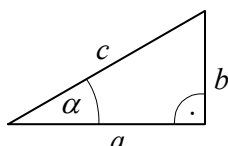


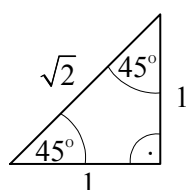
1. MECHANIKA-STATIKA GYAKORLAT
(kidolgozta: Triesz Péter, egy. ts.; Tarnai Gábor, mérnök tanár)
Trigonometria, vektoralgebra

Trigonometriai összefoglaló



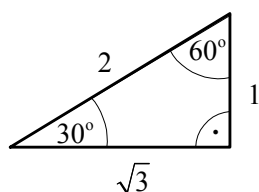
$$\sin \alpha = \frac{b}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{c},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$



$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

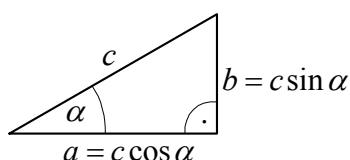


$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$$

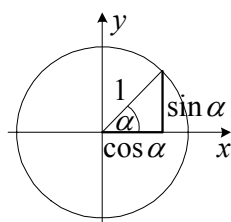
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



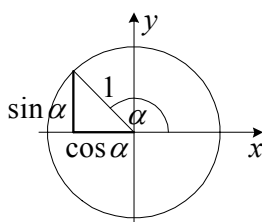
$$a^2 + b^2 = c^2,$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$



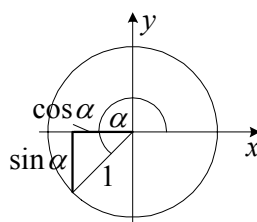
$$\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha > 0$$



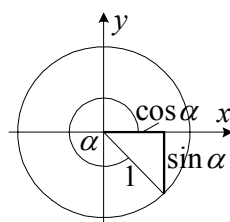
$$\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha < 0$$



$$\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha > 0$$



$$\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha < 0$$

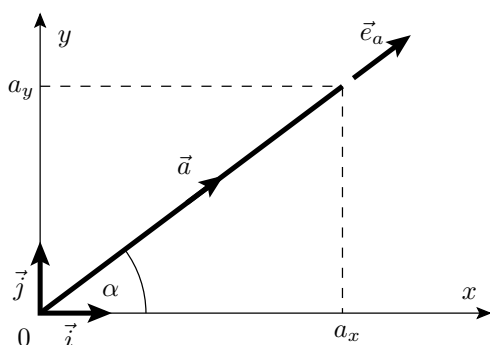
Vektoralgebrai összefoglaló

Skaláris mennyiség: nagyság (előjel) és mértékegység jellemzi.

Vektor mennyiség: nagyság (előjel), irány és mértékegység jellemzi.

1.1. Példa

Vektorok megadása:



Egységvektorok: $\vec{i}$, $\vec{j}$; $\Rightarrow |\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$;

Egy tetszőleges vektor: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$;

$\vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha \vec{i} + |\vec{a}| \sin \alpha \vec{j} = |\vec{a}| (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j})$;

Mivel: $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}_a$; $\Rightarrow \vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$,

$\vec{e}_a$: az $\vec{a}$ vektor irány-egységvektora.

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, (a vektor nagysága);

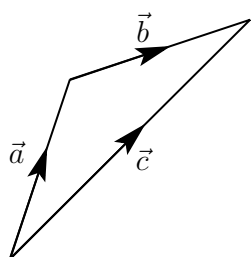
$|\vec{e}_a| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1$,

Vektorok összeadása:

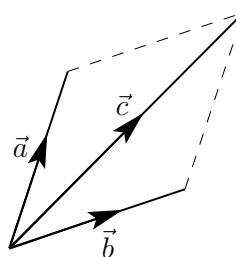
Ha: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$.

Akkor: $\vec{a} + \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) = \underbrace{(a_x + b_x)}_{\vec{c}_x} \vec{i} + \underbrace{(a_y + b_y)}_{\vec{c}_y} \vec{j} = \vec{c}$.

A két vektor összegének megszerkesztése:



Háromszög szabály



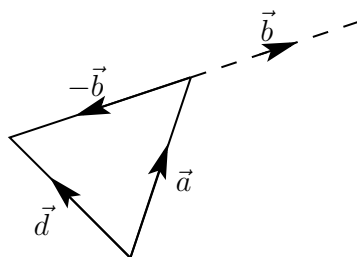
Paralelogramma szabály

Vektorok kivonása:

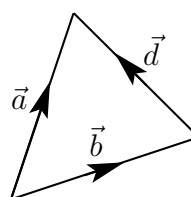
Ha: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$,

akkor: $\vec{a} - \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) - (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) = \underbrace{(a_x - b_x)}_{\vec{d}_x} \vec{i} + \underbrace{(a_y - b_y)}_{\vec{d}_y} \vec{j} = \vec{d}$

Két vektor különbségének megszerkesztése:



$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{d}$$



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$$

Vektorok szorzása skalárral (az eredmény: vektor):

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k};$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k};$$

$$|\lambda \vec{a}| = \sqrt{\lambda^2 a_x^2 + \lambda^2 a_y^2 + \lambda^2 a_z^2} = \lambda \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \lambda |\vec{a}|$$

Vektorok skaláris szorzása (az eredmény: skaláris mennyiség):

Értelmezése: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$, ahol $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$,

valamint α a két vektor által bezárt szög.

Kiszámítása:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \text{ vagy } \vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \cdot \cos \alpha$$

Egységvektorok skaláris szorzata:

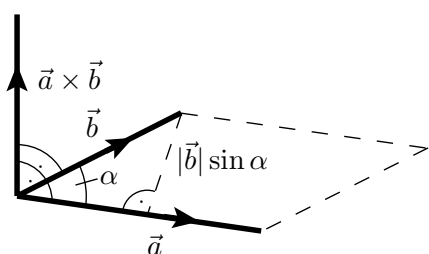
$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \text{ mivel } \cos 0^\circ = 1,$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \text{ mivel } \cos 90^\circ = 0$$

$$\text{\textbf{Általánosítás:}} \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \text{ és } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Vektorok vektoriális szorzata (az eredmény: vektor):

Értelmezése: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \underbrace{\sin \alpha}_{m_a}$, ami az eredményvektor abszolút értéke.



Ha: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, kiszámítása

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - b_y a_z) - \vec{j}(a_x b_z - b_x a_z) + \vec{k}(a_x b_y - b_x a_y)$$

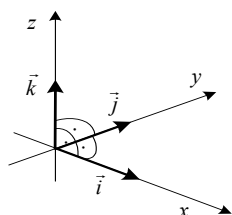
Az eredményvektor merőleges mindkét vektorra (az általuk meghatározott síkra).

Egységvektorok vektoriális szorzata:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}, \text{ (mivel } \sin 0^\circ = 0 \text{)}.$$

$$\text{\textbf{Általánosítás:}} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Jobbkéz-szabály!

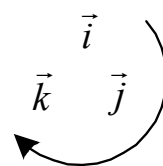


$$\text{pl.: } |\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| |\vec{j}| \sin 90^\circ = 1 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{i}, \vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i},$$

Jobbkéz-szabály!



Házi feladat: $\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \dots$ kiszámítása.

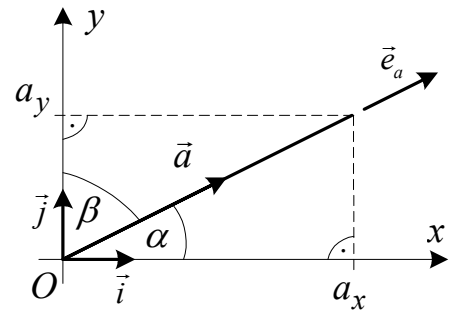
1. 2. Példa

Adott:

$$\vec{a} = 10\vec{i} + 5\vec{j}$$

Feladat:

- A Koordináta tengelyekre eső vetületek meghatározása (síkbeli eset).
- Az $\vec{e}_a$ irány-egységvektor meghatározása.



Megoldás:

a. vetületek meghatározása

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = |\vec{a}| \underbrace{|\vec{i}|}_{=1} \cos \alpha = |\vec{a}| \cos \alpha = a_x$$

$$\vec{a} \cdot \vec{j} = |\vec{a}| \underbrace{|\vec{j}|}_{=1} \cos \beta = |\vec{a}| \cos \beta = a_y$$

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = (10\vec{i} + 5\vec{j}) \cdot \vec{i} = 10 \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{i}}_{=1} + 5 \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{i}}_{=0} = 10 \quad \underline{\underline{a_x = 10}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{j} = (10\vec{i} + 5\vec{j}) \cdot \vec{j} = 10 \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}_{=0} + 5 \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{j}}_{=1} = 5 \quad \underline{\underline{a_y = 5}}$$

b. irány-egységvektor kiszámítása

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}_a$$

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{10\vec{i} + 5\vec{j}}{\sqrt{10^2 + 5^2}} = \frac{10\vec{i} + 5\vec{j}}{11,18} = \frac{10}{11,18} \vec{i} + \frac{5}{11,18} \vec{j} = 0,894427\vec{i} + 0,447214\vec{j}$$

$$\underline{\underline{\vec{e}_a = 0,894427\vec{i} + 0,447214\vec{j}}}$$

Ellenőrzés:

$$|\vec{e}| = \sqrt{0,894427^2 + 0,447214^2} = 0,8 + 0,2 = 1$$

1. 3. Példa

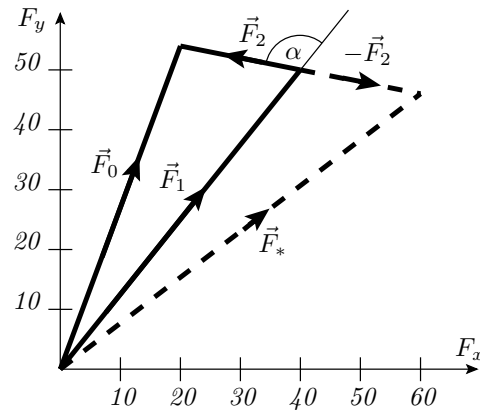
Adott:

$$\vec{F}_1 = (40\vec{i} + 50\vec{j}) \text{ N},$$

$$\vec{F}_2 = (-20\vec{i} + 4\vec{j}) \text{ N}.$$

Feladat:

- A két erő $\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ összegvektorának meghatározása.
- A két erő $\vec{F}_* = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ különbségvektorának meghatározása.
- A két erővektor által bezárt α szög meghatározása.



Megoldás:

- A két erő $\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ összegvektorának meghatározása:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (40\vec{i} + 50\vec{j}) + (-20\vec{i} + 4\vec{j}) = (20\vec{i} + 54\vec{j}) \text{ N}.$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_0 = (20\vec{i} + 54\vec{j}) \text{ N}}}$$

- A két erő $\vec{F}_* = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ különbségvektorának meghatározása:

$$\vec{F}_* = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = (40\vec{i} + 50\vec{j}) - (-20\vec{i} + 4\vec{j}) = (60\vec{i} + 46\vec{j}) \text{ N}.$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_* = (60\vec{i} + 46\vec{j}) \text{ N}}}$$

- A két erővektor által bezárt α_{12} szög meghatározása:

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = |\vec{F}_1| |\vec{F}_2| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2}{|\vec{F}_1| |\vec{F}_2|}.$$

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = 40(-20) + 50 \cdot 4 = -800 + 200 = -600 \text{ N}^2,$$

$$|\vec{F}_1| = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} = \sqrt{40^2 + 50^2} = 64,03 \text{ N}; \quad |\vec{F}_2| = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} = \sqrt{20^2 + 4^2} = 20,40 \text{ N},$$

$$\cos \alpha = \frac{-600}{64,03 \cdot 20,40} = -0,45934$$

$$\underline{\underline{\alpha = \arccos(-0,45934) = 117,34^\circ}}$$

1. 4. Példa

Adott:

$$\vec{F}_1 = (40\vec{i} + 18\vec{j} - 26\vec{k}) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_2 = (-2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_3 = (F_{3y}\vec{j}).$$

Feladat:

Mekkora legyen F_{3y} , ha azt akarjuk, hogy $(\vec{F}_1 + \vec{F}_3)$ merőleges legyen $\vec{F}_2$ -re?

Megoldás:

$$\text{Ha } \vec{a} \perp \vec{b}, \text{ akkor } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \underbrace{\alpha}_{90^\circ} = 0.$$

Ezért teljesülnie kell az $(\vec{F}_1 + \vec{F}_3) \cdot \vec{F}_2 = 0$ összefüggésnek.

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_3) \cdot \vec{F}_2 = [40\vec{i} + (18 + F_{3y})\vec{j} - 26\vec{k}] \cdot (-2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) = 0,$$

$$-40 \cdot 2 + (18 + F_{3y})2 - 26 \cdot 3 = 0, -80 + 36 + 2F_{3y} - 78 = 0,$$

$$2F_{3y} = 122$$

$$\underline{\underline{F_{3y} = 61 \text{ kN}}}$$

1. 5. Példa

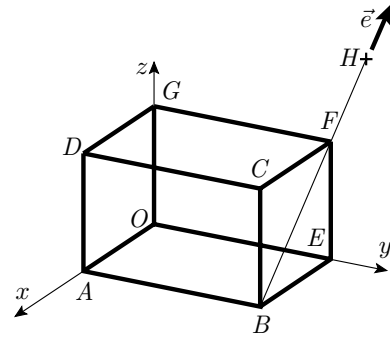
Adott: egy hasáb, valamint a H pont helye:

$$\overline{AB} = 8 \text{ m}, \quad \overline{BE} = 3 \text{ m},$$

$$\overline{AD} = 6 \text{ m}, \quad \overline{FH} = 0,5 \overline{BF}.$$

Feladat: a) A H pont $\vec{r}_H$ helyvektorának meghatározása.

b) A H -ból a B pontba mutató $\vec{r}_{HB}$ helyvektor meghatározása.



Megoldás:

a. A H pont $\vec{r}_H$ helyvektorának meghatározása:

$$\vec{r}_H = \vec{r}_{OF} + \vec{r}_{FH}.$$

$$\vec{r}_{OF} = \vec{r}_F = (8\vec{j} + 6\vec{k}) \text{ m},$$

$$|\vec{r}_{FH}| = 0,5 |\vec{r}_{BF}|, \text{ és } \vec{r}_{FH} = |\vec{r}_{FH}| \vec{e};$$

$$\vec{r}_{BF} = (-3\vec{i} + 6\vec{k}) \text{ m}, \Rightarrow |\vec{r}_{BF}| = \sqrt{x_{BF}^2 + z_{BF}^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} \text{ m},$$

$$|\vec{r}_{FH}| = 0,5 |\vec{r}_{BF}| = 0,5 \sqrt{45} \text{ m},$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}_{BF}}{|\vec{r}_{BF}|} = \frac{1}{\sqrt{45}} (-3\vec{i} + 6\vec{k}) \text{ m};$$

$$\vec{r}_{FH} = |\vec{r}_{FH}| \vec{e} = \frac{\sqrt{45}}{2} \frac{1}{\sqrt{45}} (-3\vec{i} + 6\vec{k}) = (-1,5\vec{i} + 3\vec{k}) \text{ m},$$

$$\vec{r}_H = \vec{r}_{OF} + \vec{r}_{FH} = (8\vec{j} + 6\vec{k}) + (-1,5\vec{i} + 3\vec{k}),$$

$$\underline{\underline{\vec{r}_H = (-1,5\vec{i} + 8\vec{j} + 9\vec{k}) \text{ m} .}}$$

b. A H -ból a B pontba mutató $\vec{r}_{HB}$ helyvektor meghatározása.

$$\vec{r}_{HB} = -\frac{3}{2} |\vec{r}_{BF}| \vec{e} = -\frac{3}{2} \sqrt{45} \frac{1}{\sqrt{45}} (-3\vec{i} + 6\vec{k}) \text{ m},$$

$$\underline{\underline{\vec{r}_{HB} = (4,5\vec{i} - 9\vec{k}) \text{ m}}}$$

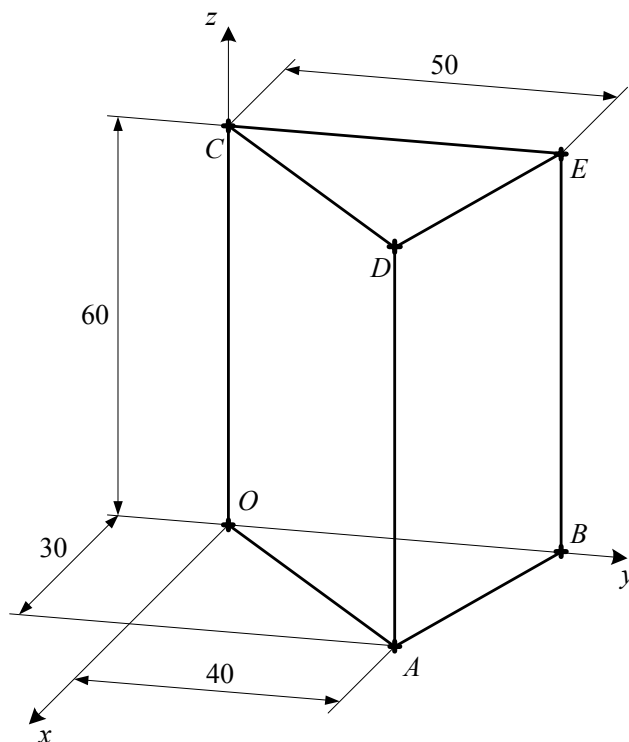
$$\text{Másképp: } \vec{r}_B = \vec{r}_{OB} = (3\vec{i} + 8\vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{HB} = \vec{r}_B - \vec{r}_H = (3\vec{i} + 8\vec{j}) - (-1,5\vec{i} + 8\vec{j} + 9\vec{k}) = (4,5\vec{i} - 9\vec{k}) \text{ m}$$

1.6. Példa

Adott egy háromszög-alapú egyenes hasáb, melynek egyik csúcsa az origó, többi pedig helykoordinátaival van megadva.

$$\begin{aligned} A(30, 40, 0) \text{ mm}, \\ B(0, 50, 0) \text{ mm}, \\ C(0, 0, 60) \text{ mm}, \\ D(30, 40, 60) \text{ mm}, \\ E(0, 50, 60) \text{ mm}. \end{aligned}$$



Feladat:

- Határozza meg az $\vec{r}_{OE}$, $\vec{r}_{OD}$, $\vec{r}_{AE}$, $\vec{r}_{BE}$ helyvektorokat!
- Számítsa ki a CDE háromszög és az $ABED$ téglalap területét!

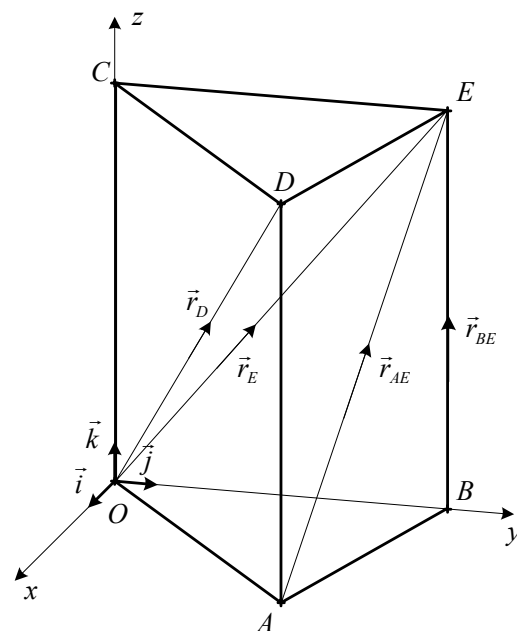
Megoldás:

- Elsőként az origóból az egyes csúcsokba mutató helyvektorok meghatározása szükséges:

$$\begin{aligned} \vec{r}_A = \vec{r}_{OA} &= (30\vec{i} + 40\vec{j}) \text{ mm}, \\ \vec{r}_B = \vec{r}_{OB} &= (50\vec{j}) \text{ mm}, \\ \vec{r}_C = \vec{r}_{OC} &= (60\vec{k}) \text{ mm}, \\ \vec{r}_D = \vec{r}_{OD} &= (30\vec{i} + 40\vec{j} + 60\vec{k}) \text{ mm}, \\ \vec{r}_E = \vec{r}_{OE} &= (50\vec{j} + 60\vec{k}) \text{ mm}. \end{aligned}$$

Látható, hogy a kérdéses helyvektorok közül kettő már kiszámításra került. A maradék kettőt a következőképpen lehet meghatározni:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{AE} &= \vec{r}_E - \vec{r}_A = (-30\vec{i} + 10\vec{j} + 60\vec{k}) \text{ mm}, \\ \vec{r}_{BE} &= \vec{r}_E - \vec{r}_B = (60\vec{k}) \text{ mm}. \end{aligned}$$

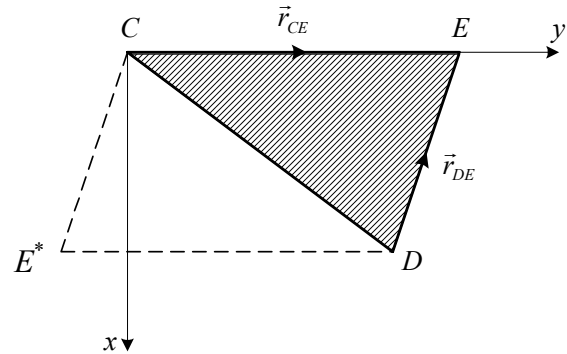


- b. A CDE háromszög területe a CD oldalára tükrözéssel kapott paralelogramma területének fele. A paralelogramma területe definíció szerint:

$$T_{CEDE^*} = |\vec{r}_{CE} \times \vec{r}_{DE}|,$$

így a háromszög területe:

$$T_{CDE} = \frac{1}{2} |\vec{r}_{CE} \times \vec{r}_{DE}|.$$



Ehhez szükséges a fenti két helyvektor meghatározása:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{CE} &= \vec{r}_E - \vec{r}_C = (50\vec{j})\text{mm}, \\ \vec{r}_{DE} &= \vec{r}_E - \vec{r}_D = (-30\vec{i} + 10\vec{j})\text{mm},\end{aligned}$$

$$\vec{r}_{CE} \times \vec{r}_{DE} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 50 & 0 \\ -30 & 10 & 0 \end{vmatrix} = (1500\vec{k})\text{mm}^2,$$

$$T_{CDE} = 0,5 \cdot \sqrt{1500^2} = 750 \text{ mm}^2.$$

Az $ABED$ téglalap, mint speciális helyzetű paralelogramma területe:

$$T_{ABED} = |\vec{r}_{DE} \times \vec{r}_{BE}|,$$

$$\vec{r}_{DE} \times \vec{r}_{BE} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{vmatrix} = (600\vec{i} + 1800\vec{j})\text{mm}^2,$$

$$T_{ABED} = |\vec{r}_{DE} \times \vec{r}_{BE}| = \sqrt{600^2 + 1800^2} = 1897,37 \text{ mm}^2.$$

Megjegyzés:

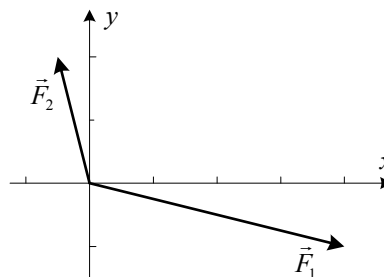
A kapott eredményeket érdemes összevetni a középiskolában megtanult területszámítási módszerekkel.

1.7. Példa

Adott két erő vektora:

$$\vec{F}_1 = (40\vec{i} - 10\vec{j})\text{N},$$

$$\vec{F}_2 = (-5\vec{i} + 20\vec{j})\text{N}.$$



Feladat:

- Határozza meg a két erő eredőjét, illetve különbségét szerkesztéssel és számítással!
- Adja meg az erők hatásvonalának irány-egységvektorait!

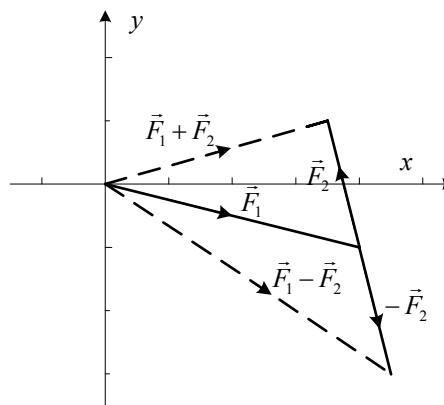
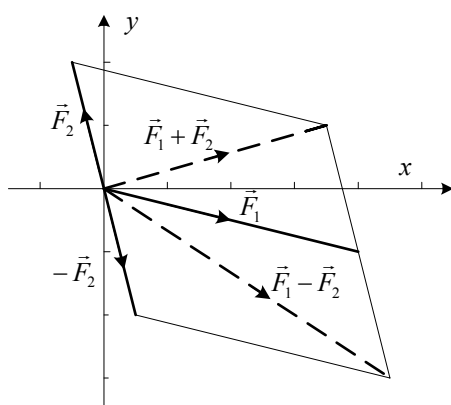
Megoldás:

- Szerkesztéshez két módszer választható: a paralelogramma vagy a háromszög módszer.

Összeadásnál a paralelogramma módszer a következő:

- párhuzamost húzunk az $\vec{F}_2$ erő végpontján keresztül az $\vec{F}_1$ hatásvonalával,
- ugyanazt a lépést végrehajtjuk az $\vec{F}_1$ végpontjában az $\vec{F}_2$ hatásvonalával,
- a két erő közös kezdőpontjából, a párhuzamosok metszéspontjába mutató vektor a két erővektor eredője (összege).

A két erő különbségének szerkesztésénél a következő átalakítást használjuk fel: $\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + (-\vec{F}_2)$, azaz elsőként előállítjuk az $\vec{F}_2$ vektor (-1)-szeresét, és az előzőekben leírt lépések alapján elvégezzük a szerkesztést.



A háromszög módszer lépései (mind az összeg illetve különbség megszerkesztésére):

- az $\vec{F}_2$ vektort eltoljuk az $\vec{F}_1$ végpontjába,
- az $\vec{F}_1$ kezdőpontját és az $\vec{F}_2$ végpontját összekötő vektor a két erő eredője (összege).

- b. Két (vagy több) vektor összegét illetve különbségét úgy kapjuk, hogy a megfelelő skalár-koordinátákat összeadjuk illetve kivonjuk:

$$\vec{F}_1 \pm \vec{F}_2 = [(F_{1x} \pm F_{2x})\vec{i} + (F_{1y} \pm F_{2y})\vec{j} + (F_{1z} \pm F_{2z})\vec{k}]$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (35\vec{i} + 10\vec{j})\text{N}$$

$$\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = (45\vec{i} - 30\vec{j})\text{N}$$

- c. Az erők hatásvonalának irány-egységvektorai:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{F}_1}{|\vec{F}_1|} = \frac{(40\vec{i} - 10\vec{j})}{\sqrt{40^2 + 10^2}} = \frac{(40\vec{i} - 10\vec{j})}{\sqrt{1700}} = \frac{(40\vec{i} - 10\vec{j})}{10\sqrt{17}} = \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{j} \right)$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{F}_2}{|\vec{F}_2|} = \frac{(-5\vec{i} + 20\vec{j})}{\sqrt{5^2 + 20^2}} = \frac{(-5\vec{i} + 20\vec{j})}{\sqrt{425}} = \frac{(-5\vec{i} + 20\vec{j})}{5\sqrt{17}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{17}}\vec{j} \right)$$

$$\vec{e}_1 = \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{j} \right)$$

$$\vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{17}}\vec{j} \right)$$

1. 8. Példa

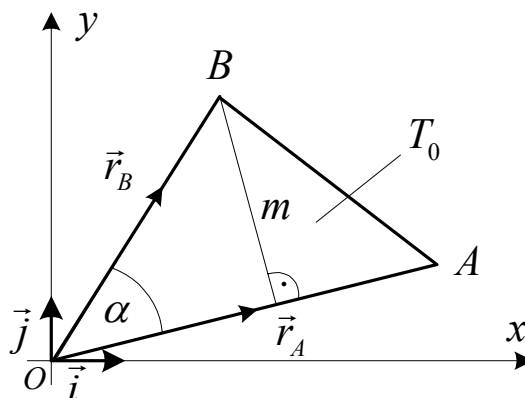
Adott:

$$\vec{r}_A = (4\vec{i} + \vec{j})m$$

$$\vec{r}_{AB} = (\vec{i} + 3\vec{j})m$$

Feladat:

- Az OAB háromszög T_0 területének meghatározása
- Az OAB háromszög $\vec{r}_A$ -hoz tartozó m magasságának meghatározása



Megoldás:

- A vektoriális szorzás alapértelmezése szerint:

$$T_0 = \frac{1}{2} |\vec{r}_A \times \vec{r}_B| = \frac{1}{2} |\vec{r}_A| \underbrace{|\vec{r}_B| \sin \alpha}_m = \frac{1}{2} |\vec{r}_A| m$$

$$\vec{r}_A \times \vec{r}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(12 - 1) = (11\vec{k})m^2 \quad \text{vagy}$$

$$\vec{r}_A \times \vec{r}_B = (4\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{i} + 3\vec{j}) = \vec{0} + 12\vec{k} - \vec{k} + \vec{0} = (11\vec{k})m^2$$

$$\underline{\underline{T_0 = 5,5m^2}}$$

- Ismét az alapértelmezés alapján:

$$|\vec{r}_A \times \vec{r}_B| = |\vec{r}_A| |\vec{r}_B| \sin \alpha = |\vec{r}_A| m \quad \text{és ebből}$$

$$m = \frac{|\vec{r}_A \times \vec{r}_B|}{|\vec{r}_A|} = \frac{11}{4,12} = 2,67m$$

$$|\vec{r}_A| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = 4,12$$

$$\underline{\underline{m = 2,67m}}$$

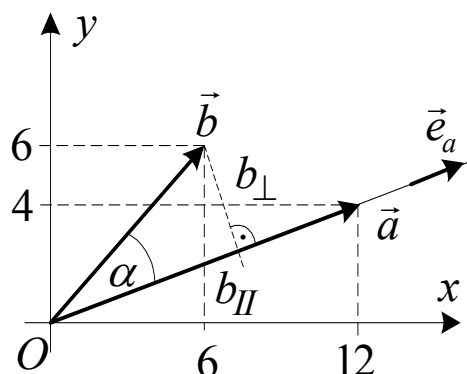
1. 8. Példa

Adott:

$$\vec{a} = 12\vec{i} + 4\vec{j} \text{ és } \vec{b} = 6\vec{i} + 6\vec{j}$$

Feladat:

- A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányra eső vetületének és összetevőjének meghatározása.
- A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányra merőleges vetületének, és összetevőjének meghatározása.



Megoldás:

- A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányra eső vetületének, és összetevőjének meghatározása.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \underbrace{|\vec{b}| \cos \alpha}_{b_{||}} \Rightarrow b_{||} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{96}{12,65} \cong 7,59$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 72 + 24 = 96$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{144 + 16} = 4 \cdot \sqrt{10} \cong 12,65$$

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{12,65}(12\vec{i} + 4\vec{j}) = (0,9486\vec{i} + 0,3162\vec{j})$$

A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányú összetevője:

$$\vec{b}_{||} = b_{||} \vec{e}_a = 7,59(0,9486\vec{i} + 0,3162\vec{j}) = (7,1999\vec{i} + 2,3999\vec{j}) \cong 7,2\vec{i} + 2,4\vec{j}$$

$$\underline{\underline{\vec{b}_{||} = 7,2\vec{i} + 2,4\vec{j}}}$$

- A $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ irányra merőleges vetületének és összetevőjének meghatározása.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \underbrace{|\vec{b}| \sin \alpha}_{b_{\perp}} \Rightarrow b_{\perp} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{48}{12,65} \cong 3,79$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 12 & 4 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(72 - 24) \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 48$$

$$\vec{b}_{\perp} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}|} \times \underbrace{\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}_{\vec{e}_a} = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2} = -1,2\vec{i} + 3,6\vec{j}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} = 48\vec{k} \times (12\vec{i} + 4\vec{j}) = (576\vec{j} - 192\vec{j}) \quad \text{és} \quad |\vec{a}|^2 = 160$$

$$\underline{\underline{\vec{b}_{\perp} = -1,2\vec{i} + 3,6\vec{j}}}$$

Ellenőrzés:

$$\vec{b} = \vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp} = (7,2\vec{i} + 2,4\vec{j}) + (-1,2\vec{i} + 3,6\vec{j}) = (6\vec{i} + 6\vec{j})$$

1. 9. Példa

Adott két vektor:

$$\vec{c} = (20\vec{i} + 60\vec{j} - 90\vec{k})\text{m},$$

$$\vec{d} = (-2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})\text{m}.$$

Feladat:

Határozza meg a

- $\vec{c}$ helyvektor $\vec{d}$ irányába eső összetevőjét, illetve
- az arra merőleges összetevőjét!

Megoldás:

A feladat tulajdonképpen egy vektor felbontása egy adott iránnyal párhuzamos és arra merőleges vektorra.

- Vektorok skaláris szorzatára vonatkozó összefüggés:

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = |\vec{d}| \cdot \underbrace{|\vec{c}| \cdot \cos \alpha}_{c_{\parallel}},$$

$$\Rightarrow c_{\parallel} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|} = \frac{20 \cdot (-2) + 60 \cdot 2 - 90 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = -\frac{10}{3} = -3,33 \text{ m}.$$

Vektor ebből úgy lesz, hogy a kapott skalár számot megszorozzuk a $\vec{d}$ vektor hatásvonalának irány-egységvektorával:

$$\vec{e}_d = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = \left(-\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k} \right),$$

$$\underline{\underline{\vec{c}_{\parallel} = c_{\parallel} \cdot \vec{e}_d = \left(\frac{20}{9}\vec{i} - \frac{20}{9}\vec{j} - \frac{10}{9}\vec{k} \right) \text{m}}}}$$

- A merőleges összetevőt úgy kapjuk meg a legegyszerűbben, ha az eredeti $\vec{c}$ vektorból kivonjuk az előbb kiszámolt párhuzamos összetevőt:

$$\vec{c}_{\perp} = \vec{c} - \vec{c}_{\parallel} = \left(\left(20 - \frac{20}{9} \right) \vec{i} + \left(60 - \left(-\frac{20}{9} \right) \right) \vec{j} + \left((-90) - \left(-\frac{10}{9} \right) \right) \vec{k} \right) \text{m},$$

$$\vec{c}_{\perp} = \left(\frac{160}{9}\vec{i} + \frac{560}{9}\vec{j} - \frac{800}{9}\vec{k} \right) \text{m}.$$