

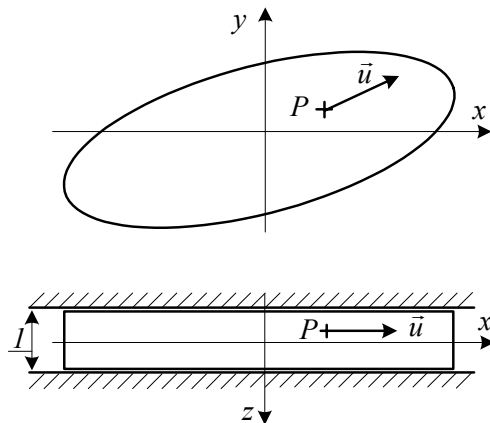
9. A RUGALMASSÁGTAN 2D FELADATAI

A 2D (két dimenziós) feladatok közös jellemzői:

- két skalár elmozdulásmező különbözik nullától,
- minden mechanikai mennyiség két helykoordinátától függ.

9.1. Sík alakváltozás (SA)

- a) Definíció: Sík alakváltozásról beszélünk, ha a vizsgált testnek van egy kitüntetett síkja, amellyel párhuzamos valamennyi sík alakváltozása azonos és a síkok távolsága sem változik.



A $P(x,y,z)$ pont elmozdulásvektora:

$$\vec{u} = u \vec{e}_x + v \vec{e}_y.$$

Kitüntetett sík: x,y .

Az elmozdulásmező skaláris koordinátái csak az x,y helykoordináták függvényei:

$$u = u(x, y),$$

$$v = v(x, y),$$

$$w = 0.$$

Ilyen alakváltozás az alábbi feltételek teljesülése esetén alakul ki:

- A test kitüntetett síkra merőleges (z irányú) mérete lényegesen nagyobb (tart ∞ -hez), mint a másik kettő. (Az ábrán a test z irányra merőleges egységnyi vastagságú szelete látható – ez a mechanikai moell.)
- A terhelés párhuzamos a kitüntetett síkkal és a legnagyobb kiterjedés (a z tengely) irányában nem változik.
- A párhuzamos síkok távolságának változatlanságát külső kényszer biztosítja (ezt az ábrán sraffozott vonal jelöli).

- b) Az alakváltozási állapot:

Az alakváltozási tenzor: $[\underline{A}] = [\underline{A}(x, y)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ahol $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x(x, y)$,
 $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y(x, y)$,
 $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy}(x, y)$.

- c) A feszültségi állapot (a Hooke törvény felhasználásával):

$$\sigma_x(x, y) = 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1 - 2\nu} \right] \nu, \quad \sigma_y(x, y) = 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1 - 2\nu} \right] \nu,$$

$$\tau_{xy}(x,y) = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}, \quad \sigma_z(x,y) = \nu[\sigma_x + \sigma_y].$$

A feszültségi tenzor: $[\underline{\underline{F}}] = [\underline{\underline{F}}(x,y)] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$

A Hooke törvény másik alakjából:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G}[\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2G}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}.$$

d) Az egyensúlyi egyenletek sík-alakváltásra DDKR-ben:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + q_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + q_y = 0, \quad q_z = 0.$$

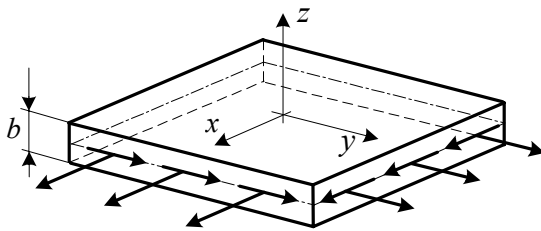
e) A sík-alakváltozási állapotban lévő test (alkatrész) mechanikai modellje:

- a testből kiragadjuk a kitüntetett síkot (vagy más szóval kiragadunk egy, a kitüntetett síkkal párhuzamos egységnyi vastagságú síkszeletet),
- a kitüntetett sík (egységnyi vastagságú síkszelet) alakváltozását vizsgáljuk.

9.2. Általánosított sík feszültségi feladat (ÁSF) – tárcsa feladat

Definíció: Az általánosított sík feszültségi feladat a saját síkjukban terhelt lemezek feladata.

Lemez: Olyan test, melynek egyik mérete lényegesen kisebb mint a másik kettő és értelmezhető a középsík.



Elnevezés: általánosított sík-feszültség feladat = tárcsa feladat.

Feltételezés: a $z = \pm b/2$ felületek terheletlenek.

Dinamikai peremfeltétel a $z = \pm b/2$ felületen: $\vec{\rho}_z = \vec{0} \Rightarrow \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$

Mivel a b vastagság kicsi, ezért a test minden pontjában jó közelítéssel $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$

a) Átlagos feszültségek:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_x dz, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_y dz, \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{xy} dz, \\ \bar{\sigma}_z &= \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_z dz = 0, \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{xz} dz = 0, \quad \bar{\tau}_{yz} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{yz} dz = 0. \end{aligned}$$

Az átlagos feszültségi tenzor: $[\underline{\underline{F}}] = [\underline{\underline{F}}(x, y)] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x & \bar{\tau}_{xy} & 0 \\ \bar{\tau}_{yx} & \bar{\sigma}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

b) Átlagos alakváltozások:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{b} \int_{(b)} \varepsilon_x dz, \quad \bar{\varepsilon}_y = \frac{1}{b} \int_{(b)} \varepsilon_y dz, \quad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \gamma_{xy} dz, \quad \bar{\varepsilon}_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_y).$$

Az átlagos alakváltozási tenzor: $[\underline{\underline{A}}] = [\underline{\underline{A}}(x, y)] = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_x & \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{yx} & \bar{\varepsilon}_y & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_z \end{bmatrix}.$

Az átlagos alakváltozási tenzor koordinátái átlagos elmozdulásokból állíthatók elő:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad \bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}.$$

c) Átlagos elmozdulások:

$$\bar{u}(x, y) = \frac{1}{b} \int_{(b)} u dz, \quad \bar{v}(x, y) = \frac{1}{b} \int_{(b)} v dz, \quad \bar{w} = 0.$$

d) Egyensúlyi egyenletek DDKR-ben:

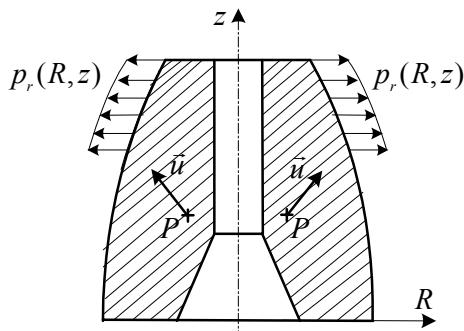
$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \bar{q}_x = 0, \quad \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \bar{q}_y = 0, \quad \bar{q}_z = 0.$$

Az általánosított síkfeszültségi állapotban lévő test (alkatrész) mechanikai modellje:

- a testet a középsíkjával helyettesítjük,
- az átlagos mennyiségeket a középsíkhoz kötjük.

9.3. Forgásszimmetrikus feladatok (FSZ)

Definíció: a vizsgált test geometriája és terhelése is forgásszimmetrikus (tengelyszimmetrikus).



Az R, z, φ henger koordináta-rendszerben dolgozunk.

Tengelyszimmetriából következően minden mechanikai mennyiség független a φ -től.

Az elmozdulásmező:

$$\bar{\mathbf{u}} = u \bar{\mathbf{e}}_R + v \bar{\mathbf{e}}_z + w \bar{\mathbf{e}}_\varphi,$$

$$u = u(R, z), \quad v = v(R, z), \quad w \equiv 0.$$

A test pontjai az Rz meridián síkban mozdulnak el, az elmozduláskoordináták csak az R és z függvényei.

a) Az alakváltozási állapot:

$$\varepsilon_R(R, z) = \frac{\partial u}{\partial R}, \quad \varepsilon_z(R, z) = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \varepsilon_\varphi(R, z) = \frac{u}{R},$$

$$\gamma_{Rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial R}, \quad \gamma_{\varphi z} = \gamma_{R\varphi} = 0.$$

$$\text{Az alakváltozási tenzor: } \left[\underline{\underline{A}} \right]_{Rz\varphi} = \left[\underline{\underline{A}}(R, z) \right]_{Rz\varphi} = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \frac{1}{2}\gamma_{Rz} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zR} & \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\varphi \end{bmatrix}.$$

b) A feszültségi állapot (a Hooke-törvény felhasználásával):

$$\sigma_R(R, z) = 2G \left[\varepsilon_R + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right], \quad \sigma_z(R, z) = 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right],$$

$$\sigma_\varphi(R, z) = 2G \left[\varepsilon_\varphi + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right], \quad \tau_{Rz} = G\gamma_{Rz}, \quad \tau_{\varphi z} = \tau_{R\varphi} = 0.$$

$$\text{A feszültségi tenzor: } \left[\underline{\underline{F}} \right]_{Rz\varphi} = \left[\underline{\underline{F}}(R, z) \right]_{Rz\varphi} = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{Rz} & 0 \\ \tau_{zR} & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi \end{bmatrix}.$$

9.4. Síkfeladatok megoldása feszültségfüggvénnyel

a) Az SA és ÁSF összehasonlítása:

- *Azonosság:*

- Minden mennyiség csak x, y függvénye.
- Független mezők: két független elmozdulásmező,
három független alakváltozási mező,
három független feszültségi mező.
- A geometriai és egyensúlyi egyenletek alakja.

- *Különbözőség:*

- Az anyagegyenletek alakja.
- SA-nál pontbeli, ÁSF-nél vastagság menti átlagos mennyiségek.
- $\left. \begin{array}{l} \text{SA: } \sigma_z \neq 0 \\ \text{ÁSF: } \varepsilon_z \neq 0 \end{array} \right\}$ nem független mezők.

b) Az Airy (kiejtése: éri)-féle feszültségfüggvény:

Feltételezés: $q_x = q_y = 0$ (SA) és $\bar{q}_x = \bar{q}_y = 0$ (ÁSF).

Jelölés: - feszültség függvény: $U(x, y)$, $U(R, \varphi)$, $\bar{U}(x, y)$, $\bar{U}(R, \varphi)$.

- a továbbiakban a felülvonás jelölést elhagyjuk.

A feszültségfüggvényt úgy vesszük fel, hogy a belőle számított feszültségek kielégítsék az egyensúlyi egyenleteket:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Ezek az összefüggések az SA-ra és az ÁSF-re is érvényesek.

A megoldás gondolatmenete:

Feszültségek

⇓

Anyagegyenletek

⇓

Alakváltozások

⇓

Kompatibilitási egyenlet

⇓

$\Delta \Delta U = 0$ - biharmonikus differenciálegyenlet.

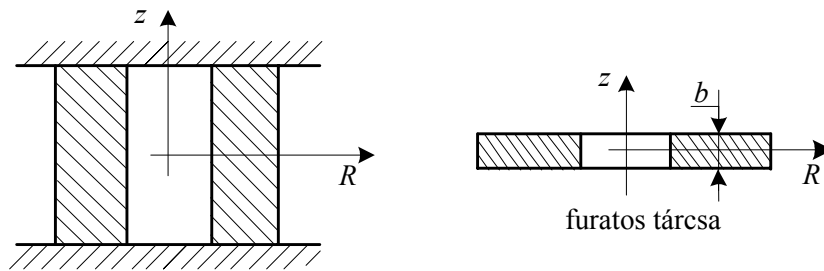
$U(x, y)$ - biharmonikus függvény, kielégíti a biharmonikus differenciál egyenletet.

A Laplace-féle differenciál operátor kétváltozós (síkbeli) esetben $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Ezt behelyettesítve, a biharmonikus differenciálegyenlet DDKR-ben:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0.$$

9.5. Síkbeli forgásszimmetrikus feladatok



vastagfalú cső

A síkbeli forgásszimmetrikus feladatokat henger koordináta-rendszerben oldjuk meg.

Feszültségfüggvény: $U = U(R, \varphi) = U(R)$. (A forgásszimmetria miatt.)

Feszültségek: $\sigma_R(R) = \frac{1}{R} \frac{dU}{dR}$, $\sigma_\varphi(R) = \frac{d^2 U}{dR^2}$, $\sigma_z = \begin{cases} \nu(\sigma_R + \sigma_\varphi) & SA \\ 0 & ÁSF \end{cases}$ esetén.

A feszültségi tenzor: $\begin{bmatrix} \underline{\underline{F}} \\ R\varphi z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$

Alakváltozások (a Hooke-törvényből): $\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \\ R\varphi z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix},$ ahol $\varepsilon_R = \frac{du}{dR}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{R}.$

A Hooke-törvény forgásszimmetrikus esetben:

SA	ÁSF
$\varepsilon_R = \frac{I}{2G} [\sigma_R - \nu(\sigma_R + \sigma_\varphi)],$	$\varepsilon_R = \frac{I}{E} (\sigma_R - \nu\sigma_\varphi),$
$\varepsilon_\varphi = \frac{I}{2G} [\sigma_\varphi - \nu(\sigma_R + \sigma_\varphi)],$	$\varepsilon_\varphi = \frac{I}{E} (\sigma_\varphi - \nu\sigma_R),$
$\varepsilon_z = 0,$	$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_\varphi + \sigma_R).$

A biharmonikus differenciál egyenlet: $\Delta\Delta U=0.$

Tengelyszimmetrikus esetben: $\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left\{ R \frac{d}{dR} \left[\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dU}{dR} \right) \right] \right\} = 0.$

Ez egy homogén, közönséges, negyedrendű *Euler* (kiejtése: ojler) típusú differenciálegyenlet.

Az *Euler* típusú differenciálegyenlet matematikából ismert formája:

$$x^4 \frac{d^4 y}{dx^4} + x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 0.$$

Az *Euler* típusú differenciálegyenlet megoldását a következő alakban szokás keresni:

$$y_h(x) = x^n.$$

Ebben az esetben a biharmonikus differenciálegyenlet megoldása:

$$U(R) = \frac{A}{2} R^2 + B \ln R + C + DR^2 \ln R$$

A $DR^2 \ln R$ -es tag nem ad egyértékű elmozdulásmezőt kör, körgyűrű tartományban, ezért a megoldás utolsó tagját elhagyjuk. Így a megoldás:

$$U(R) = \frac{A}{2} R^2 + B \ln R + C.$$

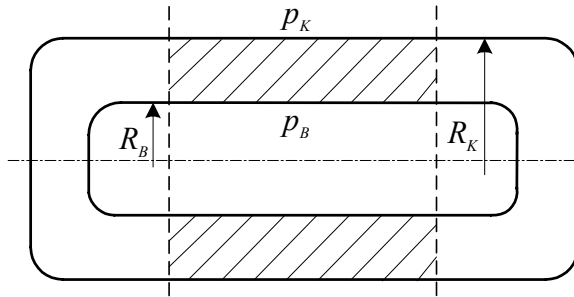
A feszültségfüggvényből a feszültségek:

$$\sigma_R(R) = \frac{1}{R} \frac{dU}{dR} = A + \frac{B}{R^2}, \quad \sigma_\varphi(R) = \frac{d^2 U}{dR^2} = A - \frac{B}{R^2}, \quad \sigma_z = \begin{cases} \nu(\sigma_R + \sigma_\varphi) & SA \\ 0 & ÁSF \end{cases} \text{ esetén.}$$

Az A és B állandók a dinamikai peremfeltételekből határozható meg.

9.5.1. Vastagfalú csövek

a) Megoldás: sík alakváltozás és húzás-nyomás szuperpozíciója.



A vastagfalú csőnek a csővégektől elég távol levő szakaszát vizsgáljuk.

Feltételezzük, hogy a vizsgált szakaszon a véglap zavaró hatása már nem érvényesül.

Szuperpozíció:
$$\begin{bmatrix} F \\ R\varphi z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma'_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_z \end{bmatrix}}_{\text{SA}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma''_z \end{bmatrix}}_{\text{húzás-nyomás}}.$$

A csőben kialakuló feszültségi állapot:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \sigma'_R = A + \frac{B}{R^2} \\ \sigma_\varphi &= \sigma'_\varphi = A - \frac{B}{R^2} \\ \sigma_z &= \sigma'_z + \sigma''_z \end{aligned} \right\}.$$

A tengely irányú normál feszültségek: - sík-alakváltozásból: $\sigma'_z = \nu(\sigma'_R + \sigma'_\varphi) = \nu 2 A$,

- húzás-nyomásból: $\sigma''_z = \text{állandó}$.

A csőben ténylegesen fellépő tengely irányú normál feszültségek:

- nyitott cső esetén: $\sigma_z = 0 \Rightarrow \sigma''_z = -\sigma'_z$,

- zárt cső esetén: $\sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{p_B R_B^2 \pi - p_K R_K^2 \pi}{R_K^2 \pi - R_B^2 \pi}$.

A húzás-nyomásból származó σ''_z -nek mindig akkorának kell lennie, hogy a σ'_z -hez hozzáadva a fenti értékek adódjanak:

- nyitott cső esetén: $\sigma_z = 0 \Rightarrow \sigma''_z = -\sigma'_z = -2 A \nu$,

- zárt cső esetén: $\sigma''_z = \sigma_z - \sigma'_z$.

b) Csődiagram:

A csődiagram áttekinthetően szemlélteti a három zérustól különböző feszültségkoordinátának a csővastagság menti eloszlását.

Új változó: $\psi = \frac{R_B^2}{R^2}$, $(\psi_K < \psi < 1)$.

Az új változónak a cső külső és belső felületén felvett értékei: $\psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2}$, $\psi_B = 1$.

A feszültségek az új változó bevezetésével:
$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - b\psi \\ \sigma_\varphi &= a + b\psi \end{aligned} \right\}.$$

A ψ változó bevezetésével a feszültségekre két egyenest kaptunk.

A fenti összefüggésekben a és b új állandók, amelyek dinamikai peremfeltételekből határozhatók meg

Az új állandók meghatározása a peremfeltételekből:
$$\begin{aligned} \sigma_R(R = R_B) &= \sigma_R(\psi = 1) = -p_B, \\ \sigma_R(R = R_K) &= \sigma_R(\psi = \psi_K) = -p_K. \end{aligned}$$

A behelyettesítést elvégezve:

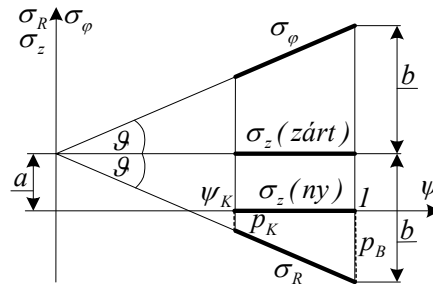
$$\left. \begin{aligned} a - b &= -p_B \\ a - b\psi_K &= -p_K \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = \text{tg } \vartheta, \quad a = \frac{p_B\psi_K - p_K}{1 - \psi_K}.$$

A csődiagram:

Nyitott cső: $\sigma_z = 0 = \text{állandó}$.

Zárt cső:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{F}{A} = \frac{p_B R_B^2 \pi - p_K R_K^2 \pi}{R_K^2 \pi - R_B^2 \pi} = \\ &= \frac{p_B \psi_K - p_K}{1 - \psi_K} = a = \text{állandó}. \end{aligned}$$

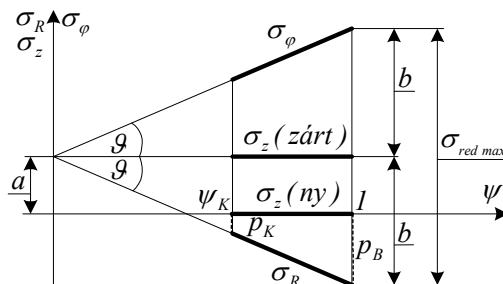


A diagram megrajzolásának lépései:

- A dinamikai peremfeltételekből a $\psi = 1$ és a $\psi = \psi_K$ helyen ismert a σ_R értéke, ezért
- A $\psi = 1$ helyre $-p_B$ -t, a $\psi = \psi_K$ helyre pedig $-p_K$ -t mérünk fel.
- A két pont összekötésével kapjuk a $\sigma_R(\psi)$ egyenest.
- A $\sigma_R(\psi)$ egyenes iránytangense $-b = -\text{tg } \vartheta$, az egyenes a függőleges tengelyt az a helyen metszi.
- A $\sigma_\varphi(\psi)$ egyenest a $\sigma_R(\psi)$ egyenesnek a $\sigma = a$ vízszintes egyenesre történő tükrözésével kapjuk.
- A $\sigma_z = \text{állandó}$ egyenesek értékei a diagram melletti összefüggésekből számíthatók.

c) Vastagfalú cső szilárdságtani méretezése, ellenőrzése

- Ha $p_B > p_K$:



A σ_R , σ_φ , σ_z főfeszültségek:

$$\sigma_1 = \sigma_\varphi, \quad \sigma_2 = \sigma_z, \quad \sigma_3 = \sigma_R.$$

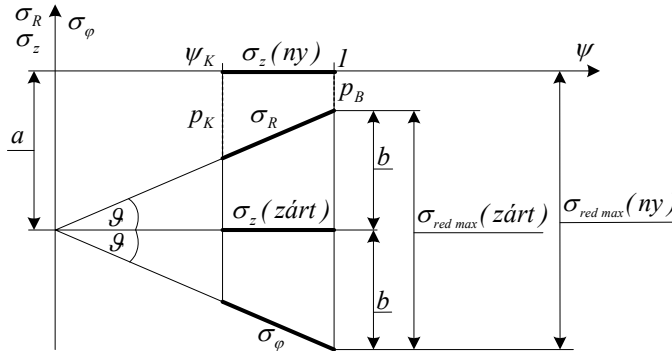
A Mohr szerint számított redukált feszültség:

$$\sigma_{red}(\text{Mohr}) = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\varphi - \sigma_R.$$

A redukált feszültség maximuma: $\sigma_{red\ max}(Mohr) = (\sigma_\varphi - \sigma_R)_{max} = (\sigma_\varphi - \sigma_R)|_{\psi=l} = 2b$.

A csődiagramból: $\sigma_{red\ max}(Mohr) = 2b = 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K}$.

- Ha $p_K > p_B$:



A σ_R , σ_φ , σ_z főfeszültségek:

Nyitott cső:

$$\sigma_1 = \sigma_z, \quad \sigma_2 = \sigma_R, \quad \sigma_3 = \sigma_\varphi.$$

Zárt cső:

$$\sigma_1 = \sigma_R, \quad \sigma_2 = \sigma_z, \quad \sigma_3 = \sigma_\varphi.$$

A Mohr szerint számított redukált feszültség:

$$\sigma_{red}(Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3.$$

Nyitott cső:

A redukált feszültség maximuma: $\sigma_{red\ max}(Mohr) = |\sigma_{\varphi\ max}| = |\sigma_\varphi|_{\psi=l} = 2b + p_B$.

A csődiagramból: $\sigma_{red\ max}(Mohr) = 2b + p_B = 2 \frac{p_K - p_B}{1 - \psi_K} + p_B$.

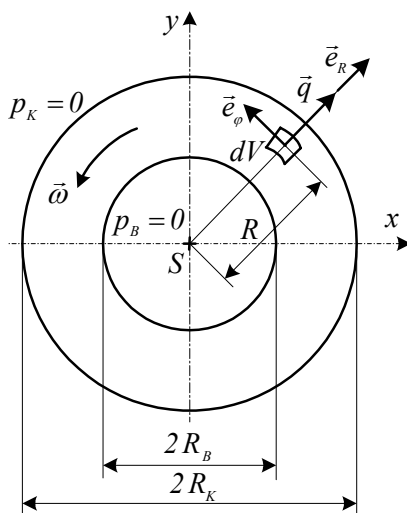
Zárt cső:

A redukált feszültség maximuma: $\sigma_{red\ max}(Mohr) = (\sigma_R - \sigma_\varphi)_{max} = (\sigma_R - \sigma_\varphi)|_{\psi=l} = 2b$.

A csődiagramból: $\sigma_{red\ max}(Mohr) = 2b = 2 \frac{p_K - p_B}{1 - \psi_K}$.

Méretezés, ellenőrzés: $\sigma_{red\ max} \leq \sigma_{meg}$.

9.5.2. Gyorsan forgó tengelyek, csőtengelyek



Feltételezés: - $\omega =$ állandó,

- súlyerő ≈ 0 ,

- $p_B = p_K = 0$.

A viszonyokat a tengelyhez kötött, vele együtt forgó R, φ, z koordináta-rendszerben írjuk le.

Forgás: $\Rightarrow$ térfogaton megoszló erőrendszer:

$$\vec{q} = q_R \vec{e}_R = \rho R \omega^2 \vec{e}_R = \frac{\gamma}{g} R \omega^2 \vec{e}_R.$$

γ – az anyag fajsúlya $[N/m^3]$,

ρ – az anyag tömegsűrűsége $[kg/m^3]$,

g – a gravitációs gyorsulás $[m/s^2]$

ω – a forgás szögsebessége $[rad/s]$.

A térfogaton megoszló erőrendszer $\vec{q} = q_R \vec{e}_R$ sűrűségvektora a tengely/csőtengely keresztmetszetének síkjába esik, ezért az alakváltozás során a keresztmetszetek síkok maradnak. Az alakváltozás a keresztmetszet síkjában történik.

a) Megoldás: sík alakváltozás és húzás-nyomás $\Rightarrow (\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z)$.

- Sík alakváltozás:

Ebben az esetben a biharmonikus egyenlet nem homogén, a jobboldalon megjelenik a q_R .

Biharmonikus differenciál egyenlet: $\Delta \Delta U = 2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} \rho \omega^2$.

Új változó bevezetése: $\lambda = \frac{R^2}{R_K^2}$, $\lambda_B < \lambda < 1$.

Az új változónak a csőtengely külső és belső felületén felvett értékei: $\lambda_K = 1$, $\lambda_B = \frac{R_B^2}{R_K^2}$.

A feszültségek: $\sigma'_R = a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0} \lambda$, $\sigma'_\varphi = a + \frac{b}{\lambda} - \mu_l \sigma_{\omega 0} \lambda$, $\sigma'_z = \nu (\sigma'_R + \sigma'_\varphi)$.

Az összefüggésekben szereplő állandók: $\sigma_{\omega 0} = \frac{3-2\nu}{1-\nu} \frac{\rho}{8} (R_K \omega)^2$, $\mu_l = \frac{1+2\nu}{3-2\nu} < 1$.

- Húzás-nyomás: a sík alakváltozásból és a húzás-nyomásból származó tengely irányú eredő erőnek zérusnak kell lennie.

$$N = N' + N'' = 0.$$

$$N = \int_{R_B}^{R_K} \sigma'_z 2 R \pi dR + N'' = 0, \quad \Rightarrow \quad N'' = - \int_{R_B}^{R_K} \sigma'_z 2 R \pi dR.$$

Behelyettesítve az integrálba a $\sigma'_z = \nu (\sigma'_R + \sigma'_\varphi) = \nu 2a - \nu \sigma_{\omega 0} (1 + \mu_l) \lambda$ kifejezés és át-
térve az új változóra: $d\lambda = 2R \frac{1}{R_K^2} dR$

$$N'' = -2\pi a \nu (R_K^2 - R_B^2) + \nu \sigma_{\omega 0} (1 + \mu_l) \pi R_K^2 \int_{\lambda_B}^1 \lambda d\lambda,$$

$$N'' = -2\pi a \nu (R_K^2 - R_B^2) + \nu \sigma_{\omega 0} (1 + \mu_l) \pi \frac{1}{2} (1 - \lambda_B^2) R_K^2.$$

$$\sigma''_z = \frac{N''}{A}.$$

Ez a normál feszültség biztosítja, hogy a csőtengelyben ne lépjen fel tengely irányú eredő erő.

- Szuperpozíció: a forgó csőtengely/tengely feszültségei.

$$\sigma_R = \sigma'_R = a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0} \lambda, \quad \sigma_\varphi = \sigma'_\varphi = a + \frac{b}{\lambda} - \mu_l \sigma_{\omega 0} \lambda, \quad \sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z = \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 + \lambda_B - 2\lambda).$$

Új állandó: $\mu_2 = \frac{2\nu}{3-2\nu} < 1$, ($\mu_2 < \mu_1$).

Az összefüggésekben szereplő konstansok meghatározása a dinamikai peremfeltételekből:

$$\left. \begin{aligned} R=R_B \quad (\lambda=\lambda_B) \quad \sigma_R=0 &= a - \frac{b}{\lambda_B} - \sigma_{\omega 0} \lambda_B \\ R=R_K \quad (\lambda=I) \quad \sigma_R=0 &= a - b - \sigma_{\omega 0} \end{aligned} \right\}.$$

Az a és b állandók ebből a két egyenletből meghatározhatók.

b) A gyorsan forgó cső tengely diagramja:

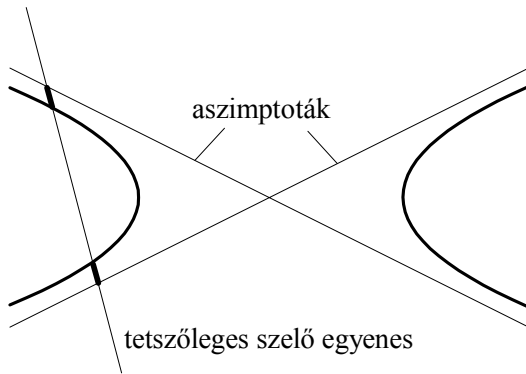
A forgó cső tengely diagram áttekinthetően szemlélteti a három zérustól különböző feszültségkoordinátának a cső tengely vastagsága menti eloszlását.

Jelölés: $h_R = a - \frac{b}{\lambda}$, $h_\varphi = a + \frac{b}{\lambda}$ - hiperbolák.

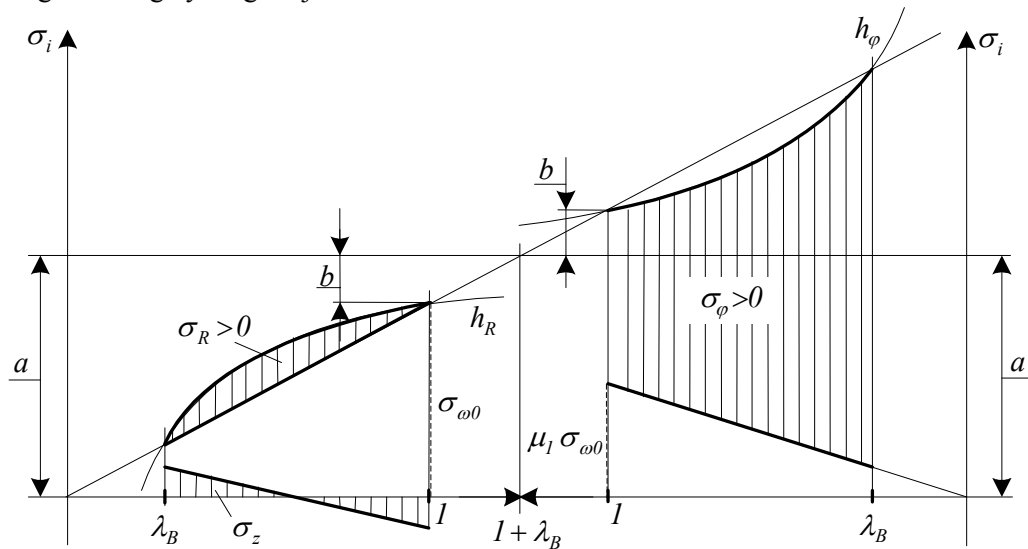
A hiperbolák aszimptotái: ha $\lambda \rightarrow 0$, akkor $h_R \rightarrow -\infty$, $h_\varphi \rightarrow \infty$,
ha $\lambda \rightarrow \infty$, akkor $h_R \rightarrow a$, $h_\varphi \rightarrow a$.

A hiperbolák tulajdonsága:

A hiperbola tetszőleges szelő egyenesén a vastag vonallal bejelölt metszett szakaszok hossza azonos.



A forgó cső tengely diagramja:



A diagram megrajzolásának lépései:

- A σ_R és σ_φ értékek egy hiperbola és egy egyenes különbségeként állnak elő:

$$\sigma_R = h_R - \sigma_{\omega 0} \lambda, \quad \sigma_\varphi = h_\varphi - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda.$$

- Másképp megfogalmazva, a hiperbola pontokhoz úgy jutunk, ha a megfelelő egyeneshez hozzáadjuk a σ_R és σ_φ értékeket: $h_R = \sigma_{\omega 0} \lambda + \sigma_R$, $h_\varphi = \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda + \sigma_\varphi$.
- A diagram rajzolás első lépéseként megrajzoljuk a $\sigma_{\omega 0}$, illetve a $\mu_1 \sigma_{\omega 0}$ meredekségű egyenest.
- A $\lambda = \lambda_B$ és a $\lambda = 1$ helyen függőleges egyeneseket rajzolunk be. Ezekre az egyenesekre felmérjük $\sigma_R(\lambda_B) = 0$, illetve $\sigma_R(\lambda = 1) = 0$ dinamikai peremfeltételeket. Így megkapjuk a h_R hiperbola két pontját. Ezeket a pontokat összekötve pedig megkapjuk a parabola szelőjét.
- A két hiperbola pontra az aszimptoták figyelembevételével berajzoljuk a h_R hiperbolát.
- Az előzőekben ismertetett hiperbola tulajdonságából következően a h_φ hiperbola két pontját úgy kapjuk meg, hogy a szelő egyenest meghosszabbítjuk és a jobboldali diagramban elmetsszük a $\lambda = 1$ és a $\lambda = \lambda_B$ helyre berajzolt függőleges egyenesekkel.
- A két pont és a két aszimptota ismeretében megrajzoljuk a h_φ hiperbolát.
- A σ_R és σ_φ értékek a hiperbolák és az egyenesek különbségeként állnak elő.
- A σ_z egyenest az adott összefüggés alapján ábrázoljuk.

A feszültségek képleteiben szereplő állandók meghatározása peremfeltételekből:

$$\left. \begin{array}{l} R = R_B \quad (\lambda = \lambda_B) \quad \sigma_R = 0 = a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0} \lambda \\ R = R_K \quad (\lambda = 1) \quad \sigma_R = 0 = a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 = a - \frac{b}{\lambda_B} - \sigma_{\omega 0} \lambda_B \\ 0 = a - b - \sigma_{\omega 0} \end{array} \right\} \rightarrow a = b + \sigma_{\omega 0}.$$

Az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$0 = b - \frac{b}{\lambda_B} + \sigma_{\omega 0} (1 + \lambda_B),$$

$$0 = -\frac{b}{\lambda_B} (1 - \lambda_B) + \sigma_{\omega 0} (1 + \lambda_B) \Rightarrow b = \lambda_B \sigma_{\omega 0}.$$

Visszahelyettesítve a második egyenletbe: $a = (1 + \lambda_B) \sigma_{\omega 0}$.

c) Gyorsan forgó csőtengely szilárdságtani méretezése, ellenőrzése:

A σ_R , σ_φ , σ_z főfeszültségek:

A $\lambda = \lambda_B$ helyen: $\sigma_1 = \sigma_\varphi$, $\sigma_2 = \sigma_z$, $\sigma_3 = \sigma_R = 0$.

A $\lambda = 1$ helyen: $\sigma_1 = \sigma_\varphi$, $\sigma_2 = \sigma_R = 0$, $\sigma_3 = \sigma_z < 0$.

A diagramból látszik, hogy a veszélyes a $\lambda = \lambda_B$ hely.

Itt van a redukált feszültség maximuma:

$$\sigma_{red\ max}(Mohr) = (\sigma_\varphi - \sigma_R) \Big|_{\lambda_B} = \sigma_\varphi \Big|_{\lambda_B} = a + \frac{b}{\lambda_B} - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda_B.$$

Az összefüggésbe az a és b értéket behelyettesítve:

$$\sigma_{red\ max}(Mohr) = (1 + \lambda_B) \sigma_{\omega 0} + \lambda_B \sigma_{\omega 0} \frac{1}{\lambda_B} - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda_B,$$

$$\sigma_{red\ max}(Mohr) = \sigma_{\omega 0} (2 + \lambda_B - \mu_1 \lambda_B).$$

A redukált feszültség maximumának meghatározása a diagramból:

- A h_R hiperbola helyettesítési értéke a λ_B helyen a szelő meredekségének ismeretéből:

$$h_R = \sigma_{\omega 0} (2 + \lambda_B)$$

- Az egyenes helyettesítési értéke a λ_B helyen: $\mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda_B$.

- A $\sigma_\varphi(\lambda_B)$, azaz a $\sigma_{red\ max}(Mohr)$ ennek a két értéknek a különbsége:

$$\sigma_{red\ max}(Mohr) = \sigma_{\omega 0} (2 + \lambda_B - \mu_1 \lambda_B).$$

Méretezés, ellenőrzés: $\sigma_{red\ max} \leq \sigma_{meg}$.

Megjegyzés: méretezésnél adott R_B és ω esetén az R_K -ra maximumat kapunk és nem minimumot!

d) A gyorsan forgó tengely diagramja:

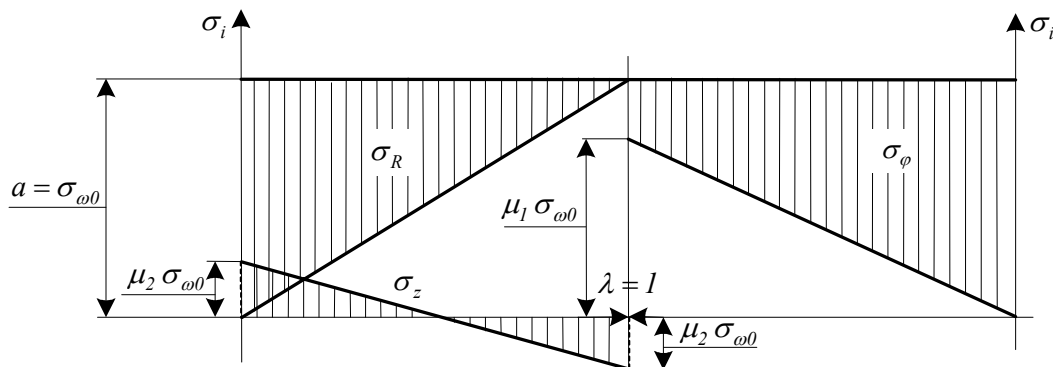
Tömör tengely: $R_B = 0$ ($\lambda_B = 0$).

Tapasztalat: $R = 0$ ($\lambda = 0$)-nál is véges nagyságúak a feszültségek $\Rightarrow b = 0$.

Feszültségeloszlás: $\sigma_R = a - \sigma_{\omega 0} \lambda$, $\sigma_\varphi = a - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda$, $\sigma_z = \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 - 2\lambda)$.

Peremfeltétel: $R = R_K$ ($\lambda = 1$) $\sigma_R = 0 = a - \sigma_{\omega 0} \Rightarrow a = \sigma_{\omega 0}$.

A gyorsan forgó tengely diagramja:



e) Gyorsan forgó tengely szilárdságtani méretezése, ellenőrzése:

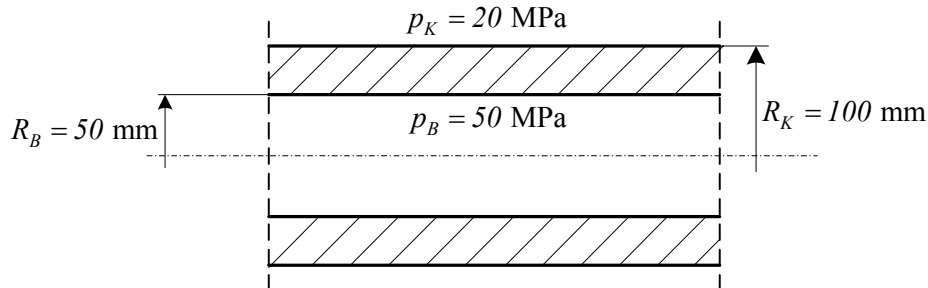
$$\sigma_{red}(Mohr) \Big|_{\lambda=0} = (\sigma_R - \sigma_z) \Big|_{\lambda=0} = (\sigma_\varphi - \sigma_z) \Big|_{\lambda=0} = \sigma_{\omega 0} (1 - \mu_2),$$

$$\sigma_{red} (Mohr) \Big|_{\lambda=I} = (\sigma_{\varphi} - \sigma_z) \Big|_{\lambda=I} = \sigma_{\omega 0} (I - \mu_1 + \mu_2).$$

Méretezés, ellenőrzés: $\sigma_{red max} \leq \sigma_{meg}$.

9.6. Gyakorló feladatok vastagfalú csövekre, gyorsan forgó tengelyekre, csőtengelyekre

9.6.1. feladat: Zárt vastagfalú cső



Adott: Az ábrán látható zárt vastag-falú cső geometriája és terhelése:

$p_B = 50 \text{ MPa}$, $p_K = 20 \text{ MPa}$, $R_B = 50 \text{ mm}$, $R_K = 100 \text{ mm}$.

Feladat: a) A ψ_K értékének meghatározása.

b) A csődiagram megrajzolása.

c) A cső szilárdságtani ellenőrzése a *Mohr*-elmélet szerint, ha $\sigma_{meg} = 100 \text{ MPa}$.

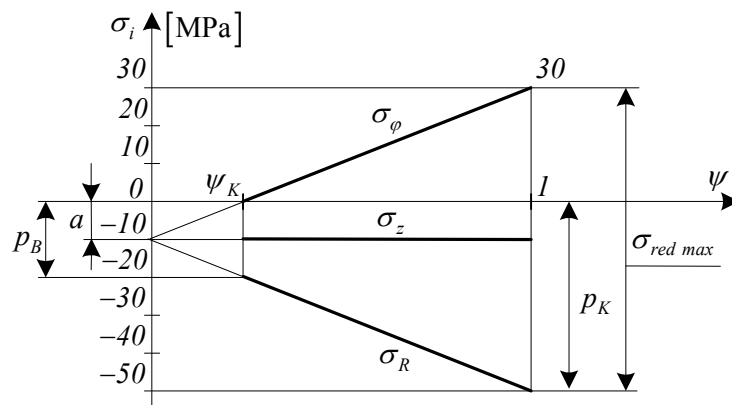
d) Az $R = R_K$ helyen lévő pontokban a feszültségi tenzor mátrixának felírása az R, φ, z koordináta-rendszerben.

Kidolgozás:

a) A ψ_K értékének meghatározása:

$$\psi = \frac{R_B^2}{R^2} \Rightarrow \psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} = \left(\frac{50}{100} \right)^2 = 0,25.$$

b) A csődiagram:



c) Szilárdságtani ellenőrzés:

$$\sigma_{red\ max}(Mohr) = 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = 2 \frac{50 - 20}{1 - 0,25} = 2 \frac{30}{0,75} = 80 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{red\ max} \leq \sigma_{meg}, \quad 80 \text{ MPa} < 100 \text{ MPa}, \text{ ezért a cső szilárdságtani szempontból megfelel!}$$

d) A feszültségi tenzor mátrixa az R_K , vagy ψ_K helyen:

A csődiagramból: $\sigma_R(\psi_K) = -p_K = -20 \text{ MPa},$

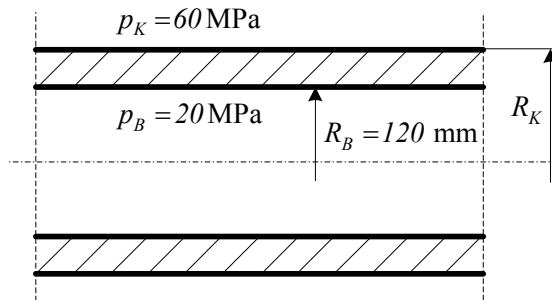
$$\sigma_\varphi(\psi_K) = 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} \psi_K - p_K = 80 \cdot 0,25 - 20 = 0,$$

$$\sigma_{z\ zárt} = a = \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} \psi_K - p_K = -10 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{z\ zárt} = \frac{R_B^2 \pi p_B - R_K^2 \pi p_K}{(R_K^2 - R_B^2) \pi} = \frac{R_B^2 p_B - R_K^2 p_K}{R_K^2 - R_B^2} = \frac{\psi_K p_B - p_K}{1 - \psi_K} = \frac{0,25 \cdot 50 - 20}{1 - 0,25} = -10 \text{ MPa}.$$

A feszültségi tenzor mátrixa: $\left[\underline{F}(\psi_K) \right] = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}_{\psi_K} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$

9.6.2. feladat: Vastagfalú cső



Adott: az ábrán látható vastagfalú cső anyaga, terhelése és belső sugara:

$$p_B = 20 \text{ MPa}, p_K = 60 \text{ MPa},$$

$$R_B = 120 \text{ mm}, \sigma_{meg} = 125 \text{ MPa}.$$

Feladat:

a) A csődiagram jelleghelyes megrajzolása.

b) A cső szilárdságtani méretezése (az R_K sugár meghatározása), ha a cső zárt.

c) A cső szilárdságtani méretezése (az R_K sugár meghatározása), ha a cső nyitott.

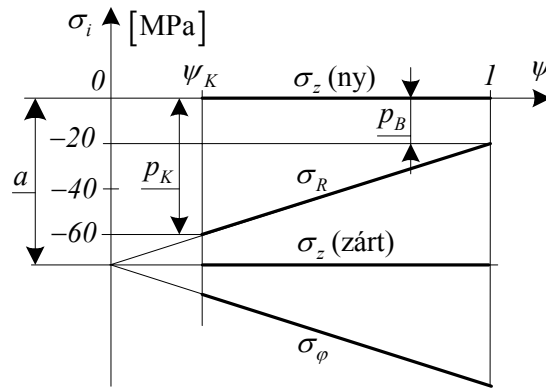
Kidolgozás:

a) A csődiagram jelleghelyes megrajzolása:

$$\psi = \frac{R_B^2}{R^2}, \quad \text{Peremfeltételek: } R = R_B (\psi = 1) \quad \sigma_R = -p_B = -20 \text{ MPa},$$

$$R = R_K (\psi = \psi_K) \quad \sigma_R = -p_K = -60 \text{ MPa}.$$

A ψ_K -t önkényesen veszem fel és rajzolom be a diagramba.



b) A zárt cső szilárdságtani méretezése:

$$\sigma_{red\ max} = (\sigma_\phi - \sigma_R)_{\psi=1} = 2 \frac{p_K - p_B}{1 - \psi_K} \leq \sigma_{meg} \Rightarrow 2 \frac{p_K - p_B}{\sigma_{meg}} \leq 1 - \psi_K,$$

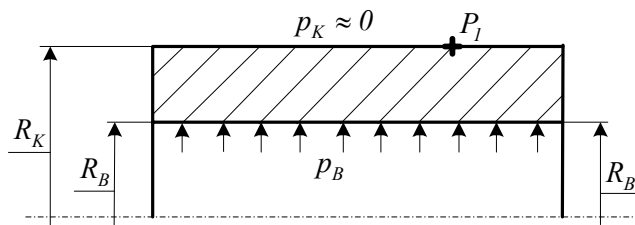
$$\psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} = 1 - 2 \frac{p_K - p_B}{\sigma_{meg}} = 1 - 2 \frac{40}{125} = 1 - \frac{16}{25} = 0,36, \quad R_K = \frac{R_B}{\sqrt{\psi_K}} = \frac{120 \cdot 5}{3} = 200 \text{ mm}.$$

c) A nyitott cső szilárdságtani méretezése:

$$\sigma_{red\ max} = \sigma_\phi(\psi=1) = 2 \frac{p_K - p_B}{1 - \psi_K} + p_B \leq \sigma_{meg},$$

$$\psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} = 1 - 2 \frac{p_K - p_B}{\sigma_{meg} - p_B} = 1 - 2 \frac{40}{105} = 0,238, \quad R_K = \frac{R_B}{\sqrt{\psi_K}} \cong 246 \text{ mm}.$$

9.6.3. feladat: Nyitott vastagfalú cső



Adott: az ábrán látható nyitott vastagfalú cső geometriája és terhelése:

$$R_B = 200 \text{ mm}, \quad R_K = 400 \text{ mm},$$

$$p_K \approx 0, \quad p_B = 100 \text{ MPa}.$$

Feladat: a) A csődiagram megrajzolása.

b) A cső szilárdságtani ellenőrzése *Mohr*-elmélet szerint, ha $\sigma_{meg} = 210 \text{ MPa}$.

c) A feszültségi tenzor mátrixának felírása a P_l pontban.

Kidolgozás:

a) A csődiagram:

$$\psi = \frac{R_B^2}{R^2}, \quad \psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2}, \quad \psi_K = \left(\frac{200}{400} \right)^2 = 0,25.$$

$$\text{A feszültségeloszlás: } \sigma_R = a - b\psi, \quad \sigma_\phi = a + b\psi, \quad \sigma_z = 0.$$

Peremfeltételek:

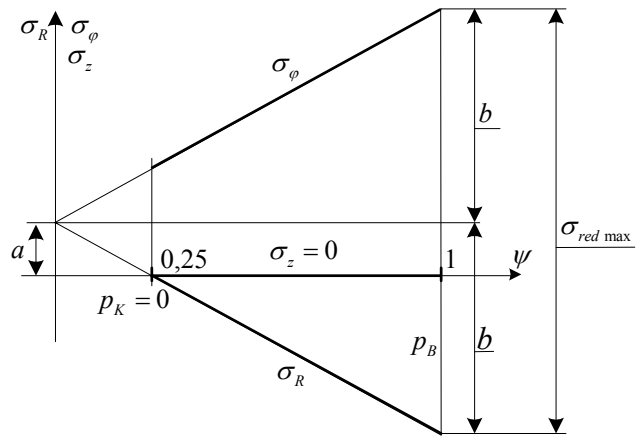
$$\sigma_R(\psi = l) = -p_B = a - b\psi = a - b,$$

$$\sigma_R(\psi_K = 0,25) = 0 = a - b\psi_K.$$

Az együtthatók:

$$a = \psi_K \frac{p_B}{1 - \psi_K} = 0,25 \frac{100}{1 - 0,25} = 33,3$$

$$b = \frac{p_B}{1 - \psi_K} = \frac{100}{1 - 0,25} = 133,3$$



b) Szilárdságtani ellenőrzés *Mohr*-elmélet szerint:

$$\sigma_{red \max} (Mohr) = (\sigma_R - \sigma_\phi)_{\psi=l},$$

$$\sigma_{red \max} (Mohr) = 2b = 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = 2 \frac{100 - 0}{1 - 0,25} = 266,6 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_{red \max} (Mohr) = 266,6 \text{ MPa} > \sigma_{meg} = 210 \text{ MPa}, \text{ ezért a cső szilárdságtanilag nem felel meg!}$$

c) A P_I pont feszültségi állapota:

$$\psi_I = \frac{R_B^2}{R_I^2} = \frac{R_B^2}{R_K^2} = 0,25,$$

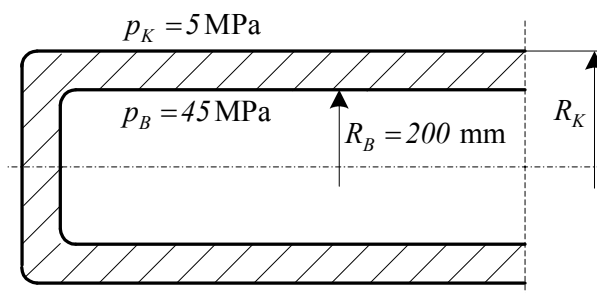
$$\sigma_R(\psi_I) = a - b\psi_I = 33,3 - 133,15 \cdot 0,25 = 0,$$

$$\sigma_\phi(\psi_I) = a + b\psi_I = 33,3 + 133,15 \cdot 0,25 = 66,6 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_z(\psi_I) = 0.$$

$$\begin{bmatrix} F_{P_I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_R(\psi_I) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\phi(\psi_I) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 66,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

9.6.4. feladat: Zárt vastagfalú cső



Adott: az ábrán látható zárt vastagfalú cső geometriája és terhelése:

$$p_B = 45 \text{ MPa}, p_K = 5 \text{ MPa},$$

$$R_B = 200 \text{ mm}, \psi_K = 0,6.$$

Feladat:

a) A csődiagram megrajzolása.

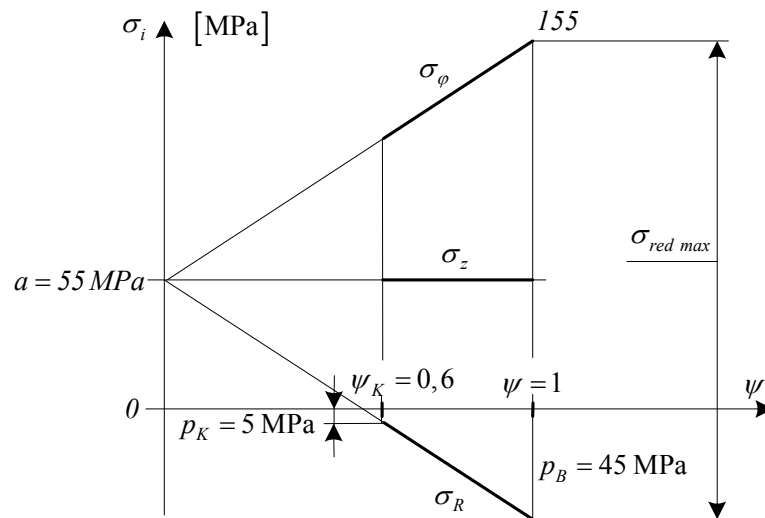
b) Az R_K külső sugár meghatározása.

c) A *Mohr* szerinti legnagyobb redukált feszültség kiszámítása.

d) A zárt csőben fellépő σ_z feszültség kiszámítása.

Kidolgozás:

a) A csődiagram:



b) Az R_K külső sugár meghatározása: $R_K = \frac{R_B}{\sqrt{\psi_K}}$, $R_K = \frac{200}{\sqrt{0,6}} = 258,198 \text{ mm}$.

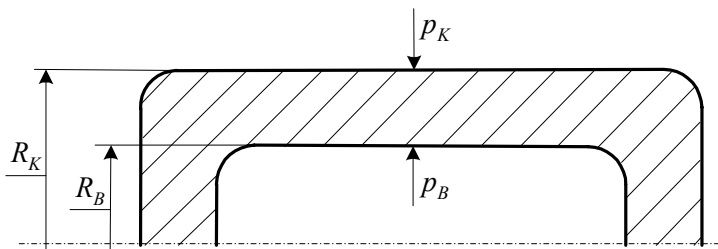
c) A Mohr szerinti legnagyobb redukált feszültség kiszámítása:

$$\sigma_{red \max} (Mohr) = 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = 2 \frac{45 - 5}{1 - 0,6} = 200 \text{ MPa}.$$

d) A zárt csőben fellépő σ_z feszültség kiszámítása:

$$\sigma_z = a = \frac{p_B \psi_K - p_K}{1 - \psi_K} = \frac{45 \cdot 0,6 - 5}{1 - 0,6} = \frac{22}{0,4} = 55 \text{ MPa}.$$

9.6.5. feladat: Zárt vastagfalú cső



Adott: az ábrán látható zárt vastagfalú cső geometriája és terhelése:

$$R_B = 200 \text{ mm}, \psi_K = 0,6,$$

$$p_K = 5 \text{ MPa},$$

$$p_B = 45 \text{ MPa}.$$

Feladat: a) A cső R_K méretének meghatározása.

b) A csődiagram megrajzolása.

c) A σ_z feszültség meghatározása.

d) A Mohr szerinti legnagyobb feszültség kiszámítása.

Kidolgozás:

a) A cső R_K méretének meghatározása:

$$\psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} \Rightarrow R_K = \sqrt{\frac{R_B^2}{\psi_K}}, \quad R_K = \sqrt{\frac{200^2}{0,6}} = 258,2 \text{ mm}$$

b) Csődiagram megrajzolása:

A feszültségek:

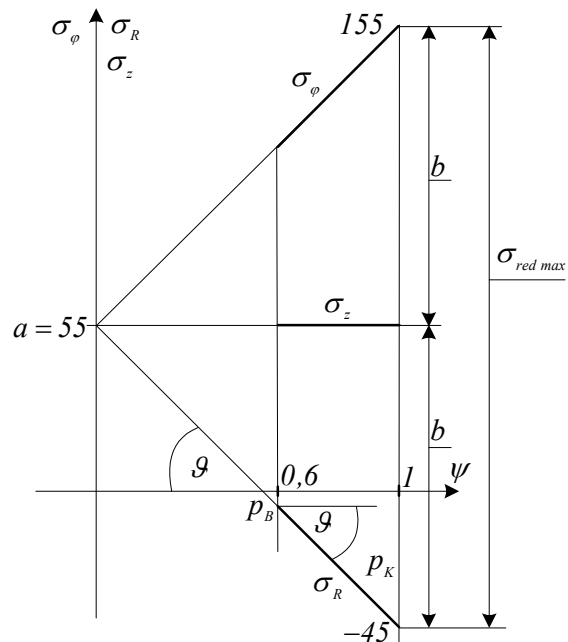
$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - b\psi \\ \sigma_\varphi &= a + b\psi \\ \sigma_z &= a \end{aligned} \right\} \quad \psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2}, \quad \psi = \frac{R^2}{R^2}.$$

Peremfeltételek:

$$\begin{aligned} \sigma_R(\psi = 1) &= -p_B = -45 \text{ MPa}, \\ \sigma_R(\psi_K) &= -p_K = -5 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Az ábrából:

$$b = \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = \frac{45 - 5}{1 - 0,6} = 100 \text{ MPa}.$$



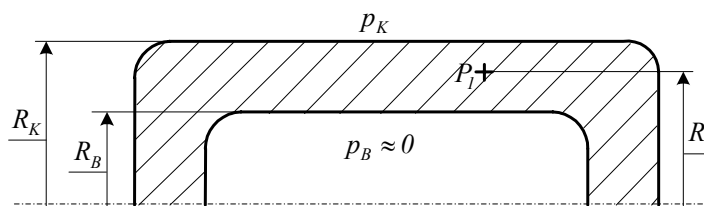
c) A tengelyirányú feszültség: $\sigma_z = a$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{a + p_K}{\psi_K} = \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} \Rightarrow a = -p_K + \psi_K \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = -5 + 0,6 \frac{45 - 5}{1 - 0,6} = 55 \text{ MPa}. \\ \sigma_z &= a = 55 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

d) A Mohr szerinti legnagyobb feszültség:

$$\sigma_{red \max} (\text{Mohr}) = 2b = \sigma_\varphi(\psi = 1) - \sigma_R(\psi = 1) = 155 - (-45) = 200 \text{ MPa}.$$

9.6.6. feladat: Zárt vastagfalú cső



Adott: az ábrán látható zárt vastagfalú cső geometriája és terhelése:

$$\begin{aligned} R_B &= 200 \text{ mm}, \\ R_l &= 220 \text{ mm}, \\ p_K &= 120 \text{ MPa}, \quad p_B \approx 0. \end{aligned}$$

Feladat: a) A csődiagramot jelleghelyes megrajzolása.

b) A cső R_K sugarának meghatározása, ha $\sigma_{meg} = 250 \text{ MPa}$.

c) A feszültségi tenzor mátrixának felírása a P_l pontban.

a) Csődiagram jelleghelyes megrajzolása

A feszültségek:

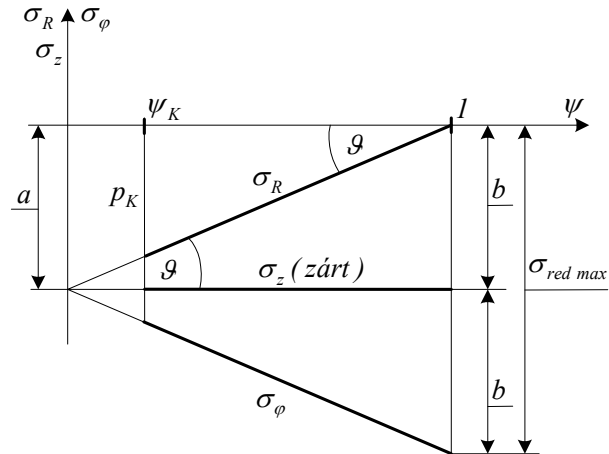
$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - b\psi \\ \sigma_\varphi &= a + b\psi \\ \sigma_z &= a \end{aligned} \right\} \psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2}, \psi = \frac{R_B^2}{R^2}.$$

Peremfeltételek:

$$\sigma_R(\psi = 1) = 0,$$

$$\sigma_R(\psi_K) = -p_K.$$

Az ábrából: $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{p_K}{1 - \psi_K} = b = a.$



Kidolgozás:

a) Méretezés Mohr szerint:

$$\sigma_{red \max} (Mohr) = (\sigma_R - \sigma_\varphi)_{\psi=1} = 2b = \frac{2p_K}{1 - \psi_K},$$

$$\sigma_{red \max} = \frac{2p_K}{1 - \psi_K} \leq \sigma_{meg}, \Rightarrow \frac{2p_K}{\sigma_{meg}} \leq 1 - \frac{R_B^2}{R_K^2}, \quad R_K \geq \frac{R_B}{\sqrt{1 - \frac{2p_K}{\sigma_{meg}}}} = \frac{200}{\sqrt{1 - \frac{2 \cdot 240}{250}}} = 1000 \text{ mm}.$$

c) A P_I pont feszültségi állapota: $\psi_I = \frac{R_B^2}{R_I^2} = \left(\frac{200}{220} \right)^2 = 0,826,$

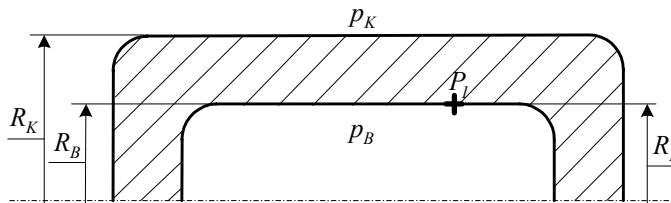
$$\sigma_R(\psi_I) = a(1 - \psi_I) = -\frac{p_K}{1 - \psi_K}(1 - \psi_I) = -\frac{120}{1 - 0,04}(1 - 0,826) = -21,75 \text{ MPa},$$

$$\sigma_\varphi(\psi_I) = a(1 + \psi_I) = -\frac{p_K}{1 - \psi_K}(1 + \psi_I) = -\frac{120}{1 - 0,04}(1 + 0,826) = -228,25 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z = a = -\frac{p_K}{1 - \psi_K} = -\frac{120}{1 - 0,04} = -125 \text{ MPa}.$$

$$[F_{PI}] = \begin{bmatrix} \sigma_R(\psi_I) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi(\psi_I) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21,75 & 0 & 0 \\ 0 & -228,25 & 0 \\ 0 & 0 & -125 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

9.6.7. feladat: Zárt vastagfalú cső



Adott:

az ábrán látható zárt vastagfalú cső geometriája és terhelése:

$$R_B = 200 \text{ mm}, \quad R_K = 300 \text{ mm},$$

$$p_K = 50 \text{ MPa}, \quad p_B = 100 \text{ MPa}.$$

Feladat: a) A csődiagramot megrajzolása.

b) A cső szilárdságtani ellenőrzése *Mohr*-elmélet szerint, ha a cső anyagának megengedett feszültsége $\sigma_{meg} = 100 \text{ MPa}$.

c) A feszültségi tenzor mátrixának felírása a P_I pontban.

Kidolgozás:

a) A csődiagram:

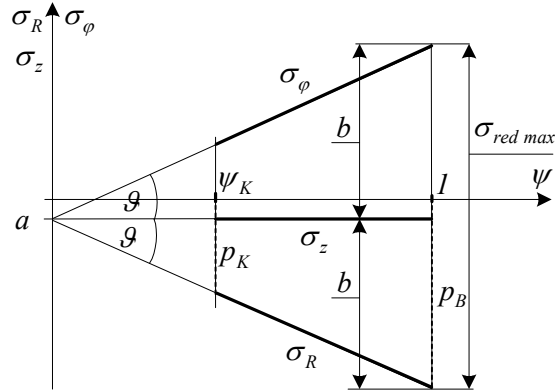
$$\psi = \frac{R_B^2}{R^2}, \quad \psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2},$$

$$\psi_K = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0,444$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - b\psi \\ \sigma_\varphi &= a + b\psi \\ \sigma_z &= a \end{aligned} \right\} \text{A feszültségek:}$$

Peremfeltételek:

$$\sigma_R(\psi = 1) = -p_B, \quad \sigma_R(\psi_K) = -p_K.$$



b) Szilárdságtani ellenőrzés *Mohr* szerint:

$$\sigma_{red \max} (Mohr) = (\sigma_R - \sigma_\varphi)_{\psi=1},$$

$$\sigma_{red \max} (Mohr) = 2b = 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = 2 \frac{100 - 50}{1 - 0,444} = 180 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{red \max} (Mohr) = 180 \text{ MPa} > \sigma_{meg} = 100 \text{ MPa}, \text{ ezért a cső szilárdságtanilag nem felel meg!}$$

c) A P_I pont feszültségi állapota:

$$\psi_I = \frac{R_B^2}{R_I^2} = \frac{R_B^2}{R_B^2} = 1,$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = p_B - |a| = \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} \Rightarrow |a| = p_B - \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = \frac{p_K - p_B \psi_K}{1 - \psi_K},$$

$$a = \frac{p_B \psi_K - p_K}{1 - \psi_K} = \frac{100 \cdot 0,4444 - 50}{1 - 0,4444} = -10 \text{ MPa}, \quad b = \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = \frac{100 - 50}{1 - 0,444} = 90 \text{ MPa}.$$

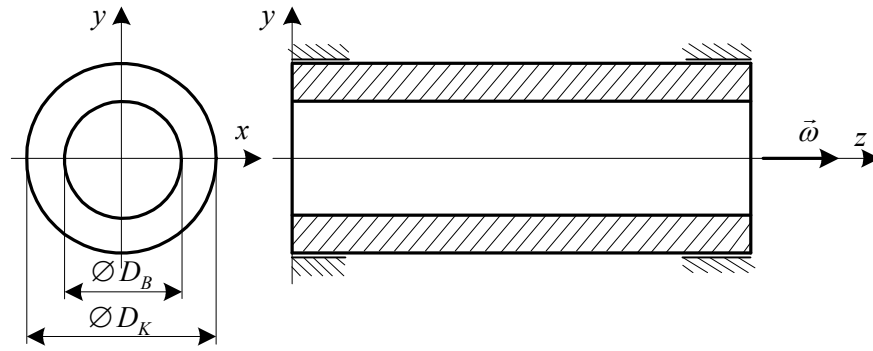
$$\sigma_R(\psi_I) = a - b\psi_I = -10 - 90 = -100 \text{ MPa},$$

$$\sigma_\varphi(\psi_I) = a + b\psi_I = -10 + 90 = 80 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z(\psi_I) = a = -10 \text{ MPa}.$$

$$[\underline{F}_{PI}] = \begin{bmatrix} \sigma_R(\psi_I) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi(\psi_I) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

9.6.8. feladat: Gyorsan forgó csőtengely



Adott: Az ábrán látható gyorsan forgó csőtengely anyaga, geometriája és szögsebessége:

$$D_B = 400 \text{ mm}, D_K = 600 \text{ mm}, \omega = 200 \text{ rad/s} = \text{állandó}, \rho = 8000 \text{ kg/m}^3, \nu = 1/3.$$

Feladat: a) A λ_B és $\sigma_{\omega 0}$ mennyiségek meghatározása.

b) A $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ feszültségi diagramok megrajzolása.

c) Az $R_K = D_K/2$ helyen levő P pontokban a feszültségi tenzor mátrixának felírása R, φ, z henger koordináta-rendszerben.

d) A Mohr-féle elmélet szerinti legnagyobb redukált feszültség kiszámítása.

Kidolgozás:

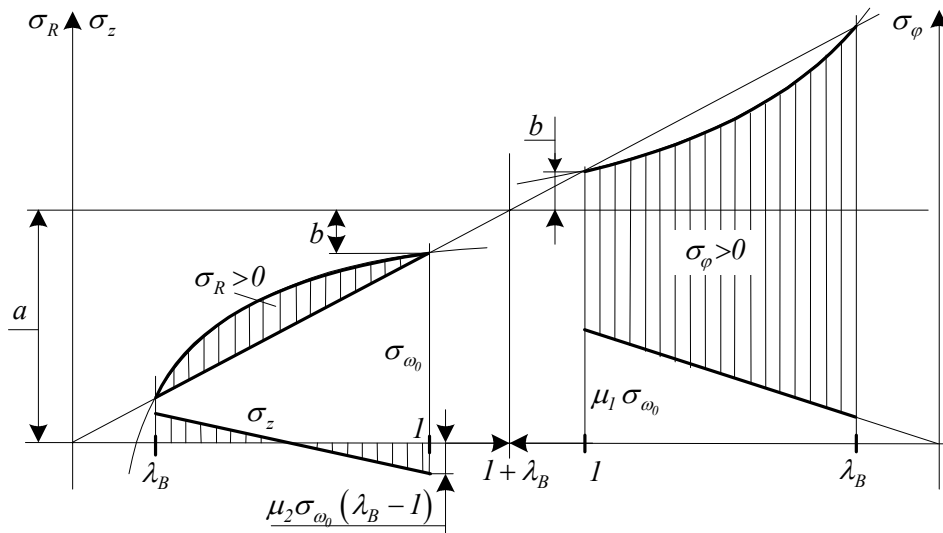
a) A λ_B és $\sigma_{\omega 0}$ mennyiségek meghatározása:

$$\lambda_B = \frac{R_B^2}{R_K^2} = \left(\frac{200}{300} \right)^2 = 0,44444,$$

$$\sigma_{\omega 0} = \frac{(3-2\nu)\rho}{(1-\nu)} \frac{1}{8} (R_K \omega)^2 = \frac{(3-2 \cdot 0,33333) 10^3}{1-0,33333} (0,3 \cdot 200)^2 = 12,6 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 12,6 \text{ MPa}.$$

b) A $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ feszültségi diagramok megrajzolása:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma_z &= \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 + \lambda_B - 2\lambda) \end{aligned} \right\} \text{ A vastagságmenti feszültségeloszlás függvényei.}$$



$$\lambda = \frac{R^2}{R_K^2}, \quad \mu_1 = \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2 \cdot 0,3333}{3-2 \cdot 0,3333} = 0,714, \quad \mu_2 = \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2 \cdot 0,3333}{3-2 \cdot 0,3333} = 0,285.$$

- c) Az $R_K = D_K/2$ helyen levő P pontokban a feszültségi tenzor mátrixának felírása R, φ, z henger koordináta-rendszerben:

A diagramból:

$$\sigma_R(\lambda = 1) = 0,$$

$$\sigma_\varphi(\lambda = 1) = \sigma_{\omega_0}(1 + 2\lambda_B) - \mu_1 \sigma_{\omega_0} = 12,6(1 + 2 \cdot 0,4444 - 0,714) = 14,8 \text{ MPa},$$

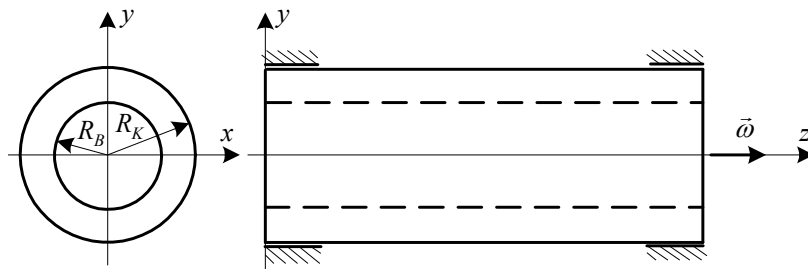
$$\sigma_z(\lambda = 1) = \mu_2 \sigma_{\omega_0}(\lambda_B - 1) = 0,285 \cdot 12,6(0,4444 - 1) = -2 \text{ MPa}.$$

A feszültségi tenzor mátrixa:
$$\begin{bmatrix} F \\ R\varphi z \end{bmatrix}(\lambda = 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14,8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

- d) A Mohr-féle elmélet szerinti legnagyobb redukált feszültség kiszámítása:

$$\sigma_{red \max} = \sigma_\varphi|_{\lambda_B} = \sigma_{\omega_0}(2 + \lambda_B) - \mu_1 \sigma_{\omega_0} \lambda_B = 12,6(2 + 0,4444 - 0,314) = 26,79 \text{ MPa}.$$

9.6.5. feladat: Gyorsan forgó csőtengety



Adott: Az ábrán látható, $\vec{\omega}$ = állandó szögsebességgel gyorsan forgó csőtengety:

$$R_K = 200\sqrt{2} \text{ mm}, \sigma_{\omega_0} = 200 \text{ MPa}, \rho = 8000 \text{ kg/m}^3, \nu = 0,25; E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}.$$

Feladat:

- A $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ feszültségi diagramok jelleghelyes megrajzolása.
- Az R_B belső sugár értékének meghatározása, ha $\sigma_\varphi(\lambda_B) = 440 \text{ MPa}$.
- Az R_K helyen kialakuló feszültségi állapot meghatározása.
- A csőtengely külső átmérőjének ΔD_K megváltozásának kiszámítása.
- A csőtengely legnagyobb megengedett szögsebességének meghatározása, ha az anyag megengedett feszültsége $\sigma_{meg} = 110 \text{ MPa}$.

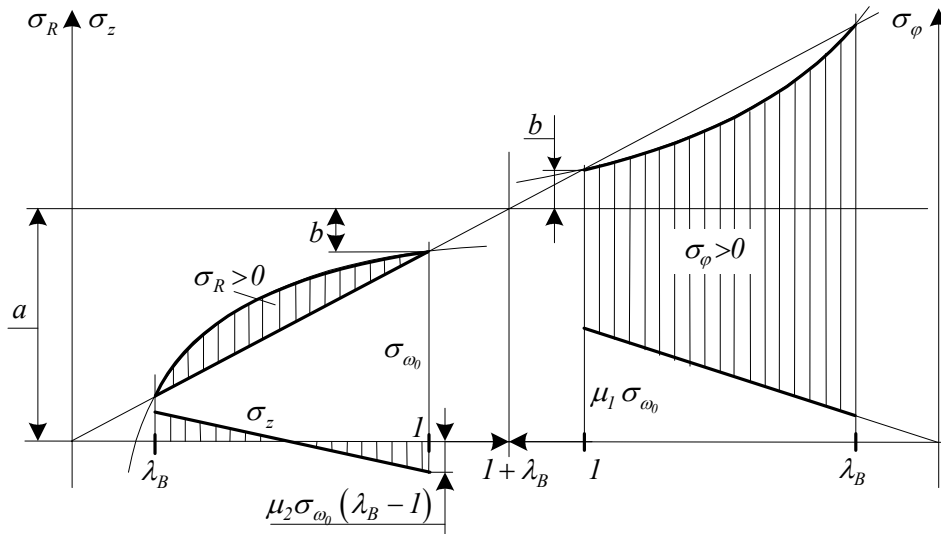
Kidolgozás:

- A $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ feszültségi diagramokat jelleghelyes megrajzolása:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega_0} \lambda \\ \sigma_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1 \sigma_{\omega_0} \lambda \\ \sigma_z &= \mu_2 \sigma_{\omega_0} (l + \lambda_B - 2\lambda) \end{aligned} \right\} \text{ A feszültségek vastagságmenti eloszlása.}$$

$$\lambda = \frac{R^2}{R_K^2}, \quad \mu_1 = \frac{l + 2\nu}{3 - 2\nu} = \frac{l + 2 \cdot 0,25}{3 - 2 \cdot 0,25} = 0,6, \quad \mu_2 = \frac{2\nu}{3 - 2\nu} = \frac{2 \cdot 0,25}{3 - 2 \cdot 0,25} = 0,2.$$

A gyorsan forgó csőtengely diagramja:



- Az R_B belső sugár értékének meghatározása, ha $\sigma_\varphi(\lambda_B) = 440 \text{ MPa}$:

$$\text{A diagramból: } \sigma_\varphi|_{\lambda_B} = \sigma_{\omega_0} (2 + \lambda_B) - \mu_1 \sigma_{\omega_0} \lambda_B = 2\sigma_{\omega_0} + \lambda_B \sigma_{\omega_0} (1 - \mu_1),$$

$$440 = 2 \cdot 200 + \lambda_B 200 (1 - 0,6) = 400 + \lambda_B 80,$$

$$40 = \lambda_B 80 \Rightarrow \lambda_B = 0,5.$$

$$\lambda_B = \frac{R_B^2}{R_K^2} \Rightarrow R_B = R_K \sqrt{\lambda_B} = 200 \cdot \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = 200 \text{ mm},$$

$$R_B = 200 \text{ mm}.$$

c) Az R_K helyen kialakuló feszültségi állapot meghatározása:

$$R = R_K \text{ esetén } \lambda = \frac{R^2}{R_K^2} = \frac{R_K^2}{R_K^2} = 1. \quad \sigma_R(\lambda = 1) = 0,$$

A feszültségi tenzor:

$$\sigma_\varphi(\lambda = 1) = \sigma_{\omega_0}(1 + 2\lambda_B) - \mu_l \sigma_{\omega_0} =$$

$$= 200(1 + 1 - 0,6) = 280 \text{ MPa},$$

$$\left[\underline{F} \right]_{R\varphi z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 280 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

$$\sigma_z(\lambda = 1) = \mu_2 \sigma_{\omega_0}(\lambda_B - 1) = -0,2 \cdot 200 \cdot 0,5 = -20 \text{ MPa}.$$

d) A csőtengely külső átmérőjének ΔD_K megváltozása:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0,25)} = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}.$$

$$\varepsilon_\varphi(R = R_K) = \varepsilon_{\varphi K} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_\varphi - \nu \frac{(\sigma_\varphi + \sigma_z)}{(1+\nu)} \right] = \frac{1}{2 \cdot 8 \cdot 10^4} \left(280 - 0,25 \frac{280}{1,25} \right) = 14,25 \cdot 10^{-4},$$

$$\Delta D_K = 2u_R|_{R_K} = 2R_K \varepsilon_{\varphi K} = 2 \cdot 200 \sqrt{2} \cdot 14,25 \cdot 10^{-4} = 80,37 \cdot 10^{-2} \text{ mm}.$$

$$\Delta D_K \cong 0,8 \text{ mm}.$$

e) A csőtengely legnagyobb megengedett ω_{max} szögsebessége, ha $\sigma_{meg} = 110 \text{ MPa}$:

$$\sigma_{red \max} \leq \sigma_{meg},$$

$$\sigma_{\omega 0}(2 + \lambda_B) - \mu_l \sigma_{\omega 0} \lambda_B \leq \sigma_{meg},$$

$$\frac{(3-2\nu)}{(1-\nu)} \frac{\rho}{8} (R_K \omega)^2 (2 + \lambda_B - \mu_l \lambda_B) \leq \sigma_{meg},$$

$$(R_K \omega_{max})^2 = \frac{\sigma_{meg}}{(2 + \lambda_B - \mu_l \lambda_B)} \frac{8}{\rho} \frac{(1-\nu)}{(3-2\nu)} = \frac{110 \cdot 10^6}{2,2} \frac{0,3 \cdot 10^{-3}}{2,2} = 1,5 \cdot 10^4 \text{ m}^2/\text{s}^2,$$

$$R_K \omega_{max} = \sqrt{1,5 \cdot 10^4} = 122,47 \text{ m/s},$$

$$\omega_{max} = \frac{122,47}{R_K} = \frac{122,47}{0,2\sqrt{2}} = 434 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

$$\text{A megengedett legnagyobb fordulatszám: } n_{max} = \frac{60 \omega_{max}}{2\pi} = \frac{60 \cdot 434}{6,282} = 4148 \frac{\text{ford}}{\text{min}}.$$

9.6.6. feladat: Gyorsan forgó tengely



Adott: A hosszú tömör D átmérőjű tengely, amely $\vec{\omega} = \text{állandó}$ szögsebességgel forog.

$$D = 400 \text{ mm}, \rho = 8000 \text{ kg/m}^3, \nu = 0,25, \sigma_{\omega 0} = 40 \text{ MPa}.$$

Feladat:

- A $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ feszültségi diagramok megrajzolása.
- A Mohr-féle elmélet alapján számított redukált feszültség maximumának kiszámítása.
- A tengely megengedett legnagyobb fordulatszámának meghatározása, ha $\sigma_{meg} = 80 \text{ MPa}$.

Kidolgozás:

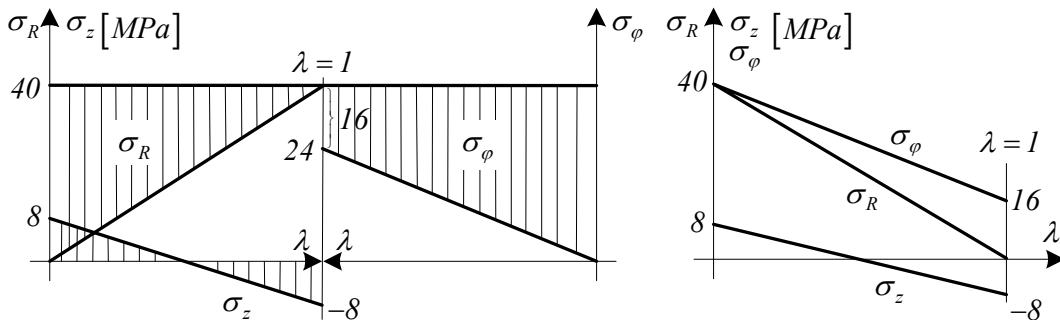
a) Feszültségi diagramok megrajzolása:

$$\lambda = \frac{R^2}{R_K^2}, \quad \mu_1 = \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2 \cdot 0,25}{3-2 \cdot 0,25} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6, \quad \mu_2 = \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2 \cdot 0,25}{3-2 \cdot 0,25} = \frac{0,5}{2,5} = 0,2.$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma_\varphi &= a - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma_z &= \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 - 2\lambda) \end{aligned} \right\} \text{ A feszültségeloszlás függvényei.}$$

$$\text{Peremfeltétel: } R = R_K (\lambda = 1) \Rightarrow \sigma_R = 0 = a - \sigma_{\omega 0} = 0 \Rightarrow a = \sigma_{\omega 0} = 40 \text{ MPa}.$$

A gyorsan forgó tengely diagramja két alakban:



Feszültségek az $R=0$ és $R=R_K$ helyen:

$$R=0 \quad \sigma_R(\lambda=0) = a - \sigma_{\omega 0} \lambda = 40 - 40 \cdot 0 = 40 \text{ MPa}.$$

$$R=R_K \quad \sigma_R(\lambda=1) = a - \sigma_{\omega 0} \lambda = 40 - 40 \cdot 1 = 0 \text{ MPa}.$$

$$R=0 \quad \sigma_\varphi(\lambda=0) = a - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda = 40 - 0,6 \cdot 40 \cdot 0 = 40 \text{ MPa}.$$

$$R = R_K \quad \sigma_\varphi(\lambda = 1) = a - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda = 40 - 0,6 \cdot 40 \cdot 1 = 16 \text{ MPa.}$$

$$R = 0 \quad \sigma_z(\lambda = 0) = \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 - 2\lambda) = 0,2 \cdot 40 (1 - 2 \cdot 0) = 8 \text{ MPa.}$$

$$R = R_K \quad \sigma_z(\lambda = 1) = \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 - 2\lambda) = 0,2 \cdot 40 (1 - 2 \cdot 1) = -8 \text{ MPa.}$$

b) A Mohr szerinti redukált feszültség:

$$\sigma_{red}(Mohr)|_{\lambda=0} = (\sigma_R - \sigma_z) = 40 - 8 = \sigma_{\omega 0} (1 - \mu_2) = 40 (1 - 0,2) = 40 \cdot 0,8 = 32 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{red}(Mohr)|_{\lambda=1} = (\sigma_\varphi - \sigma_z) = 16 - (-8) = \sigma_{\omega 0} (1 - \mu_1 + \mu_2) = 40 (1 - 0,6 + 0,2) = 24 \text{ MPa},$$

$$\text{Maximális redukált feszültség: } \sigma_{red max}(Mohr)|_{\lambda=0} = (\sigma_R - \sigma_z) = 32 \text{ MPa}.$$

c) A maximális fordulatszám:

$$\sigma_{meg} \leq \sigma_{red max}(Mohr) = \sigma_{red}(Mohr)|_{\lambda=0} = \sigma_{\omega 0} (1 - \mu_2) = \frac{(3 - 2\nu) \rho}{(1 - \nu)} \frac{R_K \omega}{8} (1 - \mu_2),$$

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{\sigma_{meg} (1 - \nu) 8}{(3 - 2\nu) \rho R_K^2 (1 - \mu_2)}} = \sqrt{\frac{80 \cdot 10^6 (1 - 0,25) \cdot 8}{(3 - 2 \cdot 0,25) \cdot 8000 \cdot 0,2^2 (1 - 0,2)}} = 866 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$n_{max} = \frac{60 \omega_{max}}{2\pi} = \frac{60 \cdot 866}{6,282} = 8270 \frac{\text{ford}}{\text{min}}.$$

9.6.7. feladat: