

5. MECHANIKA – STATIKA GYAKORLAT
(kidolgozta: Triesz Péter, egy. ts.; Tarnai Gábor, mérnök tanár)

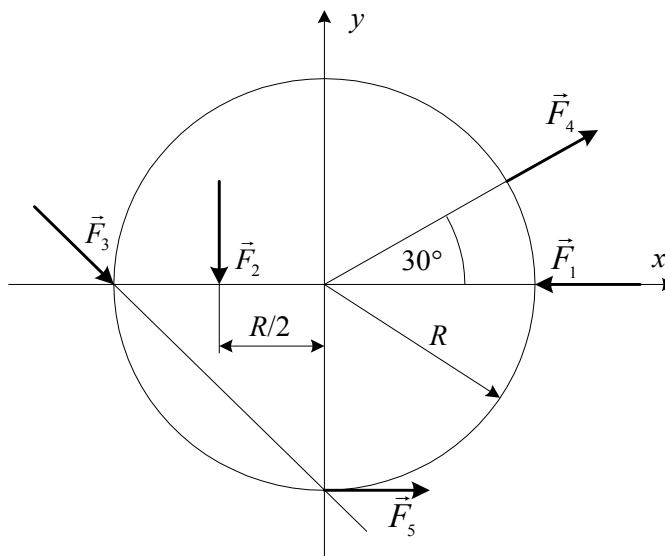
*Erőrendszer eredő vektorkettőse,
vonal mentén megoszló erőrendszerek*

5.1. Példa

Adott:

az ábrán látható erőrendszer.

$$\begin{aligned} F_1 &= 3 \text{ kN}, \\ F_2 &= 4 \text{ kN}, \\ F_3 &= 4 \text{ kN}, \\ F_4 &= 5 \text{ kN}, \\ F_5 &= 2 \text{ kN}, \\ R &= 3 \text{ m}. \end{aligned}$$



Feladat:

- Határozza meg az eredő $(\vec{F}, \vec{M}_0)$ vektorkettőt, valamint az eredő hatásvonalának helyét!
- Határozza meg az $\vec{F}$ eredő erőt szerkesztéssel!

Megoldás:

- Első lépésként az erők vektorait kell meghatározni. Az ábráról leolvashatók az erők hatásvonalainak irány-egységvektorai.

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= F_1 \vec{e}_1 = 3(-\vec{i}) = (-3\vec{i}) \text{ kN}, \\ \vec{F}_2 &= F_2 \vec{e}_2 = 4(-\vec{j}) = (-4\vec{j}) \text{ kN}, \\ \vec{F}_3 &= F_3 \vec{e}_3 = 4(\cos 45^\circ \vec{i} - \sin 45^\circ \vec{j}) = (2\sqrt{2}\vec{i} - 2\sqrt{2}\vec{j}) \text{ kN}, \\ \vec{F}_4 &= F_4 \vec{e}_4 = 5(\cos 30^\circ \vec{i} + \sin 30^\circ \vec{j}) = (2,5\sqrt{3}\vec{i} + 2,5\vec{j}) \text{ kN}, \\ \vec{F}_5 &= F_5 \vec{e}_5 = 2(\vec{i}) = (2\vec{i}) \text{ kN}. \end{aligned}$$

Az eredő erő:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^5 \vec{F}_i = (6,158\vec{i} - 4,328\vec{j}) \text{ kN}.$$

Az erőrendszer origóra számolt nyomatékához meg kell határozni az egyes erők origóra vett nyomatékát, majd ezeket összegezzük:

$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = (3\vec{i}) \times (-3\vec{i}) = \vec{0},$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (-1,5\vec{i}) \times (-4\vec{j}) = (6\vec{k}) \text{ kNm},$$

$$\vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = (-3\vec{i}) \times (2\sqrt{2}\vec{i} - 2\sqrt{2}\vec{j}) = (6\sqrt{2}\vec{k}) \text{ kNm},$$

$$\vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = (1,5\sqrt{3}\vec{i} + 1,5\vec{j}) \times (2,5\sqrt{3}\vec{i} + 2,5\vec{j}) = \vec{0},$$

$$\vec{r}_5 \times \vec{F}_5 = (-3\vec{j}) \times (2\vec{i}) = (6\vec{k}) \text{ kNm}.$$

$$\underline{\underline{\vec{M}_0 = (20,485\vec{k}) \text{ kNm.}}}$$

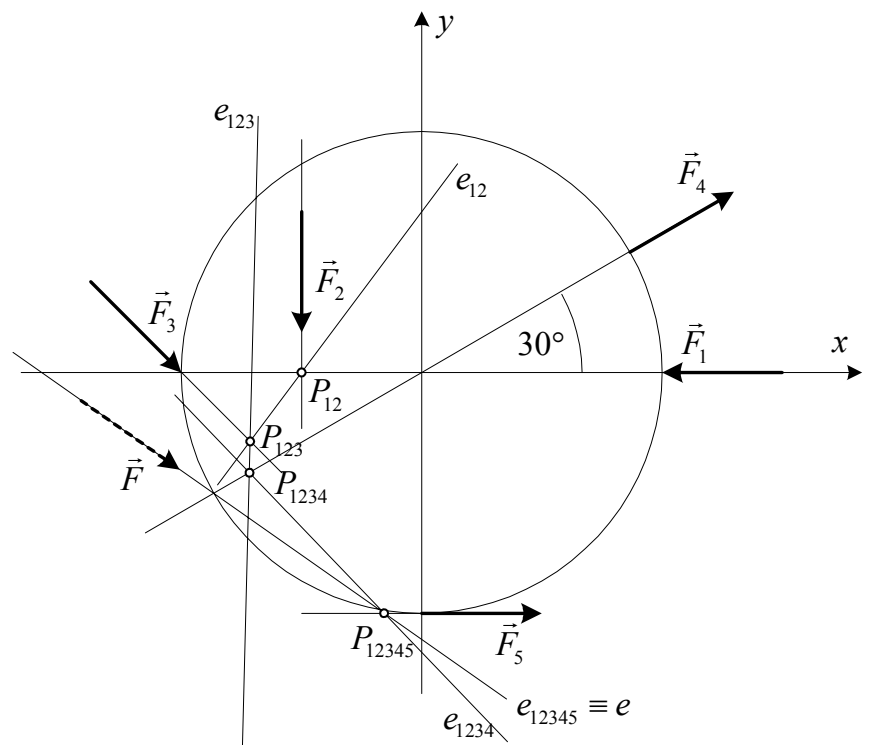
Az eredő erő hatásvonalának helye is meghatározandó:

$$x_e = \frac{M_{0z}}{F_y} = \frac{20,485}{-4,328} = -4,733 \text{ m},$$

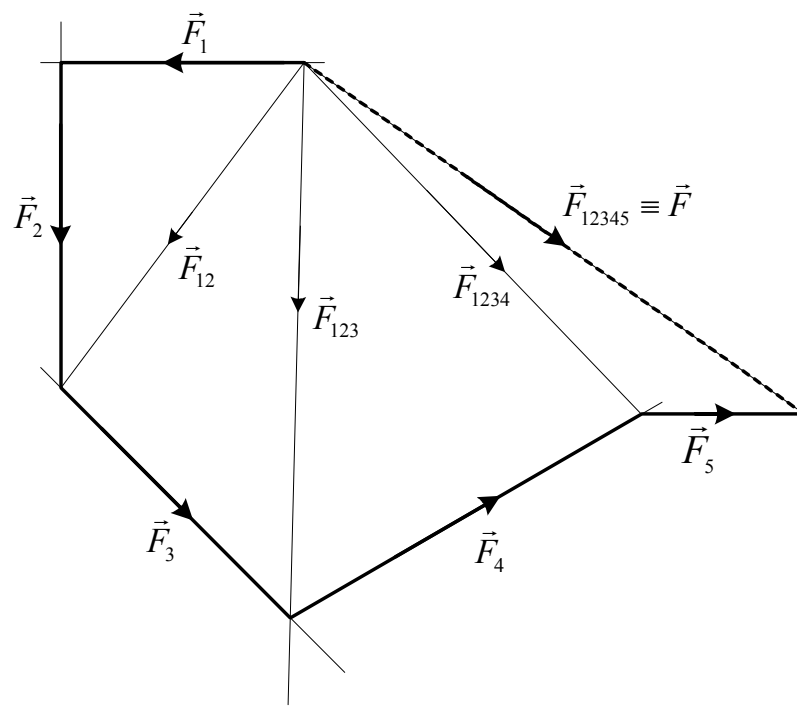
$$y_e = -\frac{M_{0z}}{F_x} = -\frac{20,485}{6,158} = -3,326 \text{ m}.$$

- b. Részeredő-sokszög szerkesztésénél azt az alaptételt használjuk fel, miszerint két erő eredőjének hatásvonala átmegy a két erő hatásvonalának metszéspontján. Elsőként megszerkesztjük az $\vec{F}_1$ és $\vec{F}_2$ erők eredőjét, majd az $\vec{F}_{12}$ és $\vec{F}_3$ erőket, stb., míg megkapjuk az erőrendszer eredőjét, illetve annak hatásvonalát.

$$\begin{aligned} & \underbrace{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}_{\vec{F}_{12}} + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 \\ & \underbrace{\vec{F}_{12} + \vec{F}_3}_{\vec{F}_{123}} + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 \\ & \underbrace{\vec{F}_{123} + \vec{F}_4 + \vec{F}_5}_{\vec{F}} \end{aligned}$$



Szerkezeti ábra



Erőábra

5.2. Példa

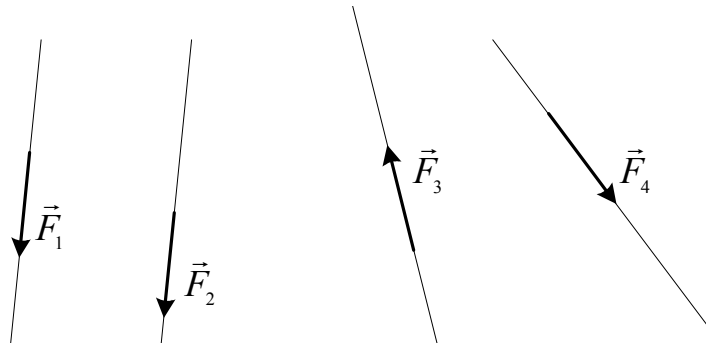
Adott az ábrán látható erőrendszer.

$$F_1 = 2 \text{ kN},$$

$$F_2 = 3 \text{ kN},$$

$$F_3 = 3 \text{ kN},$$

$$F_4 = 5 \text{ kN}.$$



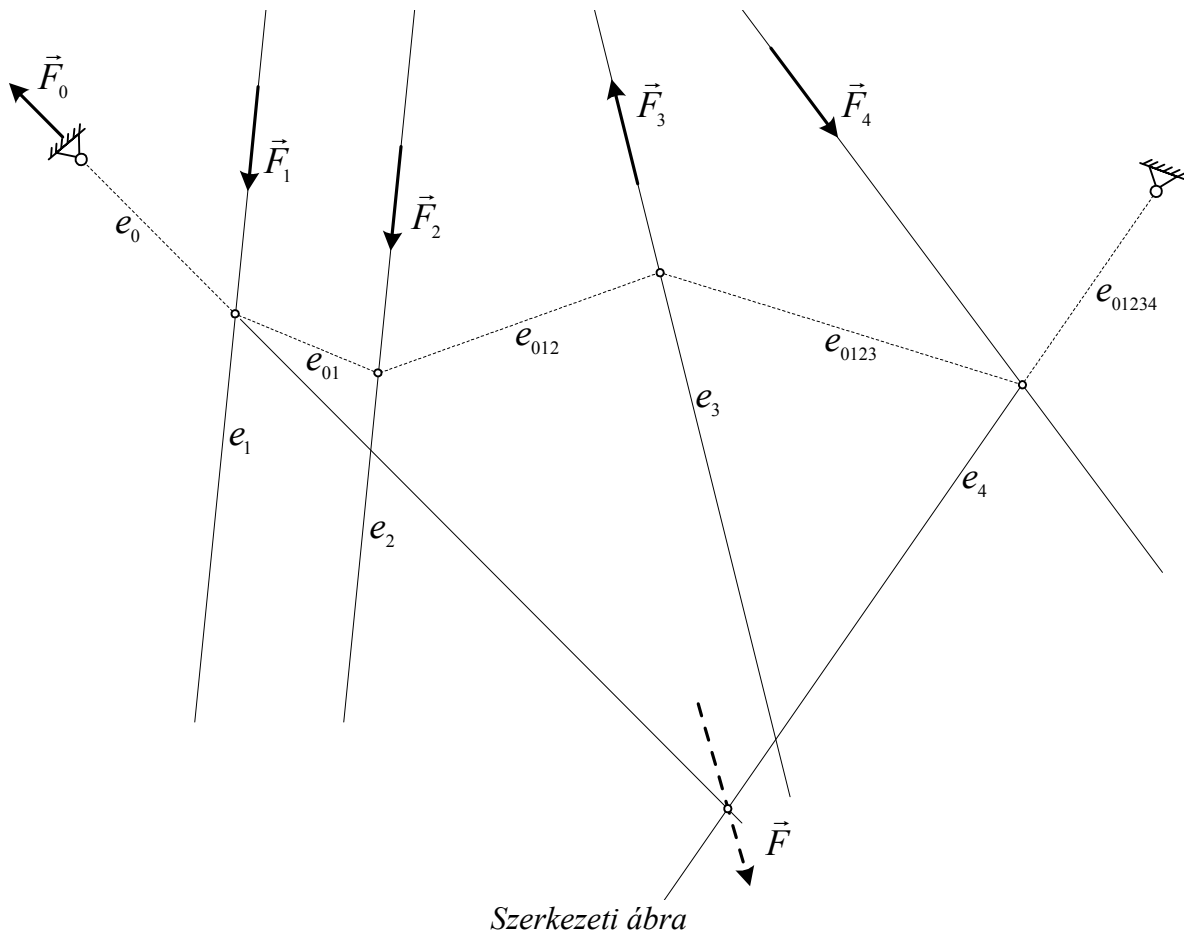
Feladat:

Kötélsokszög módszert alkalmazva határozza meg az erőrendszer eredőjét és hatásvonalának helyét!

Megoldás:

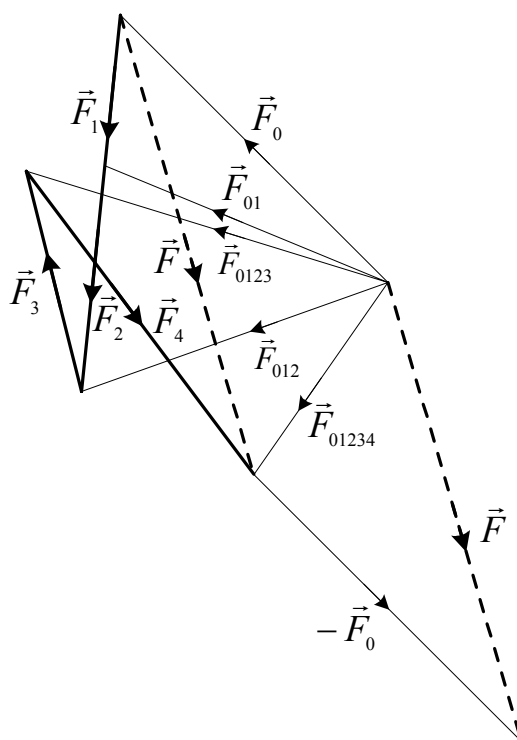
A szerkesztéshez alapul vesszük az előző pontban leírt részeredő-sokszög módszert, azzal a különbséggel, hogy itt működtetünk még két olyan erőt, melyek az eredeti erőrendszertől függetlenül egyensúlyban vannak, azaz:

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 - \vec{F}_0$$



Az egyes részeredők hatásvonalai egy olyan szerkezeti ábrát adnak ki, mintha az erők egy súlytalan kötelet terhelnék, és feszítenének ki. Innen ered magának a módszernek a neve is.

Erőábra



5.3. Példa

Adott:

az ábrán látható párhuzamos erőrendszer.

e_1, e_2, e_3, e_4 hatásvonal és

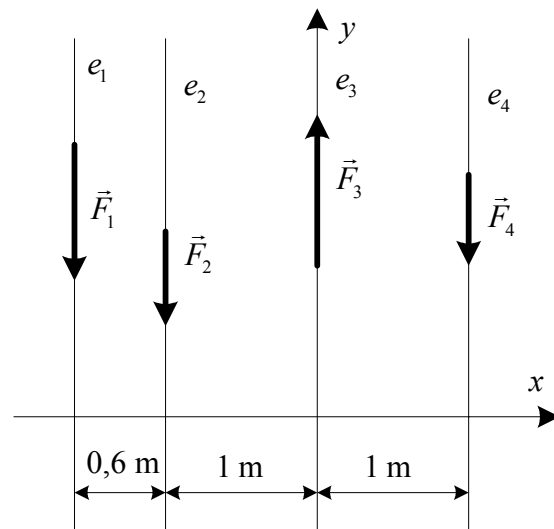
$F_1 = 100 \text{ kN}, F_2 = 70 \text{ kN},$

$F_3 = 100 \text{ kN}, F_4 = 30 \text{ kN}.$

Feladat:

Meghatározni az erőrendszer eredő erővektorát és az eredő hatásvonalát.

- Szerkesztéssel
- Számítással



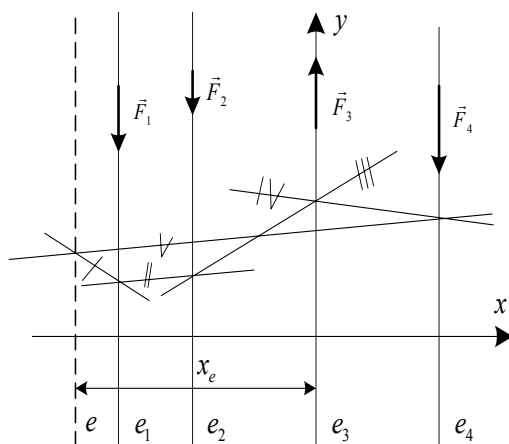
Megoldás:

- Szerkesztéssel

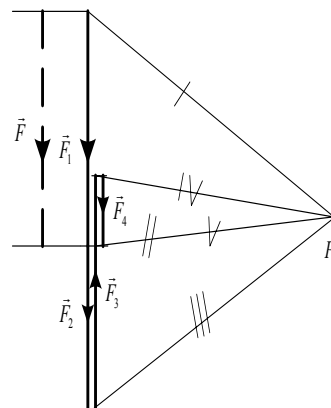
A kötelsökszög szerkesztést alkalmazzuk az eredő vektor meghatározásához.

Az erőábrán a három erőt egymásután rendre felmérjük. (Az P pont helye tetszőlegesen megválasztható.) Az P pontból az erők végpontjaiba húzott segédvonalak a részeredőket képviselik, a szerkezeti ábrán ezekkel párhuzamosat rajzolunk az erők hatásvonalalaival képzett metszéspontjaiból. Végül az első („I” jelű) és az utolsó („IV” jelű) segédvonal metszéspontján megy át az eredő vektor.

Szerkezeti ábra



Erőábra

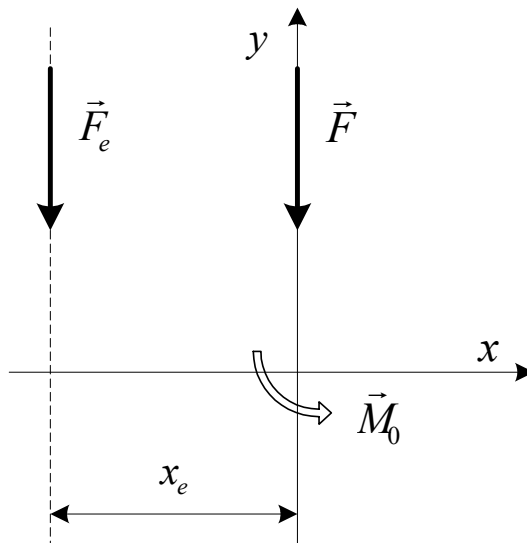


b. Számítással

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = (-100\vec{j}) + (-70\vec{j}) + (100\vec{j}) + (-30\vec{j}) = (-100\vec{j}) \text{ kN}$$

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^5 (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4$$

$$\vec{M}_0 = (-1, 6\vec{i}) \times (-100\vec{j}) + (-\vec{i}) \times (-70\vec{j}) + (\vec{0}) \times (-100\vec{j}) + (\vec{i}) \times (-30\vec{j}) = (200\vec{k}) \text{ kNm}$$



$$|\vec{F}_e| = |\vec{F}| = F_y$$

$$x_e = \frac{M_{0z}}{F_y} = \frac{200}{-100} = -2 \text{ m}$$

$$\underline{\underline{x_e = -2 \text{ m}}}$$

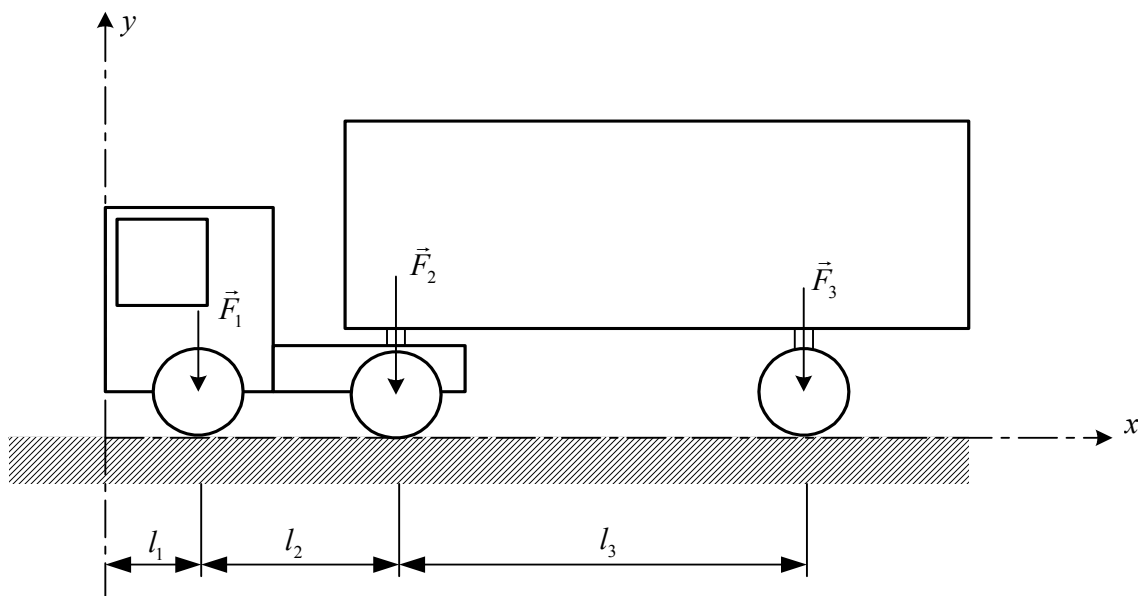
5.4. Példa

Adott:

Az ábrán vázolt nyerges vontató tengelyterhelése $\vec{F}_1 = (-30\vec{j})\text{ kN}$, $\vec{F}_2 = (-75\vec{j})\text{ kN}$ és $\vec{F}_3 = (-60\vec{j})\text{ kN}$, az erők jármű elejétől mért távolságai rendre: $l_1 = 1,5\text{ m}$, $l_2 = 4,5\text{ m}$ és $l_3 = 9\text{ m}$.

Feladat:

Határozza meg számítással és a kötelsokszög szerkesztés alkalmazásával a párhuzamos erőrendszer $\vec{G}$ eredőjét (azaz a jármű súlyát), és a súlypontjának x_s koordinátáját!



Számítással:

A tengely terhelések egy párhuzamos erőrendszert alkotnak. Az erőrendszer eredője megegyezik a jármű súlyvektorával:

$$\vec{G} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -30\vec{j} - 75\vec{j} - 60\vec{j} = (-165\vec{j})\text{ kN}$$

A jármű súlya: $\underline{\underline{|\vec{G}| = G = 165\text{ kN}}}$.

A három $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ erőből álló erőrendszer-, valamint az eredő $(\vec{G})$ súlyerő nyomatéka a z-tengelyre megegyezik: $M_z' = M_z''$

$$M_z' = F_{1y} l_1 + F_{2y} (l_1 + l_2) + F_{3y} (l_1 + l_2 + l_3) = -30 \cdot 1,5 - 75 \cdot 6 - 60 \cdot 15 = (-1395)\text{ kNm},$$

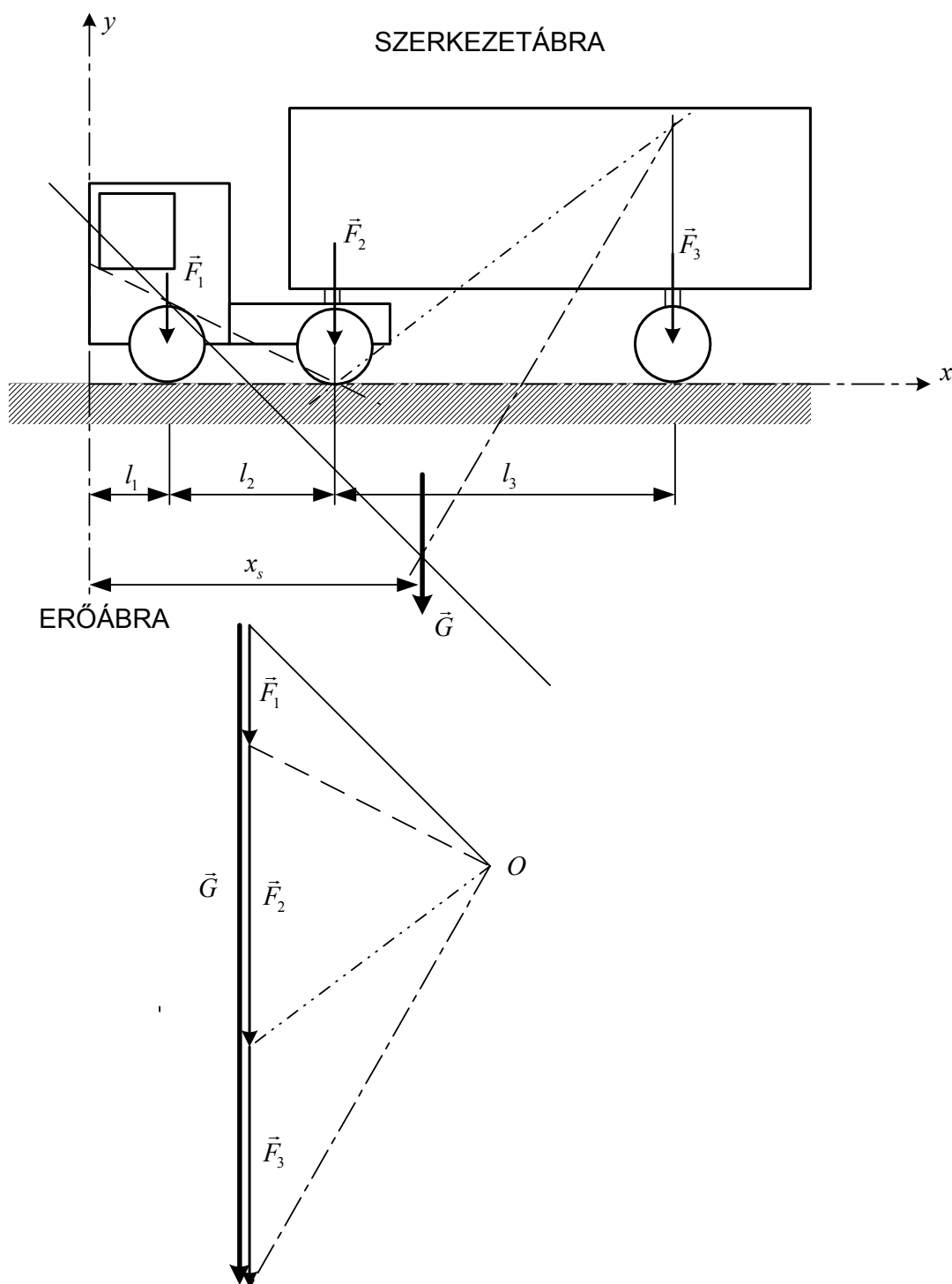
$$M_z'' = G x_s = (-165 x_s)\text{ kNm},$$

$$\text{azaz } x_s = \frac{M_z'}{G} = \frac{-1395}{-165} = 8,45\text{ m}.$$

$$\underline{\underline{x_s = 8,45\text{ m}}}$$

Szerkesztéssel: A kötélsokszög szerkesztést alkalmazzuk az eredő vektor meghatározásához. A szerkesztés lépései a szerkezetábrán és az erőábrán felváltva is végrehajtható. A két ábrán az azonos típusú vonalak párhuzamosak.

Az erőábrán a három erőt egymásután rendre felmérjük. Az O pont helye tetszőlegesen megválasztható. Az O pontból az erők végpontjaiba húzott segédvonalak a részeredőket képviselik, a szerkezeti ábrán ezekkel párhuzamosat rajzolunk az erők hatásvonalaival képzett metszéspontjaiból. Végül az első (folytonos) és az utolsó (szimpla pontvonal) segédvonal metszéspontján megy át az eredő súlyerő vektor.

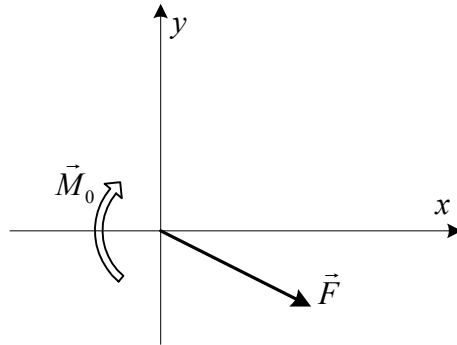


5.5. Példa

Ismert egy erőrendszer eredő vektorkettőse.

$$\vec{F} = (4\vec{i} - 2\vec{j})\text{kN},$$

$$\vec{M}_0 = (-24\vec{k})\text{kNm}.$$



Feladat:

- Határozza meg az eredő erő hatásvonalának helyét, és
- a hatásvonal origótól vett távolságát!

Megoldás:

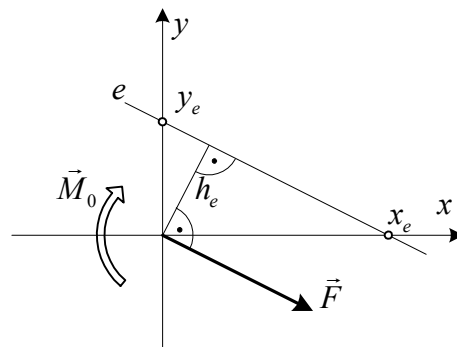
a.

$$x_e = \frac{M_{0z}}{F_y} = \frac{-24}{-2} = 12 \text{ m},$$

$$y_e = -\frac{M_{0z}}{F_x} = -\frac{-24}{4} = 6 \text{ m}.$$

b.

$$h_e = \frac{|\vec{M}_0|}{|\vec{F}|} = \frac{24}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = 5,366 \text{ m}.$$



$$\underline{\underline{h_e = 5,366 \text{ m.}}}$$

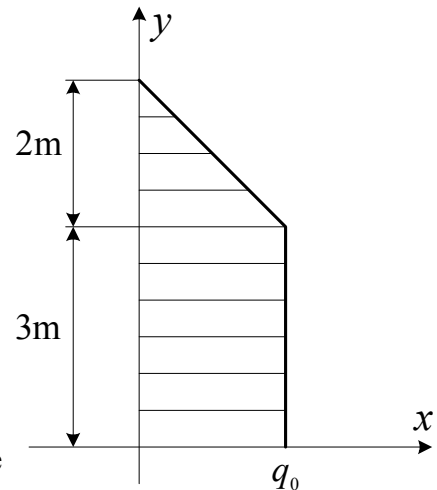
5.6. Példa

Adott az ábrán látható megoszló erőrendszer intenzitásának legnagyobb értéke:

$$q_0 = 4 \text{ kN/m.}$$

Feladat:

Határozza meg a megoszló erőrendszer eredőjét, illetve annak hatásvonalának helyét!



Megoldás:

Síkbeli megoszló erőrendszer eredő vektorkettőssének meghatározására az alábbi két összefüggés szolgál:

$$\vec{F}_q = \int_{(l)} \vec{q}(y) dy,$$

$$\vec{M}_0 = \int_{(l)} \vec{r} \times d\vec{F}_q = \int_{(l)} [y \vec{j} \times q(y) \vec{i}] dy = - \left[\int_{(l)} y q(y) dy \right] \vec{k}.$$

A határozott integrálok a Simpson-formulával is számíthatók, mely közelítő formula első-, másod- és harmadfokú polinomokra pontos értéket ad:

$$\int_{x=a}^b f(x) dx \approx \frac{l}{6} (f_a + 4f_k + f_b),$$

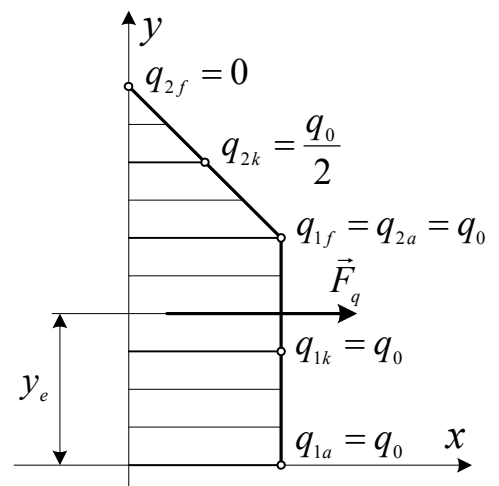
$$\text{ahol } x \in [a, b], \quad l = b - a, \quad f_a = f(x = a), \quad f_k = f\left(x = \frac{a+b}{2}\right), \quad f_b = f(x = b).$$

Mivel az integrálás egyik szükséges feltétele az, hogy csak folytonos függvényeken értelmezett, ezért feladatunkban szakaszonként kell ezt elvégezni.

$$\vec{F}_{q_1} = \int_{y=0}^3 q_1(y) dy \vec{i} \approx \frac{3}{6} (4 + 4 \cdot 4 + 4) \vec{i} = (12 \vec{i}) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_{q_2} = \int_{y=3}^5 q_2(y) dy \vec{i} \approx \frac{2}{6} (4 + 4 \cdot 2 + 0) \vec{i} = (4 \vec{i}) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_q = \vec{F}_{q_1} + \vec{F}_{q_2} = (16 \vec{i}) \text{ kN}.$$



$$\vec{M}_{01} = - \int_{y=0}^3 y q_1(y) dy \vec{k} \approx - \frac{3}{6} (0 \cdot 4 + 4 \cdot 1,5 \cdot 4 + 3 \cdot 4) \vec{k} = (-18 \vec{k}) \text{ kNm},$$

$$\vec{M}_{02} = - \int_{y=3}^5 y q_2(y) dy \vec{k} \approx - \frac{2}{6} (3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0) \vec{k} = \left(-\frac{88}{6} \vec{k}\right) \text{ kNm},$$

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_{01} + \vec{M}_{02} = \left(-\frac{196}{6} \vec{k}\right) \text{ kNm}.$$

$$y_e = - \frac{M_{0z}}{F_{qx}} = - \frac{-196}{6 \cdot 16} = 2,042 \text{ m} \quad \underline{\underline{y_e = 2,042 \text{ m}}}$$

5.7. Példa

Adott az ábrán látható megoszló erőrendszer intenzitásának legnagyobb értéke:

$$q_0 = 4 \text{ kN/m}.$$

Feladat:

Határozza meg a megoszló erőrendszer eredőjét, illetve annak hatásvonalának helyét!

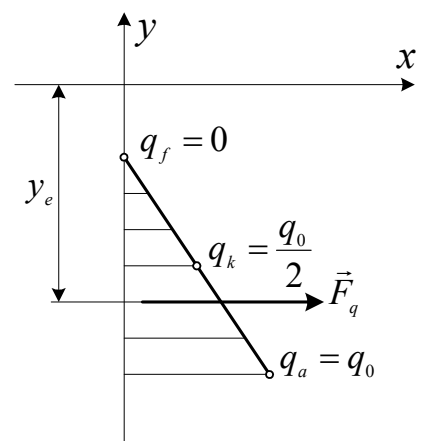
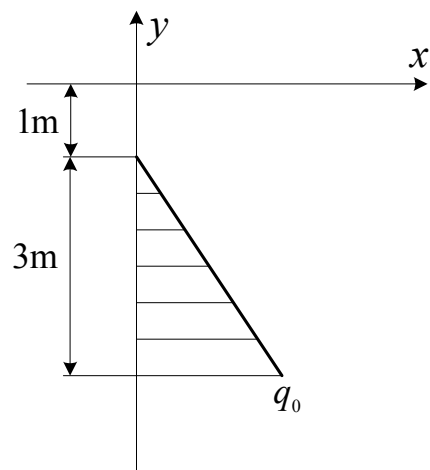
Megoldás:

$$\vec{F}_q = \int_{y=-4}^{-1} q(y) dy \vec{i} \approx \frac{3}{6} (4 + 4 \cdot 2 + 0) \vec{i} = (6 \vec{i}) \text{ kN}.$$

$$\vec{M}_0 = - \int_{y=-4}^{-1} y q(y) dy \vec{k} \approx - \frac{3}{6} ((-4) \cdot 4 + 4 \cdot (-2,5) \cdot 2 + (-1) \cdot 0) \vec{k} = (18 \vec{k}) \text{ kNm}$$

$$y_e = - \frac{M_{0z}}{F_{qx}} = - \frac{18}{6} = -3 \text{ m}$$

$$\underline{\underline{y_e = -3 \text{ m}}}$$



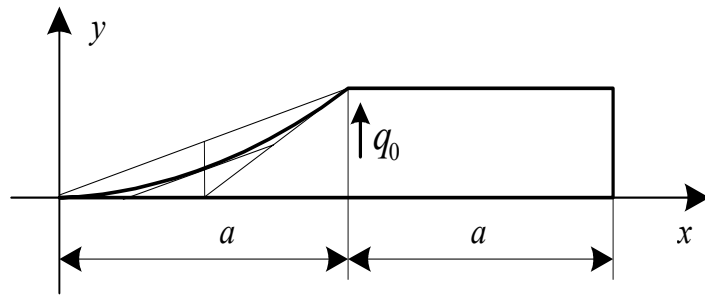
5.8. Példa

Adott:

Az ábrán látható megoszló erőrendszer intenzitásának legnagyobb értéke:

$$q_0 = 8 \text{ kN/m},$$

$$a = 3 \text{ m}.$$



Feladat:

- A vonal mentén megoszló erőrendszer eredő vektorkettőssének ($\vec{F} = ?$, $\vec{M}_0 = ?$), valamint az eredő hatásvonalának meghatározása ($x_e = ?$).
- A vonal mentén megoszló erőrendszer helyettesítése koncentrált erővel, majd az eredő erő (nagyságának és hatásvonalának) meghatározása számítással, és szerkesztéssel.

Megoldás:

- Síkbeli megoszló erőrendszer eredő vektorkettőssének meghatározására az alábbi két összefüggés szolgál:

$$\vec{F}_q = \int_{(l)} \vec{q}(x) dx \quad \text{és} \quad \vec{M}_0 = \int_{(l)} \vec{r} \times d\vec{F}_q = \int_{(l)} [x \vec{i} \times q(x) \vec{j}] dx = \int_{(l)} x q(x) dx \vec{k}$$

A határozott integrálok a Simpson-formulával is számíthatók, mely közelítő formula első-, másod- és harmadfokú polinomokra pontos értéket ad:

$$\int_{x=a}^b f(x) dx \approx \frac{l}{6} (f_a + 4f_k + f_b),$$

$$\text{ahol } x \in [a, b], \quad l = b - a, \quad f_a = f(x=a), \quad f_k = f\left(x = \frac{a+b}{2}\right), \quad f_b = f(x=b).$$

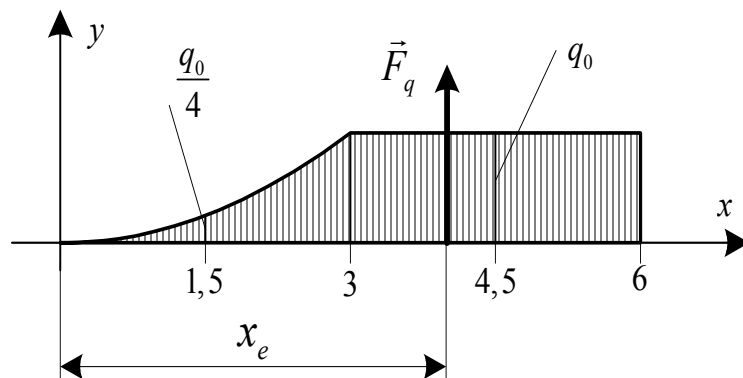
Mivel az integrálás egyik szükséges feltétele az, hogy csak folytonos függvényeken értelmezett, ezért feladatunkban szakaszonként kell ezt elvégezni.

$$\vec{F}_{q1} = \int_{x=0}^3 q_1(x) dx \vec{j} = \frac{3}{6} \left(0 + 4 \cdot \frac{8}{4} + 8 \right) \vec{j} = (8 \vec{j}) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_{q2} = \int_{x=3}^6 q_2(x) dx \vec{j} = \frac{3}{6} (8 + 4 \cdot 8 + 8) \vec{j} = (24 \vec{j}) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_q = \vec{F}_{q1} + \vec{F}_{q2} = (32 \vec{j}) \text{ kN}$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_q = (32 \vec{j}) \text{ kN}}}$$



$$\vec{M}_{01} = \int_{x=0}^3 x q_1(x) dx \vec{k} = \frac{3}{6} \left(0 \cdot 0 + 4 \cdot 1,5 \cdot \frac{8}{4} + 3 \cdot 8 \right) = (18\vec{k}) \text{ kNm}$$

$$\vec{M}_{02} = \int_{y=3}^6 x q_2(x) dx \vec{k} = \frac{3}{6} (3 \cdot 8 + 4 \cdot 4,5 \cdot 8 + 6 \cdot 8) \vec{k} = (108\vec{k}) \text{ kNm},$$

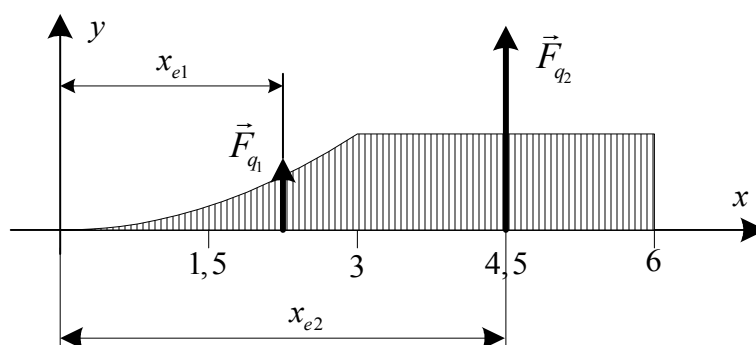
$$\vec{M}_0 = \vec{M}_{01} + \vec{M}_{02} = (126\vec{k}) \text{ kNm}.$$

$$\vec{M}_0 = (126\vec{k}) \text{ kNm},$$

$$x_e = \frac{M_{0z}}{F_{qv}} = \frac{126}{32} = 3,938 \text{ m}$$

$$x_e = 3,938 \text{ m}$$

b. A megoszló erőrendszert koncentrált erőkkel helyettesítve:



A fent már számolt erőkől és nyomatékokból az egyes hatásvonalak meghatározhatók:

$$\vec{F}_{q1} = (8\vec{j}) \text{ kN},$$

$$\vec{M}_{01} = (18\vec{k}) \text{ kNm},$$

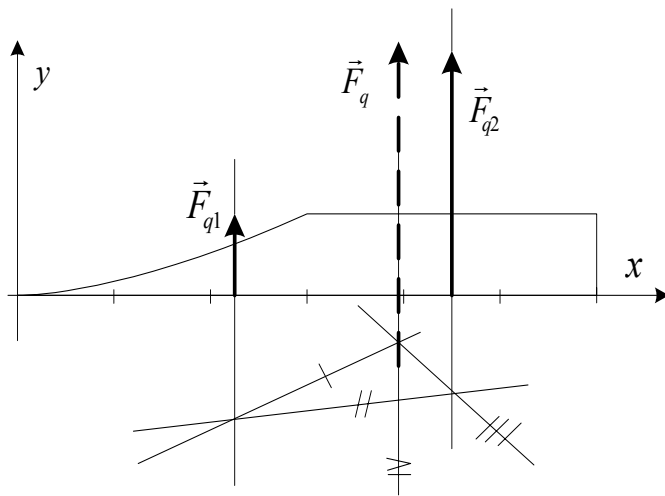
$$x_{e1} = \frac{M_{01}}{F_{q1}} = \frac{18}{8} = 2,250 \text{ m}$$

$$\vec{F}_{q2} = (24\vec{j}) \text{ kN},$$

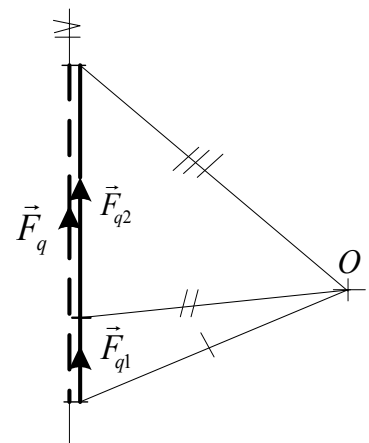
$$\vec{M}_{02} = (108\vec{k}) \text{ kNm},$$

$$x_{e2} = \frac{M_{02}}{F_{q2}} = \frac{108}{24} = 4,500 \text{ m}$$

Szerkezeti ábra



Erő ábra



5.9. Példa

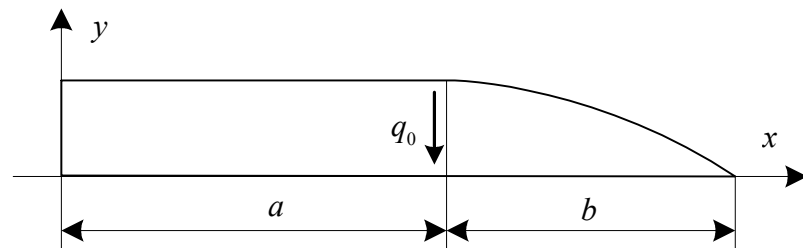
Adott:

Az ábrán látható
megoszló erőrendszer
intenzitásának
legnagyobb értéke:

$$q_0 = 12 \text{ kN/m},$$

$$a = 4 \text{ m}$$

$$b = 3 \text{ m}$$



Feladat:

- c. A vonal mentén megoszló erőrendszer eredő vektorkettősenek ($\vec{F} = ?$, $\vec{M}_0 = ?$), valamint az eredő hatásvonalának meghatározása ($x_e = ?$).
- d. A vonal mentén megoszló erőrendszer helyettesítése koncentrált erőkkel, majd az eredő erő (nagyságának és hatásvonalának) meghatározása számítással, és szerkesztéssel.

Megoldás:

- a. Síkbeli megoszló erőrendszer eredő vektorkettősenek meghatározása:

$$\vec{F}_{q_1} = \int_{x=0}^4 q_1(x) dx \vec{j} = 4 \cdot 12 (-\vec{j}) = (-48\vec{j}) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_{q_2} = \int_{x=4}^7 q_2(x) dx \vec{j} = \frac{3}{6} (12 + 4 \cdot 9 + 0) (-\vec{j}) = (-24\vec{j}) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_q = \vec{F}_{q_1} + \vec{F}_{q_2} = (-72\vec{j}) \text{ kN}$$

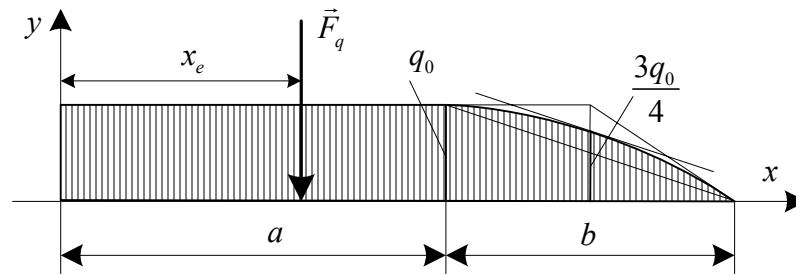
$$\underline{\underline{\vec{F}_q = (-72\vec{j}) \text{ kN},}}$$

$$\vec{M}_{01} = \int_{x=0}^4 x \vec{i} \cdot q_1(x) (-\vec{j}) dx = \frac{4}{6} (0 \cdot 12 + 4 \cdot 2 \cdot 12 + 4 \cdot 12) (-\vec{k}) = (-96\vec{k}) \text{ kNm}$$

$$\vec{M}_{02} = \int_{x=4}^7 x q_2(x) dx (-\vec{k}) = \frac{3}{6} (4 \cdot 12 + 4 \cdot 5 \cdot 9 + 7 \cdot 0) \vec{k} = (-123\vec{k}) \text{ kNm},$$

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_{01} + \vec{M}_{02} = (-219\vec{k}) \text{ kNm}.$$

$$\underline{\underline{\vec{M}_0 = (-219\vec{k}) \text{ kNm},}}$$



Az eredő erő hatásvonalára:

$$x_e = \frac{M_{0z}}{F_{qy}} = \frac{-219}{-72} = 3,042 \text{ m}$$

$$\underline{\underline{x_e = 3,042 \text{ m}}}$$

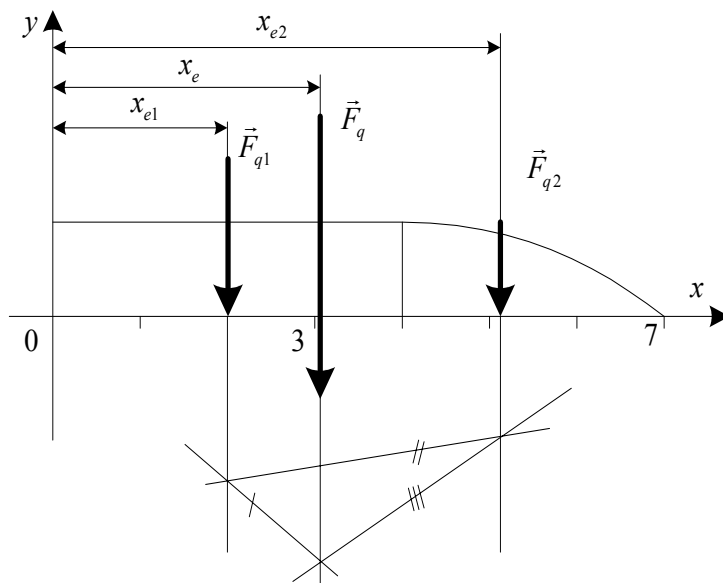
b. A megoszló erőrendszert koncentrált erőkkel helyettesítve:

A fent már számolt erőkől és nyomatékokból az egyes hatásvonalak meghatározhatók:

$$\vec{F}_{q1} = (-48\vec{j}) \text{ kN}, \quad \vec{M}_{01} = (-96\vec{k}) \text{ kNm}, \quad x_{e1} = \frac{M_{01}}{F_{q1}} = \frac{-96}{-48} = 2 \text{ m}$$

$$\vec{F}_{q2} = (-24\vec{j}) \text{ kN}, \quad \vec{M}_{02} = (-123\vec{k}) \text{ kNm}, \quad x_{e2} = \frac{M_{02}}{F_{q2}} = \frac{-123}{-24} = 5,125 \text{ m}$$

Szerkezeti ábra



Erő ábra

