = \vec{0}$.

Tenzoriális alak: $(1 + \nu) \Delta \underline{\underline{F}} + \nabla \circ \nabla F_I = \underline{\underline{0}}$.

A *Laplace* (kiejtése: laplasz) – féle differenciál operátor DDKR-ben:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Skaláris egyenletek a DDKR-ben:

$$\begin{aligned} (1 + \nu) \Delta \sigma_x + \frac{\partial^2 F_I}{\partial x^2} &= 0, & (1 + \nu) \Delta \tau_{xy} + \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial y} &= 0, \\ (1 + \nu) \Delta \sigma_y + \frac{\partial^2 F_I}{\partial y^2} &= 0, & (1 + \nu) \Delta \tau_{yz} + \frac{\partial^2 F_I}{\partial y \partial z} &= 0, \\ (1 + \nu) \Delta \sigma_z + \frac{\partial^2 F_I}{\partial z^2} &= 0, & (1 + \nu) \Delta \tau_{zx} + \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Fizikai tartalom: Az alakváltozási jellemzők közötti összefüggések következtében a feszültségi tenzor elemei között a fenti összefüggések állnak fenn.

8.8. Gyakorló feladatok a rugalmasságtani egyenletekre

8.8.1. feladat: Az általános Hooke törvény

Adott: A izotróp, lineárisan rugalmas test P pontjában a feszültségi állapot: $\sigma_x = 70$ MPa, $\sigma_y = 50$ MPa, $\sigma_z = 10$ MPa, $\tau_{zx} = \tau_{xz} = 40$ MPa, továbbá az anyagi viselkedést jellemző mennyiségek $\nu = 0,3$, $G = 0,8 \times 10^5$ MPa.

Feladat: A P pont alakváltozási állapotának meghatározása és szemléltetése elemi triéderen.

Kidolgozás:

Az általános Hooke-törvény: $\underline{\underline{A}} = \frac{I}{2G} \left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \underline{\underline{E}} \right)$.

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 70 + 50 + 10 = 130 \text{ MPa}, \quad \frac{\nu}{1+\nu} F_I = \frac{0,3}{1+0,3} 130 = 30 \text{ MPa}.$$

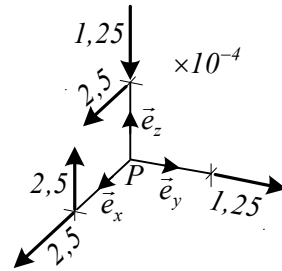
$$\varepsilon_x = \frac{10^{-5}}{1,6} (70 - 30) = 2,5 \times 10^{-4}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\tau_{yx}}{G} = 0,$$

$$\varepsilon_y = \frac{10^{-5}}{1,6} (50 - 30) = 1,25 \times 10^{-4}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0,$$

$$\varepsilon_z = \frac{10^{-5}}{1,6} (10 - 30) = -1,25 \times 10^{-4}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{40}{0,8 \times 10^5} = 5 \times 10^{-4}.$$

Az alakváltozási tenzor:

$$\left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{I}{2} \tau_{xy} & \frac{I}{2} \tau_{xz} \\ \frac{I}{2} \tau_{yx} & \varepsilon_y & \frac{I}{2} \tau_{yz} \\ \frac{I}{2} \tau_{zx} & \frac{I}{2} \tau_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 & 0 & 2,5 \\ 0 & 1,25 & 0 \\ 2,5 & 0 & -1,25 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$



8.8.2. feladat: Az általános Hooke törvény

Adott: A test tetszőleges P pontja, ahol az alábbi mennyiségek ismertek: $\varepsilon_x = 22 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_y = -2 \cdot 10^{-5}$, $\gamma_{xy} = 24 \cdot 10^{-5}$, $\vec{\rho}_z = (40 \vec{e}_x - 48 \vec{e}_y + 40 \vec{e}_z)$ MPa, $G = 80 \cdot 10^3$ MPa, $\nu = 0,25$.

Feladat: a) Az $\underline{\underline{A}}_P$ alakváltozási tenzor mátrixának a meghatározása.

b) Az $\underline{\underline{F}}_P$ feszültségi tenzor mátrixának meghatározása.

Kidolgozás:

a) Az $\underline{\underline{A}}_P$ alakváltozási tenzor mátrixának a meghatározása:

Az alakváltozási tenzor mátrixa az ismert és ismeretlen értékekkel:

$$\left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} 22 \cdot 10^{-5} & 12 \cdot 10^{-5} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ 12 \cdot 10^{-5} & -2 \cdot 10^{-5} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

A $\vec{\rho}_z$ feszültségi vektor koordinátái: $\tau_{xz} = 40$ MPa, $\tau_{yz} = -48$ MPa, $\sigma_z = 40$ MPa.

Az általános Hooke törvényből:

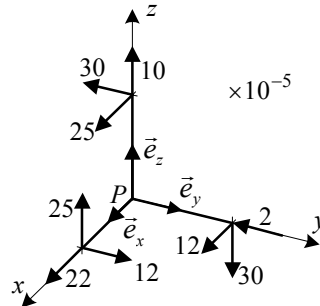
$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{40}{80 \cdot 10^3} = 50 \cdot 10^{-5}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{-48}{80 \cdot 10^3} = -60 \cdot 10^{-5}.$$

$$\sigma_z = 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right] = 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \sigma_z - \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \\ &= \frac{1-2 \cdot 0,25}{2 \cdot 80 \cdot 10^3 (1-0,25)} 40 - \frac{0,25}{1-0,25} (22 \cdot 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-5}) = 10 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Az alakváltozási tenzor:

$$[\underline{A}_P] = \begin{bmatrix} 22 & 12 & 25 \\ 12 & -2 & -30 \\ 25 & -30 & 10 \end{bmatrix} 10^{-5}$$



b) Az $\underline{F}_P$ feszültségi tenzor mátrixának meghatározása:

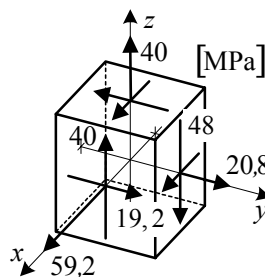
$$\underline{F}_P = 2G \left[\underline{A}_P + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{E} \right].$$

$$A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 22 \cdot 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-5} + 10 \cdot 10^{-5} = 30 \cdot 10^{-5}.$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} [\underline{F}_P] &= 2 \cdot 8 \cdot 10^4 \left\{ \begin{bmatrix} 22 & 12 & 25 \\ 12 & -2 & -30 \\ 25 & -30 & 10 \end{bmatrix} 10^{-5} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{0,25}{1-2 \cdot 0,25} 30 \cdot 10^{-5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 59,2 & 19,2 & 40 \\ 19,2 & 20,8 & -48 \\ 40 & -48 & 40 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \end{aligned}$$

A feszültségi állapot szemléltetése:

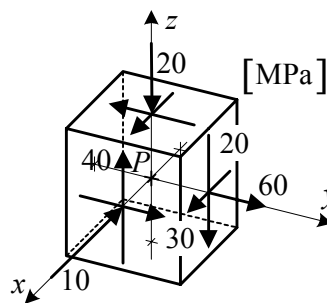


8.8.3. feladat: Az általános Hooke törvény

Adott:

A P pontbeli elemi kockán a feszültségi állapot, valamint

$$G = 40 \text{ GPa} = 4 \cdot 10^4 \text{ MPa és } \nu = 0,25.$$



Feladat: A P pontbeli alakváltozási állapot meghatározása.

Kidolgozás:

A test P pontjában az $\underline{\underline{F}}_P$ feszültségi tenzor mátrixa: $\left[\underline{\underline{F}}_P \right] = \begin{bmatrix} -10 & 30 & 40 \\ 30 & 60 & -20 \\ 40 & -20 & -20 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$

A test P pontjában az alakváltozási koordináták:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{30}{4 \cdot 10^4} = 7,5 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{40}{4 \cdot 10^4} = 10 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{-20}{4 \cdot 10^4} = -5 \cdot 10^{-4},$$

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -10 + 60 - 20 = 30 \text{ MPa},$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right] = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 10^4} \left[-10 - \frac{0,25}{1+0,25} 30 \right] = -2 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2G} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right] = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 10^4} \left[60 - \frac{0,25}{1+0,25} 30 \right] = 6,75 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2G} \left[\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right] = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 10^4} \left[-20 - \frac{0,25}{1+0,25} 30 \right] = -3,25 \cdot 10^{-4}.$$