

4. MECHANIKA – STATIKA GYAKORLAT
(kidolgozta: Triesz Péter, egy. ts.; Tarnai Gábor, mérnök tanár)

*Erő, nyomaték, erőrendszer eredője,
erőrendszerek egyenértékűsége*

4.1. Példa:

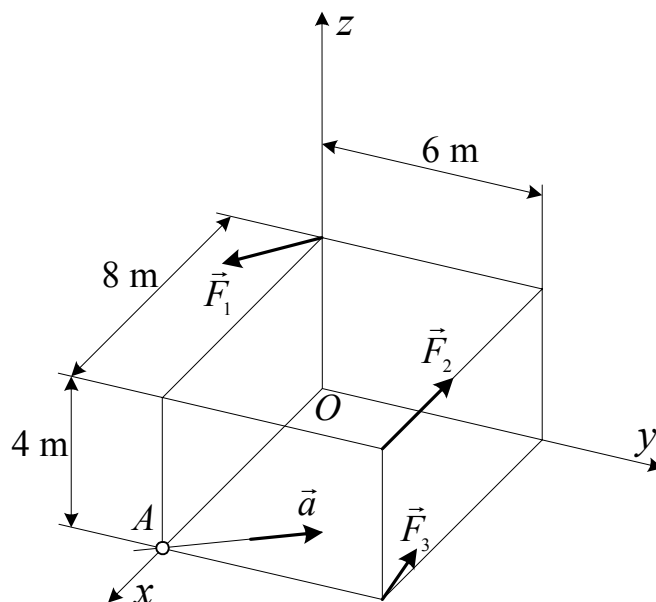
A rajzon látható hasábot az alábbi erők
alkotta erőrendszer terheli:

$$\vec{F}_1 = (4\vec{i} - 4\vec{j}) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_2 = (-2\vec{i}) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_3 = (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) \text{ kN},$$

$$\vec{a} = (-2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}) \text{ m}.$$



Feladat:

Határozza meg

- az erőrendszer origóra számított nyomatékát ($\vec{M}_O = ?$),
- az erőrendszer $\vec{a}$ egyenesre számított nyomatékát ($M_a = ?$),
- az erőrendszer y , illetve z tengelyekre számított nyomatékait ($M_y = ?$ és $M_z = ?$)!

Megoldás:

- Erőrendszer pontra számított nyomatékára az alapösszefüggés, ha az erőrendszert csak koncentrált erők alkotják:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \text{ ahol } n \text{ a koncentrált erők száma.}$$

Ez esetben három erő nyomatékát kell összegezni, azaz:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3.$$

A helyvektorok az ábráról leolvashatók:

$$\vec{r}_1 = (4\vec{k})\text{m},$$

$$\vec{r}_2 = (8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k})\text{m},$$

$$\vec{r}_3 = (8\vec{i} + 6\vec{j})\text{m}.$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (16\vec{i} + 16\vec{j}) \text{ kNm},$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-8\vec{j} + 12\vec{k}) \text{ kNm},$$

$$\vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (24\vec{i} - 32\vec{j} + 12\vec{k}) \text{ kNm},$$

$$\vec{M}_0 = (40\vec{i} - 24\vec{j} + 24\vec{k}) \text{ kNm}.$$

- b. Az adott koordinátatengelyekre számolt nyomatékok úgy határozhatók meg, hogy a megfelelő tengelyek irány-egységvektoraival kell skalárisan megszorozni az origóra számolt nyomaték vektorát:

$$M_y = \vec{M}_0 \cdot \vec{j} = -24 \text{ kNm},$$

$$M_z = \vec{M}_0 \cdot \vec{k} = 24 \text{ kNm}.$$

- c. Általánosítva, adott erőrendszernek az A ponton átmenő, „ a ” egyenesre számolt nyomatékát az alábbi módon írhatjuk föl:

$$M_a = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a, \quad \text{ahol } \vec{M}_A, \text{ az ER-nek az } A \text{ pontra számított nyomatéka.}$$

A képletből kitűnik, hogy az egyenesre számolt nyomaték két vektor skaláris szorzatával adódik, vagyis skaláris mennyiség, ellentétben a pontra számolt nyomatékkal, ami vektor mennyiség.

$$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^3 \vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i = \vec{r}_{A1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{A2} \times \vec{F}_2 + \vec{r}_{A3} \times \vec{F}_3$$

Az A pontból az erők támadáspontjaiba mutató helyvektorok szintén az ábráról leolvashatók:

$$\vec{r}_{A1} = (-8\vec{i} + 4\vec{k})\text{m},$$

$$\vec{r}_{A2} = (6\vec{j} + 4\vec{k})\text{m},$$

$$\vec{r}_{A3} = (6\vec{j})\text{m}.$$

$$\vec{M}_{01} = \vec{r}_{A1} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (16\vec{i} + 16\vec{j} + 32\vec{k}) \text{ kNm},$$

$$\vec{M}_{02} = \vec{r}_{A2} \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-8\vec{j} + 12\vec{k}) \text{ kNm},$$

$$\vec{M}_{03} = \vec{r}_{A3} \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (24\vec{i} - 12\vec{k}) \text{ kNm},$$

$$\vec{M}_A = (40\vec{i} + 8\vec{j} + 32\vec{k}) \text{ kNm}.$$

Az a egyenes irány-egységvektora:

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(-2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k})}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2}} = \left(-\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right).$$

Az a egyenesre számolt nyomaték:

$$M_a = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a = 40\left(-\frac{1}{3}\right) + 8 \cdot \frac{2}{3} + 32\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{88}{3} \text{ kNm}.$$

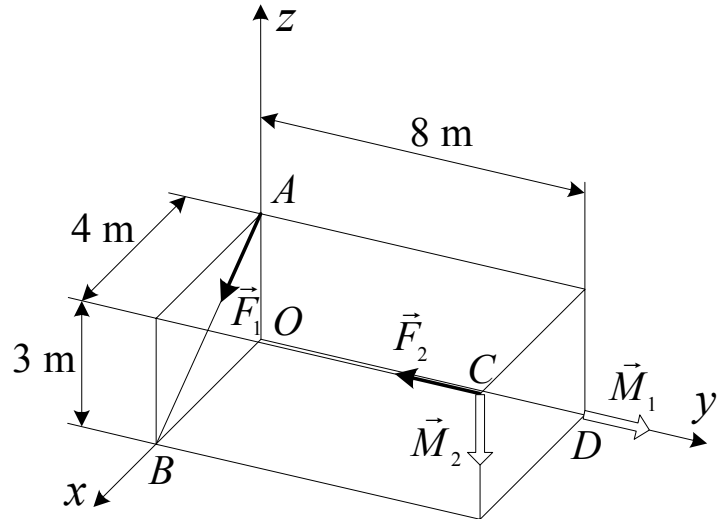
$$\underline{\underline{M_a = 29,33 \text{ kNm}}}$$

4.2. Példa:

Adott egy hasáb méreteivel, és az azt terhelő erőrendszer:

$$F_1 = F_2 = 5 \text{ MN} (= 5 \cdot 10^6 \text{ N}),$$

$$M_1 = M_2 = 20 \text{ MNm} (= 20 \cdot 10^6 \text{ Nm}).$$



Feladat:

Határozza meg

- az erőrendszer origóra számított nyomatékát ($\vec{M}_O = ?$),
- az erőrendszer C pontra számított nyomatékát ($M_C = ?$),
- az erőrendszer x , y , illetve z tengelyekre számított nyomatékait ($M_x = ?$, $M_y = ?$ és $M_z = ?$)!

Megoldás:

- A nyomaték számítása annyiban módosul ennél a feladatnál, hogy ez esetben a koncentrált nyomatékokat is összegezni kell:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$

Az erővektorok:

$$\vec{F}_1 = F_1 \cdot \vec{e}_1 = (4\vec{i} - 3\vec{k}) \text{ MN}, \quad \text{ahol } \vec{e}_1 = \frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|} = \frac{4\vec{i} - 3\vec{k}}{\sqrt{25}}$$

$$\vec{F}_2 = F_2 \cdot \vec{e}_2 = (-5\vec{j}) \text{ MN} \quad \text{ahol } \vec{e}_2 = -\vec{j}$$

A nyomatékvektorok:

$$\vec{M}_1 = M_1 \vec{f}_1 = (20\vec{j}) \text{ MNm}, \quad \vec{M}_2 = M_2 \vec{f}_2 = (-20\vec{k}) \text{ MNm},$$

ahol $\vec{f}_1$ és $\vec{f}_2$ a nyomatékok irány-egységvektorai, az ábráról leolvashatók.

Az erők támadáspontjainak helyvektorai:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_A = (3\vec{k}) \text{ m}, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_C = (4\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}) \text{ m}.$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (12\vec{j}) \text{ MNm},$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 8 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (15\vec{i} - 20\vec{k}) \text{ MNm},$$

$$\vec{M}_0 = (12\vec{j}) + (15\vec{i} - 20\vec{k}) + (20\vec{j}) + (-20\vec{k}) = \text{MNm}$$

$$\underline{\underline{\vec{M}_O = (15\vec{i} + 32\vec{j} - 40\vec{k}) \text{ MNm} .}}$$

b. az erőrendszer C pontra számított nyomatéka:

$$\vec{M}_C = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_{Ci} \times \vec{F}_i) + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j.$$

$$\vec{r}_{C1} = \vec{r}_{CA} = (-4\vec{i} - 8\vec{j}) \text{ m}, \quad \vec{r}_{C2} = \vec{0}.$$

$$\vec{r}_{C1} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -8 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (24\vec{i} - 12\vec{j} + 32\vec{k}) \text{ MNm}, \quad \vec{r}_{C2} \times \vec{F}_2 = \vec{0},$$

$$\vec{M}_C = [(24\vec{i} - 12\vec{j} + 32\vec{k}) + (20\vec{j}) + (-20\vec{k})] \text{ MNm}$$

$$\underline{\underline{\vec{M}_C = (24\vec{i} + 8\vec{j} + 12\vec{k}) \text{ MNm} .}}$$

c. Az ER x, y illetve z tengelyekre számított nyomatékát, az origóra korábban már számolt, $\vec{M}_0$ nyomatékból határozzuk meg:

$$\underline{\underline{\vec{M}_O = (15\vec{i} + 32\vec{j} - 40\vec{k}) \text{ MNm}}}$$

$$M_x = \vec{M}_O \cdot \vec{i} = 15 \text{ MNm},$$

$$\underline{\underline{M_x = 15 \text{ MNm}}},$$

$$M_y = \vec{M}_O \cdot \vec{j} = 32 \text{ MNm},$$

$$\underline{\underline{M_y = 32 \text{ MNm}}}$$

$$M_z = \vec{M}_O \cdot \vec{k} = -40 \text{ MNm},$$

$$\underline{\underline{M_z = -40 \text{ MNm} .}}$$

4.3. Példa:

Adott egy síkbeli erőrendszer:

$$\vec{F}_1 = (8\vec{i} + 3\vec{j}) \text{ kN},$$

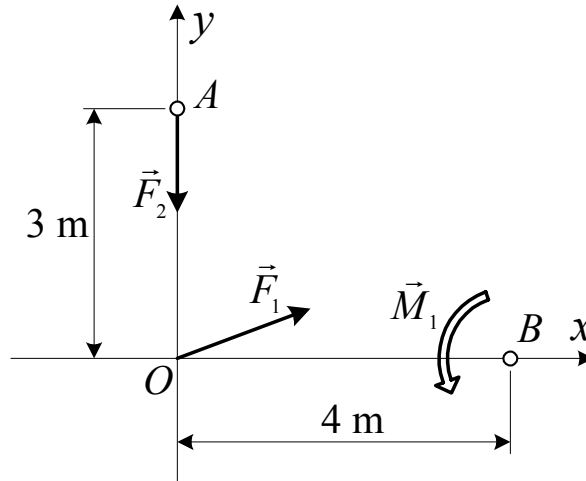
$$\vec{F}_2 = (-5\vec{j}) \text{ kN},$$

$$\vec{M}_1 = (12\vec{k}) \text{ kNm}.$$

Feladat:

Határozza meg

- az erőrendszer origóba redukált vektorkettőssét, $(\vec{F} = ?, \vec{M}_0 = ?)$,
- az eredő erő hatásvonalát $(x_e = ?, y_e = ?)$!



Megoldás:

a.

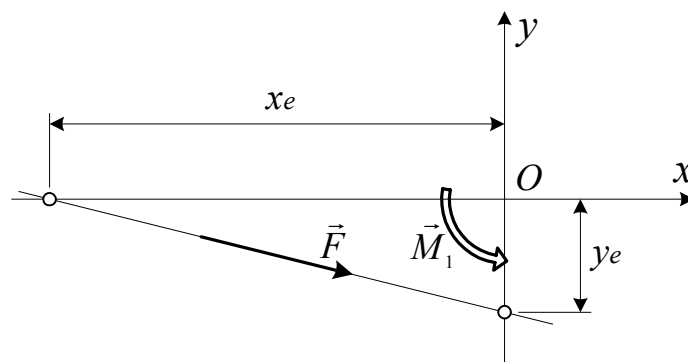
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i = (8\vec{i} - 2\vec{j}) \text{ kN}.$$

Mivel mindkét erőnek zérus a nyomatéka az origóra (az egyiknek a hatásvonala átmegy rajta, a másiknak támadáspontja), ezért

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_1 = (12\vec{k}) \text{ kNm}.$$

- b. Síkbeli erőrendszer esetén a nyomaték definíciójának felhasználásával vezethetők le a következő összefüggések:

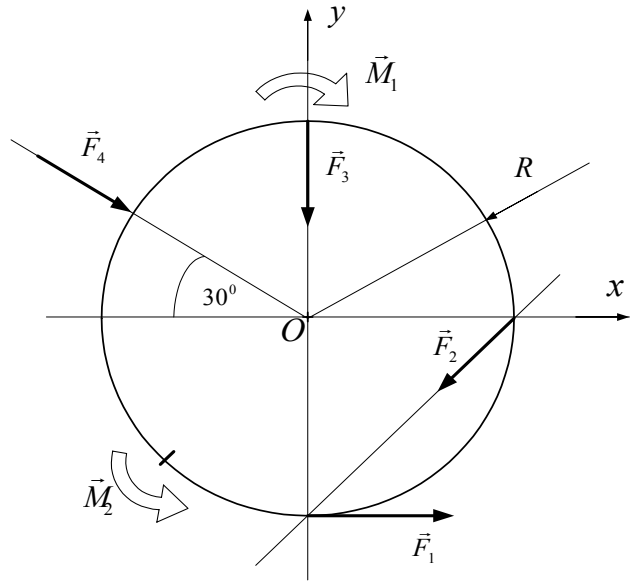
$$x_e = \frac{M_{0z}}{F_y} = \frac{12}{-2} = -6 \text{ m}, \quad \text{és} \quad y_e = \frac{M_{0z}}{-F_x} = -\frac{12}{8} = -1,5 \text{ m}.$$



4.4. Példa:

Adott az ábrán látható síkbeli erőrendszer:

$$\begin{aligned} F_1 &= 6 \text{ kN}, & F_2 &= 8 \text{ kN}, \\ F_3 &= 4 \text{ kN}, & F_4 &= 12 \text{ kN}, \\ M_1 &= 8 \text{ kNm}, & M_2 &= 6 \text{ kNm}, \\ R &= 2 \text{ m}. \end{aligned}$$



Feladat:

Határozza meg

- az erőrendszer origóba redukált vektorkettőjét, ($\vec{F} = ?$, $\vec{M}_O = ?$),
- az eredő erő hatásvonalát ($x_e = ?$, $y_e = ?$)!

Megoldás:

- az erőrendszer origóba redukált vektorkettőse:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i, \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^4 (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_{j=1}^2 \vec{M}_j.$$

Az erővektorok:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= F_1 \vec{e}_1 = (6\vec{i}) \text{ kN}, \\ \vec{F}_2 &= F_2 \vec{e}_2 = 8(-\cos 45^\circ \vec{i} - \sin 45^\circ \vec{j}) = (-4\sqrt{2}\vec{i} - 4\sqrt{2}\vec{j}) \text{ kN}, \\ \vec{F}_3 &= F_3 \vec{e}_3 = (-4\vec{j}) \text{ kN}, \\ \vec{F}_4 &= F_4 \vec{e}_4 = 12(\cos 30^\circ \vec{i} - \sin 30^\circ \vec{j}) = (6\sqrt{3}\vec{i} - 6\vec{j}) \text{ kN}. \end{aligned}$$

Az eredő: $\underline{\underline{\vec{F} = (10,735\vec{i} - 15,657\vec{j}) \text{ kN}}}$.

Az erők támadáspontjainak helyvektorai:

$$\vec{r}_1 = (-2\vec{j}) \text{ m}, \quad \vec{r}_2 = (2\vec{i}) \text{ m}, \quad \vec{r}_3 = (2\vec{j}) \text{ m}, \quad \vec{r}_4 = (-\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}) \text{ m}.$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (12\vec{k}) \text{ kNm},$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ -4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = (-8\sqrt{2}\vec{k}) \text{ kNm},$$

$$\vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}, \text{ hiszen } \vec{F}_3 \text{ hatásvonala átmegy az origón.}$$

$$\vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 6\sqrt{3} & -6 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}, \text{ hiszen } \vec{F}_4 \text{ hatásvonala átmegy az origón.}$$

Az origóra számolt nyomaték:

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) + (\vec{r}_3 \times \vec{F}_3) + (\vec{r}_4 \times \vec{F}_4)$$

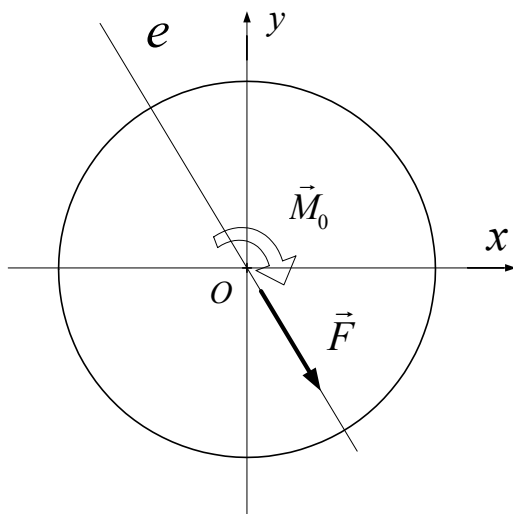
$$\vec{M}_0 = -8\vec{k} + 6\vec{k} + 12\vec{k} - 8\sqrt{2}\vec{k} + 0\vec{k} + 0\vec{k} = (-1,314\vec{k}) \text{ kNm}.$$

$$\vec{M}_0 = (-1,314\vec{k}) \text{ kNm}$$

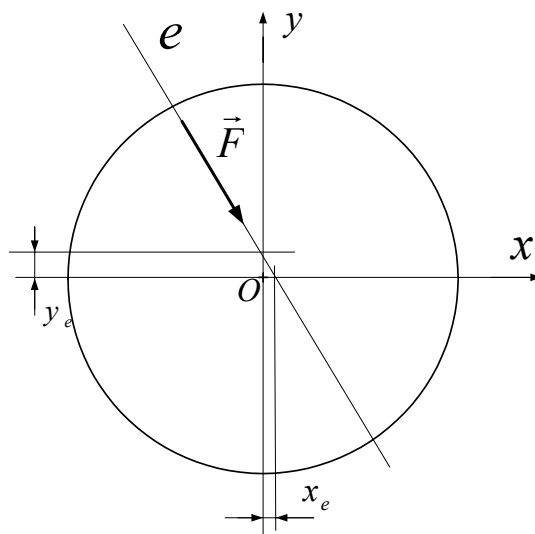
b. az eredő erő hatásvonala:

$$x_e = \frac{M_{0z}}{F_y} = \frac{-1,314}{-15,657} = 0,084 \text{ m} \quad \text{és} \quad y_e = -\frac{M_{0z}}{F_x} = -\frac{-1,314}{10,735} = 0,122 \text{ m}.$$

A redukált vektor kettős



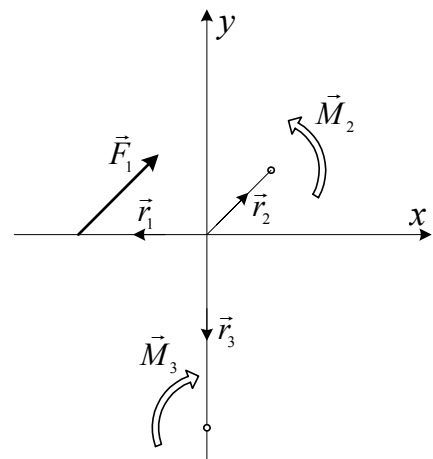
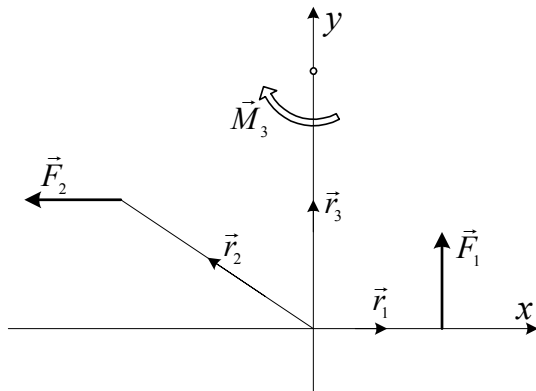
Az eredő erő



4.5. Példa:

Adott két síkbeli erőrendszer:

$$\begin{array}{llll} \vec{r}_1 = (2\vec{i})\text{m}, & \vec{F}_1 = (4\vec{j})\text{N}, & \vec{r}_1 = (-2\vec{i})\text{m}, & \vec{F}_1 = (3\vec{i} + 3\vec{j})\text{N}, \\ (\text{ER})': \vec{r}_2 = (-3\vec{i} + 2\vec{j})\text{m}, & \vec{F}_2 = (-2\vec{i})\text{N}, & (\text{ER})'': \vec{r}_2 = (\vec{i} + \vec{j})\text{m}, & \vec{M}_2 = (5\vec{k})\text{N}, \\ \vec{r}_3 = (4\vec{j})\text{m}, & \vec{M}_3 = (-3\vec{k})\text{N}, & \vec{r}_3 = (-3\vec{j})\text{m}, & \vec{M}_3 = (-\vec{k})\text{N}. \end{array}$$



Feladat:

Állapítsa meg, hogy a két erőrendszer egyenértékű-e!

Megoldás:

Két, vagy több erőrendszer egymással egyenértékű, ha egy tetszőleges pontra – origóra – redukált vektorkettősük egyenlők.

1-es erőrendszer:

$$\begin{aligned} \vec{F}' &= \sum_i \vec{F}_i', \quad \vec{M}'_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i' + \sum_j \vec{M}_j', \\ \vec{F}' &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-2\vec{i} + 4\vec{j})\text{N}, \quad F' = 2\sqrt{5}\text{ N}, \\ \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 &= (8\vec{k})\text{Nm}, \quad \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (4\vec{k})\text{Nm}, \\ \vec{M}'_0 &= (9\vec{k})\text{Nm}, \\ x'_e &= \frac{M'_0}{F'_y} = 2,25\text{ m}, \quad y'_e = -\frac{M'_0}{F'_x} = 4,5\text{ m}. \end{aligned}$$

2-es erőrendszer:

$$\begin{aligned} \vec{F}'' &= \sum_i \vec{F}_i'', \quad \vec{M}''_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i'' + \sum_j \vec{M}_j'', \\ \vec{F}'' &= \vec{F}_1 = (3\vec{i} + 3\vec{j})\text{N}, \quad F'' = 3\sqrt{2}\text{ N}, \\ \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 &= (-6\vec{k})\text{Nm}, \\ \vec{M}''_0 &= (-2\vec{k})\text{Nm}, \\ x''_e &= \frac{M''_0}{F''_y} = -0,66\text{ m}, \quad y''_e = -\frac{M''_0}{F''_x} = 0,66\text{ m}. \end{aligned}$$

A fenti eredményekből következik, hogy a két erőrendszer nem egyenértékű.

4.6. Példa:

Adott egy síkbeli erőrendszer:

$$F_1 = F_3 = 100 \text{ N}$$

$$F_2 = 50\sqrt{2} \text{ N}$$

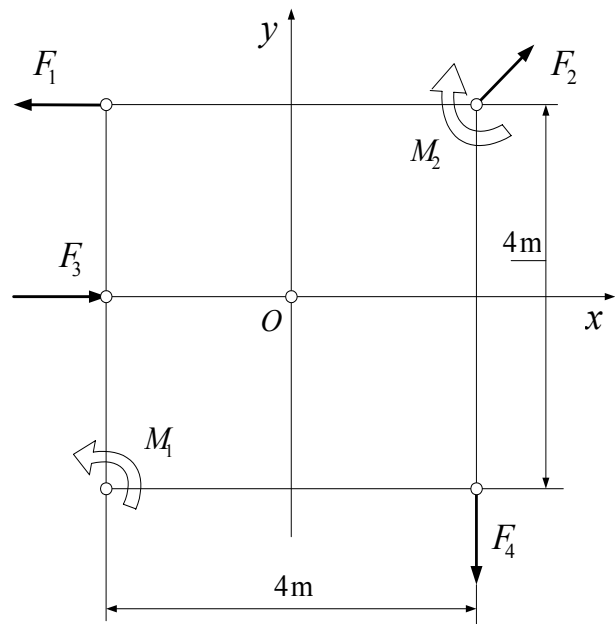
$$F_4 = 150 \text{ N}$$

$$M_1 = 150 \text{ Nm}$$

$$M_2 = 150 \text{ Nm}$$

Feladat:

- Határozza ER $(\vec{F}, \vec{M}_0)$ vektorkettősét, valamint az eredő hatásvonalát!
- Határozza meg az $\vec{F}_5$ vektort úgy, hogy ezzel együtt az ER egyensúlyi legyen!
 $(\vec{F} = \vec{0}, \vec{M}_0 = \vec{0})$



Megoldás:

- Írjuk föl az ER-t alkotó vektorokat:

$$\vec{F}_1 = (-100\vec{i}) \text{ N}$$

$$\vec{M}_1 = (150\vec{k}) \text{ Nm}$$

$$\vec{F}_2 = (50\vec{i} + 50\vec{j}) \text{ N}$$

$$\vec{M}_2 = (-150\vec{k}) \text{ Nm}$$

$$\vec{F}_3 = (100\vec{i}) \text{ N}$$

$$\vec{F}_4 = (-150\vec{j}) \text{ N}$$

Az ER eredője:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

$$\vec{F} = (-100\vec{i}) + (50\vec{i} + 50\vec{j}) + (100\vec{i}) + (-150\vec{j}) \text{ N}$$

$$\underline{\underline{\vec{F} = (50\vec{i} - 100\vec{j}) \text{ N}}}$$

Az erőrendszer nyomatékának meghatározása az origóra:

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^4 (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_{j=1}^2 \vec{M}_j, \quad \text{ahol } \vec{r}_i \text{ helyvektorok.}$$

$$\vec{r}_1 = (-2\vec{i} + 2\vec{j})m; \vec{r}_2 = (2\vec{i} + 2\vec{j})m; \vec{r}_3 = (-2\vec{i})m; \vec{r}_4 = (2\vec{i} - 2\vec{j})m$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 0 \\ -100 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0\vec{i}) - (0\vec{j}) + (200\vec{k}) = (200\vec{k}) \text{ Nm}$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 50\sqrt{2} & 50\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \text{ Nm, hiszen } \vec{F}_2 \text{ átmegy az origón.}$$

$$\vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \vec{0} \text{ Nm, hiszen } \vec{F}_3 \text{ átmegy az origón.}$$

$$\vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -150 & 0 \end{vmatrix} = (0\vec{i}) - (0\vec{j}) + (-300\vec{k}) = (-300\vec{k}) \text{ Nm}$$

Tehát:

$$\vec{M}_0 = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) + (\vec{r}_3 \times \vec{F}_3) + (\vec{r}_4 \times \vec{F}_4) + \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

$$\vec{M}_0 = (200\vec{k}) + (0\vec{k}) + (0\vec{k}) + (-300\vec{k}) + (150\vec{k}) + (-150\vec{k})$$

$$\underline{\underline{\vec{M}_0 = (-100\vec{k}) \text{ Nm}}}$$

A redukált vektorkettős: $\vec{F} = (50\vec{i} - 100\vec{j}) \text{ N}$; $\vec{M}_0 = (-100\vec{k}) \text{ Nm}$, ami azt jelenti, hogy az ER-t az origóba redukálva ezzel a két erővel helyettesíthetjük.

Hol helyezkedik el az az egyetlen erő (eredő), mellyel az eredeti erőrendszert helyettesíteni tudjuk?

$$x_e = \frac{M_{0z}}{F_y} = \frac{-100}{-100} = 1 \text{ m}$$

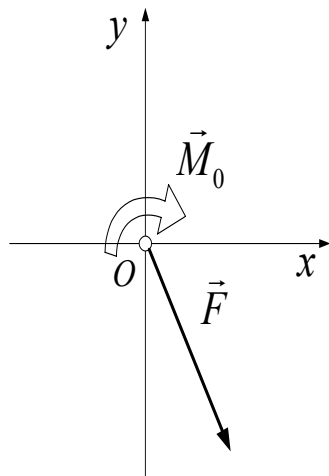
$$y_e = -\frac{M_{0z}}{F_x} = -\frac{-100}{50} = 2 \text{ m}$$

$$\text{A hatásvonalnak az origótól mért távolsága: } h_e = \frac{|\vec{M}_0|}{|\vec{F}|},$$

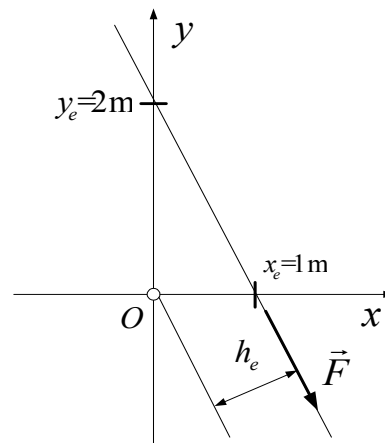
$$\text{ahol } |\vec{M}_0| = 100 \text{ Nm és } |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{50^2 + 100^2} = 111,803 \text{ m}$$

$$h_e = \frac{100}{111,803} = 0,894 \text{ m}$$

Az ER redukált vektorkettőse



Az eredő erő és hatásvonala



b. Az $\vec{F}_5$ vektor meghatározása:

Az ER akkor lesz egyensúlyi, ha

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^5 \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{és} \quad \vec{M}_0 = \sum_{i=1}^5 (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_{j=1}^2 \vec{M}_j = \vec{0}, \quad \text{azaz}$$

$$\vec{F}_5 = -(\vec{F}) = (-50\vec{i} + 100\vec{j}) \text{ N} \quad \text{és hatásvonala megegyezik az } \vec{F} \text{ hatásvonalával.}$$

$$x_e = 1 \text{ m} \quad \text{és} \quad y_e = 2 \text{ m}.$$

