

2. MECHANIKA-STATIKA GYAKORLAT
(kidolgozta: Triesz Péter, egy. ts.; Tarnai Gábor, mérnök tanár)

Erők eredője, fölbontása

2.1. Példa

Adott egy erő és egy egyenes irány-egységvektora:

$$\vec{F} = (25\vec{i} - 10\vec{j} + 4\vec{k})\text{N},$$
$$\vec{e} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \right).$$

Feladat:

- Adja meg az $\vec{F}$ erő x,y,z irányú *skaláris koordinátáit!*
- Adja meg az $\vec{F}$ erő x,y,z irányú *összetevőit!*
- Számítsa ki az $\vec{F}$ erő $\vec{e}$ iránnyal párhuzamos $F_{\parallel}$ skaláris koordinátáját, illetve $\vec{F}_{\parallel}$ összetevőjét!
- Számítsa ki az $\vec{F}$ erő $\vec{e}$ irányra merőleges $F_{\perp}$ skaláris koordinátáját, illetve $\vec{F}_{\perp}$ összetevőjét!

Megoldás:

- Egy vektornak egy skaláris koordinátája úgy határozható meg, ha a vektort skalárisan szorozzuk a kérdéses irány-egységvektorral (az eredmény egy *skalár* szám):

$$F_x = \vec{F} \cdot \vec{i} = 25\vec{i} \cdot \vec{i} - 10\vec{j} \cdot \vec{i} + 4\vec{k} \cdot \vec{i} = 25 \text{ N},$$
$$F_y = \vec{F} \cdot \vec{j} = 25\vec{i} \cdot \vec{j} - 10\vec{j} \cdot \vec{j} + 4\vec{k} \cdot \vec{j} = -10 \text{ N},$$
$$F_z = \vec{F} \cdot \vec{k} = 25\vec{i} \cdot \vec{k} - 10\vec{j} \cdot \vec{k} + 4\vec{k} \cdot \vec{k} = 4 \text{ N},$$
$$\vec{F} = (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k})\text{N}.$$

- Egy vektor egy adott irányú összetevője úgy adható meg, ha a megfelelő skaláris koordinátáját szorozzuk az adott irány egységvektorával (az eredmény *vektor*):

$$\vec{F}_x = F_x \vec{i} = (25\vec{i})\text{N},$$
$$\vec{F}_y = F_y \vec{j} = (-10\vec{j})\text{N},$$
$$\vec{F}_z = F_z \vec{k} = (4\vec{k})\text{N},$$

Az eredeti vektor előállítható az összetevők összegeként:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z.$$

- c. Az erővektor az adott iránnyal párhuzamos skalár koordinátáját és összetevőjét az előző pontokban ismertetett módszerek segítségével kapjuk meg. Tulajdonképpen ez a feladatrész az előző két pontban leírt módszerek általánosítása.

$$F_{\parallel} = \vec{F} \cdot \vec{e} = 25\vec{i} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - 10\vec{j} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + 4\vec{k} \cdot 0\vec{k} = \frac{15\sqrt{2}}{2} \text{ N } (= 10,606 \text{ N}),$$

$$\vec{F}_{\parallel} = F_{\parallel} \vec{e} = \frac{15\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \right) = (7,5\vec{i} + 7,5\vec{j}) \text{ N},$$

ahol $\vec{e}$ egységvektor!

- d. Egy vektor egy adott irányra merőleges skalár koordinátája a vektoriális szorzásra vonatkozó azonosságból számítható, mely szerint:

$$\begin{aligned} F_{\perp} &= |\vec{F} \times \vec{e}|. \\ \vec{F} \times \vec{e} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 25 & -10 & 4 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left((-10) \cdot 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 \right) - \vec{j} \left(25 \cdot 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 \right) + \vec{k} \left(25 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-10) \right) = \\ &= \left(-2\sqrt{2} \vec{i} + 2\sqrt{2} \vec{j} + 35 \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k} \right) \text{ N} \\ F_{\perp} &= |\vec{F} \times \vec{e}| = \sqrt{\left(2\sqrt{2} \right)^2 + \left(2\sqrt{2} \right)^2 + \left(35 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} = \sqrt{628,5} = 25,07 \text{ N} \end{aligned}$$

Egy vektor egy adott irányra merőleges összetevőjének számítására egy kicsit bonyolultabb összefüggés szolgál:

$$\vec{F}_{\perp} = \frac{(\vec{e} \times \vec{F}) \times \vec{e}}{|\vec{e}|^2}.$$

Ennél jóval egyszerűbb megoldást az $\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$ összefüggésből kapjuk, vagyis a merőleges összetevő meghatározható úgy, ha egyszerűen az előző pontban számolt párhuzamos összetevőt kivonjuk az eredeti vektorból:

$$\vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{\parallel} = (17,5\vec{i} - 17,5\vec{j} + 4\vec{k}) \text{ N}.$$

2.2. Példa

Adott az ábrán látható erőrendszer.

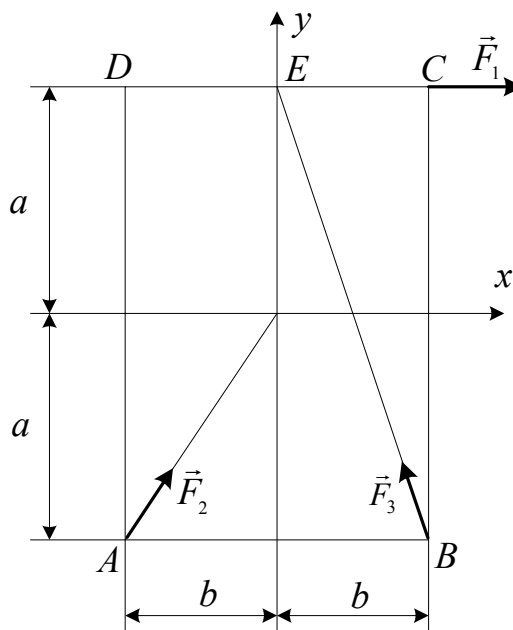
$$a = 3 \text{ m}, \quad b = 2 \text{ m},$$

$$F_1 = 2 \text{ kN}, \quad F_2 = 5 \text{ kN},$$

$$F_3 = 6 \text{ kN}.$$

Feladat:

- Írja fel az erőrendszert alkotó erők vektorait!
- Határozza meg az erők eredőjének vektorát, számítsa ki a nagyságát!
- Számítsa ki az $\vec{F}$ eredő erő x tengellyel bezárt szögét!



Megoldás:

- Az egyes erővektorok meghatározásához szükség van a hatásvonaluk irányegységvektorára, melyek az ábráról leolvashatók:

$$\vec{e}_1 = \vec{i},$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|} = \frac{(4\vec{i} + 6\vec{j})}{\sqrt{4^2 + 6^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j} \right),$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{r}_{BE}}{|\vec{r}_{BE}|} = \frac{(-2\vec{i} + 6\vec{j})}{\sqrt{2^2 + 6^2}} = \frac{(-2\vec{i} + 6\vec{j})}{\sqrt{40}} = \frac{(-2\vec{i} + 6\vec{j})}{2\sqrt{10}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{j} \right).$$

Az erővektorok:

$$\vec{F}_1 = F_1 \vec{e}_1 = (2\vec{i}) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_2 = F_2 \vec{e}_2 = \left(\frac{10}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{15}{\sqrt{13}}\vec{j} \right) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_3 = F_3 \vec{e}_3 = \left(-\frac{6}{\sqrt{10}}\vec{i} + \frac{18}{\sqrt{10}}\vec{j} \right) \text{ kN}.$$

- Az eredő erő:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (2,876\vec{i} + 9,852\vec{j}) \text{ kN},$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{2,876^2 + 9,852^2} = 10,263 \text{ kN}.$$

- Az eredő erő hatásvonalának a vízszintes tengellyel bezárt szöge az egyenes iránytangensének definíciójával határozható meg:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{9,852}{2,876} = 3,426 \Rightarrow \alpha = 73,73^\circ.$$

2.3. Példa

Adott:

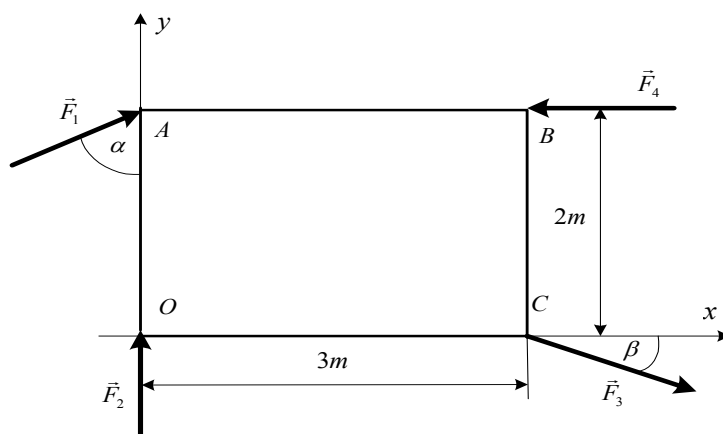
$$F_1 = F_4 = 40 \text{ N},$$

$$F_2 = 60 \text{ N}, F_3 = 20 \text{ N}.$$

$$\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$$

Feladat:

- Az erők összegének (eredőjének) előállítás.
- Az összeg eredő abszolút értékének meghatározása.
- Az eredő erő irány egységvektorának meghatározása.



Megoldás:

- Az erők összege

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \left(\sum_1^4 \vec{F}_i \right)$$

$$\vec{F}_1 = |\vec{F}_1|(\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}) = 40 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} \right) \text{ N},$$

$$\vec{F}_2 = |\vec{F}_2| \vec{j} = (60 \vec{j}) \text{ N},$$

$$\vec{F}_3 = |\vec{F}_3|(\cos \beta \vec{i} - \sin \beta \vec{j}) = 20 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} - \frac{1}{2} \vec{j} \right) \text{ N},$$

$$\vec{F}_4 = |\vec{F}_4|(-\vec{i}) = (-40 \vec{i}) \text{ N},$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= 40 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} \right) + 60 \vec{j} + 20 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} - \frac{1}{2} \vec{j} \right) - 40 \vec{i} = \\ &= \left(40 \frac{\sqrt{3}}{2} + 20 \frac{\sqrt{3}}{2} - 40 \right) \vec{i} + \left(40 \frac{1}{2} + 60 - 20 \frac{1}{2} \right) \vec{j} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\vec{F} = (11,96 \vec{i} + 70 \vec{j}) \text{ N}}}$$

- Az erők összegének abszolút értéke:

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{11,96^2 + 70^2} = 71,01 \text{ N}$$

$$\underline{\underline{|\vec{F}| = 71,01 \text{ N}}}$$

- Az eredő erő irány egységvektora:

$$\vec{e}_F = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} = \frac{11,96 \vec{i} + 70 \vec{j}}{71,01} = (0,168 \vec{i} + 0,986 \vec{j})$$

$$\underline{\underline{\vec{e}_F = (0,168 \vec{i} + 0,986 \vec{j})}}$$

$$\underline{\underline{\text{Ellenőrzés: } |\vec{e}_F| = \sqrt{0,168^2 + 0,986^2} = 1}}$$

2.4. Példa

Adott:

$$a = 3\text{ m}, b = 4\text{ m},$$

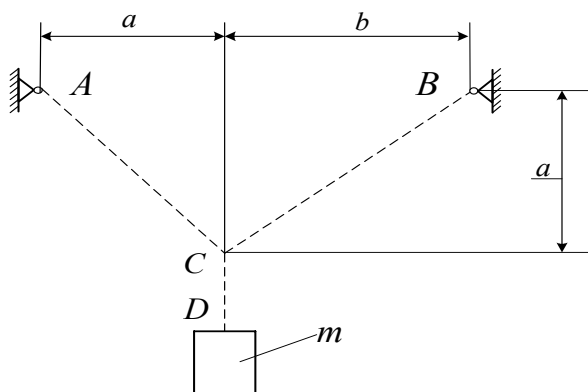
$$m = 200\text{ kg}; g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Az AC , BC és CD kötelek súlyát elhanyagoljuk.

Feladat:

Az $\vec{F}_A$ és $\vec{F}_B$ támasztóerők meg-határozása:

- szerkesztéssel és
- számítással.



Megoldás:

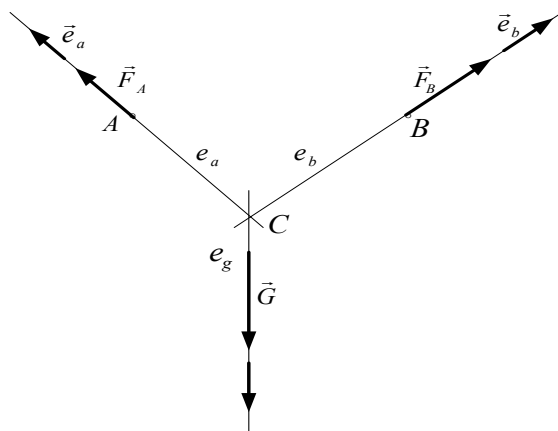
a. A feladat megoldása szerkesztéssel:

A kötelekből álló szerkezetet a test függőlegesen lefelé mutató $G = mg$ súlyereje terheli. A kötelekben kötélt irányú húzóerők ébrednek.

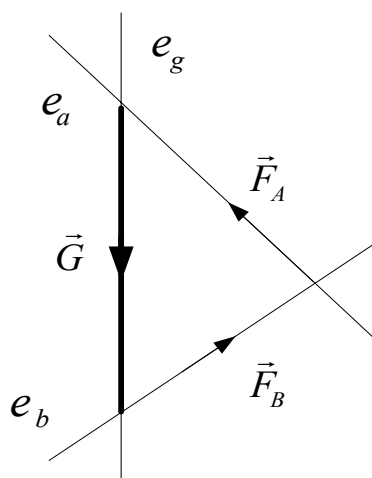
A vizsgált rendszer akkor van nyugalomban (egyensúlyban), ha a rá ható erők eredője zérus: $\vec{G} + \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$. (Ekkor a három erő hatásvonala egy pontban metszi egymást.)

Az A ponti $\vec{F}_A$ támasztóerő az AC egyenesen, a B ponti $\vec{F}_B$ támasztóerő a BC egyenesen hat.

Szerkezeti ábra



Erőábra



b. A feladat megoldása számítással:

A feladat alapja itt is az egyensúlyi egyenlet: $\vec{G} + \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$

Az $\vec{F}_A$ és $\vec{F}_B$ irányába mutató egy-egy vektor:

$$\vec{a} = \vec{r}_{CA} = (-3\vec{i} + 3\vec{j})m$$

$$\vec{b} = \vec{r}_{CB} = (4\vec{i} + 3\vec{j})m$$

Ezekből az irány-egységvektorok:

$$\vec{e}_A = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right), \quad \vec{e}_B = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right).$$

Az erővektorok:

$$\vec{F}_A = F_A \vec{e}_A, \quad \vec{F}_B = F_B \vec{e}_B, \quad \text{és} \quad \vec{G} = m\vec{g} = mg(-\vec{j}) = (-2000\vec{j})N = (-2\vec{j})kN$$

Behelyettesítve az egyensúlyi egyenletbe:

$$(-2\vec{j}) + F_A \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) + F_B \left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right) = \vec{0}$$

Szorozzuk meg a vektoregyenletet skalárisan az $\vec{i}$, majd a $\vec{j}$ egységvektorokkal!

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}F_A + \frac{4}{5}F_B = 0$$

$$-2 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_A + \frac{3}{5}F_B = 0,$$

adjuk össze a két egyenletet, és rendezzük át:

$$\frac{7}{5}F_B = 2 \Rightarrow F_B = \frac{10}{7} = 1,43, \quad \text{ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe:}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}F_A + \frac{4}{5} \frac{10}{7} = 0 \Rightarrow F_A = \frac{40\sqrt{2}}{35} = \frac{8\sqrt{2}}{7} = 1,62$$

Ebből a támasztóerő vektorok fölírhatóak:

$$\vec{F}_A = F_A \vec{e}_A = \frac{8\sqrt{2}}{7} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) \Rightarrow \underline{\underline{\vec{F}_A = (-1,14\vec{i} + 1,14\vec{j})kN}} \quad \text{és}$$

$$\vec{F}_B = F_B \vec{e}_B = \frac{10}{7} \left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right) \Rightarrow \underline{\underline{\vec{F}_B = (1,14\vec{i} + 0,86\vec{j})kN}}.$$

2.5. Példa

Az ábrán látható A és B jelű vontatóhajó uszályt vontat úgy, hogy a vontatókötelek a haladási iránnyal α és β szögeket zárnak be.

Ismert az uszály vontatásához szükséges $\vec{F}_v$ vontató erő.

Adott:

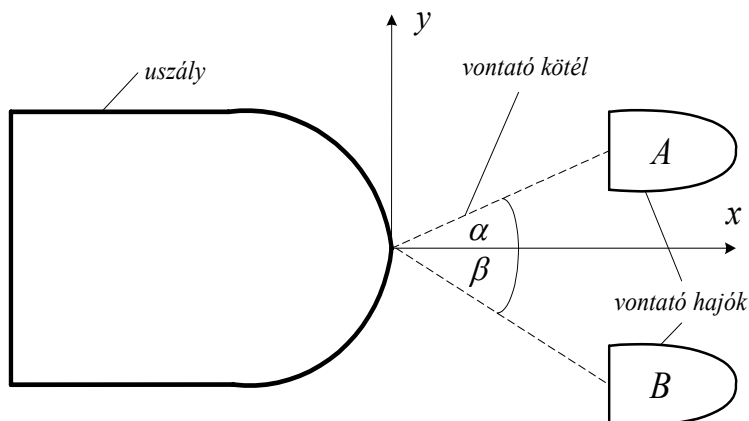
$$\alpha = 20^\circ,$$

$$\beta = 30^\circ,$$

$$\vec{F}_v = (50\vec{i}) \text{ kN}$$

Feladat:

A vontatókötelekben ébredő $\vec{F}_A$ és $\vec{F}_B$ támasztóerők (húzóerők) meghatározása.



Megoldás:

a. A feladat megoldása számítással:

$$\vec{F}_v = \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

$$\vec{F}_A = F_A \vec{e}_A, \quad \vec{F}_B = F_B \vec{e}_B, \quad \vec{F}_v = F_v \vec{i}.$$

$$\vec{e}_A = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}, \quad |\vec{e}_A| = 1$$

$$\vec{e}_B = \cos \beta \vec{i} + \sin \beta \vec{j}, \quad (\beta < 0) \quad |\vec{e}_B| = 1$$

$$F_v \vec{i} = F_A (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) + F_B (\cos \beta \vec{i} + \sin \beta \vec{j}) \quad / \cdot \vec{i} \quad / \cdot \vec{j}$$

A skaláris szorzással kapott egyenletek:

$$\left. \begin{aligned} F_v &= F_A \cos \alpha + F_B \cos \beta \\ 0 &= F_A \sin \alpha + F_B \sin \beta \end{aligned} \right\} \begin{aligned} / \sin \beta \\ / \cos \beta \end{aligned}$$

A szorzásokat elvégezve:

$$\left. \begin{aligned} F_v \sin \beta &= F_A \cos \alpha \sin \beta + F_B \cos \beta \sin \beta \\ 0 &= F_A \sin \alpha \cos \beta + F_B \sin \beta \cos \beta \end{aligned} \right\}$$

Az egyenleteket kivonva egymásból:

$$F_v \sin \beta = F_A \underbrace{(\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta)}_{\sin(\beta - \alpha)} = F_A \sin(\beta - \alpha)$$

$$F_A = F_v \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} = 50 \frac{\sin(30^\circ)}{\sin(-30^\circ - 20^\circ)} = 32.64 \text{ kN}$$

A második egyenletből:

$$F_B = -F_A \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = -32,64 \frac{\sin 20^\circ}{\sin(-30^\circ)} = 22,33 \text{ kN}$$

A vontató kötelekben föllépő erő:

$$\vec{F}_A = 32,64 (\cos 20^\circ \vec{i} + \sin 20^\circ \vec{j}) \text{ kN}$$

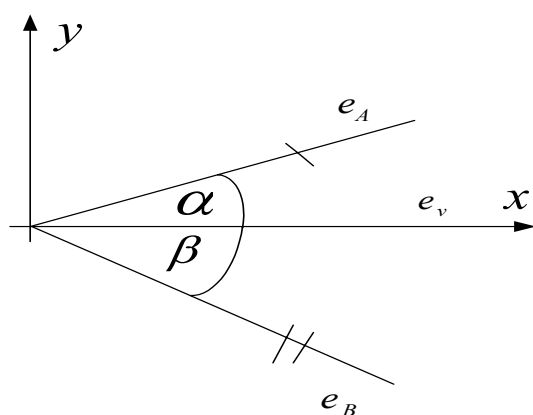
$$\vec{F}_B = 22,33 [\cos(-30^\circ) \vec{i} + \sin(-30^\circ) \vec{j}] \text{ kN}$$

$$\vec{F}_A = (30,67 \vec{i} + 11,16 \vec{j}) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_B = (19,33 \vec{i} - 11,16 \vec{j}) \text{ kN}$$

b. A feladat megoldása szerkesztéssel:

Szerkezetábra



Erőábra

