

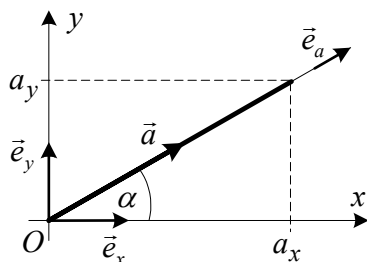
F.I. FÜGGELÉK: MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ

F.I.1. Vektorok és vektorműveletek

Skáláris mennyiség: olyan geometriai, vagy fizikai mennyiség, amelyet nagyság, (előjel) és mértékegység jellemez.

Vektor mennyiség: irányított geometriai, vagy fizikai mennyiség, amelyet nagyság (előjel), irány és mértékegység jellemez.

a) Vektor megadása:



Egységvektorok: $\vec{e}_x, \vec{e}_y$.

Az egységvektorok hossza egységnyi:

$$|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = 1.$$

Egy tetszőleges vektor megadása egységvektorokkal: $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$.

Ha ismert az $\vec{a}$ vektor hossza és az x tengellyel bezárt szöge, akkor az előző összefüggésből:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha \vec{e}_x + |\vec{a}| \sin \alpha \vec{e}_y = |\vec{a}| (\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y) = |\vec{a}| \vec{e}_a$$

Az $\vec{a}$ vektor hosszát a Pithagorasz-tétel segítségével számíthatjuk ki: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

Könnyen belátható az is, hogy $\vec{e}_a$ vektor egységvektor:

$$|\vec{e}_a| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1.$$

A vektorok közötti műveletek a vektorok támadáspontjához, vagy hatásvonalhoz kötöttségtől függetlenül érvényesek.

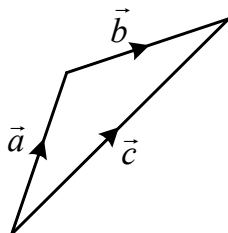
b) Vektorok összeadása:

Legyen adott két vektor: $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$, $\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y$.

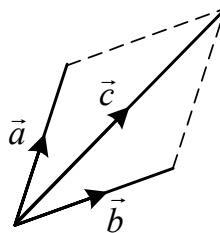
A két vektor összegének kiszámítása:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y) + (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y) = \underbrace{(a_x + b_x)}_{c_x} \vec{e}_x + \underbrace{(a_y + b_y)}_{c_y} \vec{e}_y = \vec{c}.$$

A két vektor összegének megszerkesztése:



Háromszög szabály



Paralelogramma szabály

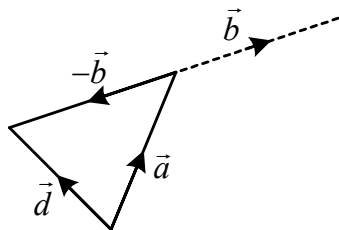
c) Vektorok kivonása:

Legyen adott két vektor: $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$, $\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y$.

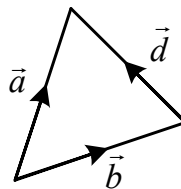
A két vektor különbségének kiszámítása:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y) - (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y) = \underbrace{(a_x - b_x)}_{d_x} \vec{e}_x + \underbrace{(a_y - b_y)}_{d_y} \vec{e}_y = \vec{d}$$

Két vektor különbségének megszerkesztése:



$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{d}$$



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$$

d) Vektorok skaláris szorzása (az eredmény skaláris mennyiség):

A skaláris szorzás értelmezése: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$.

A skaláris szorzás kiszámítása: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Az $\vec{a} \cdot \vec{b}$ jelölés kiejtése (kiolvasása): á skalárisan szorozva bével.

Egységvektorok skaláris szorzata: $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$, $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1$, $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$,
 $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$, $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$, $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$.

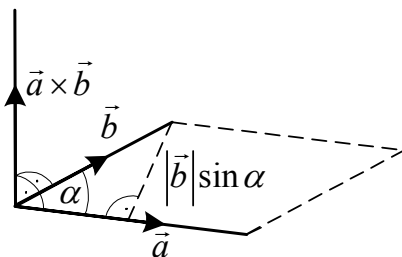
Az eredmény általánosítása: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ és $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Az $\vec{a} \perp \vec{b}$ jelölés kiejtése (kiolvasása): á merőleges bére.

e) Vektorok vektoriális szorzata (az eredmény vektor):

A vektoriális szorzás értelmezése:

Az eredményvektor nagysága: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \underbrace{|\vec{b}| \sin \alpha}_{\text{a paralelogramma magassága}}$.



Az eredményvektor irányát ún. jobbkezes szabállyal kapjuk meg: ha jobb kézzel az $\vec{a}$ vektort a $\vec{b}$ vektorba forgatjuk, akkor a jobb kéz hüvelykujja adja meg az eredményvektor irányát.

Az eredményvektor merőleges a szorzásban szereplő mindkét vektorra.

A vektoriális szorzás kiszámítása:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x (a_y b_z - b_y a_z) - \vec{e}_y (a_x b_z - b_x a_z) + \vec{e}_z (a_x b_y - b_x a_y).$$

A determináns kifejtési szabálya (a determináns előjeles *skaláris* mennyiség):

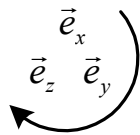
- az első sor szerint:

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}), \text{ vagy}$$

- az első oszlop szerint:

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}).$$

Egységvektorok
vektoriális szorzata:



$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{0}, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0},$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z, \quad \vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x.$$

Szabály: - Ha két egységvektort az ábrán látható nyíllal megegyező sorrendben szorzunk össze vektoriálisan, akkor pozitív előjellel kapjuk a harmadik egységvektort.

- Ha két egységvektort az ábrán látható nyíllal ellentétes sorrendben szorzunk össze vektoriálisan, akkor negatív előjellel kapjuk a harmadik egységvektort.

Az eredmény általánosítása: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.

f) Vektorok kétszeres vektoriális szorzata (az eredmény vektor):

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}, \text{ vagy } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Kiszámítás kétféle úton lehetséges:

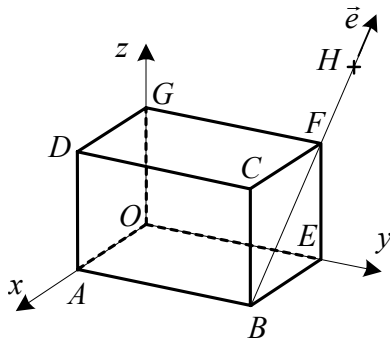
- a két vektoriális szorzásnak a kijelölt sorrendben történő elvégzésével,

- a kifejtési szabállyal:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}), \text{ illetve } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

F.I.2. Gyakorló feladatok vektorműveletekre

F.I.2.1. feladat: Helyvektorok felírása, összegzése, abszolút értékének meghatározása



Adott: egy hasáb, valamint a H pont helye:

$$\overline{AB} = 8 \text{ m}, \quad \overline{BE} = 3 \text{ m},$$

$$\overline{AD} = 6 \text{ m}, \quad \overline{FH} = 0,5 \overline{BF}.$$

Feladat: a) A H pont $\vec{r}_H$ helyvektorának meghatározása.

b) A H pontból a B pontba mutató $\vec{r}_{HB}$ helyvektor meghatározása.

Kidolgozás:

a) A H pont $\vec{r}_H$ helyvektorának meghatározása:

$$\vec{r}_H = \vec{r}_{OF} + \vec{r}_{FH}.$$

$$\vec{r}_{OF} = \vec{r}_F = (8\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \text{ m},$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}_{BF}}{|\vec{r}_{BF}|} = \frac{1}{\sqrt{45}}(-3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z) \text{ m}, \quad \vec{r}_{BF} = (-3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z) \text{ m},$$

$$|\vec{r}_{BF}| = \sqrt{x_{BF}^2 + z_{BF}^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} \text{ m},$$

$$|\vec{r}_{FH}| = 0,5\sqrt{45} \text{ m},$$

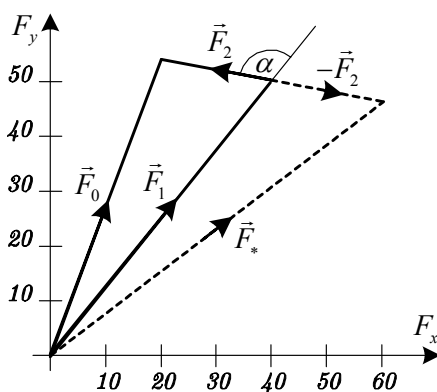
$$\vec{r}_{FH} = |\vec{r}_{FH}| \vec{e} = \frac{\sqrt{45}}{2} \frac{1}{\sqrt{45}}(-3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z) = (-1,5\vec{e}_x + 3\vec{e}_z) \text{ m},$$

$$\vec{r}_H = (8\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) + (-1,5\vec{e}_x + 3\vec{e}_z) = (-1,5\vec{e}_x + 8\vec{e}_y + 9\vec{e}_z) \text{ m}.$$

b) A H -ból a B pontba mutató $\vec{r}_{HB}$ helyvektor meghatározása.

$$\vec{r}_{HB} = -\frac{3}{2} |\vec{r}_{BF}| \vec{e} = -\frac{3}{2} \sqrt{45} \frac{1}{\sqrt{45}}(-3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z) \text{ m}, \quad \vec{r}_{HB} = (4,5\vec{e}_x - 9\vec{e}_z) \text{ m}.$$

I.2.2. feladat: Vektorok összege, különbsége, egymással bezárt szöge



Adott: $\vec{F}_1 = (40\vec{e}_x + 50\vec{e}_y) \text{ N},$

$$\vec{F}_2 = (-20\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) \text{ N}.$$

Feladat:

a) A két erő $\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ összegvektorának meghatározása.

b) A két erő $\vec{F}_* = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ különbségvektorának meghatározása.

c) A két erővektor által bezárt α_{12} szög meghatározása.

Kidolgozás:

a) A két erő $\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ összegvektorának meghatározása:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (40\vec{e}_x + 50\vec{e}_y) + (-20\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) = (20\vec{e}_x + 54\vec{e}_y) \text{ N}.$$

b) A két erő $\vec{F}_* = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ különbségvektorának meghatározása:

$$\vec{F}_* = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = (40\vec{e}_x + 50\vec{e}_y) - (-20\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) = (60\vec{e}_x - 46\vec{e}_y) \text{ N}.$$

c) A két erővektor által bezárt α_{12} szög meghatározása:

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = |\vec{F}_1| |\vec{F}_2| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2}{|\vec{F}_1| |\vec{F}_2|}.$$

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = 40(-20) + 50 \cdot 4 = -800 + 200 = -600 \text{ N}^2, |\vec{F}_1| = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} = \sqrt{40^2 + 50^2} = 64,03 \text{ N},$$

$$|\vec{F}_2| = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} = \sqrt{20^2 + 4^2} = 20,40 \text{ N}, \cos \alpha = \frac{-600}{64,03 \cdot 20,40} = -0,45934,$$

$$\alpha = \arccos(-0,45934) = 117,34^\circ.$$

F.I.2.3. feladat: Vektor koordinátái és összetevői

Adott:

$$\vec{a} = (10\vec{e}_x + 5\vec{e}_y) \text{ m}.$$

Feladat:

a) Az $\vec{a}$ vektor x és y irányú skaláris koordinátáinak meghatározása.

b) Az $\vec{a}$ vektor x és y irányú összetevőinek meghatározása.

Kidolgozás:

a) A vektor koordinátatengely irányú koordinátáinak meghatározása (skaláris mennyiségek):

A skaláris szorzás értelmezéséből:

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{e}_x = |\vec{a}| |\vec{e}_x| \cos \alpha = |\vec{a}| \cos \alpha,$$

$$a_y = \vec{a} \cdot \vec{e}_y = |\vec{a}| |\vec{e}_y| \cos \beta = |\vec{a}| \cos \beta.$$

A skaláris koordináták kiszámítása:

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{e}_x = (10\vec{e}_x + 5\vec{e}_y) \cdot \vec{e}_x = 10\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + 5\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = 10 \text{ m},$$

$$a_y = \vec{a} \cdot \vec{e}_y = (10\vec{e}_x + 5\vec{e}_y) \cdot \vec{e}_y = 10\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y + 5\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 5 \text{ m}.$$

b) A vektor koordinátatengely irányú összetevői (vektor mennyiségek):

$$\vec{a}_x = a_x \vec{e}_x = (10\vec{e}_x) \text{ m}, \quad \vec{a}_y = a_y \vec{e}_y = (5\vec{e}_y) \text{ m}.$$

F.I.2.4. feladat: Vektor koordinátái és összetevői

Adott:

$$\vec{b} = (6\vec{e}_x + 6\vec{e}_y) \text{ m},$$

$$\vec{a} = (12\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) \text{ m}.$$

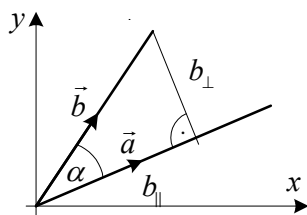
Feladat:

a) A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányú $b_{\parallel}$ és $\vec{a}$ irányra merőleges $b_{\perp}$ skaláris koordinátáinak meghatározása.

b) A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányú $\vec{b}_{\parallel}$ és $\vec{a}$ irányra merőleges $\vec{b}_{\perp}$ összetevőinek meghatározása.

Kidolgozás:

a) Adott irányú koordináták meghatározása:



A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányú koordinátája ($\vec{a}$ irányra eső vetülete):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha \Rightarrow b_{\parallel} = |\vec{b}| \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 96 \text{ m}^2,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \approx 12,65 \text{ m},$$

$$b_{\parallel} = \frac{96}{12,65} = 7,59 \text{ m}.$$

A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányra merőleges koordinátája (az $\vec{a}$ irányra merőleges vetülete):

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha \Rightarrow b_{\perp} = |\vec{b}| \sin \alpha = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 12 & 4 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z (72 - 24) = (48 \vec{e}_z) \text{ m}^2, \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 48 \text{ m}^2, \quad |\vec{a}| = 12,65 \text{ m}.$$

$$b_{\perp} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{48}{12,65} = 3,79 \text{ m}.$$

b) Adott irányú összetevők meghatározása:

A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányú összetevője:

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{12,65} (12\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) = (0,9486\vec{e}_x + 0,3162\vec{e}_y),$$

$$\vec{b}_{\parallel} = b_{\parallel} \vec{e}_a = 7,59(0,9486\vec{e}_x + 0,3162\vec{e}_y) = (7,2\vec{e}_x + 2,4\vec{e}_y) \text{ m}.$$

A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányra merőleges összetevője:

$$\vec{b}_{\perp} = \left(\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \times \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right) |\vec{b}| \sin \alpha = \left(\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha} \times \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right) |\vec{b}| \sin \alpha = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2}.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} = (48\vec{e}_z) \times (12\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) = (-192\vec{e}_x + 576\vec{e}_y) \text{ m}^3,$$

$$\vec{b}_{\perp} = \frac{-192\vec{e}_x + 576\vec{e}_y}{160} = (-1,2\vec{e}_x + 3,6\vec{e}_y) \text{ m}.$$

$$\text{Ellenőrzés: } \vec{b} = \vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp} = (7,2\vec{e}_x + 2,4\vec{e}_y) + (-1,2\vec{e}_x + 3,6\vec{e}_y) = (6\vec{e}_x + 6\vec{e}_y) \text{ m}.$$

F.I.2.5. feladat: Vektorok skaláris szorzata

Adott: $\vec{F}_1 = (40\vec{e}_x + 18\vec{e}_y - 26\vec{e}_z) \text{ kN},$

Kérdés:

$$\vec{F}_2 = (-2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) \text{ kN},$$

Mekkora legyen F_{3y} , ha azt akarjuk, hogy $(\vec{F}_1 + \vec{F}_3)$

$$\vec{F}_3 = (F_{3y}\vec{e}_y).$$

merőleges legyen $\vec{F}_2$ -re?

Kidolgozás:

Ha $\vec{a} \perp \vec{b}$, akkor $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \underbrace{\alpha}_{90^\circ} = 0$.

Ezért teljesülnie kell az $(\vec{F}_1 + \vec{F}_3) \cdot \vec{F}_2 = 0$ összefüggésnek.

$$\begin{aligned} (\vec{F}_1 + \vec{F}_3) \cdot \vec{F}_2 &= [40\vec{e}_x + (18 + F_{3y})\vec{e}_y - 26\vec{e}_z] \cdot (-2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) = 0, \\ -40 \cdot 2 + (18 + F_{3y})2 - 26 \cdot 3 &= 0, \quad -80 + 36 + 2F_{3y} - 78 = 0, \\ 2F_{3y} &= 122 \quad \Rightarrow \quad F_{3y} = 61 \text{ kN}. \end{aligned}$$

F.I.2.6. feladat: Vektor koordinátái és összetevői

Adott:

$$\vec{a} = (3\vec{e}_x + \vec{e}_y) \text{ N}, \quad \vec{b} = (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \text{ N}.$$

Feladat:

- Az $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ irányú $a_{\parallel}$ és a $\vec{b}$ irányra merőleges $a_{\perp}$ skaláris koordinátáinak meghatározása.
- Az $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ irányú $\vec{a}_{\parallel}$ és a $\vec{b}$ irányra merőleges $\vec{a}_{\perp}$ összetevőinek meghatározása.

Megoldás:

- Az $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ irányú $a_{\parallel}$ és a $\vec{b}$ irányra merőleges $a_{\perp}$ skaláris koordinátái:

$$a_{\parallel} = 2,235 \text{ N}, \quad a_{\perp} = 2,235 \text{ N}.$$

- Az $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ irányú $\vec{a}_{\parallel}$ és a $\vec{b}$ irányra merőleges $\vec{a}_{\perp}$ összetevői:

$$\vec{a}_{\parallel} \approx (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \text{ N}, \quad \vec{a}_{\perp} \approx (2\vec{e}_x - \vec{e}_y) \text{ N}.$$

F.I.3 Mátrixalgebrai összefoglaló

- Mátrix értelmezése, jelölése:

Mátrix: Skaláris mennyiségeknek, számoknak megadott szabály szerint táblázatba rendezett halmaza.

$$\text{Mátrix jelölése: } \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

A mátrixokat kétszer aláhúzott betűvel, a mátrixok elemeit (koordinátáit) alsó indexes betűvel jelöljük. Pl. $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{a}}$ és a_{13} , a_2 stb.

Az a_{13} mátrixelem az $\underline{\underline{A}}$ mátrix első sorában és harmadik oszlopában van.

Mátrix mérete: Például a fenti (2x3)-as méretű $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak két sora és három oszlopa van.

Az a_{13} mátrix elem jelölés kiejtése (kiolvasása): á egy három.

$$\text{Oszlopmátrix: } \underline{\underline{a}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \text{sormátrix: } \underline{\underline{a}}^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3].$$

Az oszlopmátrixnak egy oszlopa, a sormátrixnak egy sora van. A sormátrixot mindig ugyanannak az oszlopmátrixnak a transzponáltjának tekintjük.

A sormátrixot a mátrix betűjelének felső indexébe írt T betű jelöli.

b) Mátrixműveletek:

A műveleteket (2×2) -es, (2×1) -es és (1×2) -es mátrixokra mutatjuk be.

- *Mátrix transzponáltja (tükrözés a főátlóra):*

A mátrix főátlóját az azonos indexű elemek alkotják.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

$(2 \times 2) \qquad \qquad \qquad (2 \times 2)$

A transzponálási művelet jele: T (a mátrix felső indexében).

A transzponálás oszlopmátrixból sormátrixot, sormátrixból pedig oszlopmátrixot hoz létre.

Az $\underline{\underline{A}}^T$ jelölés kiejtése (kiolvasása): á transzponált.

- *Mátrixok összeadása, kivonása:*

Csak azonos méretű mátrixok adhatók össze, vonhatók ki egymásból.

$$\underline{\underline{A}} \pm \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} \pm b_{11}) & (a_{12} \pm b_{12}) \\ (a_{21} \pm b_{21}) & (a_{22} \pm b_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

$(2 \times 2) \qquad (2 \times 2) \qquad \qquad (2 \times 2) \qquad \qquad (2 \times 2)$

- *Mátrix szorzás (sor-oszlop kombináció):*

Csak olyan mátrixok szorozhatók össze, amelyek teljesítik azt a feltételt, hogy az első szorzótényező oszlopainak száma megegyezik a második szorzótényező sorainak számával.

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}) & (a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}) \\ (a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21}) & (a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}) \end{bmatrix}.$$

$(2 \times 2) \quad (2 \times 2) \qquad \qquad (2 \times 2)$

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{c}},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} b_1 + a_{12} b_2) \\ (a_{21} b_1 + a_{22} b_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

$(2 \times 2) \quad (2 \times 1) \qquad \qquad (2 \times 1) \qquad \qquad (2 \times 1)$

$$\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{d}}^T,$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 b_{11} + a_2 b_{21}) & (a_1 b_{12} + a_2 b_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix}.$$

$(1 \times 2) \quad (2 \times 2) \qquad \qquad (1 \times 2) \qquad \qquad (1 \times 2)$

c) Különleges mátrixok:

- Egység mátrix: $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tulajdonsága: $\underline{\underline{E}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}}$.

Az egység mátrix a főátlójában 1-es koordinátákat, a főátlóján kívül 0 elemeket tartalmaz.
Az egység mátrixszal történő szorzás nem változtatja meg a megszorozott mátrixot.

- Szimmetrikus mátrix: $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$

A mátrix elemei megegyeznek a főátlóra vett tükörképükkel.

Például $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ szimmetrikus mátrix.

- Ferdeszimmetrikus mátrix: $\underline{\underline{A}}^T = -\underline{\underline{A}}$.

A mátrix bármelyik eleme megegyezik a főátlóra vett tükörképének mínusz egyszerűsével. Ebből az következik, hogy a főátlóban csak zérus elemek lehetnek.

Például $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ferdeszimmetrikus mátrix.

F.1.4. Vektorok skaláris, vegyes és diadikus szorzata

Egyes vektor szorzások mátrixok szorzataként is elvégezhetők.

a) Vektorok skaláris szorzata:

A skaláris szorzás értelmezése: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$.

(α a vektorok között bezárt szög, $\alpha \leq \pi$.)

A skaláris szorzás kiszámítása mátrixszorzással:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Az első szorzó tényező koordinátáit sormátrixba, a második szorzó tényező koordinátáit oszlop mátrixba rendezzük és a szorzást a mátrixszorzás szabályai szerint (sor-oszlop kombináció) végezzük el.

A szorzás eredménye egy skaláris mennyiség.

b) Vektorok vegyes szorzata:

A vegyes szorzat értelmezése és jelölése: $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c})$.

A vegyes szorzat kiszámítása:

- Először elvégezzük a vektoriális szorzást, majd az eredményvektort megszorozzuk skalárisan a vegyes szorzatban szereplő harmadik vektorral.

- Kiszámítás determinánssal:

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \det \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x (b_y c_z - c_y b_z) - a_y (b_x c_z - c_x b_z) + a_z (b_x c_y - c_x b_y).$$

c) Vektorok diadikus szorzata:

Legyen adott az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ tetszőleges vektor.

Két vektor diadikus szorzatának jelölése: $\vec{a} \circ \vec{b}$, elnevezése: diád.

Az $\vec{a} \circ \vec{b}$ jelölés kiejtése (kiolvasása): á diád bé.

Két vektor diadikus szorzatát a szorzás tulajdonságainak megadásával értelmezzük:

- a diadikus szorzás és a skaláris szorzás *asszociatív* (csoportosítható, azaz szorzások elvégzésének sorrendje felcserélhető):

$$(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \circ (\vec{b} \cdot \vec{c}),$$

- a diád a skaláris szorzás szempontjából *nem kommutatív* (nem mindegy, hogy egy diádot jobbról, vagy balról szorzunk meg skalárisan egy vektorral, mert más eredményt kapunk):

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) \neq (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Ha a szorzás a fenti összefüggéseket kielégíti, akkor a szorzás diadikus.

Két vektor diadikus szorzatának kiszámítása jobbsodrású, derékszögű koordináta-rendszerben:

$$[\vec{a} \circ \vec{b}] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}.$$

Az első szorzó tényező koordinátáit oszlopmátrixba, a második szorzó tényező koordinátáit sormátrixba rendezzük és a szorzást a mátrix szorzás szabályai szerint (sor-oszlop kombináció) végezzük el. A szorzás eredménye egy kilenc skaláris mennyiséget tartalmazó mátrix.

Egységvektorok diadikus szorzata:

$$\begin{aligned} [\vec{e}_x \circ \vec{e}_x] &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [\vec{e}_y \circ \vec{e}_y] &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ 1 \ 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [\vec{e}_z \circ \vec{e}_z] &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & [\vec{e}_x \circ \vec{e}_y] &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ 1 \ 0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [\vec{e}_x \circ \vec{e}_z] &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [\vec{e}_y \circ \vec{e}_z] &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [\vec{e}_y \circ \vec{e}_x] &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [\vec{e}_z \circ \vec{e}_x] &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$[\vec{e}_z \circ \vec{e}_y] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A skalár számmal történő szorzás mindig diadikus, vagy más szóhasználatnál általános szorzás.

F.1.5. Mátrix sajátértékei és sajátvektorai

a) A sajátérték feladat kitűzése:

Létezik-e olyan $\underline{n}$ oszlopmátrix, amellyel az $\underline{A}$ négyzetes mátrixot megszorozva, az $\underline{n}$ oszlopmátrix valahányszorosát kapjuk:

$$\underline{A}\underline{n} = \lambda \underline{n}, \text{ ahol a } \lambda \text{ skaláris mennyiség?}$$

Ha létezik ilyen $\underline{n}$ oszlopmátrix, akkor ezt az $\underline{A}$ négyzetes mátrix jobb oldali sajátvektorának, a λ skaláris mennyiséget pedig az $\underline{A}$ mátrix sajátértékének nevezzük.

b) A sajátérték feladat megoldása:

A sajátérték feladat megoldását egy (2x2)-es mátrixon mutatjuk be.

Az előző egyenletet részletesen kiírva és bal oldalra rendezve:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}, \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

és a szorzásokat elvégezve, az n_x, n_y ismeretlenre homogén lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk:

$$(a_{11} - \lambda)n_x + a_{12}n_y = 0,$$

$$a_{21}n_x + (a_{22} - \lambda)n_y = 0.$$

Az egyenletrendszer nem triviális (nullától különböző) megoldásának feltétele az, hogy a rendszer mátrixából képezett determinánsnak el kell tűnnie:

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

A determinánst kifejtve kapjuk a *karakterisztikus egyenletet*:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai a mátrix sajátértékei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}.$$

A homogén lineáris algebrai egyenletrendszernek csak $\lambda = \lambda_1$ és $\lambda = \lambda_2$ esetén van nemtriviális megoldása.

A mátrix sajátértékeit a szilárdságban csökkenő, a rezgésben növekvő sorrendben szokás sorszámozni.

Ha az egyes λ_i ($i=1,2$) sajátértékeket behelyettesítjük a homogén lineáris algebrai egyenletrendszerbe, akkor az egyenletrendszer megoldható az n_{ix}, n_{iy} ismeretlenre:

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda_i) n_{ix} + a_{12} n_{iy} &= 0 \\ a_{21} n_{ix} + (a_{11} - \lambda_i) n_{iy} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} n_{ix} &= \dots \\ n_{iy} &= \dots \end{aligned}, \quad \text{ahol } i=1,2.$$

Az λ_i ($i=1,2$) sajátértékek behelyettesítése esetén azonban az egyenletrendszer egyenletei egymástól nem lineárisan függetlenek, ezért az egyik egyenletet el kell hagyni és a másik egyenletből csak az n_{ix} / n_{iy} , vagy n_{iy} / n_{ix} ($i=1,2$) hányados határozható meg.

Az n_{ix} és n_{iy} értékét akkor kapjuk meg (az előjelet leszámítva) egyértelműen, ha az

$\underline{n}_i^T = [n_{ix} \ n_{iy}]$ sajátvektoroktól megköveteljük, hogy egységvektorok legyenek:

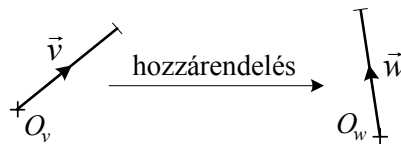
$$\sqrt{n_{ix}^2 + n_{iy}^2} = 1, \quad i=1,2.$$

F.1.6 Tenzorok előállítása

a) Tenzor értelmezése és tulajdonságai:

Tenzor: Homogén lineáris vektor-vektor függvény által megvalósított leképezés (hozzárendelés).

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = \underline{T} \cdot \vec{v}.$$



A $\underline{T}$ tenzor a tetszőleges $\vec{v}$ vektorhoz a $\vec{w}$ képvektort rendeli hozzá.

A vektor-vektor függvény olyan függvénykapcsolat, amelynek $\vec{v}$ értelmezési tartománya és $\vec{w}$ értékkészlete is vektor mennyiség.

A tenzor tulajdonsága:

- $f(\lambda \vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$, ahol λ tetszőleges skaláris mennyiség (skaláris együttható),
- $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$.

A fenti tulajdonságokból következően fennáll az alábbi összefüggés:

$$\vec{w} = f(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \underbrace{f(\vec{v}_1)}_{\vec{w}_1} + \lambda_2 \underbrace{f(\vec{v}_2)}_{\vec{w}_2} = \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2,$$

ahol λ_1 és λ_2 tetszőleges skaláris együtthatók.

Következmény: A tenzor zérus vektorhoz zérus vektort rendel hozzá: $\vec{0} = f(\vec{0})$.

A tenzor koordináta-rendszertől független fizikai (geometriai, mechanikai) mennyiség.

b) Tenzor előállítása jobbsodratú, derékszögű descartesi koordináta-rendszerben:

- *Tenzor megadása:* - a tenzor koordinátaival (mátrixával) és
- a koordináta-rendszerrel történik.

- *Tenzor koordinátáinak jelölése mátrixba rendezve:*

$$\underset{xyz}{\underline{\underline{T}}} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$$

- *Tenzor előállítás derékszögű descartesi KR-ben:*

1. Tétel: - Térbeli esetben minden tenzor egyértelműen megadható három egymásra merőleges egységvektor és ezek képvektorai (három értékpár) ismeretében.
 - Síkbeli esetben minden tenzor egyértelműen megadható két egymásra merőleges egységvektor és ezek képvektorai (két értékpár) ismeretében.
2. Tétel: - Térbeli esetben minden tenzor előállítható három diád összegeként.
 - Síkbeli esetben minden tenzor előállítható két diád összegeként.

Legyen ismert három értékpár:

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &\rightarrow \vec{a} = f(\vec{e}_x), & \vec{a} &= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z, \\ \vec{e}_y &\rightarrow \vec{b} = f(\vec{e}_y), & \vec{b} &= b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z, \\ \vec{e}_z &\rightarrow \vec{c} = f(\vec{e}_z), & \vec{c} &= c_x \vec{e}_x + c_y \vec{e}_y + c_z \vec{e}_z. \end{aligned}$$

A tenzor diadikus előállítása: $\underline{\underline{T}} = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y + \vec{c} \circ \vec{e}_z).$

A tenzor mátrixa: $\underset{xyz}{\underline{\underline{T}}} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix}.$

A tenzor mátrixát a diadikus előállításban kijelölt diadikus szorzások és az összeadások elvégzésével kapjuk.

A tenzor mátrixának oszlopai az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ képvektorok koordinátáit tartalmazzák. A mátrix első sorában a képvektorok x koordinátái, a második sorban a képvektorok y koordinátái, a harmadik sorban a képvektorok z koordinátái állnak.

F.I.7. Gyakorló feladatok vektorokra, mátrixokra, tenzorokra

F.I.7.1. feladat: Mátrix műveletek

Adott: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}.$

Feladat:

- a) Az $\underline{\underline{A}}^T$ és $\underline{\underline{B}}^T$ transzponált mátrixok meghatározása.
- b) Az $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ összegmátrix és az $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}$ különbségmátrix meghatározása.
- c) Az $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}$ szorzatmátrix meghatározása.
- d) A $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}$ szorzatmátrix meghatározása.

Kidolgozás:

a) Az $\underline{\underline{A}}^T$ és $\underline{\underline{B}}^T$ transzponált mátrixok meghatározása:

$$\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{B}}^T = \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Az $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ összegmátrix és az $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}$ különbségmátrix meghatározása:

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -8 \\ 13 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Az $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}$ szorzatmátrix meghatározása:

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-12) + (-4)(-6) & 2 \cdot 4 + (-4)3 \\ 7(-12) + 3(-6) & 7 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -102 & 37 \end{bmatrix}.$$

d) A $\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}$ szorzatmátrix meghatározása:

$$\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-12) \cdot 2 + 4 \cdot 7 & (-12) \cdot (-4) + 4 \cdot 3 \\ (-6) \cdot 2 + 3 \cdot 7 & (-6) \cdot (-4) + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 60 \\ 9 & 33 \end{bmatrix}.$$

Mátrixszorzásnál a szorzótényezők sorrendje nem cserélhető fel!

F.I.7.2. feladat: Skaláris, diadikus és mátrix szorzás gyakorlása

Adott: $\vec{a} = (4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - \vec{e}_z)$ m,

Feladat:

$\vec{b} = (-3\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z)$ m,

a) Az $\vec{a} \cdot \vec{b}$ és az $\vec{a} \circ \vec{b}$ szorzatok meghatározása.

$\vec{c} = (-2\vec{e}_y - 6\vec{e}_z)$ m.

b) Az $(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$ és a $\vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$ szorzat meghatározása.

Kidolgozás:

a) Az $\vec{a} \cdot \vec{b}$ és az $\vec{a} \circ \vec{b}$ szorzatok meghatározása:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 4(-3) + 6 \cdot 1 + (-1)(-1) = -5 \text{ m}^2,$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= (4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - \vec{e}_z) \circ (-3\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z) = \\ &= \left[(-12\vec{e}_x - 18\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) \circ \vec{e}_x + (4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - \vec{e}_z) \circ \vec{e}_y + \right. \\ &\quad \left. + (-4\vec{e}_x - 6\vec{e}_y + \vec{e}_z) \circ \vec{e}_z \right] \text{ m}^2. \end{aligned}$$

A szögletes zárójelben lévő diádok első szorzó tényezőinek koordinátái a tenzor mátrixának oszlopaiban jelennek meg:

$$\left[\vec{a} \circ \vec{b} \right] = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 4 & -4 \\ -18 & 6 & -6 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ m}^2.$$

b) Az $(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$ és a $\vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$ szorzat meghatározása:

- Az értelmezés alapján:

$$\begin{aligned}(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \vec{a} \circ (\vec{b} \cdot \vec{c}) = \\&= (4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - \vec{e}_z) \circ [(-3\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z) \cdot (-2\vec{e}_y - 5\vec{e}_z)] = \\&= (4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - \vec{e}_z) \circ [-2 + 5] = (12\vec{e}_x + 18\vec{e}_y - 3\vec{e}_z) \text{ m}^3,\end{aligned}$$

- Mátrixszorzással:

$$[(\vec{a} \circ \vec{b})][\vec{c}] = \begin{bmatrix} -12 & 4 & -4 \\ -18 & 6 & -6 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 + 20 \\ -12 + 30 \\ 2 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ m}^3.$$

A kétféleképp előállított eredmény természetesen megegyezik.

- Az értelmezés alapján:

$$\begin{aligned}\vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) &= (\vec{c} \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = \\&= [(-2\vec{e}_y - 5\vec{e}_z) \cdot (4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - \vec{e}_z)] \circ (-3\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z) = \\&= [-12 + 5] \circ (-3\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z) = (21\vec{e}_x - 7\vec{e}_y + 7\vec{e}_z).\end{aligned}$$

- Mátrixszorzással:

$$\begin{aligned}[\vec{c}][(\vec{a} \circ \vec{b})] &= [0 \ -2 \ -5] \begin{bmatrix} -12 & 4 & -4 \\ -18 & 6 & -6 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \\&= [(36 - 15) \quad (-12 + 5) \quad (12 - 5)] = [21 \quad -7 \quad 7] \text{ m}^3.\end{aligned}$$

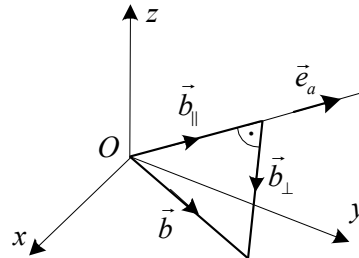
A kétféleképp előállított eredmény természetesen megegyezik.

F.I.7.3. feladat: Vektor adott irányra merőleges összetevőjének meghatározása

Adott:

$$\vec{b} = (20\vec{e}_x + 40\vec{e}_y - 30\vec{e}_z) \text{ m},$$

$$\vec{e}_a = (0,8\vec{e}_y + 0,6\vec{e}_z).$$



Feladat:

- A $\vec{b}$ vektor $\vec{e}_a$ egységvektorral párhuzamos $\vec{b}_{\parallel}$ összetevőjének meghatározása.
- A $\vec{b}$ vektor $\vec{e}_a$ egységvektorra merőleges $\vec{b}_{\perp}$ összetevőjének meghatározása kétszeres vektoriális szorzással.
- A $\vec{b}$ vektor $\vec{e}_a$ egységvektorra merőleges $\vec{b}_{\perp}$ összetevőjének meghatározása a kifejtési szabállyal.

Kidolgozás:

- A $\vec{b}_{\parallel}$ párhuzamos összetevő meghatározása:

$$\vec{b}_{\parallel} = (\vec{e}_a \cdot \vec{b}) \vec{e}_a = \begin{pmatrix} 0 & 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ -30 \end{bmatrix} \vec{e}_a = (32 - 18) \vec{e}_a = 14 \vec{e}_a,$$

$$\vec{b}_{\parallel} = 14 \vec{e}_a = 14(0,8 \vec{e}_y + 0,6 \vec{e}_z) = (11,2 \vec{e}_y + 8,4 \vec{e}_z) \text{ m.}$$

b) A $\vec{b}_{\perp}$ merőleges összetevő meghatározása kétszeres vektoriális szorzással:

$$\vec{b}_{\perp} = (\vec{e}_a \times \vec{b}) \times \vec{e}_a.$$

$$(\vec{e}_a \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0,8 & 0,6 \\ 20 & 40 & -30 \end{vmatrix} = \vec{e}_x(-24 - 24) - \vec{e}_y(-12) + \vec{e}_z(-16) = -48 \vec{e}_x + 12 \vec{e}_y - 16 \vec{e}_z,$$

$$(\vec{e}_a \times \vec{b}) \times \vec{e}_a = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -48 & 12 & -16 \\ 0 & 0,8 & 0,6 \end{vmatrix} = \vec{e}_x(7,2 + 12,8) - \vec{e}_y(-28,8) + \vec{e}_z(-38,4).$$

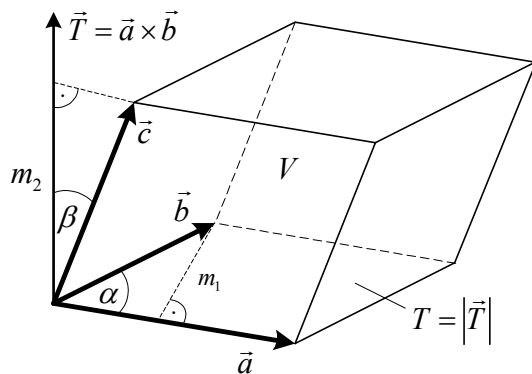
$$\vec{b}_{\perp} = (\vec{e}_a \times \vec{b}) \times \vec{e}_a = (20 \vec{e}_x + 28,8 \vec{e}_y - 38,4 \vec{e}_z) \text{ m.}$$

c) A $\vec{b}_{\perp}$ összetevő meghatározása a kifejtési szabállyal:

$$\vec{b}_{\perp} = (\vec{e}_a \times \vec{b}) \times \vec{e}_a = \vec{b}(\vec{e}_a \cdot \vec{e}_a) - \vec{e}_a(\vec{b} \cdot \vec{e}_a) = \vec{b} - \vec{b}_{\parallel}.$$

$$\vec{b}_{\perp} = \vec{b} - \vec{b}_{\parallel} = (20 \vec{e}_x + 40 \vec{e}_y - 30 \vec{e}_z) - (11,2 \vec{e}_y + 8,4 \vec{e}_z) = (20 \vec{e}_x + 28,8 \vec{e}_y - 38,4 \vec{e}_z) \text{ m.}$$

F.I..7.4. feladat: Vektorok vegyes szorzata, paralelepipedon térfogata



Adott: Az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ három nem komplanáris (nem egy síkba eső) vektor:

$$\vec{a} = (5\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \vec{e}_z) \text{ m,}$$

$$\vec{b} = (2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) \text{ m,}$$

$$\vec{c} = (3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \text{ m.}$$

Feladat: Az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok által kifeszített alakzat (paralelepipedon) térfogatának meghatározása.

Kidolgozás:

Az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok által kifeszített alakzat (paralelepipedon) V térfogatát a három vektor vegyes szorzata adja meg:

$$V = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (3 \cdot 3 - 1 \cdot 4) - 2(5 \cdot 3 - 1 \cdot 2) + 6(5 \cdot 4 - 3 \cdot 2) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 13 + 6 \cdot 14 = 15 - 26 + 84 = 73.$$

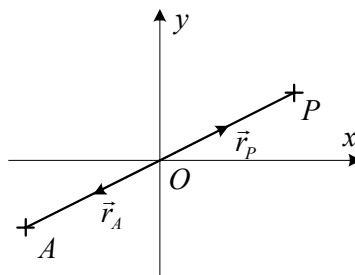
$$\text{Bizonyítás: } V = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{c}| |\vec{a} \times \vec{b}| \cos \beta = |\vec{a} \times \vec{b}| (|\vec{c}| \cos \beta) = T \cdot m_2,$$

$$T = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = |\vec{a}| m_1, \quad |\vec{T}| = T,$$

ahol T az $\vec{a}, \vec{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe.

F.I..7.5. feladat: Tenzor előállítás

Adott: $\vec{r}_p = (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y)$ m.



Feladat:

- Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítás, amely az xy sík helyvektoraiból a helyvektoroknak a koordináta-rendszer O kezdőpontjára tükrözött vektorait állítja elő.
- Meghatározni azt az $\vec{r}_A$ vektort, amely az $\vec{r}_p$ vektor origóra vett tükörképe.

Kidolgozás:

- A tenzor előállítás:

Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = -\vec{e}_x, \quad \vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = -\vec{e}_y.$$

A két értékpárból a tenzor: $T = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y)$.

$$\text{A tenzor mátrixa: } [\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

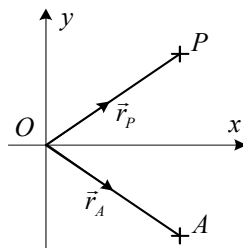
- Az origóra tükrözött $\vec{r}_A$ képvektor meghatározása:

$$\vec{r}_A = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{r}_A = (-4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y) \text{ m.}$$

F.I.7.6. feladat: Tenzor előállítás

Adott: $\vec{r}_p = (4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y)$ m.



Feladat:

- Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítás, amely az xy sík helyvektoraiból a helyvektoroknak a koordináta-rendszer x tengelyére tükrözött vektorait állítja elő.
- Meghatározni azt az $\vec{r}_A$ vektort, amely az $\vec{r}_p$ vektor x tengelyre vett tükörképe.

Kidolgozás:

a) A tenzor előállítás:

Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = -\vec{e}_y.$$

A két értékpárból a tenzor: $T = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y)$

$$\text{A tenzor mátrixa: } \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Az x tengelyre tükrözött $\vec{r}_A$ képvektor meghatározása:

$$\vec{r}_A = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{r}_A = (4\vec{e}_x - 3\vec{e}_y) \text{ m}.$$

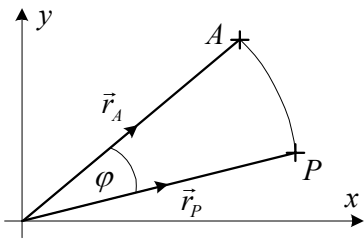
F.I.7.7. feladat: Tenzor előállítása

Adott: $\varphi = 30^\circ$, $\vec{r}_P = (4\vec{e}_x + \vec{e}_y) \text{ m}$.

Feladat:

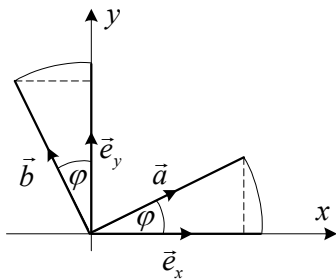
a) Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítása, amely az xy sík helyvektoraiból a helyvektorok z tengely körül φ szöggel elforgatott vektorait állítja elő.

b) Meghatározni azt az $\vec{r}_A$ vektort, amelyet az $\vec{r}_P$ vektor φ szöggel történő elforgatásával kapunk.



Kidolgozás:

a) A tenzor előállítás:



Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y),$$

$$\vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = (-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y).$$

A két értékpárból a tenzor:

$$T = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y)$$

A diádok kiszámítása:

$$[\vec{a} \circ \vec{e}_x] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & 0 \\ a_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\vec{b} \circ \vec{e}_y] = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_x \\ 0 & b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi \\ 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

$$\text{A tenzor mátrixa: } \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,5 \\ 0,5 & 0,866 \end{bmatrix}.$$

b) Az elforgatott $\vec{r}_A$ vektor meghatározása:

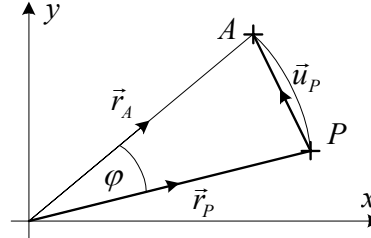
$$\vec{r}_A = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,5 \\ 0,5 & 0,866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,964 \\ 2,866 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_A = (2,964\vec{e}_x + 2,866\vec{e}_y) \text{ m.}$$

F.I.7.8. feladat: Tenzor előállítása

Adott:

$$\varphi = 45^\circ, \vec{r}_P = (5\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \text{ m.}$$

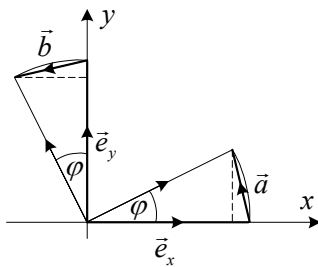


Feladat:

- a) Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítása, amely az xy sík helyvektoraihoz a helyvektorok z tengely körül φ szöggel történő elforgatásakor a helyvektorok végpontjainak elmozdulás vektorait rendeli hozzá.
- b) Meghatározni $\vec{r}_P$ vektor végpontjának $\vec{u}_P$ elmozdulás vektorát a φ szöggel történő elforgatásnál.

Kidolgozás:

- a) A $\underline{\underline{T}}$ tenzor előállítása:



Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = -(1 - \cos \varphi)\vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = -\sin \varphi \vec{e}_x - (1 - \cos \varphi)\vec{e}_y.$$

A két értékpárból a tenzor:

$$\underline{\underline{T}} = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y).$$

A tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} (\cos \varphi - 1) & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & (\cos \varphi - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,293 & -0,707 \\ 0,707 & -0,293 \end{bmatrix}.$$

- b) Az $\vec{u}_P$ elmozdulásvektor meghatározása:

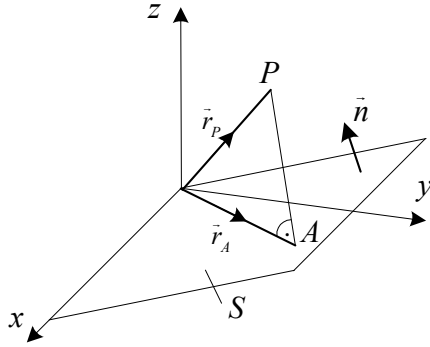
$$\vec{u}_P = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} -0,293 & -0,707 \\ 0,707 & -0,293 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,879 \\ 2,949 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_P = (-2,879\vec{e}_x + 2,949\vec{e}_y) \text{ m.}$$

F.I.7.9. feladat: Tenzor előállítása

Adott: $\vec{n} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_z), \vec{r}_P = (5\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 10\vec{e}_z) \text{ m.}$

Feladat:



- a) Annak a $\underline{T}$ tenzor mátrixának az előállítását, amely a tér minden helyvektorához a helyvektoroknak az $\vec{n}$ normálisú S síkba eső vetületvektorát rendeli hozzá.
- b) Meghatározni $\vec{r}_P$ vektornak az adott $\vec{n}$ normálisú S síkba eső $\vec{r}_A$ vetületvektorát.

A vetületvektort úgy kapjuk, hogy az $\vec{r}_P$ vektor végpontját merőlegesen vetítjük az S síkra.

Kidolgozás:

- a) A $\underline{T}$ tenzor előállítása:

A tetszőleges $\vec{v}$ vektor S síkba eső $\vec{w}$ vetületvektora:

$$\vec{w} = \vec{n} \times (\vec{v} \times \vec{n}) = \vec{v} \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{n})}_{=1} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{v}) = \vec{v} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{v}).$$

Térbeli esetben a tenzort három értékpárja határozza meg:

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = \vec{e}_x - \vec{n} \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{e}_x)}_{=0} = \vec{e}_x,$$

$$\vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = \vec{e}_y - \vec{n} \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{e}_y)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \vec{e}_y - \frac{\vec{n}}{\sqrt{2}} = \vec{e}_y - \frac{1}{2}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\vec{e}_z = \left(\frac{1}{2}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\vec{e}_z\right),$$

$$\vec{e}_z \rightarrow \vec{c} = \vec{e}_z - \vec{n} \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{e}_z)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \vec{e}_z + \frac{\vec{n}}{\sqrt{2}} = \vec{e}_z + \frac{1}{2}\vec{e}_y - \frac{1}{2}\vec{e}_z = \left(\frac{1}{2}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\vec{e}_z\right).$$

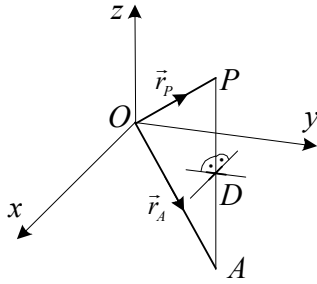
A három értékpárból a tenzor: $T = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y + \vec{c} \circ \vec{e}_z).$

A tenzor mátrixa: $[\underline{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$

- b) Az $\vec{r}_P$ vektornak az adott $\vec{n}$ normálisú síkba eső $\vec{r}_A$ vetületvektorának meghatározása:

$$\vec{r}_A = \underline{T} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ m}, \quad \vec{r}_A = (5\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \text{ m}.$$

F.I.7.10. feladat: Tenzor előállítás



Adott: $\vec{r}_p = (3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 6\vec{e}_z)$ m.

Feladat:

- Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítás, amely a tér minden helyvektorához a helyvektoroknak az xy síkra vett tükörkép-vektorát rendeli hozzá.
- Meghatározni $\vec{r}_p$ vektornak az xy síkra vett $\vec{r}_A$ tükörkép-vektorát.

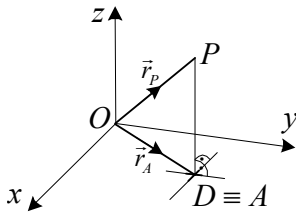
A tükörkép-vektort a következőképpen kapjuk: Az $\vec{r}_p$ vektor végpontját merőlegesen vetítjük az xy síkra. A D pont a vetítő egyenes dőféspontja az xy síkon.

Megoldás:

a) A hozzárendelést megvalósító tenzor mátrixa:
$$[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Az $\vec{r}_A$ tükörkép-vektor: $\vec{r}_A = (3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 6\vec{e}_z)$ m.

F.I.7.11. feladat: Tenzor előállítás



Adott: $\vec{r}_p = (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 8\vec{e}_z)$ m.

Feladat:

- Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítás, amely a tér minden helyvektorához a helyvektoroknak az xy síkba eső vetületvektorát rendeli hozzá.

- Meghatározni $\vec{r}_p$ vektornak az xy síkba eső $\vec{r}_A$ vetületvektorát.

Megoldás:

A vetületvektort úgy kapjuk, hogy az $\vec{r}_p$ vektor végpontját merőlegesen vetítjük az xy síkra. A D pont a vetítő egyenes dőféspontja az xy síkon. A vetületvektor a D pontba mutató vektor.

- A hozzárendelést megvalósító tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Az $\vec{r}_A$ vetületvektor: $\vec{r}_A = (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y)$ m.

F.I.7.12. feladat: Tenzor (mátrix) sajátértékeinek és sajátvektorainak előállítása

Adott: az $\underline{\underline{A}}$ tenzor az xyz Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerbeli mátrixával:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Feladat: az $\underline{\underline{A}}$ tenzor λ_1, λ_2 sajátértékei és a hozzájuk tartozó $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ sajátvektorok meghatározása és szemléltetése

Kidolgozás:

A feladatban szereplő mátrix szimmetrikus, ezért két valós sajátértéket és két, egymásra merőleges sajátvektort várunk.

A karakterisztikus egyenlet felírása:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{n} = \lambda \vec{n} = \lambda \underline{\underline{E}} \cdot \vec{n} \quad \Rightarrow \quad (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{n} = \vec{0}.$$

Ez egy homogén, lineáris egyenletrendszer az $\vec{n}$ vektor n_x, n_y koordinátáira, melynek csak akkor van a triviális (vagyis a zérus) megoldása, ha az egyenletrendszer együtthatóiból képzett mátrix determinánsa nullával egyenlő:

$$\det[\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}] = 0.$$

A fenti mátrix elemeit behelyettesítve és a determinánst kifejtve:

$$\det \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{3}{4} = 0.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve, kapjuk a karakterisztikus egyenletet: $4\lambda^2 - 4 = 0$.

A karakterisztikus egyenlet két megoldása, vagyis a keresett sajátértékek: $\lambda_1 = 1,$
 $\lambda_2 = -1.$

A sajátvektorok meghatározása:

- A $\lambda_1 = 1$ -hez tartozó $\vec{n}_1$ sajátvektor meghatározása:

A $\lambda_1 = 1$ -et visszahelyettesítjük a lineáris algebrai egyenlet-rendszerbe:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - 1\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A mátrixszorzást elvégezve kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk: $-n_x + \sqrt{3}n_y = 0$
 $\sqrt{3}n_x - 3n_y = 0$.

A két egyenlet azonban nem független egymástól (az első $-\sqrt{3}$ -mal szorozva éppen a másodikat kapjuk), így ez az egyenletrendszer csak a sajátvektor koordinátáinak arányát, vagyis a sajátvektor irányát határozza meg.

Ezért még felírunk egy független egyenletet: az egységnyi abszolút értékű sajátvektort határozzuk meg:

$$1 = |\vec{n}| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = \sqrt{3n_y^2 + n_y^2} = 2|n_y|.$$

Látható, hogy ezzel a pótlólagos feltétellel a sajátvektor már csak egy előjel erejéig határozatlan.

Ha az $n_y = +\frac{1}{2}$ értéket választjuk, akkor $\vec{n}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y$.

- A $\lambda_2 = -1$ -hez tartozó $\vec{n}_2$ sajátvektor meghatározása:

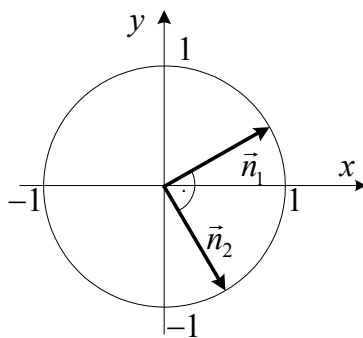
$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}+1\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \left(-\frac{1}{2}+1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A mátrixszorzást elvégezve két ismeretlenes egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{cases} 3n_x + \sqrt{3}n_y = 0 \\ \sqrt{3}n_x + n_y = 0 \end{cases}$$

Az egyenletek ebben az esetben sem függetlenek egymástól (itt a szorzó $\sqrt{3}$).

A már alkalmazott normálást ismét elvégezve kapjuk: $\vec{n}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y$.



A megoldás szemléltetése:

Az ábrán látható két sajátvektor merőleges egymásra, amiről a szükséges skaláris szorzás elvégzésével is

$$\text{meggyőződhetünk: } \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Általában is igaz, hogy egy szimmetrikus tenzor különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok mindig merőlegesek egymásra.

Ennek bizonyításához a sajátvektorokat definiáló egyenletet szorozzuk be balról egy másik sajátvektorral: $\vec{n}_2 \underline{\underline{A}} \vec{n}_1 = \vec{n}_2 \lambda_1 \vec{n}_1$. Kihasználva a tenzor szimmetriáját, azt kapjuk, hogy:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 = \lambda_2 \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 = \lambda_1 \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1.$$

Átrendezve: $(\lambda_2 - \lambda_1) \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 = 0$, amiből következik a két sajátvektor merőlegessége, hiszen mindkettő nagysága különbözik nullától, a két sajátérték pedig a feltétel szerint különböző.

F.I.8. Differenciálegyenletek

Differenciálegyenlet: olyan matematikai egyenlet, amely egy vagy több változós ismeretlen függvény és deriváltjai közötti kapcsolatot írja le.

Fontosabb típusok: közönséges differenciálegyenletek, parciális differenciálegyenletek, (sztochasztikus differenciálegyenletek, késleltetett differenciálegyenletek).

Közönséges differenciálegyenlet:

olyan matematikai egyenlet, amely egy független változójú függvény és deriváltjai közötti összefüggést adja meg.

$$\text{Pl. } m \frac{d^2 x}{dt^2} = F, \text{ ahol } x = x(t) \text{ (Newton II. törvénye).}$$

Parciális differenciálegyenlet:

olyan matematikai egyenlet, amely az ismeretlen többváltozós függvény és a parciális deriváltjai közötti kapcsolatot írja le.

$$\text{Pl. } \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0; \text{ és a megoldás } u(x,y) = f(y).$$

Az Euler típusú közönséges differenciálegyenlet

A változó együtthatójú n -edrendű lineáris differenciálegyenletek közül viszonylag egyszerűen megoldható az *Euler* típusú, amelynél az együtthatók a következő hatványfüggvények:

$$A_i(x) = a_i x^i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n; \text{ és } a_i = \text{állandó}).$$

Így az *Euler* típusú differenciálegyenlet általános alakja:

$$e_n(y) = a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = R(x).$$

a) A homogén differenciálegyenletet megoldása:

Az alapszisztemhez az $y = x^r$ feltételezéssel jutunk.

Ugyanis $y^{(p)} = (x^r)^{(p)} = r(r-1)\dots[r-(p-1)]x^{(r-p)}$ révén azt kapjuk, hogy

$$e_n(x^r) = g_n(r)x^r = 0,$$

ahol $g_n(r) = a_n r(r-1)\dots[r-(n-1)] + \dots + a_1 r + a_0$ az *Euler*-féle differenciálegyenlet ún. karakterisztikus polinomja.

Az $x=0$ eset kizárásával a $g_n(r)=0$ egyenlet (az ún. karakterisztikus egyenlet) alapján kapunk alapszisztemet az alább részletezendő módon.

Ha a karakterisztikus egyenletnek *egyszeres* gyökei vannak – jelölje ezeket $r_1, r_2, \dots, r_n$, akkor az $y = x^{r_1}, y = x^{r_2}, \dots, y = x^{r_n}$ függvények alkotják a differenciálegyenlet alapszisztemét.

Ha azonban *többszörös* gyökök is vannak, akkor alapszisztemet a következő előírás szerint kapunk:

Legyen pl. az $r=r_k$ s_k -szoros gyök, akkor az $r=r_k$ gyököknek az alapszisztemben a következő függvények fognak megfelelni: $y = x^{r_k}, y = x^{r_k} \ln x, \dots, y = x^{r_k} (\ln x)^{s_k-1}$.

Természetesen, mind az egyszeres, mind a többszörös gyöknél előfordulhat, hogy ezek között komplex számok is vannak. Ekkor is lehet azonban mindig valós alapszisztemet találni. A fenti eljárásnál a *Wronski*-féle determináns segítségével lehet megmutatni, hogy a megadott függvények valóban alapszisztemet alkotnak.

b) Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

A korábban már részletezett módon nyerhető.

c) Példák homogén Euler típusú differenciálegyenlet megoldására:

1. példa:

Adott: $x^2 y'' - 3xy' - 5y = 0$.

Megoldás: Itt az $y = x^r$ feltételezéssel azt kapjuk, hogy a karakterisztikus polinom:

$$g_2(r) = r^2 - 4r - 5 = 0.$$

A $g_2(r) = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei: $r_1 = 5$, $r_2 = -1$.

Így alapszintet az $y = x^5$, $y = x^{-1}$ függvények alkotnak, és az adott homogén differenciálegyenlet általános megoldása: $y = C_1 x^5 + C_2 x^{-1}$.

A C_1 , C_2 együtthatók peremfeltételekből határozhatók meg.

2. példa:

Adott: $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$.

Megoldás: Itt az $y = x^r$ feltételezéssel azt kapjuk, hogy a karakterisztikus polinom:

$$g_2(r) = r^2 - 4r + 4 = 0.$$

A $g_2(r) = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei: $r_1 = 2$, $r_2 = 2$.

Így alapszintet az $y = x^2$, $y = x^2 \ln x$ függvények alkotnak, és az adott homogén differenciálegyenlet általános megoldása: $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$.

A C_1 , C_2 együtthatók peremfeltételekből határozhatók meg.