

3. MECHANIKA – STATIKA GYAKORLAT
(kidolgozta: Triesz Péter; Tarnai Gábor, mérnök tanár)

Három erő egyensúlya

3.1. Példa:

Adott egy emelőszerkezet méretei, és terhelése:

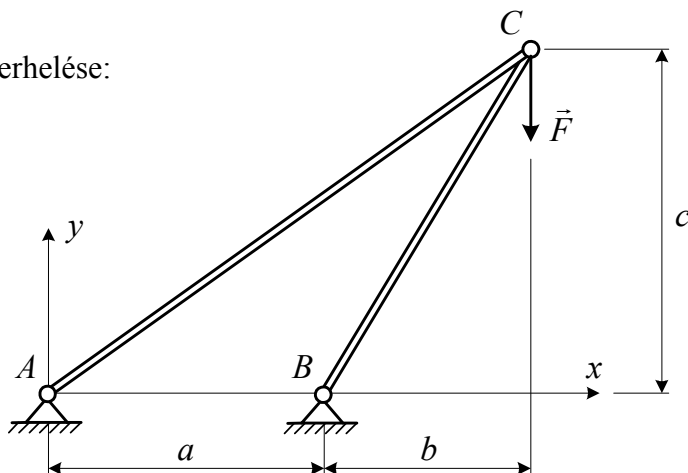
$$a = 2 \text{ m} \quad b = 1,5 \text{ m}$$

$$c = 2,5 \text{ m} \quad F = 10 \text{ kN}$$

Feladat:

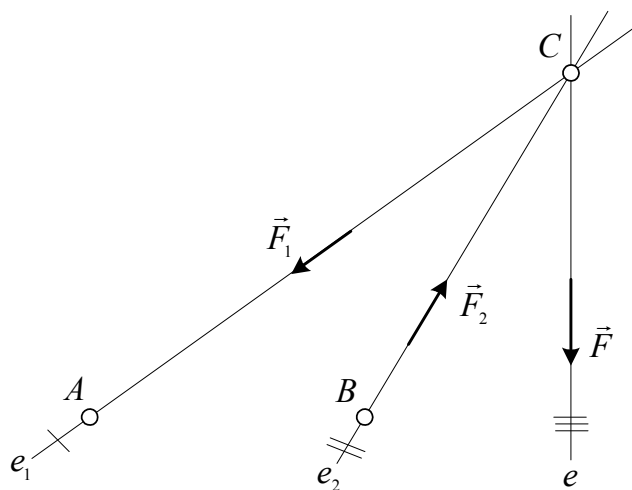
Határozza meg az A csuklóban lévő $\vec{F}_1$ és a B csuklóban lévő $\vec{F}_2$ támasztóerőt

- szerkesztéssel,
- számítással.

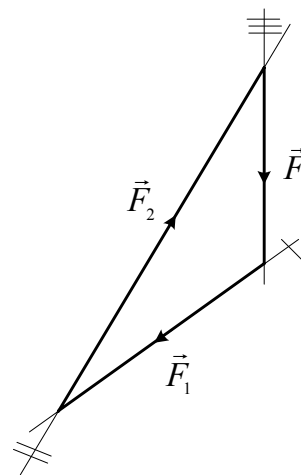


Megoldás:

- A rudak a végein terheltek, így a támaszerők rúdírányúak, meghatározásukhoz két ábrát, egy szerkezeti és egy erőábrát kell szerkeszteni.



Szerkezeti ábra



Erőábra

Az erőábráról az erőléptéknek megfelelően lemérhetők a támasztóerők nagyságai, $F_1 \approx 13 \text{ kN}$ és $F_2 \approx 20,5 \text{ kN}$.

- A statika alapegyenlete:

$$\vec{0} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}.$$

A terhelő erő vektora $\vec{F} = (-10\vec{j}) \text{ kN}$.

Behelyettesítés után a skaláregyenletek:

$$\begin{aligned}0 &= F_{1x} + F_{2x}, \\0 &= F_{1y} + F_{2y} - 10.\end{aligned}$$

Látható, hogy a két egyenletben négy ismeretlen van, viszont ismertek a rudak irányai, és így az erők hatásvonalai is. Ezek ismeretében az erők hatásvonalainak irány-egységvektorai meghatározhatók a következőképpen:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|} = \frac{3,5\vec{i} + 2,5\vec{j}}{\sqrt{3,5^2 + 2,5^2}} = \frac{7\vec{i} + 5\vec{j}}{\sqrt{7^2 + 5^2}} = \left(\frac{7}{\sqrt{74}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{74}}\vec{j} \right), \\ \vec{e}_2 &= \frac{\vec{r}_{BC}}{|\vec{r}_{BC}|} = \frac{1,5\vec{i} + 2,5\vec{j}}{\sqrt{1,5^2 + 2,5^2}} = \frac{3\vec{i} + 5\vec{j}}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \left(\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{34}}\vec{j} \right).\end{aligned}$$

Ha ismert egy vektor hatásvonalának irány-egységvektora, akkor maga a vektor az alábbiak szerint felírható:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= F_1 \vec{e}_1 = \left(\frac{7F_1}{\sqrt{74}}\vec{i} + \frac{5F_1}{\sqrt{74}}\vec{j} \right) \text{ kN}, \\ \vec{F}_2 &= F_2 \vec{e}_2 = \left(\frac{3F_2}{\sqrt{34}}\vec{i} + \frac{5F_2}{\sqrt{34}}\vec{j} \right) \text{ kN}.\end{aligned}$$

Ezek skalár koordinátáit visszahelyettesítve a megfelelő helyekre a statika alapegyenletében, már csak két ismeretlen marad a két skaláregyenletben:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{7}{\sqrt{74}} F_1 + \frac{3}{\sqrt{34}} F_2, \\ 10 &= \frac{5}{\sqrt{74}} F_1 + \frac{5}{\sqrt{34}} F_2.\end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva megkapjuk a támaszerők nagyságának pontos értékét:

$$F_1 = -\frac{3\sqrt{74}}{2} \text{ kN} = -12,903 \text{ kN} \quad \text{és} \quad F_2 = \frac{7\sqrt{34}}{2} \text{ kN} = 20,408 \text{ kN}.$$

A támaszerők vektorai pedig:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= -\frac{3\sqrt{74}}{2} \left(\frac{7}{\sqrt{74}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{74}}\vec{j} \right) = (-10,5\vec{i} - 7,5\vec{j}) \text{ kN}, \\ \vec{F}_2 &= \frac{7\sqrt{34}}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{34}}\vec{j} \right) = (10,5\vec{i} + 17,5\vec{j}) \text{ kN}.\end{aligned}$$

Az F_1 erő negatív előjele utal arra, hogy az erő a feltételezett iránnyal ellentétes irányban hat, mely a szerkesztés eredményeként már korábban adódott.

3.2. Példa:

Az előző feladatban ismertetett emelővel egy $G = 10 \text{ kN}$ súlyú terhet emelünk, amely az ábrán látható módon, acélsodronnyal van kötözve. Az acélsodrony $K_{\max} = 8 \text{ kN}$ kötelerőt képes elviselni.

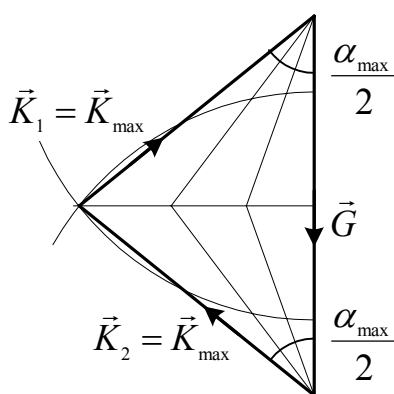
Feladat:

Mekkora lehet a két kötélág közötti maximális szög, hogy a kötélnél ne szakadjon el? A feladatot oldja meg

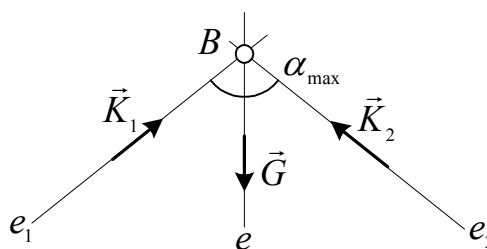
- szerkesztéssel és
- számítással!

Megoldás:

- Ennél a feladatnál először az erőábrát rajzoljuk meg, majd ennek alapján a szerkezeti ábrát.



Erőábra



Szerkezeti ábra

Az erőábrában legelőször a súlyerőnek megfelelő szakaszt vesszük fel. Feltételezve azt, hogy a terhet szimmetrikusan van kötözve, a súlyerő mindkét végéből a maximális kötelerőnek megfelelő távolsággal körközzünk. A metszéspontot a súlyerő kezdő- illetve végpontjával összekötve adódik a nyílfolym-folytonos vektorháromszög. Az erők hatásvonalával párhuzamosokat húzva egy közös metszésponton át (B) adódik a szerkezeti ábra, ahonnan lemérhető a kötélágak legnagyobb nyílásszöge: $\alpha_{\max} \approx 100^\circ$.

- Számításhoz felhasználható az erőábra. A súlyerő vektora: $\vec{G} = (-10\vec{j}) \text{ kN}$, a kötelerők: $\vec{K}_1 = (K_{1x}\vec{i} + K_{1y}\vec{j})$, illetve $\vec{K}_2 = (K_{2x}\vec{i} + K_{2y}\vec{j})$, ahol

$$K_{1x} = K_1 \sin \frac{\alpha_{\max}}{2} \quad \text{és} \quad K_{1y} = K_1 \cos \frac{\alpha_{\max}}{2},$$

$$K_{2x} = K_2 \sin \frac{\alpha_{\max}}{2} \quad \text{és} \quad K_{2y} = K_2 \cos \frac{\alpha_{\max}}{2}.$$

A statika alapegyenlete erre a feladatra:

$$\vec{0} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \vec{G}$$

Skalár egyenletekkel:

$$\begin{aligned} 0 = K_{1x} + K_{2x} &\Rightarrow 0 = K_1 \sin \frac{\alpha_{\max}}{2} + K_2 \sin \frac{\alpha_{\max}}{2}, \\ 0 = K_{1y} + K_{2y} - 10 &\Rightarrow 0 = K_1 \cos \frac{\alpha}{2} + K_2 \cos \frac{\alpha}{2} - 10 \quad \text{és} \\ K_1 = K_2 = K_{\max} &= 8 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Behelyettesítve a (3)-as egyenletet a (2)-ba és átrendezve kapjuk:

$$\cos \frac{\alpha_{\max}}{2} = \frac{10}{16} \Rightarrow \alpha_{\max} = 102,64^\circ.$$

Megjegyzés:

A példa rámutat arra, hogy mennyire fontos az emelőszerkezetek működtetésére illetve a terhek kötözésére előírt szabályok betartása. A fenti példában számolt kötélágak közötti nyílásszög összefüggésben van a kötözéshez használt acélsodrony hosszával. Tehát a legfontosabb következtetés, ami levonható, hogy a terhek kötözésénél előnyösebb, ha hosszabb sodronyt használunk kötözésre.

3.3. Példa:

Adott az ábrán látható szerkezet geometriai méretei és terhelése:

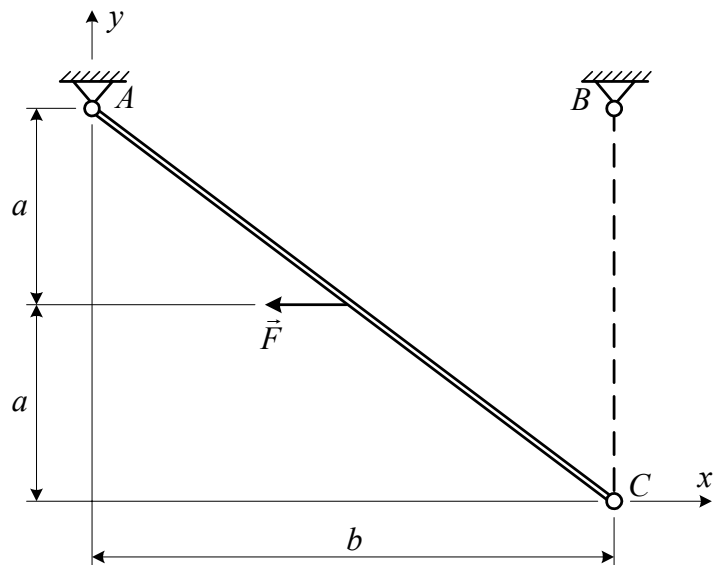
$$\begin{aligned} a &= 1,5 \text{ m}, \\ b &= 4 \text{ m}, \\ F &= 12 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Feladat:

Az $\vec{F}_A$ és $\vec{F}_B$ támaszerők meghatározása

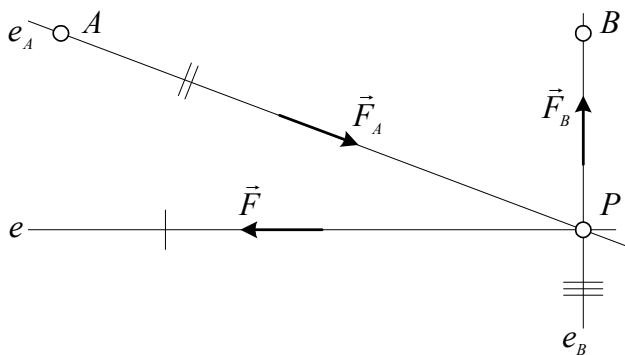
- szerkesztéssel és
- számítással.

Megoldás:

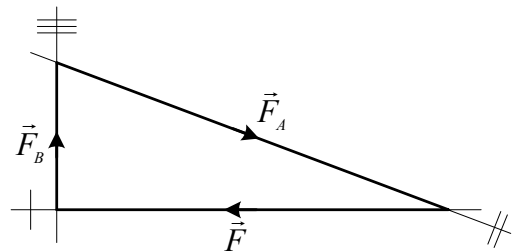


- A már megszokott módon először egy szerkezeti, majd egy erőábrát szerkesztünk, melyekből lemérhetők a támaszerők közelítő nagyságai, valamint irányai.

Szerkezeti ábra



Erőábra



Támaszerők nagyságai: $F_A \approx 13 \text{ kN}$, $F_B \approx 4,5 \text{ kN}$.

- A szerkezetet terhelő erő és a támaszerők hatásvonalának irány-egységvektorai:

$$\vec{e} = -\vec{i}, \quad \vec{e}_A = \frac{\vec{r}_{AP}}{|\vec{r}_{AP}|} = \left(\frac{8}{\sqrt{73}} \vec{i} - \frac{3}{\sqrt{73}} \vec{j} \right), \quad \vec{e}_B = \vec{j}, \text{ ahol}$$

$$\vec{r}_{AP} = \vec{r}_P - \vec{r}_A = (4\vec{i} - 1,5\vec{j}) \text{ m}.$$

Az erővektorok:

$$\vec{F} = (-12\vec{i}) \text{ kN}, \quad \vec{F}_A = F_A \vec{e}_A = \left(\frac{8F_A}{\sqrt{73}} \vec{i} - \frac{3F_A}{\sqrt{73}} \vec{j} \right) \text{ kN}, \quad \vec{F}_B = F_B \vec{e}_B = (F_B \vec{j}) \text{ kN}.$$

A statika alapegyenlete:

$$\vec{0} = \vec{F} + \vec{F}_A + \vec{F}_B.$$

Skalár egyenletekkel:

$$0 = -12 + \frac{8}{\sqrt{73}} F_A,$$
$$0 = -\frac{3}{\sqrt{73}} F_A + F_B.$$

Az egyenletrendszer megoldásai:

$$F_A = \frac{3}{2} \sqrt{73} = 12,816 \text{ kN}, \quad F_B = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ kN}.$$

A támaszerők vektorai:

$$\vec{F}_A = F_A \vec{e}_A = \frac{3}{2} \sqrt{73} \left(\frac{8}{\sqrt{73}} \vec{i} - \frac{3}{\sqrt{73}} \vec{j} \right) = (12\vec{i} - 4,5\vec{j}) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_B = F_B \vec{e}_B = \frac{9}{2} \vec{j} = (4,5\vec{j}) \text{ kN}.$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_A = (12\vec{i} - 4,5\vec{j}) \text{ kN};}}$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_B = (4,5\vec{j}) \text{ kN}.}}$$

.

3.4. Példa

Az ábrán látható szerkezetet egy koncentrált erő terheli.
Adott a szerkezet geometriai méretei és a terhelőerő:

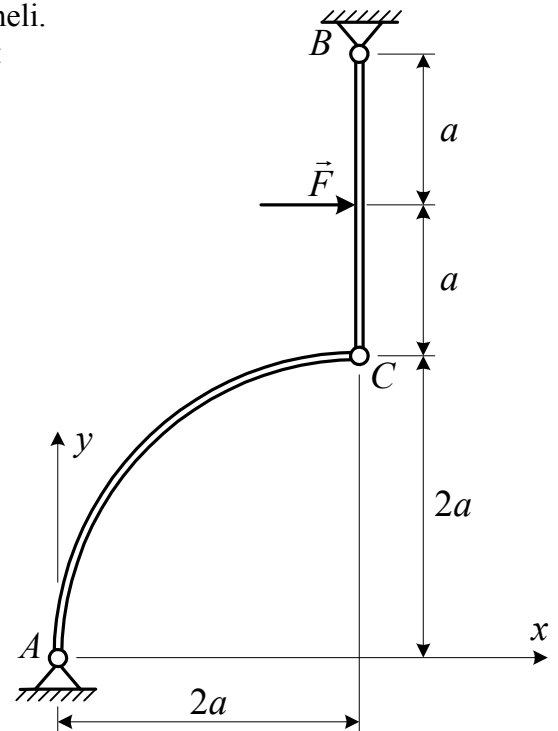
$$a = 1 \text{ m},$$

$$F = 60 \text{ N}.$$

Feladat:

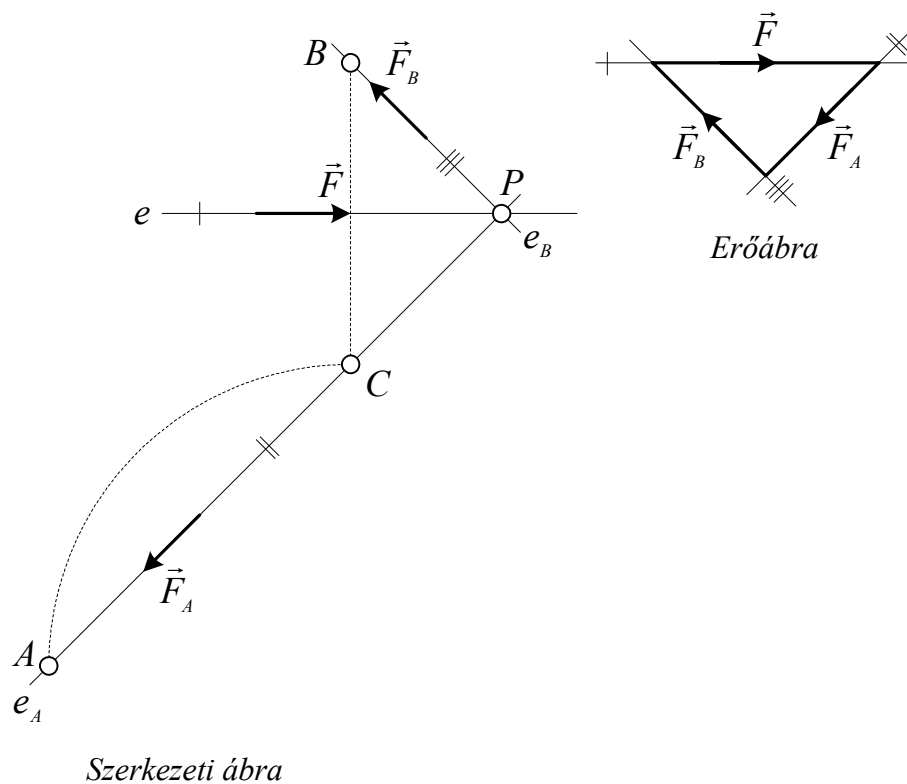
Az $\vec{F}_A$ és $\vec{F}_B$ támaszerők meghatározása

- szerkesztéssel és
- számítással.



Megoldás:

- A szerkesztéshez a szerkezeti, és az erőábra:



Ennél a szerkesztésnél is figyelembe vesszük azt, hogy a az AC görbe vonalú szerkezetrészt a támaszerőkön kívül más erő nem terheli, ezért a támaszerő hatásvonalának át kell haladjon mind az A illetve a C csuklópontra. A két

támaszerő illetve a terhelőerő közös metszéspontja az ábrán látható P pont. Az erőábra már könnyen adódik a szerkezeti ábrából. A támaszerők nagyságát lemérve az erőléptéknek megfelelően kapjuk az eredményt:

$$F_A = F_B \approx 42,5 \text{ N}.$$

- b. A támaszerők számításának első lépéseként meg tudjuk határozni a támaszerők hatásvonalainak irány-egységvektorát:

$$\vec{e}_A = \frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right),$$

$$\vec{e}_B = \frac{\vec{r}_{BP}}{|\vec{r}_{BP}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right).$$

Ezek ismeretében felírhatók az ismeretlen támaszerők vektorai, valamint a külső terhelő erő vektora is könnyen meghatározható, hiszen a vízszintes x tengellyel párhuzamos.

$$\vec{F}_A = F_A \vec{e}_A = \left(\frac{F_A \sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{F_A \sqrt{2}}{2} \vec{j} \right) \text{ N},$$

$$\vec{F}_B = F_B \vec{e}_B = \left(\frac{F_B \sqrt{2}}{2} \vec{i} - \frac{F_B \sqrt{2}}{2} \vec{j} \right) \text{ N},$$

$$\vec{F} = F \vec{e} = (60 \vec{i}) \text{ N}.$$

A statika alapegyenlete:

$$\vec{0} = \vec{F} + \vec{F}_A + \vec{F}_B,$$

Skalár egyenletekkel:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 60 + \frac{F_A \sqrt{2}}{2} + \frac{F_B \sqrt{2}}{2} \\ 0 &= \frac{F_A \sqrt{2}}{2} - \frac{F_B \sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} F_A &= -\frac{60}{\sqrt{2}} = F_B, \\ F_A &= F_B. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásaként a támaszerők nagysága adódott. A negatív előjel arra utal, hogy mindkét támaszerő irányát (lásd feljebb a két irány-egységvektort) ellentétes irányúnak tételeztük fel, mint ahogy azok valójában ébrednek. A támaszerők vektorai:

$$\underline{\underline{\vec{F}_A = F_A \vec{e}_A = (-30 \vec{i} - 30 \vec{j}) \text{ N},}}$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_B = F_B \vec{e}_B = (-30 \vec{i} + 30 \vec{j}) \text{ N}.}}$$

3.5. Példa

Az ábrán látható szerkezetet egy koncentrált erő terheli.
Adott a szerkezet geometriai méretei és a terhelőerő:

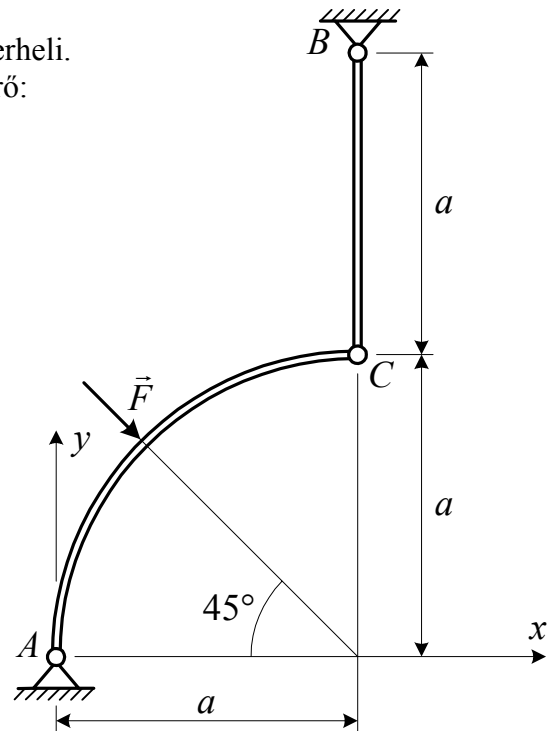
$$a = 2 \text{ m},$$

$$F = 80 \text{ N}.$$

Feladat:

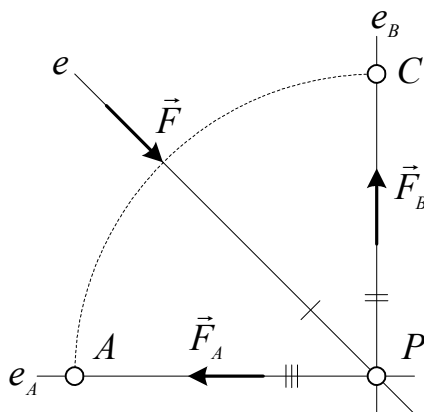
Az $\vec{F}_A$ és $\vec{F}_B$ támaszerők meghatározása

- szerkesztéssel és
- számítással.

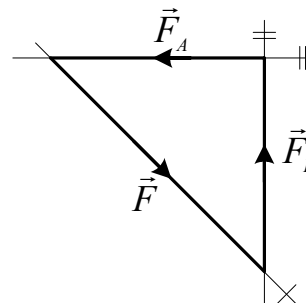


Megoldás:

- A szerkesztéshez a szerkezeti, és az erőábra:



Szerkezeti ábra



Erőábra

Most a BC rúd az, amelyben csak rúdírányú erők ébrednek, így az $\vec{F}_B$ erő is rúdírányú lesz. A szerkezeti- és az erőábra ennek megfelelően van megszerkesztve.

- b. Az adott koncentrált erő 45° -os szöget zár be a vízszintessel, ennek a szögnek a szögfüggvényeivel megadható a terhelő erő vektorának az irány-egységvektora:

$$\vec{e} = [(\cos 45^\circ)\vec{i} - (\sin 45^\circ)\vec{j}] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \right), \quad \text{ezzel}$$

$$\vec{F} = F \vec{e} = (40\sqrt{2}\vec{i} - 40\sqrt{2}\vec{j})\text{N}.$$

A támaszerők párhuzamosak a koordináta-rendszer x illetve y tengelyeivel, azaz az ismeretlen támaszerők vektorai:

$$\vec{F}_A = (F_A \vec{i})\text{N},$$

$$\vec{F}_B = (F_B \vec{j})\text{N}.$$

A statika alapegyenlete három erő egyensúlyára:

$$\vec{0} = \vec{F} + \vec{F}_A + \vec{F}_B,$$

Skalár egyenletekkel:

$$0 = 40\sqrt{2} + F_A \quad \Rightarrow \quad F_A = -40\sqrt{2} \text{ N } (\leftarrow),$$

$$0 = -40\sqrt{2} + F_B \quad \Rightarrow \quad F_B = 40\sqrt{2} \text{ N } (\uparrow).$$

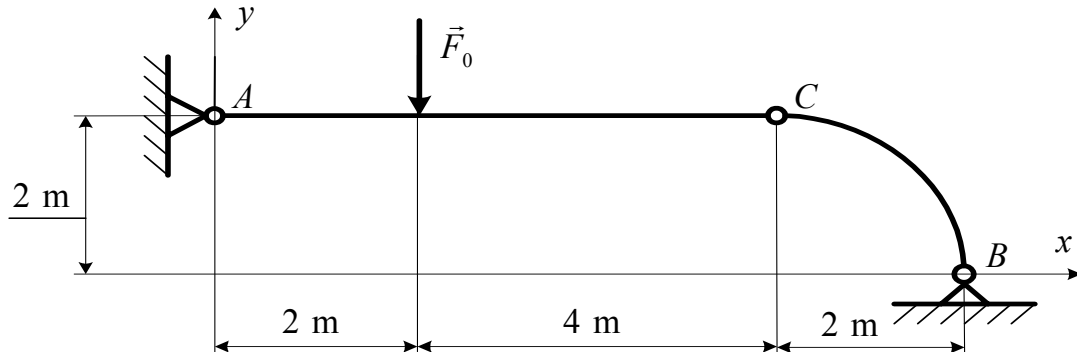
A végeredmény, vagyis a támaszerők vektorai:

$$\underline{\underline{\vec{F}_A = (-40\sqrt{2}\vec{i})\text{N}}},$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_B = (40\sqrt{2}\vec{j})\text{N}}}$$

3.6. Példa:

Adott $F_0 = 20\text{kN}$ és a szerkezet méretei.



Feladat:

$\vec{F}_A$ és $\vec{F}_B$ támasztóerők meghatározása:

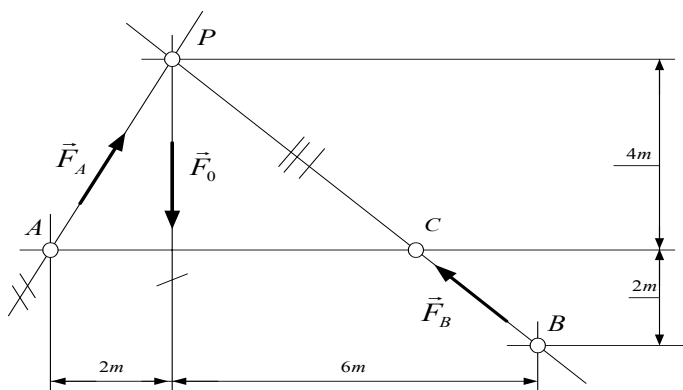
- szerkesztéssel és
- számítással.

Megoldás:

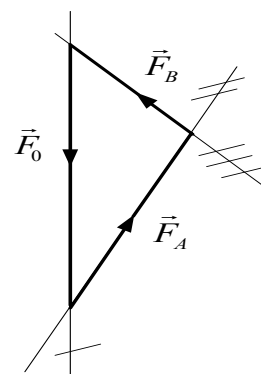
a. Szerkesztéssel

A kiindulás a statika alaptörvénye: $\vec{F}_0 + \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$. Három erő akkor van egyensúlyban, ha hatásvonalaik egy pontban metszik egymást. Az $\vec{F}_0$ hatásvonalát ismerjük, és mivel a $\overline{BC}$ rúdszakaszon csak „rúd irányú” erő léphet föl, így az $\vec{F}_B$ hatásvonalával közös, P metszésponton illetve az A ponton kell áthaladnia $\vec{F}_A$ hatásvonalának is.

Szerkezeti ábra



Erőábra



b. Számítással

A kiindulás itt is a statika alaptörvénye: $\vec{F}_0 + \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$

$$\vec{F}_0 = (-20\vec{j})kN,$$

$$\text{hiszen } \vec{e}_0 = -\vec{j}$$

$$\vec{F}_A = F_A \vec{e}_a, \quad \text{ahol}$$

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{r}_{AP}}{|\vec{r}_{AP}|} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$$

$$\vec{F}_B = F_B \vec{e}_b, \quad \text{ahol}$$

$$\vec{e}_b = \frac{\vec{r}_{BC}}{|\vec{r}_{BC}|} = \frac{-2\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

Behelyettesítve az alaptörvénybe kapjuk:

$$-F_0\vec{j} + F_A\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}\right) + F_B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) = \vec{0} \quad / \cdot \vec{i} \quad / \cdot \vec{j}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}F_A + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}F_B\right) = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}F_A + \frac{1}{\sqrt{2}}F_B = 20,$$

majd adjuk össze a két egyenletet,

$$\frac{3}{\sqrt{5}}F_A = 20 \quad \text{ebből}$$

$$F_A = \frac{20\sqrt{5}}{3} = 14,907kN \quad \text{és} \quad F_B = \frac{20\sqrt{2}}{3} = 9,4268kN.$$

Most már:

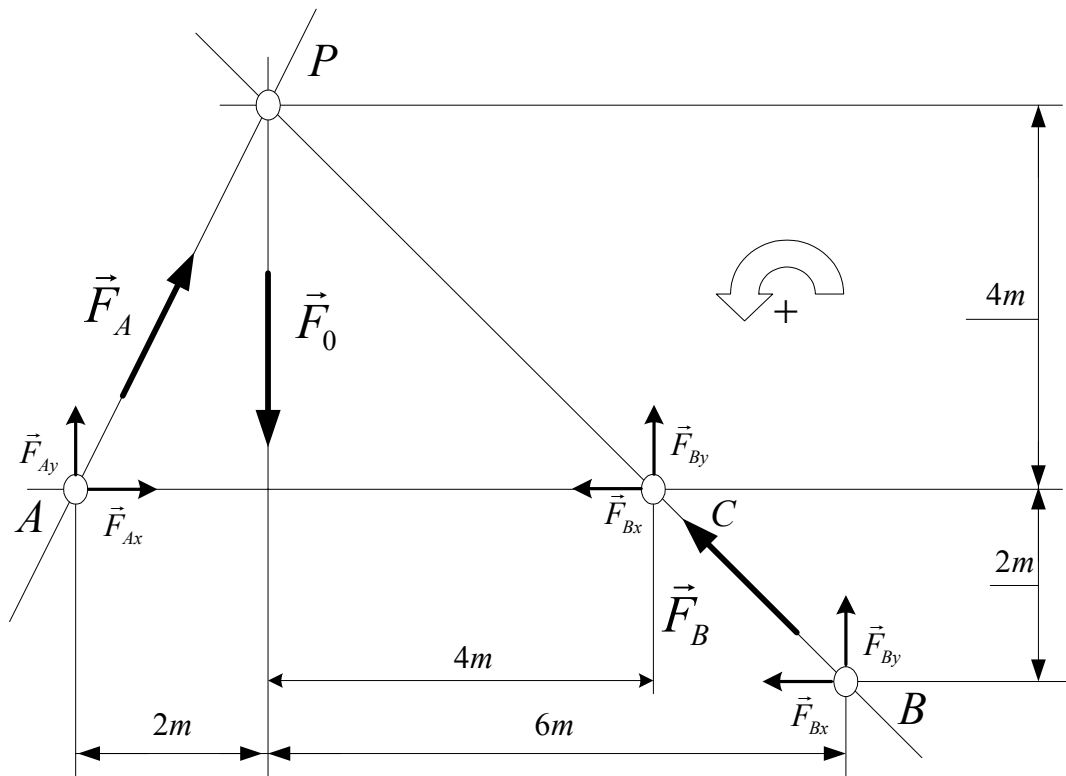
$$\vec{F}_A = F_A \vec{e}_a = \frac{20\sqrt{5}}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} \right) = \frac{20}{3}\vec{i} + \frac{40}{3}\vec{j}$$

$$\vec{F}_B = F_B \vec{e}_b = \frac{20\sqrt{2}}{3} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} \right) = -\frac{20}{3}\vec{i} + \frac{20}{3}\vec{j}$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_A = (6,667\vec{i} + 13,332\vec{j})kN}}$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_B = (-6,667\vec{i} + 6,667\vec{j})kN}}$$

Ellenőrzés nyomatéki és vetületi egyenletekkel:



A számítás során kihasználjuk, hogy az erő a hatásvonalára mentén bárhová eltolható. Az $\vec{F}_B$ erőt először helyezzük a C pontba, és írjuk föl az A ponton átmenő a tengelyre, valamint a C ponton átmenő c tengelyre a nyomatéki egyenleteket:

$$M_a = 0 = 6F_{By} - 2F_0 \quad \rightarrow \quad F_{By} = \frac{F_0}{3} = 6,667 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$M_c = 0 = 4F_0 - 6F_{Ay} \quad \rightarrow \quad F_{Ay} = \frac{2F_0}{3} = 13,332 \text{ kN } (\uparrow)$$

Az $\vec{F}_B$ erőt most helyezzük a B pontba, és ismét az A ponton átmenő a tengelyre írjuk föl a nyomatéki egyenletet:

$$M_a = 0 = -2F_{Bx} + 8F_{By} - 2F_0 \quad \rightarrow \quad F_{Bx} = \frac{F_0}{3} = 6,667 \text{ kN } (\leftarrow)$$

Az x irányú vetületi egyenlet értelmében: $(\sum F_x = 0)$

$$F_x = 0 = -F_{Bx} + F_{Ax} \quad \rightarrow \quad F_{Ax} = 6,667 \text{ kN } (\rightarrow)$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_A = (6,667\vec{i} + 13,332\vec{j}) \text{ kN}}}$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_B = (-6,667\vec{i} + 6,667\vec{j}) \text{ kN}}}$$